

高一必修(第二册)答案页第3期

数学
人教A

第9期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C

提示:由两条直线 a 与 b 有公共点,可得 a 与 b 相交或重合.根据推论2,可得 a 与 b 共面.故选C.

2.D

提示:由基本事实3可知,这两个平面有无数个公共点.故选D.

3.B

提示:由等角定理知,这两个三角形的三个角分别对应相等,所以这两个三角形相似.故选B.

4.D

提示:由题图可知, $m\subset\alpha$, $A\in\alpha$, $n\cap\alpha=A$, m,n 异面.

5.C

提示:直线 AA_1 、 AC 、 A_1B_1 均与 BC_1 异面,共3条.故选C.

6.C

提示:由空间图形 A,B,C_1-ABC 是三棱台,可知平面 ABC_1 //平面 $A_1B_1C_1$.当平面 ABC_1 为平面 α ,平面 $\alpha\cap$ 平面 $A_1B_1C_1=m$ 时,又平面 $\alpha\cap$ 平面 $ABC=AB$,由面面平行的性质定理可知 $m//AB$.故选C.

7.B

提示:若 m,n,l 在同一平面内,则 m,n,l 可能平行,也可能相交,即充分性不成立.

若 m,n,l 两两相交,且不过同一点,设 $m\cap n=A$, $m\cap l=B$, $n\cap l=C$,由推论2可知, m,n 确定一个平面 α ,又 $B\in m\subset\alpha$, $C\in n\subset\alpha$,且 $B\in l$, $C\in l$,所以 $l\subset\alpha$,所以 m,n,l 在同一平面内,即必要性成立.故选B.

8.A

提示:若三个平面重合,可将空间分成2个部分;若三个平面互相平行,如图1,可将空间分成4个部分;若三个平面中有两个平面平行,第三个平面与这两个平面相交,如图2,可将空间分成6个部分;

若三个平面交于一条直线,如图3,则可将空间分成6个部分;若三个平面两两相交且三条交线平行,如图4,则可将空间分成7部分;

若三个平面两两相交且三条交线交于一点,如图5,则可将空间分成8部分.

综上, n 不可能是5.故选A.

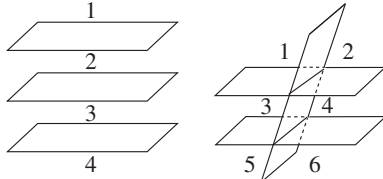


图1

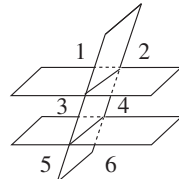


图2

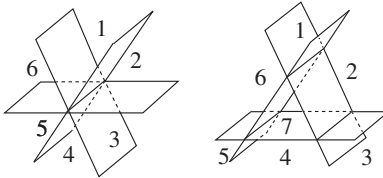


图3

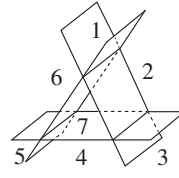


图4

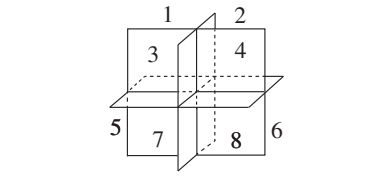


图5

(第8题图)

二、多项选择题

9.ABD

提示:因为 $m//\alpha$,所以 m 与 α 没有交点.又 $n\subset\alpha$,则 m 与 n 没有公共点.所以 m,n 可能平行,也可能异面,异面时可能垂直.故选ABD.

10.ABD

提示:对于A,连接 B_1D_1 ,易证四边形 BB_1D_1D 是平行四边形,则 $B_1D_1//BD$.又 EF 为 $\triangle C_1D_1B_1$ 的中位线,则 $EF//B_1D_1$,所以 $BD//EF$,所以四点 B,D,E,F 在同一平面内,故A正确;

对于B,由 $EF=\frac{1}{2}B_1D_1=\frac{1}{2}BD$,知四边形 $BDEF$ 为梯形,所以延长 BF,DE ,则 BF,DE 必相交,设交点为 P ,则 $P\in$

(4)每次随机地从盒中抽取1个号签,然后将盒子中余

下的号签搅拌均匀,再进行下一次抽取.如此下去,直到

抽取8个号签.

(5)找出8个号签上的号码对应的志愿者组成志愿

服务小组.

17.解:(1)由某地区有高中生7 200人,初中生

11 800人,小学生12 000人,得共7 200+11 800+12 000=

31 000人.

因为总样本量为310,所以从高中生中抽取 $\frac{7\,200}{31\,000}\times$

310=72(人),从初中生中抽取 $\frac{11\,800}{31\,000}\times 310=118$ (人),从

小学生中抽取 $\frac{12\,000}{31\,000}\times 310=120$ (人).

又样本中高中生、初中生、小学生的近视率分别为

80%,70%和36%,所以样本的近视率为

$$\frac{72\times 80\%+118\times 70\%+120\times 36\%}{310}\approx 59\%.$$

由此估计,该地区全体中小学生的近视率约为59%.

(2)如果从高中生、初中生、小学生中抽取的样本量

分别为60,100和150,

那么抽取的样本的近视率为

$$\frac{60\times 80\%+100\times 70\%+150\times 36\%}{310}\approx 55\%.$$

该地区全体中小学生的近视率为

$$\frac{7\,200\times 80\%+11\,800\times 70\%+12\,000\times 36\%}{31\,000}\approx 59\%.$$

18.解:(1)各年龄段的身体状况差异比较明显,所以

要抽取40人调查身体状况,应按年龄进行分层随机抽

样,从老年人中抽取 $200\times\frac{40}{2\,000}=4$ 人,从中年人中抽取

$$600\times\frac{40}{2\,000}=12$$
人,从青年人中抽取 $1\,200\times\frac{40}{2\,000}=24$ 人.

