

高一必修(第二册)答案页第2期

数学人教A

第5期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B

提示:因为 $i+7i^2=-7+i$,所以 $i+7i^2$ 的实部与虚部之和为 $-7+1=-6$.故选B.

2.C

提示: $|z|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$. 故选C.

3.D

提示:由 $z+3i=3+i$,得 $z=3+i-3i=3-2i$.所以 $\bar{z}=3+2i$.

故选D.

4.A

提示:由 $z=(1-i)(3+i)=3+i-3i-i^2=4-2i$,得 $\bar{z}=4+2i$.

所以在复平面内 z 的共轭复数 $\bar{z}$ 对应的点的坐标为 $(4,2)$,位于第一象限.故选A.

5.A

提示:由题意得,在复平面内, z_1 对应的点为 $(1,2)$,

则 z_2 对应的点为 $(1,-2)$.所以 $z_1=2-2i$.

则 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+2i}{1-2i}=\frac{(1+2i)^2}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{1+4i+4i^2}{5}=\frac{-3+4i}{5}$.

故 $\frac{z_1}{z_2}$ 的虚部为 $\frac{4}{5}$.

故选A.

6.B

提示:设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,

则 $z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi=4-3i$.

所以 $\begin{cases} a^2-b^2=4, \\ 2ab=-3, \end{cases}$ 解得 $a^2=\frac{9}{2}, b^2=\frac{1}{2}$.

所以 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}$.

故选B.

7.B

提示:根据题意,当 $n=4k, k\in\mathbf{N}_+$ 时, $i^{4k}=1, z=1+\frac{1}{1}=2$;

当 $n=4k+1, k\in\mathbf{N}_+$ 时, $i^{4k+1}=i, z=i+\frac{1}{i}=0$;

当 $n=4k+2, k\in\mathbf{N}_+$ 时, $i^{4k+2}=-1, z=-1+\frac{1}{-1}=-2$;

当 $n=4k+3, k\in\mathbf{N}_+$ 时, $i^{4k+3}=-i, z=(-i)+\frac{1}{(-i)}=0$.

故集合 $\left\{z\left|z=i^n+\frac{1}{i^n}, n\in\mathbf{N}_+\right.\right\}=\{2,-2,0\}$,共3个元素.

故选B.

8.A

提示:因为 $z_1=2+i$ 是关于 x 的方程 $x^2+px+q=0(p,q\in\mathbf{R})$ 的一个根,所以此方程的两根为 $2\pm i$.

所以 $p=-[(2+i)+(2-i)]=-4, q=(2+i)(2-i)=5$.

所以 $|z-z_1|=p+q=1$.

在复平面内,设复数 $z_1=2+i$ 表示点 Z_1 ,则点 Z 的集合

即图形 M 是以 Z_1 为圆心,半径为1的圆.

所以 M 围成的面积为 $\pi\times 1^2=\pi$.

故选A.

二、多项选择题

9.ACD

提示:设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,则 $z^2=a^2-b^2+2abi, \bar{z}=a-bi$.

所以 $A(a^2-b^2, 2ab), B(a, -b)$,

即 $\overrightarrow{OA}=(a^2-b^2, 2ab), \overrightarrow{OB}=(a, -b)$.

若 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$,则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=a(a^2-b^2)-b\cdot 2ab=0$,

得 $a=0$,或 $a^2=3b^2$.

结合选项可知选ACD.

10.AB

提示:设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$.

对于A,若 $z+1=a+1+bi\in\mathbf{R}$,则 $b=0$,故 $z=a\in\mathbf{R}$,故A正确;

16.解:(1)由 $SO=8, OB=4$,可知正六棱锥 $S-ABCDEF$ 的侧棱长为 $\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$,
底面正六边形 $ABCDEF$ 的边长为4,

所以该正六棱锥的底面积为 $6\times\frac{1}{2}\times 4\times 4\times\sin 60^\circ=24\sqrt{3}$,

体积为 $\frac{1}{3}\times 24\sqrt{3}\times 8=64\sqrt{3}$.

又侧面等腰三角形的斜高为 $\sqrt{(4\sqrt{5})^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2}=2\sqrt{19}$,

所以该正六棱锥的侧面积为 $6\times\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{19}=24\sqrt{19}$.

(2)易知球心 M 一定在直线 SO 上.

