

第十七章 《因式分解》综合能力提升

一、选择题

1~5.CABDD 6~10.DAADA

二、填空题

11. $(x+4y)(x-4y)$ 12. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
13. $-1, -6$ 14. $3a+2b$ 15. 0

三、解答题(一)

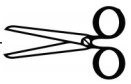
16. 解:(1) $3x^3-12x=3x(x^2-4)=3x(x+2)(x-2)$;
(2) $6xy^2+9x^2y+y^3=y(9x^2+6xy+y^2)=y(3x+y)^2$.
17. 解:(1) $4(x+2)(x-3)+25=4x^2-4x-24+25$

$=4x^2-4x+1=(2x-1)^2$;
(2) $(x^2-1)^2-6(x^2-1)+9=[(x^2-1)-3]^2=(x^2-4)^2$
 $=(x+2)^2(x-2)^2$.
18. 解:(1) $2\ 025^2-2\ 025\times 2\ 024=2\ 025\times(2\ 025-2\ 024)$
 $=2\ 025$;
(2) $198^2-396\times 202+202^2=198^2-2\times 198\times 202+202^2$
 $=(198-202)^2=(-4)^2=16$.

四、解答题(二)

19. 解:根据题意,得 $a-b=1, ab=12$.

(1) 原式 $=ab(a-b)$
 $=12\times 1$
 $=12$.
(2) 原式 $=3ab(a^2-2ab+b^2)$
 $=3ab(a-b)^2$
 $=3\times 12\times 1^2$
 $=36$.
20. 解:(1) ①.
(2) 原式 $=(3x+y+x+3y)(3x+y-x-3y)$



第十八章 《分式》综合能力提升

一、选择题

1~5.DCDBB 6~10.ABCDB

二、填空题

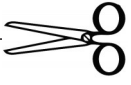
11. $x(x-1)(x+1)^2$ 12. 2, -2
13. $\frac{30}{x}=\frac{30}{1.5x}+1$ 14. $x=\frac{5}{2}$ 15. 5

三、解答题(一)

16. (1) $\frac{2}{x+y}$; (2) $\frac{a}{a-2}$.
17. 解:(1) 方程两边都乘 $4x^2-1$, 得 $2(2x+1)=4$.
解得 $x=\frac{1}{2}$.
检验:当 $x=\frac{1}{2}$ 时, $4x^2-1=0$.
因此 $x=\frac{1}{2}$ 不是原分式方程的解.
所以, 原分式方程无解.
(2) 方程两边都乘 $2x+6$, 得 $4x+2x+6=7$.
解得 $x=\frac{1}{6}$.
检验:当 $x=\frac{1}{6}$ 时, $2x+6\neq 0$.

所以, 原分式方程的解为 $x=\frac{1}{6}$.
18. 解:原式 $=\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}\cdot\frac{x-2}{x-1}=\frac{1}{x-1}$.
当 $x=3$ 时, 原式 $=\frac{1}{2}$.
四、解答题(二)
19. 解:(1) 二.
(2) $\left(\frac{2x-1}{x-1}-1\right)\div\frac{x}{x^2-1}$
 $=\left(\frac{2x-1}{x-1}-\frac{x-1}{x-1}\right)\div\frac{x}{(x-1)(x+1)}$
 $=\frac{2x-1-x+1}{x-1}\cdot\frac{(x-1)(x+1)}{x}$
 $=\frac{x}{x-1}\cdot\frac{(x-1)(x+1)}{x}$
 $=x+1$.
因为 $x+1\neq 0, x-1\neq 0, x\neq 0$,
所以 x 不能取 $-1, 0, 1$.
当 $x=2$ 时, 原式 $=2+1=3$.
20. 解:(1) 设甲种点茶器具套装的单价是 x 元, 则乙