(2)要开一个讨论单位发展与薪金调整方面的座谈

会,应按部门进行分层随机抽样,从管理部门抽取 $160\times$

$$\frac{25}{2\,000}=2$$
人,从技术开发部门抽取 $320\times\frac{25}{2\,000}=4$ 人,从营

销部门抽取 $480\times\frac{25}{2\,000}=6$ 人,从生产部门抽取 $1\,040\times$

$$\frac{25}{2\,000}=13$$
人.

(3)要调查对巴黎奥运会中国代表团获奖情况的了

解,应按年龄进行分层随机抽样,从老年人中抽取 $200\times$

$$\frac{20}{2\,000}=2$$
人,从中年人中抽取 $600\times\frac{20}{2\,000}=6$ 人,从青年人

中抽取 $1\,200\times\frac{20}{2\,000}=12$ 人.

19.解:(1)由题中第2个表格知,第5题的实测难度

$$\text{为}\frac{8}{20}=0.4.$$

由此估计,这240名学生中第5题的实测答对人数为

$$240\times 0.4=96.$$

(2)根据已知数据,得

$$P_1'=P_2'=\frac{16}{20}=0.8,P_3'=P_4'=\frac{14}{20}=0.7,P_5'=\frac{8}{20}=0.4.$$

所以 $S=\frac{1}{5}\times[(0.8-0.9)^2+(0.8-0.8)^2+(0.7-0.7)^2+(0.7-$

$$0.6)^2+(0.4-0.4)^2]=0.004<0.05.$$

所以本次测试的难度预估合理.

故选AC.

10.ACD

提示:由已知,得 $\bar{z}=\frac{m}{m+n}\bar{x}+\frac{n}{m+n}\bar{y}$.

当 $m=n$ 时, $\bar{z}=\frac{m}{2m}\bar{x}+\frac{m}{2m}\bar{y}=\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}$,故A正确;

当 $\bar{z}=\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}$ 时,取 $x_1=x_2=\cdots=x_m=0$, $y_1=y_2=\cdots=y_n=0$,则 m

与 n 不一定相等,故B错误;

当 $\bar{x}=\bar{y}$ 时, $\bar{z}=\frac{m}{m+n}\bar{x}+\frac{n}{m+n}\bar{x}=\bar{x}=\frac{2\bar{x}}{2}=\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}$,故C正确;

当 $\bar{z}>\bar{x}$ 时, $\frac{m}{m+n}\bar{x}+\frac{n}{m+n}\bar{y}>\bar{x}$,化简得 $\frac{n}{m+n}(\bar{y}-\bar{x})>0$,

又 $m>0$, $n>0$,所以 $\bar{y}-\bar{x}>0$,即 $\bar{y}>\bar{x}$,故D正确.

故选ACD.

11.ABC

提示:从120名同学中随机抽取30名,故样本容量为

$$30,\text{故A正确};120\text{名社团成员中男生人数为}120\times\frac{18}{30}=72,$$

故B正确;高一年级的社团成员人数为 $120\times\frac{10}{30}=40$,故D

错误;高二与高三年级的社团成员人数为 $120-40=80$,故

C正确.

故选ABC.

三、填空题

12.不合理

提示:由于很多视力残疾的人不具有上网的条件,因

此所获取的数据不具有代表性.故他的方案不合理.

13.乙;120.1

提示:因为乙班的同学抽取的样本量是甲班的同学

抽取样本量的2倍,所以乙班的同学调查结果能够更好地

反映总体.对于乙班的数据,剔除掉差别较大的数据

121.0,计算得乙班的同学抽取的样本的该项指标的平均

数为120.1,由此得这两个班的同学调查的该项指标约为

120.1.

14.700

提示:根据题表,得样本容量为 $3\,000\times\frac{150}{1\,500}=300$.

所以样本中A产品与C产品共有 $300-150=150$ (件).

设样本中C产品的数量为 x 件,则 $x+x+10=150$,

解得 $x=70$.

所以C产品的数量是 $70\times\frac{3\,000}{300}=700$ (件).

四、解答题

15.解:小强的结论更可靠.因为小王观测的是一个

月的气温情况,选取的样本容量不够大,没有代表性;小

英观察了三个月的气温情况,但调查结果局限于春季,不

能推广到全年,结论也不可靠;小强虽然也只观察了四个

月的气温情况,但他所选择的月份分别代表了春、夏、

秋、冬的气温,所以小强观察到的结论更可靠.

16.解:(1)将50名志愿者编号,号码分别是1,2,⋯,

50.

(2)将号码分别写在形状、大小相同的小纸片上作为

号签.

(3)将小纸片放入一个不透明的盒子里,充分搅拌

均匀.

又平面 $AA_1B_1B_1$ ∩平面 $BB_1C_1C=BB_1$,所以 $P\in BB_1$.

所以 GE,HF,BB_1 交于一点.

又在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,平面 EFB_1 //平面 GHB_1 ,所以多面体 EFB_1-GHB_1 是三棱台.

17.(1)证明:因为 $CD//AB$,且 $CD\not\subset$ 平面 PAB , $AB\subset$ 平面 PAB ,

所以 $CD//$ 平面 PAB .