设球 M 的半径为 R ,则 $RM=MS=MB$.

又 $MB^2=OM^2+OB^2$,所以 $R^2=(8-R)^2+4^2$,解得 $R=5$.所以球 M 的表面积为 $4\pi R^2=100\pi$,体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{500\pi}{3}$.

17.解:(1)由已知可得,铆钉是以15 mm为半径的半球与圆柱的组合物,其中圆柱的高为 $3\times 15=45$ mm,底面半径为8 mm.

所以半球的表面积 $S_1=\frac{1}{2}\times 4\pi\times 15^2=450\pi(\text{mm}^2)$,

圆柱的侧面积 $S_2=2\pi\times 8\times 45=720\pi(\text{mm}^2)$,

半球大圆的面积 $S_3=\pi\times 15^2=225\pi(\text{mm}^2)$.

所以铆钉的表面积 $S=S_1+S_2+S_3=1\,395\pi(\text{mm}^2)$.

(2)设钉身的长度为 x mm,则 $x>20$,钉身的体积 $V=\pi\cdot 8^2\cdot x=64\pi x$.

由已知,得加工前后体积不变,加工后体积为钉身与钉帽体积之和,其中钉身是长度为20 mm,底面圆半径为8 mm的圆柱,钉帽是以15 mm为半径的半球,得 $V=\pi\times 8^2\times 20+\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times 15^3=64\pi x$,解得 $x\approx 55$,满足条件.

所以钉身的长度为55 mm.

18.解:(1)设圆锥筒的底面半径为 r .由扇形铁皮所在圆的半径为3,圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$ rad,

得 $2\pi r=3\times\frac{2\pi}{3}$,解得 $r=1$.所以 $h=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$.

所以圆锥筒的容积为 $\frac{1}{3}\pi\times 1^2\times 2\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$.

(2)设内接圆柱的高为 h_0 ,

则有 $\frac{x}{1}=\frac{2\sqrt{2}-h_0}{2\sqrt{2}}\Rightarrow h_0=2\sqrt{2}(1-x)$.

所以内接圆柱的侧面积为

$S=2\pi xh_0=4\sqrt{2}\pi(-x^2+x)=-4\sqrt{2}\pi\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]$.

又 $0<x<1$,所以当 $x=\frac{1}{2}$ 时,内接圆柱侧面积最大,且最大值为 $\sqrt{2}\pi$.

19.解:(1)设圆锥的母线长为 l ,底面半径为 r .

由 $\cos\angle APB=\frac{1}{4}$,得 $\sin\angle APB=\sqrt{1-\cos^2\angle APB}=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

因为 $\triangle PAB$ 的面积为 $2\sqrt{15}$,所以 $\frac{1}{2}\times l^2\times\frac{\sqrt{15}}{4}=2\sqrt{15}$,

解得 $l=4$ (负值舍去).

又圆锥的轴截面是顶角为 90° 的等腰三角形,

所以 $r=2\sqrt{2}$.

所以该圆锥的侧面积为 $\pi\times 2\sqrt{2}\times 4=8\sqrt{2}\pi$.

(2)根据圆锥的性质可知内切球球心在 PO 上,设球心为 G ,切 PA 于 D ,作出轴截面如图1所示.

设内切球半径为 R ,则 $GO=GD=R$.

由 $\triangle PDG\sim\triangle POA$,得 $\frac{GD}{AO}=\frac{PG}{PA}$,即 $\frac{R}{2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-R}{4}$,

解得 $R=4-2\sqrt{2}$.

所以该圆锥的内切球的表面积为

$4\pi\times(4-2\sqrt{2})^2=(96-64\sqrt{2})\pi$.

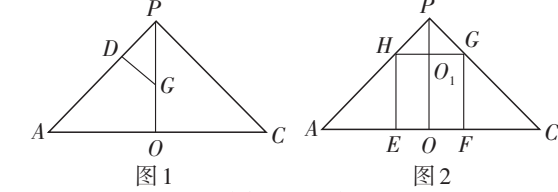


图1

(3)作出轴截面如图2所示.设正四棱柱的底面边长为 a ,高为 h ,则 $HG=\sqrt{2}a, PO_1=2\sqrt{2}-h$.

