

## 一、单项选择题

1.B

提示:由已知,得是向量的有弹力、风速、加速度,共3个,故选B.

2.B

提示:可以用同一条有向线段表示的向量是相等向量.在□ABCD中, $\overrightarrow{DA}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 方向相反,不是相等向量; $\overrightarrow{DC}$ 和 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同且长度相等,是相等向量; $\overrightarrow{DC}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 方向不同,不是相等向量; $\overrightarrow{DC}$ 和 $\overrightarrow{DA}$ 方向不同,不是相等向量.故选B.

3.A

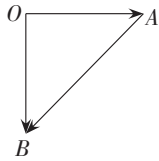
提示:由单位向量的定义可知, $|a||b|=1$ ,则 $|a|^2=|b|^2$ ,即 $a^2=b^2$ ,故A正确,B错误;因为 $a,b$ 的方向和夹角不确定,故C、D错误.故选A.

4.A

提示:因为 $a,b$ 为非零向量,所以由 $|a+b|=|a|+|b|$ ,得 $a$ 与 $b$ 方向相同,所以 $a//b$ ,即充分性成立.当 $a,b$ 方向相反时, $a//b$ 成立,但 $|a+b|<|a|+|b|$ ,即必要性不成立.

故选A.

5.C

提示: $b-a+b=2b-a$ .如图所示,作 $\overrightarrow{OA}=a$ , $\overrightarrow{OB}=2b$ ,则 $\overrightarrow{AB}=2b-a$ .

(第5题图)

因为 $|\overrightarrow{OA}|=|a|=6$  km, $|\overrightarrow{OB}|=|2b|=6$  km, $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ ,所以 $\angle OAB=45^\circ$ ,且 $|\overrightarrow{AB}|=6\sqrt{2}$  km.所以 $b-a+b$ 所表示的意义为向西南走 $6\sqrt{2}$  km.

故选C.

6.C

提示:因为 $a=2e_1+e_2$ , $b=-2e_1+3e_2$ ,所以 $2a+b=2(2e_1+e_2)+(-2e_1+3e_2)=2e_1+5e_2=\frac{1}{2}(4e_1+10e_2)$ .所以 $4e_1+10e_2$ 与 $2a+b$ 共线.故选C.

7.B

提示:由已知,得 $a\cdot b=|a|\cdot|b|\cos 60^\circ=|a|\cdot 2|a|\cdot\frac{1}{2}=|a|^2$ .所以 $(2a-b)\cdot b=2a\cdot b-b^2=2|a|^2-4|a|^2=-2|a|^2$ .所以 $2a-b$ 在 $b$ 上的投影向量为 $\frac{(2a-b)\cdot b}{|b|}\times\frac{b}{|b|}=$  $-\frac{2|a|^2}{4|a|^2}b=-\frac{1}{2}b$ .故选B.

8.C

提示:由 $|a+b|=|a-2b|$ ,得 $|a+b|^2=|a-2b|^2$ ,即 $|a|^2+2a\cdot b+|b|^2=|a|^2-4a\cdot b+4|b|^2$ ,化简得 $|b|^2=2a\cdot b\leq 2|a||b|$ .又 $|b|=\frac{1}{2}$ ,得 $|a|\geq\frac{1}{4}$ ,所以 $|a|$ 的最小值为 $\frac{1}{4}$ ,无最大值.故选C.

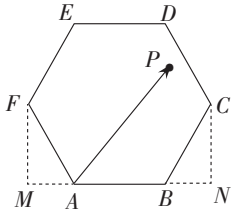
## 二、多项选择题

9.BC

提示: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OD}\neq\mathbf{0}$ , $\overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PN}=\mathbf{0}$ , $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}$ , $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}\neq\mathbf{0}$ .

故选BC.

10.BC

提示:根据 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AP}|\cos\angle BAP$ ,可将 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$ 看作 $|\overrightarrow{AB}|$ 和 $\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量的模的乘积,正负由 $\angle BAP$ 的余弦值的正负决定.如图所示,在正六边形ABCDEF中,分别过点F,C作 $FM\perp AB$ 于M, $CN\perp AB$ 于N.