种点茶器具套装的单价是 $(x+30)$ 元.
根据题意, 得 $\frac{2\ 220}{x}=\frac{1\ 780}{x+30}\times 1.5$.
解得 $x=148$.
检验:当 $x=148$ 时, $x(x+30)\neq 0$.
所以, 原分式方程的解为 $x=148$.
所以 $x+30=178$.
答:甲种点茶器具套装的单价是 148 元, 乙种点茶器具套装的单价是 178 元.
(2) 设学校购进乙种点茶器具 m 套, 则购进甲种点茶器具 $(30-m)$ 套.
根据题意, 得 $148(30-m)+178m\leq 5\ 000$.
解得 $m\leq 18\frac{2}{3}$.
因为 m 为正整数,
所以 m 的最大值为 18.
答:学校最多可以购进乙种点茶器具 18 套.
21. 解:(1) 当 $m=1$ 时,
原方程为 $\frac{3}{1-x}=\frac{x}{1-x}-3$.
解得 $x=1.5$.



期末综合能力提升(一)

一、选择题

1~5.ABDDA 6~10.BBDAC

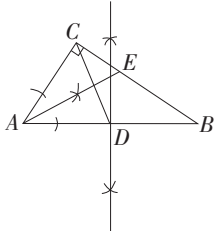
二、填空题

11. 12 12. $3(x-3)^2$ 13. 2 14. -1 或 2
15. 90° 或 105° 或 120°

三、解答题(一)

16. 解:(1) 原式 $=-8-1+1\times 3$
 $=-8-1+3$
 $=-6$;
(2) 原式 $=x^2(m-2)-y^2(m-2)$
 $=(m-2)(x^2-y^2)$
 $=(m-2)(x+y)(x-y)$.
17. 解:原式 $=x^4-3x^3+mx^2+nx^3-3nx^2+mnx+3x^2-9x+3m=x^4+(n-3)x^3+(m-3n+3)x^2+(mn-9)x+3m$.
因为展开式中不含 x^2 和 x^3 项,
所以 $\begin{cases} n-3=0, \\ m-3n+3=0. \end{cases}$
解得 $\begin{cases} m=6, \\ n=3. \end{cases}$
当 $m=6, n=3$ 时, $(n-m)^n=(3-6)^3=(-3)^3=-27$.
18. 解:设每个“长征二号 F”模型的进价为 x 元, 则每

个“天宫”模型的进价为 $(1+50\%)x$ 元.
根据题意, 得 $\frac{3\ 000}{x}-\frac{3\ 000}{(1+50\%)x}=5$.
解得 $x=200$.
检验:当 $x=200$ 时, $1.5x\neq 0$.
所以, 原分式方程的解为 $x=200$.
答:每个“长征二号 F”模型的进价是 200 元.
四、解答题(二)
19. 解:(1) 如图, 线段 CD 即为所求作的线段.
(2) 如图, 线段 AE 即为所求作的线段.



(第 19 题图)

(3) $\because AE$ 平分 $\angle BAC, \angle BAE=28^\circ$,
 $\therefore \angle CAE=\angle BAE=28^\circ$.
 $\therefore \angle ACB=90^\circ$,

$\therefore \angle AEB=\angle ACE+\angle CAE=90^\circ+28^\circ=118^\circ$.
20. 解:(1) $A=\frac{x(x+1)}{x-4}\cdot\frac{(x-4)^2}{(x+1)(x-1)}=\frac{x(x-4)}{x-1}=\frac{x^2-4x}{x-1}$.
(2) 由题意, 得 $\frac{x^2-4x}{x-1}+\frac{x^2-2m}{1-x}=1$.
解得 $x=-\frac{1+2m}{5}$.
因为分式方程的解是非负数,
所以 $x\geq 0$, 且 $x\neq 1, x\neq 4$,
即 $\frac{1+2m}{5}\geq 0$ 且 $\frac{1+2m}{5}\neq 1, \frac{1+2m}{5}\neq 4$.
解得 $m\geq -\frac{1}{2}$ 且 $m\neq 2, m\neq \frac{19}{2}$.
所以 m 的取值范围为 $m\geq -\frac{1}{2}$ 且 $m\neq 2, m\neq \frac{19}{2}$.
21. 解:(1) 二.
(2) 证明: $\because \angle ADC=\angle AEB=90^\circ$,
 $\therefore \angle BDO=\angle CEO=90^\circ$.
在 $\triangle DOB$ 和 $\triangle EOC$ 中,
 $\begin{cases} \angle BDO=\angle CEO, \\ \angle DOB=\angle EOC, \\ OB=OC, \end{cases}$
 $\therefore \triangle DOB\cong \triangle EOC(\text{AAS})$.
 $\therefore OD=OE$.