由 $\frac{PO_1}{PO}=\frac{HG}{AC}$,得 $\frac{2\sqrt{2}-h}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}a}{2\times 2\sqrt{2}}$,

解得 $a=\sqrt{2}(2\sqrt{2}-h)$.

所以内接正四棱柱的侧面积 $S=4ah=4\sqrt{2}(2\sqrt{2}-h)h\leq$

$4\sqrt{2}\cdot\left(\frac{2\sqrt{2}-h+h}{2}\right)^2=8\sqrt{2}$,

当且仅当 $2\sqrt{2}-h=h$,即 $h=\sqrt{2}$,等号成立.

所以该圆锥的内接正四棱柱的侧面积的最大值为 $8\sqrt{2}$.

$O_1B=r_1, OA=r$,则 $\frac{h_1}{h}=\frac{r_1}{r}$,所以 $\frac{V_{SO_1}}{V_{SO}}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\pi r_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\cdot\pi r^2 h}=\left(\frac{h_1}{h}\right)^3$.

对于A, $h_1=15$ cm, $h=25$ cm,则 $\frac{V_{\text{容器}}}{V_{\text{容器}}}=\left(\frac{h_1}{h}\right)^3=\frac{27}{125}$,故A错误;

对于B,设容器内液体倒去一半后液体的高度为 h_2 cm,则 $\left(\frac{h_2}{15}\right)^3=\frac{1}{2}$,解得 $h_2=\frac{15\sqrt[3]{4}}{2}$ (cm),故B正确;

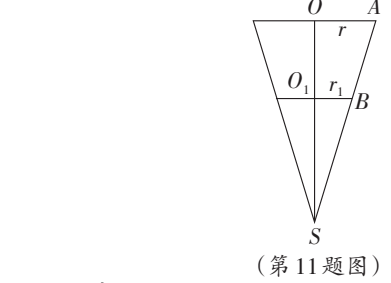
对于C,由 $\frac{h_1}{h}=\frac{r_1}{r}, h=25$ cm, $r=5$ cm,得 $r_1=\frac{h_1}{5}$,则当 $h_1=15$ cm时, $r_1=3$ cm,当 $h_1=15+5=20$ cm时, $r_1=4$ cm,

所以需要增加的液体的体积为 $\frac{1}{3}\pi\times 5\times(3^2+3\times 4+4^2)=\frac{185\pi}{3}(\text{cm}^3)$,故C正确;

对于D,设容器内液体的高度为 h_3 cm,

则 $\frac{\frac{1}{3}\pi\times 3^2\times 15+(\sqrt[3]{\pi})^3}{\frac{1}{3}\pi\times 3^2\times 15}=\left(\frac{h_3}{15}\right)^3$,

解得 $h_3=\sqrt[3]{3\,450}$,故D正确.故选BCD.



(第11题图)

三、填空题

12. n^2, n^3

提示:设正方体的棱长为 a ,

则其表面积 $S=6a^2$,体积 $V=a^3$.

将正方体的棱长扩大到原来的 n 倍,则 $a'=na$,所以

其表面积 $S'=6(na)^2=n^2\cdot 6a^2=n^2S$,体积 $V'=(na)^3=n^3\cdot a^3=n^3V$,即表面积扩大到原来的 n^2 倍,体积扩大到原来的 n^3 倍.

13. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

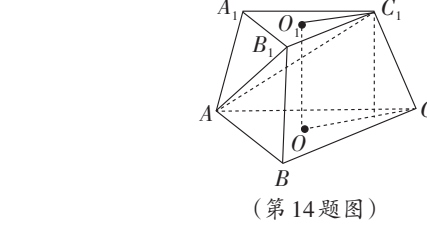
提示:设甲、乙两个圆台的高分别为 $h_{\text{甲}}, h_{\text{乙}}$,则由已知条件,得两个圆台的体积之比

$\frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}}=\frac{\frac{1}{3}\pi h_{\text{甲}}(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)}{\frac{1}{3}\pi h_{\text{乙}}(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)}=\frac{h_{\text{甲}}}{h_{\text{乙}}}$

$=\frac{\sqrt{[2(r_1-r_2)]^2-(r_1-r_2)^2}}{\sqrt{[3(r_1-r_2)]^2-(r_1-r_2)^2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

14. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

提示:如图所示,正三棱台 $A_1B_1C_1-ABC$ 由三棱锥 $A-A_1B_1C_1$ 和四棱锥 $A-B_1BCC_1$ 组成,其中等边 $\triangle A_1B_1C_1$ 的边长为1,等腰梯形 B_1BCC_1 的上、下底面边长分别为1,3,腰长为2.