(2)解:连接 BD 交 AC 于点 O ,连接 OM .

因为 $PB//$ 平面 MAC ,且 $PBC\subset$ 平面 PBD ,平面 $PBD\cap$ 平面 $MAC=MO$,所以 $PB//MO$.

$$\text{所以}\frac{PM}{MD}=\frac{OB}{OD}.$$

因为 $AB//CD$,所以 $\triangle AOB\sim\triangle COD$.

$$\text{所以}\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}=2.\text{所以}\frac{PM}{MD}=2.$$

18.证明:(1)因为 $DE//CF$, $DEC\subset$ 平面 ADE , $CF\not\subset$ 平面 ADE ,所以 $CF//$ 平面 ADE .

因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

所以 $AD//BC$.

又 $ADC\subset$ 平面 ADE , $BC\not\subset$ 平面 ADE ,

所以 $BC//$ 平面 ADE .

因为 $BC\cap CF=C$,所以平面 $ADE//$ 平面 BCF .

(2)分别取 AD,DE 的中点 M,N ,连接 MN,MG,NF ,则 $MN//AE$.

因为 $DE=2CF$,所以 $DN=CF$.

又 $DE//CF$,即 $DN//CF$,

所以四边形 $DCFN$ 是平行四边形.

所以 $NF//DC$,且 $NF=DC$.

因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

所以 $AD//BC$,且 $AD=BC$,即 $MD//GC$,且 $MD=GC$.

所以四边形 $DCGM$ 是平行四边形.

所以 $MG//DC$,且 $MG=DC$.

所以 $NF//MG$,且 $NF=MG$.

所以四边形 $MGFN$ 是平行四边形.

所以 $FG//MN$.所以 $AE//FG$.

19.(1)证明:在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $A_1A//C_1C$,且 $A_1A=C_1C$,所以四边形 A_1ACC_1 是平行四边形.

所以 $AC//A_1C_1$.又 $ACC_1\subset$ 平面 A_1BC_1 , $A_1C_1\subset$ 平面 A_1BC_1 ,

所以 $AC//$ 平面 A_1BC_1 .

(2)证明:如图1所示,取 BC 的中点 G ,连接 EG,FG .

因为 FG 是 $\triangle C_1BC$ 的中位线,所以 $FG//BC_1$.

又 $FG\subset$ 平面 A_1BC_1 , $BC_1\subset$ 平面 A_1BC_1 ,

所以 $FG//$ 平面 A_1BC_1 .

同理可得 $EG//AC$,由(1)知 $AC//A_1C_1$,

所以 $EG//A_1C_1$.

又 $EG\subset$ 平面 A_1BC_1 , $A_1C_1\subset$ 平面 A_1BC_1 ,

所以 $EG//$ 平面 A_1BC_1 .

又 $FG\cap EG=G$,所以平面 $EFG//$ 平面 A_1BC_1 .

因为 $EFC\subset$ 平面 EFG ,所以 $EF//$ 平面 A_1BC_1 .

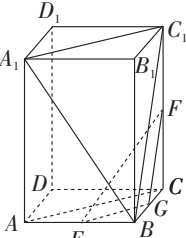


图1

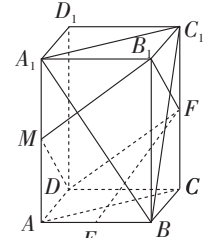


图2

(第19题图)

(3)解:如图2所示,取 AA_1 的中点 M ,连接 DM,MB_1 , B_1F,FD ,则四边形 $MDFB_1$ 即为平面 α 截长方体所得的截面.理由如下.

取 BB_1 的中点 N ,连接 AN,FN .易知 $AM//B_1N$,且 $AM=B_1N$,则四边形 $MANB_1$ 是平行四边形.

所以 $MB_1//AN$.

因为 $BN//CF$,且 $BN=CF$.

所以四边形 $NBCF$ 是平行四边形.

所以 $NF//BC$,且 $NF=BC$.

又 $BC//AD$,且 $BC=AD$,所以 $NF//AD$,且 $NF=AD$.

所以四边形 $ANFD$ 是平行四边形.

所以 $AN//DF$.所以 $MB_1//DF$.

所以 M,B_1,D,F 四点共面.

故四边形 $MDFB_1$ 即为平面 α 截长方体所得的截面.

由以 A,B 为直径的球的表面积为 8π ,得 $4\pi\cdot\left(\frac{A_1B}{2}\right)^2=$

$$8\pi,\text{解得}A_1B=2\sqrt{2}.$$

又 $AB=BC=2$,所以 $AA_1=2$.

所以截面四边形 $MDNB_1$ 的周长为 $4\times\sqrt{2^2+1^2}=4\sqrt{5}$.

一、单项选择题

1.B

提示:若 l 垂直于 α 内的两条非相交直线,则 $l\perp\alpha$ 不一定成立;若 $l\perp\alpha$,则 l 垂直于 α 内的任意直线,即必要性成立.故选B.

2.D

提示:由两条直线所成的角的范围是 $[0^\circ,90^\circ]$,可知两射线所在直线所成的角的最大值为 90° .故选D.

3.D

提示:取 BC 的中点 E ,连接 EF,AE ,则 $\angle AFE$ 或其补角为异面直线 MB 与 AF 所成的角.

因为 $MA\perp$ 平面 ABC ,所以 $MA\perp AB,MA\perp AC$.所以 $MB=MC=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4$.所以 $AF=\frac{1}{2}MC=2,FE=\frac{1}{2}MB=2$.