期末综合能力提升(二)

一、选择题

1~5.BDDBD 6~10.ACBC

二、填空题

11. $(m+4)(m-4)$ 12. 70° 或 40° 13. $x=4$
14. 40 或 75 15. 70° 或 40° 或 20°

三、解答题(一)

16. 解:(1) 去分母, 得 $2+x(x+1)=x^2-1$.
去括号, 得 $2+x^2+x=x^2-1$.
移项, 合并同类项, 得 $x=-3$.
检验:当 $x=-3$ 时, $x^2-1\neq 0$.
所以, 原分式方程的解为 $x=-3$.
(2) 去分母, 得 $x(x+2)-3=(x-1)(x+2)$.
解得 $x=1$.
检验:当 $x=1$ 时, $(x-1)(x+2)=0$.
所以, 原分式方程无解.
17. 解:原式 $=x^2-y^2-x^2-2xy+3xy=-y^2+xy$.
当 $x=1, y=3$ 时,
原式 $=-3^2+1\times 3=-9+3=-6$.

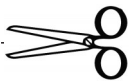
18. 证明: $\because DE\parallel AB, \therefore \angle CAB=\angle EDA$.
 $\therefore \angle ABD=\angle ADB, \therefore AB=DA$.
在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DAE$ 中,
 $\begin{cases} \angle CAB=\angle EDA, \\ AB=DA, \\ \angle ABC=\angle DAE, \end{cases}$
 $\therefore \triangle ABC\cong \triangle DAE(\text{ASA})$.
 $\therefore BC=AE$.
四、解答题(二)
19. 解:(1) 根据题意, 得所捂部分化简后的结果为:
 $\frac{x^2-x+1}{x}\cdot\frac{x}{x+1}+\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$
 $=\frac{x^2-x+1}{x}\cdot\frac{x}{x+1}+\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2}$
 $=\frac{x^2-x+1}{x+1}+\frac{x-1}{x+1}$
 $=\frac{x^2-x+1+x-1}{x+1}$

(2) 因为 $x^2-x-1=0$,
所以 $x^2=x+1$.
所以 $\frac{x^2}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}=1$.
20. 解:(1) $\because \angle BED$ 是 $\triangle ABE$ 的一个外角,
 $\therefore \angle BED=\angle ABE+\angle BAD$.
 $\because \angle ABE=15^\circ, \angle BAD=40^\circ$,
 $\therefore \angle BED=55^\circ$.
(2) $\because AD$ 为 $\triangle ABC$ 的中线, BE 为 $\triangle ABD$ 的中线,
 $\therefore S_{\triangle ABE}=S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABD}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.
 $\therefore S_{\triangle ABC}=40$,
 $\therefore S_{\triangle BDE}=10$.
 $\therefore \frac{1}{2}BD\times 5=10$.
解得 $BD=4$.
21. 解:(1) 如图, $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求作, 点 B_1 的坐标为 $(1, -4)$.