(第14题图)

设 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中心为 O_1 ,连接 O_1C_1 ,则 $O_1C_1=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.设 $\triangle ABC$ 的中心为 O ,连接 OC ,则 $OC=\frac{2}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

连接 OO_1 ,则该正三棱台的高 $OO_1=\sqrt{2^2-\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

15.解:

四、解答题

15.解:(1)因为边长为1的正三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times 1\times$

$1\times\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}$,所以边长为1的正六边形的面积为 $6\times$

$\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.所以该截角四面体的表面积为 $4\times\frac{\sqrt{3}}{4}+4\times$

$\frac{3\sqrt{3}}{2}=7\sqrt{3}$.

(2)棱长为1的正四面体的高 $h=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,

所以棱长为3的正四面体的高为 $3\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\sqrt{6}$.

所以该截角四面体的体积为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 3\times 3\times\sin 60^\circ\times\sqrt{6}-$

$4\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin 60^\circ\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{23\sqrt{2}}{12}$.

第4页

(2)由(1)知 $z=1+i$,则 $\overrightarrow{OZ}=(1,1), \overrightarrow{OZ}'=(-1,1)$.

故 $z'=-1+i$.所以 $z\cdot z'=(1+i)(-1+i)=i^2-1=-2$.

(3)因为 $z=1+i$ 是方程 $x^2+ax+b=0(a\in\mathbf{R}, b\in\mathbf{R})$ 的一个根,

所以 $\bar{z}=1-i$ 是方程 $x^2+ax+b=0(a\in\mathbf{R}, b\in\mathbf{R})$ 的另一个根.

由韦达定理,得 $a=-[(1+i)+(1-i)]=-2, b=(1+i)(1-i)=2$.所以 $a+b=0$.

18.解:(1)由 $z=\cos\theta+i\sin\theta$,得

$z^2=(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos^2\theta-\sin^2\theta+i\cdot 2\sin\theta\cos\theta$

$=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$,

$z^2+z=(\cos 2\theta+\cos\theta)+i(\sin 2\theta+\sin\theta)$.

因为 z^2+z 在复平面内对应的点在实轴上,

所以 $\sin 2\theta+\sin\theta=0$,即 $2\sin\theta\cos\theta+\sin\theta=0$.

因为 $\theta\in(0,\pi)$,所以 $\sin\theta>0$.所以 $2\cos\theta+1=0$,

解得 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$,则 $\theta=\frac{2\pi}{3}$.

(2)由 $\theta=\frac{2\pi}{3}$,得

$z=\cos\theta+i\sin\theta=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,

$z^2+z=(\cos 2\theta+\cos\theta)+i(\sin 2\theta+\sin\theta)=-1$.

所以 $2z=-1+\sqrt{3}i, zi=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i, 1+z+z^2=0$.

故 $A(-1,\sqrt{3}), B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), C(0,0)$.

所以 $\overrightarrow{CA}=(-1,\sqrt{3}), \overrightarrow{CB}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

因为 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(-1)\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\sqrt{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0$,

所以 $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$.

又 $|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2, |\overrightarrow{CB}|=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=1$,

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$.

19.(1)解:设 $z_i=a+bi(a,b\in\mathbf{R}, b\neq 0)$,则

$z_2=z_1+\frac{1}{z_1}=a+bi+\frac{1}{a+bi}=a+bi+\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=a+bi+\frac{a-bi}{a^2+b^2}=a+\frac{a}{a^2+b^2}+\left(b-\frac{b}{a^2+b^2}\right)i$.

因为 z_2 是实数,所以 $b-\frac{b}{a^2+b^2}=0$.

又 $b\neq 0$,得 $a^2+b^2=1$,即 $|z_1|=1$,且 $z_2=2a$.

由 $-1\leq z_2\leq 1$,得 $-1\leq 2a\leq 1$,解得 $-\frac{1}{2}\leq a\leq \frac{1}{2}$.