由 $\triangle ABC$ 是边长为2的正三角形,得 $AE=\sqrt{3}$.

在 $\triangle AFE$ 中,由余弦定理的推论,得

$$\cos\angle AFE=\frac{2^2+2^2-(\sqrt{3})^2}{2\times 2\times 2}=\frac{5}{8}.$$

故选D.

4.A

提示:如图所示,过点 P 分别作直线 a,b 的平行线 a',b' ,则 a' 与 b' 的夹角为 70° .所以与 a',b' 的夹角相等的直线的影落在 70° 或 110° 的角平分线上.

70° 的角平分线与 a',b' 的夹角均为 35° ,其他射影落在角平分线的直线与 a',b' 的夹角均大于 35° ;

110° 的角平分线与 a',b' 的夹角均为 55° ,其他射影落在角平分线的直线与 a',b' 的夹角均大于 55° .

所以只有1条直线与 a',b' 所成的角均为 35° ,也即只有1条直线 l 与 a,b 所成的角均为 35° .故选A.

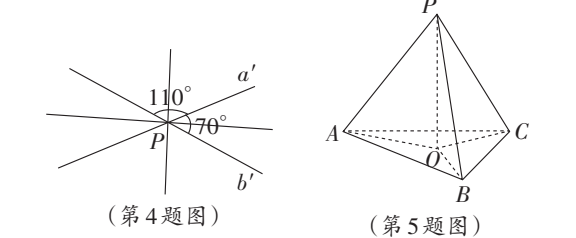


图4

5.D

提示:如图所示,由点 P 在 $\triangle ABC$ 所在平面内的射影是点 O ,得 $PO\perp$ 平面 ABC ,所以 $PO\perp BC$.又 $PA\perp BC,PA\cap PO=P$,所以 $BC\perp$ 平面 POA ,得 $BC\perp OA$.同理,得 $OB\perp AC$.所以 O 是 $\triangle ABC$ 的垂心.故选D.

6.A

提示:对于①,若 $n\subset\alpha$ 且 $n\subset\beta$,因为 $m\parallel n,m\subset\beta$,所以 $n\parallel\beta$.若 $n\subset\beta$ 且 $n\subset\alpha$,因为 $m\parallel n,m\subset\alpha$,所以 $n\parallel\alpha$.

若 n 不在 α 也不在 β 内,因为 $m\parallel n,m\subset\alpha,m\subset\beta$,所以 $n\parallel\alpha$ 且 $n\parallel\beta$,故①是真命题;

对于②, n 与 α,β 不一定垂直,故②是假命题;

对于③,过直线 n 分别作平面,与 α,β 分别相交于直线 a ,直线 b ,因为 $n\parallel\alpha$,过直线 n 的平面与平面 α 的交线为直线 a ,所以 $n\parallel a$,同理可得 $n\parallel b$,所以 $a\parallel b$,因为 $a\subset\beta,b\subset\beta$,所以 $a\parallel\beta$.又 $a\subset\alpha,\alpha\cap\beta=m$,所以 $a\parallel m$,又 $n\parallel a$,所以 $m\parallel n$,故③是真命题;

对于④,若 $n\parallel\alpha,n\parallel\beta$,则 $m\parallel n$,故④是假命题.

故选A.

7.B

提示:设棱台的高为 h .由已知,得 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2=9\sqrt{3}$, $S_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$,

$$V=\frac{1}{3}h(9\sqrt{3}+\sqrt{9\sqrt{3}\times\sqrt{3}}+\sqrt{3})=\frac{52}{3},$$

解得 $h=\frac{4}{\sqrt{3}}$.

设该正三棱台的三条侧棱延长后交于一点 O , $\triangle A_1B_1C_1$ 的中心为 O_1 ,则 $AB=3A_1B_1$,得 O 到上底面 $A_1B_1C_1$ 的距离为 $OO_1=\frac{1}{2}h=\frac{2}{\sqrt{3}}$. A_1A 与平面 ABC 所成角即为 OA_1 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成角 $\angle OA_1O_1$.

又 $OA_1=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\frac{2}{\sqrt{3}}$,所以 A_1A 与平面 ABC 所成角的正切值为 $\frac{OO_1}{OA_1}=1$.故选B.

8.B

提示:由平面 $PAC\perp$ 平面 ABC ,平面 $PAC\cap$ 平面 $ABC=AC,\angle PCA=90^\circ$,即 $PC\perp AC,PCC$ 平面 PAC ,得 $PC\perp$ 平面 ABC ,所以 $PC\perp CM$.所以 $PM=\sqrt{PC^2+CM^2}=\sqrt{16+CM^2}$.求 PM 的最小值,即求 CM 的最小值.

当 $CM\perp AB$ 时, CM 最小,即 PM 最小,此时 $CM=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3},PM=\sqrt{4^2+(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$.故选B.

二、多项选择题

9.BD

提示:对于 A,α,β 可能相交,也可能平行,故 A 不符合题意;

对于B,由 $\alpha\cap\gamma,\beta\perp\gamma$,得 $\alpha\perp\beta$,故B符合题意;

对于C,由 $\alpha\cap\beta=b,a\perp b,a\subset\alpha$,知 $a\perp\beta$ 不一定成立,故 $\alpha\perp\beta$ 不一定成立.故C不符合题意;

对于D,由 $a\parallel b,b\perp\beta$,得 $a\perp\beta$.又 $a\subset\alpha$,所以 $\alpha\perp\beta$,故D符合题意.故选BD.