$= (4x+4y)(2x-2y)$
 $= 8(x+y)(x-y).$
21.解:(1)由图可知,
 $S_1=(a+2)(a+1)=a^2+3a+2,$
 $S_2=(5a+1) \times 1=5a+1.$
当 $a=2$ 时, $S_1+S_2=4+6+2+10+1=23.$
(2) $S_1>S_2.$
理由: 因为 $S_1-S_2=a^2+3a+2-5a-1=a^2-2a+1=(a-1)^2,$ 且 $a>1,$
所以 $(a-1)^2>0.$
所以 $S_1>S_2.$

五、解答题(三)
22.解:(1)因为 $13^2-10^2=(13+10)(13-10)=23 \times 3,$
所以 13 和 10 的平方差能被 3 整除.
(2)因为 $(2n+3)^2-(2n)^2=(2n+3+2n)(2n+3-2n)=3(4n+3),$
所以 $2n+3$ 与 $2n$ 的平方差能被 3 整除.
(3)因为 $(m+9)^2-m^2=(m+9+m)(m+9-m)=9(2m+9),$
所以 $m+9$ 与 m 的平方差能被 9 整除.
23.解:(1) $a^2-12a+35=a^2-12a+36-36+35$
 $=(a-6)^2-1=(a-6+1)(a-6-1)=(a-5)(a-7).$
(2) $M=a^2-3a+1=a^2-3a+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+1=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}.$

因为 $\left(a-\frac{3}{2}\right)^2 \geq 0,$
所以当 $a=\frac{3}{2}$ 时, M 有最小值, 最小值为 $-\frac{5}{4}.$
(3) 因为 $a^2+2b^2+c^2-2ab+4b-6c+13=0,$
所以 $(a^2-2ab+b^2)+(b^2+4b+4)+(c^2-6c+9)=0,$
即 $(a-b)^2+(b+2)^2+(c-3)^2=0.$
因为 $(a-b)^2 \geq 0, (b+2)^2 \geq 0, (c-3)^2 \geq 0,$
所以 $a-b=0, b+2=0, c-3=0.$
解得 $a=b=-2, c=3.$
所以 $a+b+c=-2-2+3=-1.$

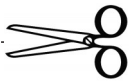


检验: 当 $x=1.5$ 时, $1-x \neq 0.$
所以, 原分式方程的解为 $x=1.5.$
(2) 方程两边都乘 $1-x,$ 得 $3=mx-3+3x.$
整理, 得 $(m+3)x=6.$
解得 $x=\frac{6}{m+3}.$
当 $m+3=0,$ 即 $m=-3$ 时, 该方程无解.
当 $m \neq -3$ 时, 若此分式方程无解, 则 $1-x=0,$ 即 $x=1.$
所以 $m+3=6.$
解得 $m=3.$
综上, m 的值为 -3 或 $3.$
五、解答题(三)
22.解:(1) 设乙电子书每台进价为 x 元, 则甲电子书
每台进价为 $(x+200)$ 元.
根据题意, 得
 $\frac{9\,000}{x+200}=\frac{4\,800}{x} \times (1+50\%).$
解得 $x=800.$
检验: 当 $x=800$ 时, $x(x+200) \neq 0.$
所以, 原分式方程的解为 $x=800.$
 $x+200=1\,000$ (元).

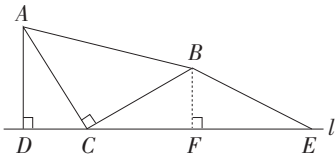
答: 甲电子书每台进价为 1 000 元, 乙电子书每台进
价为 800 元.
(2) ① 设购进甲电子书 m 台, 则购进乙电子书 $(20-m)$ 台.
根据题意, 得
$$\begin{cases} 1\,000m+800(20-m) \geq 17\,800, \\ 1\,000m+800(20-m) \leq 19\,200. \end{cases}$$

解得 $9 \leq m \leq 16.$
因为 m 为正整数,
所以 m 可取 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.
所以共有 8 种进货方案.
② 设总获利为 w 元.
根据题意, 得
 $w=(1\,500-1\,000)m+(1\,450-800-a)(20-m)$
 $=(a-150)m+13\,000-20a.$
因为各方案获利相同,
所以 w 的取值与 m 的值无关.
所以 $a-150=0.$ 解得 $a=150.$
所以, a 的值为 150.
23.解:(1) 1, 3.