所以 z_1 的实部的取值范围为 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

(2)证明:由(1)知 $a^2+b^2=1$,

则 $\omega=\frac{1-z_1}{1+z_1}=\frac{2}{1+z_1}-1=\frac{2}{1+a+bi}-1=\frac{2(1+a-bi)}{(1+a)^2+b^2}-1=$

$\frac{2(1+a-bi)}{2+2a}-1=-\frac{bi}{1+a}$.

一、单项选择题

1.D

提示:3+3i的实部3与虚部3相等,3+5i的实部3小于虚部5,i(3+5i)=-5+3i的实部-5小于虚部3,i(3-5i)=5+3i的实部5大于虚部3.故选D.

2.A

提示:由 $z=5+i$,得 $i(\bar{z}+z)=i(5-i+5+i)=10i$.故选A.

3.C

提示:由 $\frac{z}{i}=-1-i$,得 $z=i(-1-i)=1-i$.故选C.

4.D

提示:因为 $z(1-i)=-4i$,

所以 $z=\frac{-4i}{1-i}=\frac{-4i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{4-4i}{2}=2-2i$.

所以复数 z 在复平面内对应的点为(2,-2),在第四象限.故选D.

5.D

提示:因为 $\bar{z}_1=1+i$,所以 $z_1=1-i$.由 $z_1+z_2=z_1z_2$,得 $z_2=\frac{z_1}{z_1-1}=\frac{1-i}{-i}=i(1-i)=1+i$.所以 $|z_2|=\sqrt{2}$.故选D.

6.A

提示:对于A,设 $z_1=a+bi,z_2=c+di(a,b,c,d\in\mathbf{R})$,

由 $z_1=\bar{z}_2$,得 $a+bi=c-di$,

故 $a=c$,且 $b=-d$,所以 $\bar{z}_1=a-bi=c+di=z_2$,故A正确;

对于B,若 $z_1=z_2=i$,则 $z_1z_2=-1\in\mathbf{R}$,但 z_1 不是实数,故B错误;

对于C,若 $z_1=i,z_2=0$,则 $z_1z_2=0$,但 $z_1\neq 0$,故C错误;

对于D,若 $z_1=3+4i,z_2=3-4i$,则 $|z_1||z_2|=5$,但 $z_1\neq z_2$,故D错误.

故选A.

7.C

提示:在复平面内,设复数 z_1,z_2 对应的向量分别是 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$.以 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 为邻边作平行四边形OACB,则 $\overrightarrow{OC},\overrightarrow{BA}$ 分别对应的复数是 z_1+z_2,z_1-z_2 .

由题知 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1,|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{BA}|$,

所以平行四边形OACB是边长为1的正方形.

延长OB到点D,使得 $BD=OB$,可得

$|z_1+2z_2|=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

故选C.

8.A

提示:因为 $|z-1|=1$,所以 z 在复平面内对应的点的集合是以A(1,0)为圆心,1为半径的圆.

又 $|z|$ 表示圆上的点到原点O(0,0)的距离,

所以 $|z|_{\min}=|AO|-1=2,|z|_{\max}=|AO|+1=0$.

所以 $|z|$ 的取值范围为[0,2].故选A.

二、多项选择题

9.ACD

提示:当 $m=1$ 时, $z=-4\in\mathbf{R}$,当 $m=-1$ 时, $z=0\in\mathbf{R}$,故A正确;

若 z 为纯虚数,则 $\begin{cases} m^2-2m-3=0, \\ m^2-1\neq 0, \end{cases}$

解得 $m=3$,故B错误;

若复数 z 对应的点位于第二象限,则 $\begin{cases} m^2-2m-3<0, \\ m^2-1>0, \end{cases}$

解得 $1<m<3$,故C正确;

若复数 z 对应的点位于直线 $y=2x$ 上,

则 $m^2-1=2(m^2-2m-3)$,即 $m^2-4m-5=0$,

解得 $m=5$ 或 $m=-1$,所以 $z=12+24i$ 或 $z=0$,故D正确.

故选ACD.

10.ACD

提示:当 $n\in\mathbf{N}$ 时, $i^{4n+1}=(i^4)^n\cdot i=i,i^{4n+2}=i^2,i^{4n+3}=i^3,i^{4n+4}=i^4$,且 $i+i^2+i^3+i^4=0$.