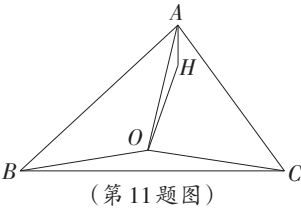
(第10题图)

17.解:(1)由 $\sin 2B=\frac{\sqrt{3}}{7}b\cos B$ ,得 $2\sin B\cos B=\frac{\sqrt{3}}{7}b\cos B$ .因为A为钝角,所以B为锐角, $\cos B\neq 0$ ,所以 $\frac{b}{\sin B}=\frac{14}{\sqrt{3}}$ .在△ABC中,由正弦定理,得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{14}{\sqrt{3}}$ .又 $a=7$ ,所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$ .因为A为钝角,所以 $A=\frac{2\pi}{3}$ .(2)若选条件①,因为 $b=7$ , $a=7$ ,所以 $B=A=\frac{2\pi}{3}$ ,与 $A+B+C=\pi$ 矛盾,此时△ABC不存在,故条件①不符合要求.若选条件②,由 $\cos B=\frac{13}{14}$ ,得 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$ .在△ABC中, $a=7$ , $A=\frac{2\pi}{3}$ ,由正弦定理,得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ ,所以 $b=\frac{a\sin B}{\sin A}=3$ .又 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$  $=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{13}{14}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$ ,

所以△ABC的面积

 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 7\times 3\times\frac{5\sqrt{3}}{14}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$ .若选条件③,因为 $A=\frac{2\pi}{3}$ , $\sin A=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ ,所以 $c=5$ .由余弦定理,得 $a^2=b^2+c^2-2bccos A$ ,即 $7^2=b^2+5^2-2b\times 5\times\cos\frac{2\pi}{3}$ ,解得 $b=3$ .所以△ABC的面积 $S=\frac{1}{2}bcsin A=\frac{1}{2}\times 3\times\frac{5\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$ .18.(1)解:设 $\overrightarrow{BP}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}$ ,则 $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BC}=x\overrightarrow{BA}+(y-1)\overrightarrow{BC}$ , $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BA}=(x-1)\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}$ .由已知,得 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$ , $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ,因为 $\overrightarrow{BA}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 不共线, $\overrightarrow{CP}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线, $\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{AE}$ 共线,所以 $\begin{cases} \frac{x}{\frac{2}{3}}=\frac{y-1}{-1}, \\ \frac{x-1}{-1}=\frac{y}{\frac{1}{3}} \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\frac{4}{7}, \\ y=\frac{1}{7} \end{cases}$ ,所以 $\overrightarrow{BP}=\frac{4}{7}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{7}\overrightarrow{BC}$ .(2)证明:设正△ABC的边长为a,结合(1)可得 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CD}=\left(\frac{4}{7}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{7}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right)=\frac{8}{21}\overrightarrow{BA}^2-\frac{10}{21}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}-\frac{1}{7}\overrightarrow{BC}^2=\frac{8}{21}a^2-\frac{10}{21}a^2\cos\frac{\pi}{3}-\frac{1}{7}a^2=0$ .所以 $\overrightarrow{BP}\perp\overrightarrow{CD}$ ,即 $BP\perp CD$ .19.解:(1)因为 $m=(2a,2b)$ , $n=(\cos B,\cos A)$ ,所以 $m\cdot n=2a\cos B+2b\cos A=\frac{c}{\cos C}$ .结合正弦定理,得 $2\sin A\cos B+2\sin B\cos A=\frac{\sin C}{\cos C}$ ,即 $2\sin(A+B)=\frac{\sin C}{\cos C}$ ,即 $2\sin C=\frac{\sin C}{\cos C}$ ,显然 $\sin C\neq 0$ ,所以 $\cos C=\frac{1}{2}$ .又 $0<C<\pi$ ,所以 $C=\frac{\pi}{3}$ .(2)由(1)得 $C=\frac{\pi}{3}$ ,所以 $f(B)=\cos 2B-4\cos C\sin B=1-$  $2\sin^2 B-2\sin B=\frac{1}{2}\left(\sin B+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$ .由 $C=\frac{\pi}{3}$ ,得 $0<B<\frac{2\pi}{3}$ ,所以 $0<\sin B\leq 1$ .所以当 $\sin B=1$ 时, $f(B)$ 取得最小值,此时 $B=\frac{\pi}{2}$ .因为 $c=3$ ,所以 $b=\frac{c}{\sin C}=2\sqrt{3}$ , $a=b\cos C=\sqrt{3}$ .所以△ABC的周长为 $a+b+c=3+3\sqrt{3}$ .(3)因为 $C=\frac{\pi}{3}$ ,所以 $B=\frac{2\pi}{3}$ , $A\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$ .所以 $\sin A\sin B=\sin A\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)$  $=\sin A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A\right)$  $=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\cos A+\frac{1}{2}\sin^2 A=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2A+\frac{1}{4}(1-\cos 2A)$  $=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2A-\frac{1}{4}\cos 2A+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{4}$ .因为 $A\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$ ,所以 $2A-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$ , $\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)\in\left(-\frac{1}{2},1\right]$ , $\frac{1}{2}\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{4}\in\left(0,\frac{3}{4}\right]$ .所以 $\sin A\sin B$ 的取值范围是 $\left(0,\frac{3}{4}\right]$ .