(2) 根据题意, 可得 $ab=-2, a+b=-3.$
因为 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+1=\frac{b^2+a^2}{ab}+1=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}+1,$
所以 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+1=\frac{(-3)^2-2 \times (-2)}{-2}+1=-\frac{13}{2}+1=-\frac{11}{2}.$
(3) 因为 $x-\frac{2\,025k-2\,024k^2}{x-1}=2\,025k-2\,024,$
所以 $x-1+\frac{k(2\,024k-2\,025)}{x-1}=2\,025k-2\,025.$
所以 $x-1+\frac{k(2\,024k-2\,025)}{x-1}=2\,024k-2\,025+k.$
所以 $x_1-1=2\,024k-2\,025, x_2-1=k.$
所以 $x_1=2\,024k-2\,024, x_2=k+1.$
所以 $\frac{x_1+4\,048}{x_2}+1$
 $=\frac{2\,024k-2\,024+4\,048}{k+1}+1$
 $=\frac{2\,024(k+1)}{k+1}+1$
 $=2\,024+1$
 $=2\,025.$



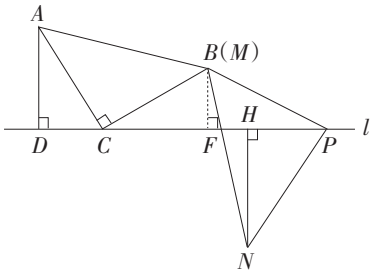
在 $\text{Rt} \triangle ADO$ 和 $\text{Rt} \triangle AEO$ 中,
 $\begin{cases} OA=OA, \\ OD=OE, \end{cases}$
 $\therefore \text{Rt} \triangle ADO \cong \text{Rt} \triangle AEO (\text{HL}).$
 $\therefore \angle 1=\angle 2.$
五、解答题(三)
22.解:(1) 原式 $=(2x^2+4x)-(xy+2y)$
 $=2x(x+2)-y(x+2)$
 $=(x+2)(2x-y).$
(2) 原式 $=(x^2-a^2)+(x+a)$
 $=(x+a)(x-a)+(x+a)$
 $=(x+a)(x-a+1).$
(3) 原式 $=(ax-bx)+(a^2-2ab+b^2)$
 $=x(a-b)+(a-b)^2$
 $=(a-b)(x+a-b).$
23.解:(1) $CE=2AD.$
理由如下: 如图, 过点 B 作 $BF \perp l$ 于点 $F.$



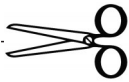
(第23题图)

$\therefore \angle CFB=90^\circ.$
 $\therefore AD \perp l,$
 $\therefore \angle ADC=90^\circ, \angle CAD+\angle DCA=90^\circ.$
 $\therefore \angle ADC=\angle CFB.$
 $\therefore \angle ACB=90^\circ,$
 $\therefore \angle DCA+\angle BCF=90^\circ.$
 $\therefore \angle CAD=\angle BCF.$
在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle CBF$ 中,
 $\begin{cases} \angle ADC=\angle CFB, \\ \angle CAD=\angle BCF, \\ AC=CB, \end{cases}$
 $\therefore \triangle ACD \cong \triangle CBF (\text{AAS}).$
 $\therefore AD=CF.$
 $\therefore BE=BC, BF \perp l,$
 $\therefore CF=EF.$
 $\therefore CE=2CF=2AD.$
(2) $CP=AD+NH.$
理由如下:
如图, 过点 B 作 $BF \perp l$ 于点 $F.$
 $\therefore \angle BFP=90^\circ.$
由 (1), 得 $\triangle ACD \cong \triangle CBF.$
 $\therefore AD=CF.$
 $\therefore NH \perp l,$
 $\therefore \angle PHN=90^\circ, \angle HNP+\angle HPN=90^\circ.$