10.BD

提示:因为 PA 垂直于以 AB 为直径的圆所在的平面,所以 $PA\perp BC,PA\perp AC$.

又点 C 是圆周上异于 A,B 的任一点,所以 $AC\perp BC$.又 $PA\cap AC=A$,所以 $BC\perp$ 平面 PAC .

又 PCC 平面 PAC ,则 $PC\perp BC$;又 BCC 平面 PBC ,则平面 $PAC\perp$ 平面 PBC .故B,D正确.

对于A,C,若 $PB\perp AC$,又 $AC\perp BC$,则 $AC\perp$ 平面 PBC ,所以 $AC\perp PC$,与 $PA\perp AC$ 矛盾,故A,C错误.

11.ACD

提示:在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,可得 $BC_1\parallel AD_1$,所以 $BC_1\parallel$ 平面 AD_1C .

当点 P 在直线 BC_1 上运动时,点 P 到平面 AD_1C 的距离不变,设为 h .

又 $\triangle AD_1C$ 的面积为定值, $V_{A-D_1PC}=V_{P-AD_1C}=\frac{1}{3}S_{\triangle AD_1C}\cdot h$,所以三棱锥 $A-D_1PC$ 的体积不变,故A正确.

又 ACC 平面 ABC ,所以 $PO\perp AC$.

因为 $AC\perp PB,PO\cap PB=P$,所以 $AC\perp$ 平面 PBC .

(2)解:连接 OF .由(1)知, $PO\perp BC$,又 $EF\perp BC,PO\cap EF=E$,所以 $BC\perp$ 平面 EOF .

因为 $OFCC$ 平面 EOF ,所以 $OF\perp BC$.

由(1)知, $AC\perp$ 平面 PBC ,所以 $AC\perp BC$.所以 $AC\parallel OF$.

因为 O 为 BC 的中点,所以 F 为 AB 的中点.

又 $AF=\lambda AB$,所以 $\lambda=\frac{1}{2}$.

18.(1)证明:因为 $\triangle ABC$ 是正三角形, M 为 AB 的中点,所以 $CM\perp AB$.

因为 $A_1A\perp$ 平面 ABC,CMC 平面 ABC ,所以 $CM\perp A_1A$.又 $A_1A\cap AB=A$,所以 $CM\perp$ 平面 A_1ABB_1 .

因为 B_1BC 平面 A_1ABB_1 ,所以 $CM\perp B_1B$.

连接 AB_1 .在直角梯形 A_1ABB_1 中, $AB=4,A_1A=A_1B_1=2$,易得 $AB_1=B_1B=2\sqrt{2}$,所以 $AB^2=AB_1^2+B_1B^2$.所以 $AB_1\perp B_1B$.

因为 MN 是 $\triangle ABB_1$ 的中位线,所以 $MN\parallel AB_1$,所以 $MN\perp B_1B$.

因为 $MN\cap CM=M$,所以 $B_1B\perp$ 平面 MCN .

(2)解:由(1)知 $B_1B\perp$ 平面 MCN ,所以直线 C_1C 与平面 MCN 所成的角和直线 B_1B 与 C_1C 所成角互余.

延长三棱台的三条侧棱交于一点 O .由 $AB=2A_1A=2A_1B_1=4$,结合三棱台的性质,可得 $OA_1=2$.

所以 $OB_1=OC_1=2\sqrt{2}$.

又 $B_1C_1=2$,由余弦定理的推论,得

$$\cos\angle B_1OC_1=\frac{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2-2^2}{2\times 2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}}=\frac{3}{4}.$$

故直线 C_1C 与平面 MCN 所成的角的正弦值为 $\frac{3}{4}$.

19.(1)证明:连接 AC_1 .因为四边形 ACC_1A_1 是菱形,所以 $AC_1\perp A_1C$.因为 $\angle ACB=90^\circ$,所以 $BC\perp AC$.

又平面 $ABC\perp$ 平面 ACC_1A_1 ,平面 $ABC\cap$ 平面 $ACC_1A_1=AC,BCC$ 平面 ABC ,所以 $BC\perp$ 平面 ACC_1A_1 .

因为 A_1CC 平面 ACC_1A_1 ,所以 $BC\perp A_1C$.

又 $BC\parallel B_1C_1$,所以 $B_1C_1\perp A_1C$.

因为 $AC_1\cap B_1C_1=C$,所以 $A_1C\perp$ 平面 AB_1C_1 .

又 AB_1C 平面 AB_1C_1 ,所以 $A_1C\perp AB_1$.

(2)解:点 C_1 到平面 ABB_1A_1 的距离,即三棱锥 $C_1-AA_1B_1$ 的底面 AA_1B_1 上的高.

因为三棱锥 $B_1-AA_1C_1$ 的底面 AA_1C_1 上的高为 B_1C_1 .设点 C_1 到平面 ABB_1A_1 的距离为 d .

由 $V_{B_1-AA_1C_1}=V_{C_1-AA_1B_1}$,得 $\frac{1}{3}S_{\triangle AA_1C_1}\cdot B_1C_1=\frac{1}{3}S_{\triangle AA_1B_1}\cdot d$ (*)

因为侧面 ACC_1A_1 是菱形, $\angle A_1AC=60^\circ,AC=2$,所以 $S_{\triangle AA_1C_1}=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times \sin 120^\circ=\sqrt{3}$,且 $AC_1=2\sqrt{3}$.

又 $B_1C_1=2,B_1C_1\perp AC_1$,所以 $AB_1=4$.