所以 $z=\frac{i+i^2+i^3+\cdots+i^{2023}}{1+i}=\frac{505(i+i^2+i^3+i^4)+i+i^2+i^3}{1+i}=$

$\frac{-1}{1+i}=\frac{1-i}{2},\bar{z}=\frac{1+i}{2},|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选ACD.

11.BC

提示:由题可设 $w+z=\cos\theta+isin\theta$,

$w^2+z^2=4\cos\varphi+4isin\varphi$,

由①得 $w^2+z^2+2wz=(\cos\theta+isin\theta)^2=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+i\cdot$

$2\sin\theta\cos\theta=\cos 2\theta+isin 2\theta$.

把②代入上式,得

$2wz=(\cos 2\theta-4\cos\varphi)+i(\sin 2\theta-4\sin\varphi)$.

所以 $2|wz|=\sqrt{(\cos 2\theta-4\cos\varphi)^2+(\sin 2\theta-4\sin\varphi)^2}$

$=\sqrt{(\cos^2 2\theta-8\cos 2\theta\cos\varphi+16\cos^2\varphi)+(\sin^2 2\theta-8\sin 2\theta\sin\varphi+16\sin^2\varphi)}$

$=\sqrt{17-8\cos(2\theta-\varphi)}$.

因为 $-1\leq\cos(2\theta-\varphi)\leq 1$,

所以 $\sqrt{17-8\leq 2|wz|\leq\sqrt{17+8}}$,得 $1.5\leq|wz|\leq 2.5$.

所以 $|wz|$ 的最小值为1.5,最大值为2.5.

故选BC.

三、填空题

12. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

提示:由 $(1-i)z=i^{2024}$,得

$z=\frac{i^{2024}}{1-i}=\frac{(i^4)^{506}}{1-i}=\frac{1}{1-i}=\frac{1+i}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

所以 $|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

13.(-3,-1)

提示:设 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴正半轴的夹角为 θ ,

则 $\overrightarrow{OA'}$ 与 x 轴正半轴的夹角为 $\theta+\frac{\pi}{2}$.

由题意 $A(-2,1)$,则

$|\overrightarrow{OA'}|=|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$, $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

所以 $\sqrt{5}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{5}\cos\theta=-2$,

$\sqrt{5}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sqrt{5}\sin\theta=-1$,即 $A'(-1,-2)$.

所以 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA'}=(-2,1)+(-1,-2)=(-3,-1)$.

14. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

提示:由 $|z|=1$ 可知,在复平面内,复数 z 对应的点 Z

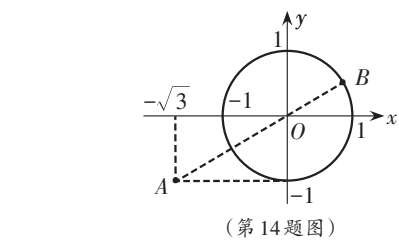
的集合是单位圆,那么 $|z+\sqrt{3}+i|$ 表示单位圆上的点到点A($-\sqrt{3},-1$)的距离.如图所示,连接AO并延长,与单位圆交于点B,则点B对应的复数即为所求.

由A($-\sqrt{3},-1$),易得 $\angle BOx=30^\circ$,

又 $|OB|=1$,所以 $B(\cos 30^\circ,\sin 30^\circ)$,即 $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

所以点B对应的复数为 $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$,

即所求复数 $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.



(第14题图)

四、解答题

15.解:(1)由 $Z(3,-4)$,得 $z_2=3-4i$.

因为复数 z_2 是关于 x 的方程 $x^2+mx+n-1=0$ 的一个根, $m,n\in\mathbf{R}$,

所以 $(3-4i)^2+m(3-4i)+n-1=0$,

即 $3m+n-8-(4m+24)i=0$.

所以 $\begin{cases} 3m+n-8=0, \\ 4m+24=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=-6, \\ n=26. \end{cases}$ 所以 $m+n=20$.

(2)由 $\frac{1}{z}=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}$,得

$z=\frac{z_1z_2}{z_1+z_2}=\frac{(5+10i)(3-4i)}{5+10i+3-4i}=\frac{55+10i}{8+6i}=\frac{5(11+2i)(4-3i)}{2(4+3i)(4-3i)}=$

$\frac{5(50-25i)}{2\times 25}=5-\frac{5}{2}i$.

所以 $\bar{z}=5+\frac{5}{2}i$.