$\therefore \angle BFP=\angle PHN.$
 $\therefore \angle MPN=90^\circ,$
 $\therefore \angle HPN+\angle FPB=90^\circ.$
 $\therefore \angle HNP=\angle FPB.$
在 $\triangle BFP$ 和 $\triangle PHN$ 中,
 $\begin{cases} \angle BFP=\angle PHN, \\ \angle FPB=\angle HNP, \\ BP=PN, \end{cases}$
 $\therefore \triangle BFP \cong \triangle PHN (\text{AAS}).$
 $\therefore PF=NH.$
 $\therefore CP=CF+PF,$
 $\therefore CP=AD+NH.$



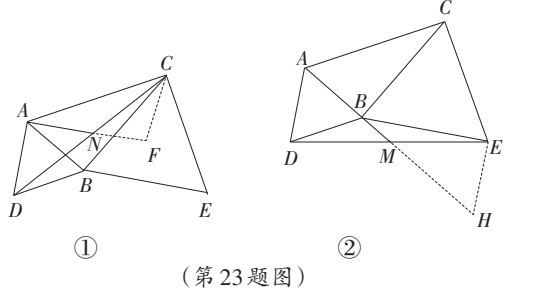
(第23题图)



(第21题图)

(2) 如图, $\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求作, $\triangle A_2B_2C_2$ 的面积 $=2 \times 3 - \frac{1}{2} \times 1 \times 3 - 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = \frac{5}{2}.$
五、解答题(三)
22.解:(1) 1, $(x-1), 3, 3.$
(2) 设另一个因式为 $x^2+bx+c,$ 则 $x^3+ax+1=(x+1)(x^2+bx+c).$
因为 $(x+1)(x^2+bx+c)=x^3+(b+1)x^2+(c+b)x+c,$
所以 $x^3+ax+1=x^3+(b+1)x^2+(c+b)x+c.$

所以 $\begin{cases} 0=b+1, \\ a=c+b, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=0, \\ b=-1, \\ c=1. \end{cases}$
所以 $a=0,$ 另一个因式为 $x^2-x+1.$
(3) $2x-5, 20.$
23.证明:(1) $\because \triangle ABD$ 和 $\triangle BCE$ 是等边三角形,
 $\therefore BD=BA, BC=BE, \angle ABD=\angle CBE=60^\circ.$
 $\therefore \angle ABD+\angle ABC=\angle CBE+\angle ABC,$ 即 $\angle DBC=\angle ABE.$
 $\therefore \triangle ABE \cong \triangle DBC (\text{SAS}).$
 $\therefore AE=CD.$
(2) 如图①, 延长 AN 到 $F,$ 使 $NF=AN,$ 连接 $FC.$
 $\therefore AN=FN, \angle AND=\angle FNC, DN=CN,$
 $\therefore \triangle NAD \cong \triangle NFC (\text{SAS}).$
 $\therefore CF=AD=AB, \angle NCF=\angle NDA.$
 $\therefore AD \parallel CF. \therefore \angle ACF=180^\circ-\angle DAC=60^\circ.$
 $\therefore \angle BAC=\angle FCA.$
又 $AC=CA,$
 $\therefore \triangle ABC \cong \triangle CFA (\text{SAS}).$
 $\therefore CE=BC=AF=2AN.$



(第23题图)

(3) 如图②, 过点 E 作 $EH \parallel AD$ 交 AM 的延长线于点 $H,$ 则 $\angle H=\angle DAB=60^\circ.$
 $\therefore \angle H=\angle BAC. \therefore \angle EBH=180^\circ-(\angle ABC+\angle CBE)=30^\circ,$
 $\angle ACB=180^\circ-\angle A-\angle ABC=180^\circ-60^\circ-90^\circ=30^\circ,$
 $\therefore \angle EBH=\angle ACB.$
又 $BE=CB, \therefore \triangle ABC \cong \triangle HEB (\text{AAS}).$
 $\therefore AB=HE. \therefore AD=HE.$
又 $\angle AMD=\angle HME, \angle DAM=\angle H,$
 $\therefore \triangle MAD \cong \triangle MHE (\text{AAS}). \therefore DM=ME.$