确.故选ACD.



(第11题图)

## 三、填空题

12. $\sqrt{2}$ 提示:建立平面直角坐标系,则 $a=(1,1)$ , $b=(2,0)$ ,所以 $a-b=(-1,1)$ .所以 $|a-b|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$ .

13.1 000 m

提示:在△BCD中,由正弦定理,得 $\frac{BD}{\sin C}=\frac{BC}{\sin\angle CDB}$ ,所以 $\sin\angle CDB=\frac{BC\sin C}{BD}=\frac{400\sin 45^\circ}{1\ 000}=\frac{\sqrt{2}}{5}$ .所以 $\cos\angle ADB=\sin\angle CDB=\frac{\sqrt{2}}{5}$ .

在△ABD中,由余弦定理,得

 $AB^2=BD^2+AD^2-2BD\cdot AD\cdot\cos\angle ADB$  $=1\ 000^2+(400\sqrt{2})^2-2\times 1\ 000\times 400\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{5}=10^6$ .所以 $AB=1\ 000$ ,即隧道口A、B间的距离是1 000 m.14. $\frac{4}{3}$ ; $-\frac{5}{18}$ 提示:由题意知, $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ ,又 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BA}+\mu\overrightarrow{BC}$ ,所以 $\lambda=\frac{1}{3}$ , $\mu=1$ .所以 $\lambda+\mu=\frac{4}{3}$ .

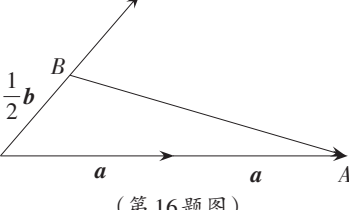
因为F为线段BE上的动点,

所以设 $\overrightarrow{BF}=m\overrightarrow{BE}$ ( $0\leq m\leq 1$ ),则 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{BA}+m\overrightarrow{BE}$  $=-\overrightarrow{BA}+m\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=\left(\frac{m}{3}-1\right)\overrightarrow{BA}+m\overrightarrow{BC}$ .因为G为AF中点,所以 $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}=$  $\left(\frac{m}{6}-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{BA}+\left(\frac{m}{2}-1\right)\overrightarrow{BC}$ .

因为正方形ABCD的边长为1,

所以 $|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|=1$ , $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ .所以 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DG}=\left(\frac{m}{3}-1\right)\left(\frac{m}{6}-\frac{1}{2}\right)+m\left(\frac{m}{2}-1\right)$  $=\frac{5}{9}m^2-\frac{4}{3}m+\frac{1}{2}=\frac{5}{9}\left(m-\frac{6}{5}\right)^2-\frac{3}{10}$ .又 $0\leq m\leq 1$ ,所以当 $m=1$ 时, $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DG}$ 取得最小值,最小值为 $-\frac{5}{18}$ .