又 $AA_1=2,A_1B_1=2\sqrt{2}$.由余弦定理的推论,得

$$\cos\angle A_1AB_1=\frac{2^2+4^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times 2\times 4}=\frac{3}{4}.$$

所以 $\sin\angle A_1AB_1=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

所以 $S_{\triangle AA_1B_1}=\frac{1}{2}\times 2\times 4\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\sqrt{7}$.

又 $PA\perp AD,AB\cap AD=A$,所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$.

由(1)知 $EF\parallel PA$,所以 $EF\perp$ 平面 $ABCD$.

16.(1)证明:连接 ND .因为 $AB=AC,BD=CD,N$ 为 BC 的中点,所以 $AN\perp BC,DN\perp BC$.又 $DN\cap AN=N$,所以 $BC\perp$ 平面 AND .

因为 ADC 平面 AND ,所以 $BC\perp AD$.

(2)解:根据题意可知, M 是 AD 上靠近点 D 的三等分点,取 ND 上靠近点 D 的三等分点 E ,连接 ME,CE ,则 $ME\parallel AN$.

所以 $\angle CME$ 或其补角为异面直线 AN,CM 所成的角.

因为 $AC=CD=AD$,所以 $\angle CAD=60^\circ$.又 $AC=3,AM=2$,所以 $CM=\sqrt{3^2+2^2-2\times 3\times 2\times\cos 60^\circ}=\sqrt{7}$.

在 $Rt\triangle ENC$ 中, $NC=1,NE=\frac{2}{3}ND=\frac{2}{3}\times\sqrt{3^2-1^2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$,

所以 $CE=\sqrt{1^2+(\frac{4\sqrt{2}}{3})^2}=\frac{\sqrt{41}}{3}$.

又 $ME=\frac{1}{3}AN=\frac{1}{3}\times\sqrt{3^2-1^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,所以在 $\triangle CME$ 中,由余弦定理的推论,得

$$\cos\angle CME=\frac{7+\frac{8}{9}-\frac{41}{9}}{2\times\sqrt{7}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{5\sqrt{14}}{28}.$$

故异面直线 AN,CM 所成角的余弦值为 $\frac{5\sqrt{14}}{28}$.

17.(1)证明:因为 $\triangle PBC$ 为等边三角形, O 为 BC 的中点,所以 $PO\perp BC$.

又平面 $PBC\perp$ 平面 ABC ,平面 $PBC\cap$ 平面 $ABC=BC,POC$ 平面 PBC ,所以 $PO\perp$ 平面 ABC .

又 ACC 平面 ABC ,所以 $PO\perp AC$.

因为 $AC\perp PB,PO\cap PB=P$,所以 $AC\perp$ 平面 PBC .

(2)解:连接 OF .由(1)知, $PO\perp BC$,又 $EF\perp BC,PO\cap EF=E$,所以 $BC\perp$ 平面 EOF .

因为 $OFCC$ 平面 EOF ,所以 $OF\perp BC$.

由(1)知, $AC\perp$ 平面 PBC ,所以 $AC\perp BC$.所以 $AC\parallel OF$.

因为 O 为 BC 的中点,所以 F 为 AB 的中点.

又 $AF=\lambda AB$,所以 $\lambda=\frac{1}{2}$.

18.(1)证明:因为 $\triangle ABC$ 是正三角形, M 为 AB 的中点,所以 $CM\perp AB$.

因为 $A_1A\perp$ 平面 ABC,CMC 平面 ABC ,所以 $CM\perp A_1A$.又 $A_1A\cap AB=A$,所以 $CM\perp$ 平面 A_1ABB_1 .

因为 B_1BC 平面 A_1ABB_1 ,所以 $CM\perp B_1B$.

连接 AB_1 .在直角梯形 A_1ABB_1 中, $AB=4,A_1A=A_1B_1=2$,易得 $AB_1=B_1B=2\sqrt{2}$,所以 $AB^2=AB_1^2+B_1B^2$.所以 $AB_1\perp B_1B$.

因为 MN 是 $\triangle ABB_1$ 的中位线,所以 $MN\parallel AB_1$,所以 $MN\perp B_1B$.

因为 $MN\cap CM=M$,所以 $B_1B\perp$ 平面 MCN .

(2)解:由(1)知 $B_1B\perp$ 平面 MCN ,所以直线 C_1C 与平面 MCN 所成的角和直线 B_1B 与 C_1C 所成角互余.

延长三棱台的三条侧棱交于一点 O .由 $AB=2A_1A=2A_1B_1=4$,结合三棱台的性质,可得 $OA_1=2$.

所以 $OB_1=OC_1=2\sqrt{2}$.

又 $B_1C_1=2$,由余弦定理的推论,得

$$\cos\angle B_1OC_1=\frac{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2-2^2}{2\times 2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}}=\frac{3}{4}.$$

故直线 C_1C 与平面 MCN 所成的角的正弦值为 $\frac{3}{4}$.

19.(1)证明:连接 AC_1 .因为四边形 ACC_1A_1 是菱形,所以 $AC_1\perp A_1C$.因为 $\angle ACB=90^\circ$,所以 $BC\perp AC$.

又平面 $ABC\perp$ 平面 ACC_1A_1 ,平面 $ABC\cap$ 平面 $ACC_1A_1=AC,BCC$ 平面 ABC ,所以 $BC\perp$ 平面 ACC_1A_1 .

因为 A_1CC 平面 ACC_1A_1 ,所以 $BC\perp A_1C$.