16.解:(1)由题意知点A(2,1), $\overrightarrow{BC}=(3,-1)$.

设点D对应的复数为 $x+yi(x,y\in\mathbf{R})$,

则点D(x,y), $\overrightarrow{AD}=(x-2,y-1)$.

因为平行四边形ABCD中, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,

所以 $(x-2,y-1)=(3,-1)$,即 $\begin{cases} x-2=3, \\ y-1=-1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=5, \\ y=0. \end{cases}$

所以点D对应的复数为5.

(2)由题意知 $\overrightarrow{BA}=(1,2),\overrightarrow{BC}=(3,-1)$,

所以 $\cos B=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{1\times 3-2\times 1}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=\frac{1}{5\sqrt{2}}$.

又 $B\in(0,\pi)$,所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{7}{5\sqrt{2}}$.

所以 $\triangle ABC$ 的面积为

$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\sin B=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{10}\times\frac{7}{5\sqrt{2}}=\frac{7}{2}$.

17.解:(1) $z_1=\frac{\sqrt{3}-i}{1-\sqrt{3}i}=\frac{(\sqrt{3}-i)(1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}$

$=\frac{2\sqrt{3}+2i}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

因为 z_3 的虚部与 z_1 的虚部互为相反数,

所以 z_3 的虚部为 $-\frac{1}{2}$.

又 z_3 为纯虚数,所以 $z_3=-\frac{1}{2}i$.

(2)设 $z_2=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$.

因为 $z_1z_2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(a+bi)=\frac{\sqrt{3}a-b+(a+\sqrt{3}b)i}{2}\in\mathbf{R}$,

所以 $a+\sqrt{3}b=0$,得 $a=-\sqrt{3}b$.

所以 $z_2=-\sqrt{3}b+bi$,

$|2z_1+z_2|=\left|\sqrt{3}(1-b)+(1+b)i\right|=\sqrt{3(1-b)^2+(1+b)^2}$

$=\sqrt{4b^2-4b+4}=\sqrt{4\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+3}\geq\sqrt{3}$.

故 $|2z_1+z_2|$ 的最小值为 $\sqrt{3}$.

18.解:(1)由 $x^2+x+1=0$,

得 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=0$,即 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{3}{4}$.

所以 $x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 或 $x=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

所以该方程的根为 $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

(2)因为 $x^2+x+1=0$,所以 $x^2=-x-1$.

所以 $x(x-1)=x^2-x=-2x-1$.

当 $x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 时, $x(x-1)=-2x-1=-\sqrt{3}i$;

当 $x=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 时, $x(x-1)=-2x-1=\sqrt{3}i$.

故 $x(x-1)$ 的值为 $-\sqrt{3}i$ 或 $\sqrt{3}i$.

(3)因为 $x^2+x+1=0$,所以 $x+1=-x^2$,且 $x^3=1$.所以

$\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2024}+\left(\frac{1}{x+1}\right)^{2024}=\left(-\frac{x}{x^2}\right)^{2024}+\left(-\frac{1}{x^2}\right)^{2024}$
 $=\frac{1}{x^{2024}}+\frac{1}{x^{4048}}=\frac{1}{(x^3)^{674}\cdot x^2}+\frac{1}{(x^3)^{1349}\cdot x}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{1+x}{x^2}=-1$.

19.解:(1)设复数 $1+\sqrt{3}i$ 的模为 r ,辐角为 θ ,

则 $r=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2,\cos\theta=\frac{1}{2},\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 θ 的一个值为 $\frac{\pi}{3}$.

所以 $1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

(2) $z_1z_2=r_1(\cos\theta_1+isin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+isin\theta_2)$

$=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\cdot$

$\sin\theta_2)]$

$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+isin(\theta_1+\theta_2)]$.

所以 $|z_1z_2|=r_1r_2,z_1z_2$ 的辐角为 $\theta_1+\theta_2$.

(3)由(2)的结论可知,若复数 z_1 对应的向量 $\overrightarrow{OZ_1}=$

$r_1(\cos\theta_1+isin\theta_1),z_2$ 对应的向量 $\overrightarrow{OZ_2}=r_2(\cos\theta_2+isin\theta_2)$,则

复数 z_1z_2 的几何意义是把向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕点O按逆时针方向旋转角 θ_2 ,再把它的模变为原来的 r_2 倍.