## 四、解答题

15.解:(1)因为点A(1,-2),B(2,1),C(3,2),D(-2,3),所以 $\overrightarrow{AB}=(1,3)$ , $\overrightarrow{AC}=(2,4)$ , $\overrightarrow{AD}=(-3,5)$ , $\overrightarrow{BD}=(-4,2)$ , $\overrightarrow{CD}=(-5,1)$ .所以 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=(-12,8)$ .设 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$ ,则 $(-12,8)=m(1,3)+n(2,4)=(m+2n,3m+4n)$ ,所以 $\begin{cases} m+2n=-12, \\ 3m+4n=8 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=32, \\ n=-22 \end{cases}$ .所以 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=32\overrightarrow{AB}-22\overrightarrow{AC}$ .(2)由(1)知 $\overrightarrow{AB}=(1,3)$ , $\overrightarrow{AC}=(2,4)$ ,所以 $\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}=(1+2\lambda,3+4\lambda)$ .设点P(x,y),因为A(1,-2),所以 $\overrightarrow{AP}=(x-1,y+2)$ .又 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$ ,所以 $\begin{cases} x-1=1+2\lambda, \\ y+2=3+4\lambda \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=2+2\lambda, \\ y=1+4\lambda \end{cases}$ .因为点P在第四象限,所以 $\begin{cases} 2+2\lambda>0, \\ 1+4\lambda<0 \end{cases}$ 解得 $-1<\lambda<-\frac{1}{4}$ .所以λ的取值范围是 $\left(-1,-\frac{1}{4}\right)$ .16.解:(1)先作 $2a$ ,再作 $\frac{1}{2}b$ ,最后运用向量减法的三角形法则可知 $2a-\frac{1}{2}b$ 即为图中的向量 $\overrightarrow{BA}$ .

(第16题图)

(2)设 $a+b$ 与 $a-b$ 的夹角为θ.因为 $|a|=1$ , $|b|=2$ ,且 $a$ 与 $b$ 的夹角为 $45^\circ$ ,所以 $|a\cdot b|=1\times 2\times\cos 45^\circ=\sqrt{2}$ .所以 $|a+b|=\sqrt{(a+b)^2}=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=\sqrt{5+2\sqrt{2}}$ , $|a-b|=\sqrt{(a-b)^2}=\sqrt{1^2-2^2+2^2}=\sqrt{5-2\sqrt{2}}$ , $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2=-3$ .所以 $\cos\theta=\frac{(a+b)\cdot(a-b)}{|a+b|\cdot|a-b|}$  $=\frac{-3}{\sqrt{5+2\sqrt{2}}\times\sqrt{5-2\sqrt{2}}}=\frac{3\sqrt{17}}{17}$ .

## 一、单项选择题

1.C

提示:显然向量 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与向量 $\mathbf{0},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 都共线,所以不能构成平面的一个基底;向量 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 不共线,所以能构成平面的一个基底.故选C.

2.B

提示:由已知,得 $\boldsymbol{a}=(1,2),\boldsymbol{b}=(1,-1)$ ,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times1+2\times(-1)=-1$ .故选B.

3.C

提示:因为 $A(3,7),B(5,2)$ ,所以 $\overrightarrow{AB}=(2,-5)$ .把向量 $\overrightarrow{AB}$ 按向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$ 平移后,所得向量 $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}=(2,-5)$ .

故选C.

4.C

提示:因为 $\boldsymbol{a}=(2,3)$ ,所以 $2\boldsymbol{a}=(4,6)$ .

又 $\boldsymbol{b}=(3,2)$ ,所以 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,4)$ .

所以 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$ .故选C.

5.D

提示:由 $\boldsymbol{a}=(0,1),\boldsymbol{b}=(2,x)$ ,得 $\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a}=(2,x-4)$ .

因为 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})$ ,所以 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})=2\times2+x(x-4)=0$ ,解得 $x=2$ .故选D.

6.A

提示:设 $C(m,n),E(x,y)$ .

由 $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BC}$ ,可知 $B$ 是 $AC$ 的中点.