又 $BC\parallel B_1C_1$,所以 $B_1C_1\perp A_1C$.

因为 $AC_1\cap B_1C_1=C$,所以 $A_1C\perp$ 平面 AB_1C_1 .

又 AB_1C 平面 AB_1C_1 ,所以 $A_1C\perp AB_1$.

(2)解:点 C_1 到平面 ABB_1A_1 的距离,即三棱锥 $C_1-AA_1B_1$ 的底面 AA_1B_1 上的高.

因为三棱锥 $B_1-AA_1C_1$ 的底面 AA_1C_1 上的高为 B_1C_1 .设点 C_1 到平面 ABB_1A_1 的距离为 d .

由 $V_{B_1-AA_1C_1}=V_{C_1-AA_1B_1}$,得 $\frac{1}{3}S_{\triangle AA_1C_1}\cdot B_1C_1=\frac{1}{3}S_{\triangle AA_1B_1}\cdot d$ (*)

因为侧面 ACC_1A_1 是菱形, $\angle A_1AC=60^\circ,AC=2$,所以 $S_{\triangle AA_1C_1}=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times \sin 120^\circ=\sqrt{3}$,且 $AC_1=2\sqrt{3}$.

又 $B_1C_1=2,B_1C_1\perp AC_1$,所以 $AB_1=4$.

又 $AA_1=2,A_1B_1=2\sqrt{2}$.由余弦定理的推论,得

$$\cos\angle A_1AB_1=\frac{2^2+4^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times 2\times 4}=\frac{3}{4}.$$

所以 $\sin\angle A_1AB_1=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

所以 $S_{\triangle AA_1B_1}=\frac{1}{2}\times 2\times 4\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\sqrt{7}$.

又 $PA\perp AD,AB\cap AD=A$,所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$.

由(1)知 $EF\parallel PA$,所以 $EF\perp$ 平面 $ABCD$.

16.(1)证明:连接 ND .因为 $AB=AC,BD=CD,N$ 为 BC 的中点,所以 $AN\perp BC,DN\perp BC$.又 $DN\cap AN=N$,所以 $BC\perp$ 平面 AND .

一、单项选择题

1.A

提示:五棱锥有10条棱,三棱台有9条棱,三棱柱有9条棱,四棱锥有8条棱,所以棱数最多的是五棱锥.故选A.

2.D

提示:四棱柱的底面不一定是平行四边形,所以四棱柱不一定是平行六面体.故选D.

3.B

提示:由展开图可知,该几何体有四个三角形面与一个四边形面,故该几何体为四棱锥.故选B.

4.C

提示:由斜二测画法的规则可知,在 $\triangle ABC$ 中, $OA\perp BC,OA=2,OB=OC=1$,所以 $AB=AC=\sqrt{5}$.

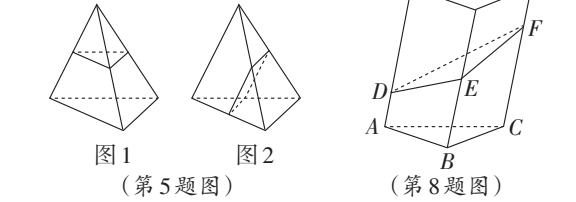
所以该三棱柱的表面积为 $\frac{1}{2}\times 2\times 2\times (2+2\sqrt{5})\times 1+6+2\sqrt{5}$.故选C.

5.A

提示:将空间不共面的4个点看作四面体的顶点.分两类

第一类,平行于底面,且过侧棱的中点,有4个平面符合要求,如图1所示.

第二类,过侧面的中位线与底面的中位线,有3个平面符合要求,如图2所示.综上,共有7个平面符合要求.故选A.



6.A

提示:对于A,由 $\alpha\perp\beta,m\perp\alpha$,得 $m\parallel\beta$ 或 $m\subset\beta$,又 $n\perp\beta$,所以 $m\perp n$.故A正确;

对于B,由 $\alpha\perp\beta,m\perp\alpha$,得 $m\parallel\beta$ 或 $m\subset\beta$,又 $m\perp n$,则 n 与 β 相交, $n\subset\beta$.平行均有可能,故B错误;

对于C,由 $\alpha\parallel\beta,m\parallel\alpha$,得 $m\parallel\beta$ 或 $m\subset\beta$,又 $n\parallel\beta$,则 m 与 n 相交、平行、异面均有可能,故C错误;

对于D,由 $\alpha\parallel\beta,m\parallel\alpha$,得 $m\parallel\beta$ 或 $m\subset\beta$,又 $m\parallel n$,则 $n\parallel\beta$ 或 $n\subset\beta$,故D错误.故选A.

7.D

提示:分别取 AB,CD 的中点 E,F ,连接 PE,EF,PF ,则 $EF\perp CD,PF\perp CD$.又 $EF\cap PF=F$,所以 $CD\perp$ 平面 PEF .

因为 $CDCC$ 平面 $ABCD$,所以平面 $PEF\perp$ 平面 $ABCD$.

过点 P 作 $PO\perp EF$ 于 O .

由平面 $PEF\cap$ 平面 $ABCD=EF,POC$ 平面 PEF ,得 $PO\perp$ 平面 $ABCD$.即 PO 为该四棱锥的高.

由题意可得, $PE=2\sqrt{3},PF=2,EF=4$,则 $PE^2+PF^2=EF^2$,所以 $PE\perp PF$.

所以 $\triangle PEF$ 的面积为 $\frac{1}{2}PE\cdot PF=\frac{1}{2}EF\cdot PO$,

得 $PO=\frac{PE\cdot PF}{EF}=\frac{2\sqrt{3}\times 2}{4}=\sqrt{3}$.故选D.