$2+i=\sqrt{5}(\cos\theta+isin\theta)$,其中 $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}},\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

根据题意,将 $\overrightarrow{OA}$ 绕原点O按逆时针方向旋转 60° 可得 $\overrightarrow{OB}$.设 $\overrightarrow{OB}$ 对应的复数为 z ,

则 $z=(2+i)(\cos 60^\circ+isin 60^\circ)$

$=(2+i)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)i$.

所以点B对应复数的代数形式为 $1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)i$.

数学人教A

一、单项选择题

1.B

提示:由旋转体的概念可知,A,C,D是旋转体,B是多面体.故选B.

2.C

提示:因为该棱锥有12个面,所以该棱锥有1个底面,11个侧面.所以该棱锥有22条棱.

故选C.

3.B

提示:根据棱台的定义可知,用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥,底面和截面之间的多面体叫做棱台.

故选B.

4.A

提示:底面为平行四边形的直四棱柱是直平行六面体,底面为矩形的直四棱柱是长方体.由此可知,长方体必定是直平行六面体,而直平行六面体的底面不一定为矩形,所以直平行六面体不一定是长方体.所以 p 是 q 的充分不必要条件.

故选A.

5.D

提示:由斜二测画法可知,矩形的直观图是平行四边形.故选D.

6.B

提示:由斜二测画法的规则可知,边长为 a 的水平放置的正方形的直观图是相邻边长为 $a,\frac{1}{2}a$,一个内角为 45° 的平行四边形.

所以直观图的面积为 $a\times\frac{1}{2}a\times\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{4}a^2$.

故选B.

7.C

提示:用斜二测画法画直观图时,平行于 x 轴或与 x 轴重合的线段长度不变,则 $C'D',P'Q'$ 长度不变,平行于 y 轴或与 y 轴重合的线段长度减半,则 $O'A'$ 长度减半, $P'B',P'C',Q'E',Q'D'$ 也会缩小,所以 P',Q',C',D' 作法正确, A',B',E' 作法不正确.故选C.

8.D

提示:过点 B' 作 $B'C'\parallel y'$ 轴,交 x' 轴于点 C' .

在 $\triangle O'B'C'$ 中, $\angle B'O'C'=30^\circ,\angle B'C'O'=135^\circ,O'B'=$

2,由正弦定理,得 $\frac{B'C'}{\sin 30^\circ}=\frac{2}{\sin 135^\circ}$,解得 $B'C'=\sqrt{2}$.

由斜二测画法规则知,在原平面图形中,顶点 B' 对应的点到 x 轴的距离是 $2\sqrt{2}$.

故选D.

二、多项选择题

9.AD

提示:三棱锥有4个顶点,四棱柱有8个顶点,所以两个几何体共有12个顶点,故A正确;

四棱锥有5个顶点,三棱柱有6个顶点,所以四棱锥和三棱柱共有11个顶点,四棱锥和四棱柱共有13个顶点,故B,C不正确;五棱锥有6个顶点,所以五棱锥和三棱柱共有12个顶点,故D正确.故选AD.

10.ACD

提示:平行六面体的六个面都是平行四边形,且相对的平行四边形全等,所以六个平行四边形中的矩形可能有0,2,4,6个.所以各个表面的直角个数之和可能为0,8,16,24.故选ACD.

11.AC

提示:若 BC 在 x 轴上,则直观图中 $B'C'=BC=2\sqrt{2}$,故A可能;若 BC 在 y 轴上,则 $B'C'=\frac{1}{2}BC=\sqrt{2}$,所以 $B'C'$ 的长度范围是 $[\sqrt{2},2\sqrt{2}]$,故B,D不可能;若以 AB,AC 为 x 轴,

则 $B'C'=\sqrt{2^2+1^2-2\times 2\times 1\times\cos 45^\circ}=\sqrt{5-2\sqrt{2}}$,故C可能.故选AC.

高一必修(第二册)答案页第2期

三、填空题

12. $D\subseteq C\subseteq A\subseteq B$

提示:在题设四种几何体中,包含元素最多的是直平行六面体,底面为长方形的直平行六面体是长方体,底面为正方形的长方体是正四棱柱,侧面都是正方形的正四棱柱是正方体,即正六面体,所以 $D\subseteq C\subseteq A\subseteq B$.

13.8+4 $\sqrt{2}$