又 $A(2,1),B(-1,4)$ ,

$$\text{所以}\begin{cases}\frac{2+m}{2}=-1,\\ \frac{1+n}{2}=4,\end{cases}\quad\text{解得}\begin{cases}m=-4,\\ n=7,\end{cases}\quad\text{即}C(-4,7).$$

由点 $E$ 是直线 $DC$ 上的一点,且 $|\overrightarrow{CE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{CD}|$ ,可知

$$\overrightarrow{DE}=-3\overrightarrow{EC}.$$

又 $D(-2,3)$ ,

$$\text{所以}\begin{cases}x=\frac{-2+(-3)\times(-4)}{1+(-3)}=-5,\\ y=\frac{3+(-3)\times7}{1+(-3)}=9,\end{cases}\quad\text{即}E(-5,9).\text{故选A.}$$

7.A

提示:因为 $C$ 为线段 $AB$ 上距 $A$ 较近的一个三等分点, $D$ 为线段 $CB$ 上距 $C$ 较近的一个三等分点,

$$\text{所以}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}=\frac{4}{9}\overrightarrow{BA}.$$

$$\text{又}\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},\text{所以}\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OB}+$$

$$\frac{4}{9}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=\frac{4}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{5}{9}\overrightarrow{OB}=\frac{4}{9}\boldsymbol{a}+\frac{5}{9}\boldsymbol{b}.$$

所以 $\overrightarrow{OD}$ 在基底 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$ 下的坐标为 $\left(\frac{4}{9},\frac{5}{9}\right)$ .故选A.

8.A

提示:由题意,得 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{ED}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE})+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$$

$$=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

因为 $MN\perp BC$ ,所以 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\cdot(\overrightarrow{AC}-$

$$\overrightarrow{AB})=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}^2=-\frac{1}{6}\times3-\frac{1}{6}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\cos A+$$

$$\frac{1}{3}\times2=0,\text{解得}\cos A=\frac{\sqrt{6}}{6}.\text{故选A.}$$

## 二、多项选择题

9.ACD

提示:由平面内任一向量 $\boldsymbol{c}$ 都可唯一表示为 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$ ,可知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线.又 $\boldsymbol{a}=(1,2),\boldsymbol{b}=(m,3m-3)$ ,所以 $1\times(3m-3)-2m\neq0$ ,解得 $m\neq3$ .结合选项可知选ACD.

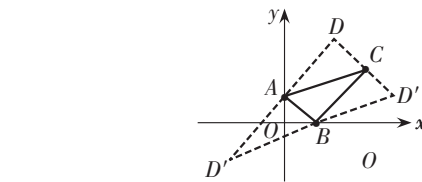
10.ACD

提示:以 $A(0,1),B(1,0),C(3,2)$ 三个点为顶点作平行四边形,如图所示.设 $D$ 的坐标为 $(x,y)$ .

若四边形是 $\square ABCD$ ,则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ,即 $(1,-1)=(3-x,2-y)$ ,得 $x=2,y=3$ ,所以 $D(2,3)$ .

若四边形是 $\square ABDC$ ,则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ,即 $(1,-1)=(x-3,y-2)$ ,得 $x=4,y=1$ ,所以 $D(4,1)$ .

若四边形是 $\square ACBD$ ,则 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$ ,即 $(x,y-1)=(-2,-2)$ ,得 $x=-2,y=-1$ ,所以 $D(-2,-1)$ .故选ACD.

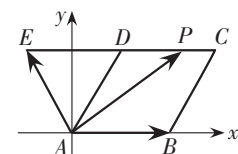


(第10题图)

11.BC

提示:建立如图所示平面直角坐标系,设菱形 $ABCD$ 的边长为2,则 $A(0,0),B(2,0),E(-1,\sqrt{3}),C(3,\sqrt{3}),D(1,\sqrt{3})$ .设 $P(x,y)$ ,由 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AE}$ ,得 $(x,y)=\lambda(2,0)+\mu(-1,\sqrt{3})=(2\lambda-\mu,\sqrt{3}\mu)$ ,

$$\text{所以}\begin{cases}x=2\lambda-\mu,\\ y=\sqrt{3}\mu,\end{cases}\quad\text{整理得}\lambda+\mu=\frac{x+\sqrt{3}y}{2}.$$



(第11题图)

①当 $P$ 在 $AB$ 上时, $0\leq x\leq 2,y=0$ ,则 $\lambda+\mu=\frac{x}{2}\in[0,1]$ ;