8.C

提示:用一个完全相同的五面体与该五面体相嵌,如图所示,可知组合体是一个三棱柱.

该三棱柱的与侧棱垂直的截面是边长为1的等边三角形,且侧棱长为 $1+3=2+2=3+1=4$,

所以该五面体的体积 $V=\frac{1}{2}V_{\text{三棱柱}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1\times 1\times \sin 60^\circ\times 4=\frac{\sqrt{3}}{2}$.故选C.

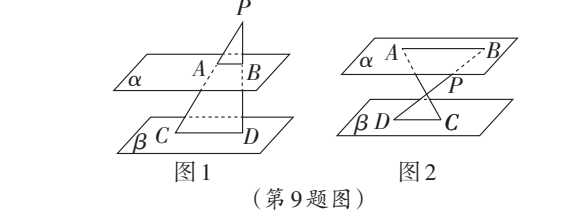
二、多项选择题

9.BD

提示:连接 AB,CD .因为 $\alpha\parallel\beta$,平面 $PCD\cap$ 平面 $\alpha=AB$,平面 $PCD\cap$ 平面 $\beta=CD$,所以 $AB\parallel CD$.

当 P 在 α 与 β 的同侧时,如图1,可得 $\frac{PA}{AC}=\frac{PB}{BD}$,即 $\frac{6}{9}=\frac{8-BD}{BD}$,解得 $BD=\frac{24}{5}$;

当 P 在 α 与 β 之间时,如图2,可得 $\frac{PA}{PC}=\frac{PB}{PD}$,即 $\frac{6}{3}=\frac{BD-8}{8}$,解得 $BD=24$.故选BD.



10.ABC

提示:因为 $m\parallel\alpha,m\parallel\beta,\alpha\cap\beta=l$,所以 $m\parallel l$,又 $AB\parallel l$,所以 $AB\parallel m$,故A正确;

因为 $m\parallel l,AC\perp l$,所以 $AC\perp m$,故B正确;

因为 $A\in\alpha,AB\parallel l,l\subset\alpha$,所以 $B\in\alpha,AB\not\subset\beta$.又 $l\subset\beta$,所以 $AB\parallel\beta$,故C正确;

因为 $AC\perp l$,当 $C\in\alpha$ 时, $AC\perp\beta$,当 $C\notin\alpha$ 时, $AC\perp\beta$ 不成立,故D错误.故选ABC.

11.ACD

提示:由圆锥 SO 的侧面积为 3π ,得 $\pi rl=3\pi$,即 $rl=3$.

对于A,当 $r=1$ 时, $l=3,SC=1$,圆锥的侧面展开图为图1所示的扇形,

在 $\triangle ASC$ 中, $SA=3,SC=1,\angle ASC=\frac{2\pi r}{l}=\frac{2\pi}{3}$,则由余弦定理,得 $AC=\sqrt{13}$,故A正确;

对于B,当 $r=\frac{3}{2}$ 时, $l=2$,设轴截面等腰三角形的顶角为 θ ,由 $\cos\theta=\frac{2^2+2^2-3^2}{2\times 2\times 2}<0$,得 θ 为钝角,设 P,Q 是圆锥 SO 的底面圆周上任意的不同两点,则 $0<\angle PSQ<\theta$,

则过顶点 S 和两母线的截面三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times 2\times 2\times \sin\angle PSQ<2$.当且仅当 $\angle PSQ=90^\circ$ 时,取等号,故B错误;

对于C,当 $l=3$ 时, $r=1$,则 $SO=2\sqrt{2}$,显然外接球球心 O_1 在直线 SO 上,如图2,

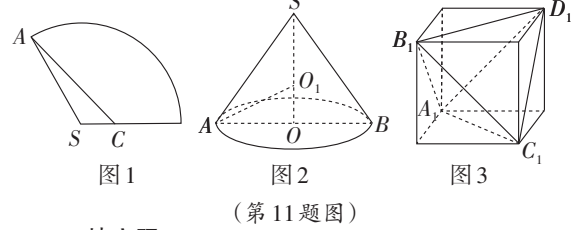
设外接球半径为 R ,则 $(2\sqrt{2}-R)^2+1^2=R^2$,解得 $R=\frac{9}{4\sqrt{2}}$,所以外接球表面积为 $4\pi R^2=\frac{81\pi}{8}$,故C正确;

对于D,将棱长为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 的正四面体 $A_1-B_1C_1D_1$ 补形成正方体,如图3,

则正方体的棱长为 $\frac{\sqrt{2}\times 2\sqrt{3}}{2\times 3}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,体对角线为 $\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\sqrt{2}$,所以该正四面体的外接球半径 $R_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

当 $l=3$ 时, $r=1$,圆锥 SO 的内切球球心在线段 SO 上,圆锥的轴截面内切圆所得大圆,是圆锥轴截面等腰三角形内切圆,设其半径为 r_1 ,轴截面等腰三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times (3+3+2)\times r_1=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}$,解得 $r_1=\frac{\sqrt{2}}{2}=R_1$,所以棱长为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 的正四面体在圆锥 SO 内可以任意转动,故D正确.

故选ACD.



三、填空题

12.两个平面 α,β 相交于过点 P 的一条直线

13. 30° 或 150°

提示:过点 A 作 $AC\perp l$ 于 $C,AD\perp\beta$ 于 D ,连接 CD ,可证得 l