②当 $P$ 在 $BC$ 上(不包含端点 $B$ )时, $2<x\leq 3,y=\sqrt{3}(x-2)$ ,则 $\lambda+\mu=2x-3\in(1,3]$ ;

③当 $P$ 在 $CD$ 上(不包含端点 $C$ )时, $1\leq x<3,y=\sqrt{3}$ ,则 $\lambda+\mu=\frac{x+3}{2}\in(\frac{5}{2},3]$ ;

④当 $P$ 在 $AD$ 上(不包含端点 $A,D$ )时, $0<x<1,y=\sqrt{3}x$ ,则 $\lambda+\mu=2x\in(0,2)$ .

综上, $\lambda+\mu\in[0,3]$ ,即 $\lambda+\mu$ 的最小值为0,最大值为3,故C正确,D错误;由①④可知,满足 $\lambda+\mu=1$ 的点 $P$ 有两个,故A错误;由②③可知,满足 $\lambda+\mu=2$ 的点 $P$ 有两个,故B正确.故选BC.

## 三、填空题

$$12.\left(\frac{5}{2},3\right)$$

提示:由梯形 $ABCD$ 中, $AB\parallel CD,AB=2CD$ ,得 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$ .设 $C(x,y)$ ,因为 $A(-2,1),B(-1,3),D(2,2)$ ,所以 $\overrightarrow{AB}=(1,2),\overrightarrow{DC}=(x-2,y-2)$ .

$$\text{所以}\begin{cases}1=2(x-2),\\ 2=2(y-2),\end{cases}\quad\text{解得}\begin{cases}x=\frac{5}{2},\\ y=3.\end{cases}$$

所以顶点 $C$ 的坐标为 $\left(\frac{5}{2},3\right)$ .

$$13.-2\sqrt{3};(-\sqrt{3},-1)$$

提示:因为 $\boldsymbol{a}=(m,2)$ 且 $m\neq0,\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},1)$ ,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sqrt{3}m+2,|\boldsymbol{a}|=\sqrt{m^2+4},|\boldsymbol{b}|=2$ .

$$\text{故}\cos 120^\circ=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\sqrt{3}m+2}{2\sqrt{m^2+4}}=-\frac{1}{2},\text{解得}m=-2\sqrt{3}.$$

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-4$ .

故向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量的坐标是

$$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\times\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=-\boldsymbol{b}=(-\sqrt{3},-1).$$

$$14.\frac{1}{2}$$

提示:由已知,得 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DF}=\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{DC}=\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AB}$ .

$$\text{所以}\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AB}.$$

因为 $B,E,G$ 三点共线,所以存在 $m\in\mathbf{R}$ ,使得 $\overrightarrow{AG}=m\overrightarrow{AE}+(1-m)\overrightarrow{AB}=\frac{m}{3}\overrightarrow{AD}+(1-m)\overrightarrow{AB}$ .

$$\text{所以}\overrightarrow{AF}=\frac{10}{3}\overrightarrow{AG}=\frac{10m}{9}\overrightarrow{AD}+\frac{10(1-m)}{3}\overrightarrow{AB}.$$

$$\text{由平面向量基本定理,得}\begin{cases}\frac{10m}{9}=1,\\ \frac{10(1-m)}{3}=\frac{\lambda}{1+\lambda},\end{cases}$$

$$\text{解得}\lambda=\frac{1}{2}.$$

## 四、解答题

15.(1)证明:根据题意,得 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量,假设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线,则 $\exists k\in\mathbf{R}$ ,使得 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$ ,即 $\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2=k(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)$ ,所以 $(1-k)\cdot\boldsymbol{e}_1+(3+2k)\boldsymbol{e}_2=\mathbf{0}$ .因为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不平行,所以 $\begin{cases}1-k=0,\\ 3+2k=0,\end{cases}$ 该方程组无实数解.所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线不成立,即 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线.所以 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$ 是平面向量的一个基底.

(2)解:设 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=x(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)+y(\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)=(x+y)\boldsymbol{e}_1+(3y-2x)\boldsymbol{e}_2$ ,其中 $x,y\in\mathbf{R}$ ,且 $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ ,

由平面向量基本定理,得 $\begin{cases}x+y=3,\\ 3y-2x=-1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=2,\\ y=1.\end{cases}$ 所以 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ .

16.解:(1)因为 $\boldsymbol{a}=(2,0),\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\left(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ , $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{7}$ .

所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 方向的单位向量为 $\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\left(\frac{5\sqrt{7}}{14},\frac{\sqrt{21}}{14}\right)$ .

(2)因为向量 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{7b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{tb}$ 反向,所以存在 $k<0$ ,使得 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{7b}=k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{tb})$ ,

$$\text{则}\begin{cases}2t=k,\\ 7=kt,\end{cases}\quad\text{解得}t=\frac{\sqrt{14}}{2}(\text{舍去}),\text{或}t=-\frac{\sqrt{14}}{2}.$$

17.解:(1)因为 $\overrightarrow{OA}=(-3,1),\overrightarrow{OB}=(1,-1),\overrightarrow{OC}=(m,4)$ ,

所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(4,-2),\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(m+3,3)$ .

因为 $A,B,C$ 三点共线,

所以 $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{AC}$ ,得 $4\times3-(-2)(m+3)=0$ ,解得 $m=-9$ .

(2)由已知,得 $\overrightarrow{AB}=(4,-2),\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(m-1,5)$ ,

$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=(m-x,4-y)$ .

因为四边形 $ABCD$ 为矩形,所以 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$ ,且 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ .

$$\text{所以}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=4(m-1)-10=0,\text{且}\begin{cases}4=m-x,\\ -2=4-y,\end{cases}$$

$$\text{解得}m=\frac{7}{2},x=-\frac{1}{2},y=6.\text{所以}2x+y=5.$$

18.解:(1)因为 $D,E$ 分别是 $\triangle ABC$ 的边 $AB,BC$ 上的

点, $AD=\frac{1}{2}AB,BE=\frac{2}{3}BC$ ,

$$\text{所以}\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=$$

$$-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

又 $\overrightarrow{DE}=\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{AC}(\lambda_1,\lambda_2\text{为实数})$ ,

$$\text{所以}\lambda_1=-\frac{1}{6},\lambda_2=\frac{2}{3}.\text{所以}\lambda_1+\lambda_2=-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{1}{2}.$$

$$(2)\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

由 $A,F,E$ 三点共线,设 $\overrightarrow{AF}=m\overrightarrow{AE}(m\in\mathbf{R})$ ,

$$\text{则}\overrightarrow{AF}=\frac{m}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2m}{3}\overrightarrow{AC}.$$

由 $C,F,D$ 三点共线,设 $\overrightarrow{CF}=n\overrightarrow{CD}(n\in\mathbf{R})$ ,

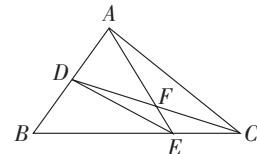
$$\text{则}\overrightarrow{AF}=n\overrightarrow{AD}+(1-n)\overrightarrow{AC}=\frac{n}{2}\overrightarrow{AB}+(1-n)\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{因为}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\text{不共线,所以}\begin{cases}\frac{m}{3}=\frac{n}{2},\\ \frac{2m}{3}=1-n,\end{cases}$$

$$\text{解得}\begin{cases}m=\frac{3}{4},\\ n=\frac{1}{2}.\end{cases}\quad\text{所以}\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

又 $\overrightarrow{AF}=\lambda_3\overrightarrow{AB}+\lambda_4\overrightarrow{AC}(\lambda_3,\lambda_4\text{为实数})$ ,

$$\text{所以}\lambda_3=\frac{1}{4},\lambda_4=\frac{1}{2}.\text{所以}\lambda_3+\lambda_4=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$



(第18题图)

19.解:(1)因为 $|\boldsymbol{e}_1|\cdot|\boldsymbol{e}_2|=1, \boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为 $120^\circ$ ,

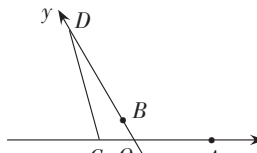
$$\text{所以}\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=1\times1\times\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}.$$

因为 $\overrightarrow{OP}=(1,2)$ ,所以 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$ .

$$\text{所以}|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)^2}=\sqrt{\boldsymbol{e}_1^2+4\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+4\boldsymbol{e}_2^2}$$

$$=\sqrt{1+4\times\left(-\frac{1}{2}\right)+4}=\sqrt{3}.$$

(2)①如图所示,根据题意,得 $\overrightarrow{OA}=4\boldsymbol{e}_1,\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{e}_2,\overrightarrow{OC}=(4-3\times2)\boldsymbol{e}_1=-2\boldsymbol{e}_1,\overrightarrow{OD}=(1+3\times2)\boldsymbol{e}_2=7\boldsymbol{e}_2$ ,



(第19题图)

所以 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=7\boldsymbol{e}_2-(-2\boldsymbol{e}_1)=2\boldsymbol{e}_1+7\boldsymbol{e}_2$ .

②结合①可知, $t$ 时刻, $\overrightarrow{OM}=(4-3t)\boldsymbol{e}_1,\overrightarrow{ON}=(1+3t)\boldsymbol{e}_2$ ,

则 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=(1+3t)\boldsymbol{e}_2-(4-3t)\boldsymbol{e}_1$ .

$$\text{所以}|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{(1+3t)^2-2(1+3t)(4-3t)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(4-3t)^2}$$

$$=\sqrt{9t^2-9t+21}=\sqrt{9\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{75}{4}}.$$

因为 $t\geq0$ ,所以当 $t=\frac{1}{2}$ 时, $|\overrightarrow{MN}|$ 取得最小值为 $\sqrt{\frac{75}{4}}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ .

$$\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

所以 $\frac{1}{2}$  h后,两质点相距最短,最短距离为 $\frac{5\sqrt{3}}{2}$  m.

## 第3期

## 一、单项选择题

1.B

提示:由已知,得 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ,且 $|\overrightarrow{AB}|=1$ .所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.又 $|\overrightarrow{AD}|=1$ ,所以 $|\overrightarrow{AB}|\perp\overrightarrow{AD}$ .所以四边形 $ABCD$ 是菱形.故选B.

2.C

提示:根据题意,得三角形空地的面积为 $\frac{1}{2}\times20\times30\times\sin 150^\circ=150(\text{m}^2)$ .又草皮的价格为 $x$ 元/ $\text{m}^2$ ,所以购买草皮需要150x元.故选C.

3.A

提示:由正弦定理,得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ ,

$$\text{所以}\sin A=\frac{a\sin C}{c}=\frac{2\sqrt{2}\sin 45^\circ}{4}=\frac{1}{2}.$$

所以 $A=30^\circ$ 或 $150^\circ$ .又 $a<c$ ,所以 $A<C$ ,则 $A=30^\circ$ .故选A.

4.A

提示:在 $\triangle ABC$ 中,若 $A>B$ ,由大角对大边,得 $a>b$ ,又

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},\text{所以}\sin A>\sin B.\text{充分性成立.}$$

反之,若 $\sin A>\sin B$ ,由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ ,得 $a>b$ ,由大边对大角,得 $A>B$ .必要性成立.故选A.

5.B

提示:由余弦定理,得 $a^2=b^2+c^2-2bccos A$ ,

即 $(\sqrt{3})^2=1^2+c^2-2ccos 60^\circ$ ,即 $c^2-c-2=0$ ,

解得 $c=2$ ,或 $c=-1$ (舍去).故选B.

6.C

提示:根据 $\sin A:\sin B:\sin C=2:5:6$ 及正弦定理,得 $a:b:c=2:5:6$ .

设 $a=2x,b=5x,c=6x(x>0)$ ,由余弦定理的推论,得

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{(2x)^2+(6x)^2-(5x)^2}{2\cdot2x\cdot6x}=\frac{5}{8}.$$

$$\text{所以}\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{\sqrt{39}}{8}.$$

设 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 $R$ ,因为 $AC=\sqrt{39}$ ,所以

$$\text{由正弦定理,得}2R=\frac{AC}{\sin B}=8.$$

所以 $R=4$ .所以 $\triangle ABC$ 的外接圆的面积为 $\pi R^2=16\pi$ .</