

高考版答案页第11期

数学



扫码免费下载
习题讲解 ppt

第33期

第2-3版专题检测

一、单项选择题

- 1.D 提示:要使原函数有意义,则 $\begin{cases} x^2+x\geq 0, \\ x\neq 0, \end{cases}$ 解得 $x>0$ 或 $x\leq-1$,所以原函数的定义域为 $(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$.故选D.

- 2.B 提示:由题意,得 $f(6)=\log_5 5=1$,所以 $f(f(6))=f(1)=\frac{1}{e}$.故选B.

- 3.B 提示: $y=x+1$ 为非奇非偶函数,不符合题意; $y=\sqrt[3]{x}$ 定义域为 \mathbf{R} ,既是奇函数又是增函数,符合题意; $y=-x^2$ 为偶函数,在 $(-\infty,0)$ 上单调递增,在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,不符合题意; $y=\frac{1}{x}$ 在定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上不单调,不符合题意.故选B.

- 4.C 提示:由 $f(x)=\frac{\sin 3x}{\ln(e^{3x}+1)-x}=\frac{\sin 3x}{\ln(e^{3x}+1)-\ln e^x}=\frac{\sin 3x}{\ln\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)}$,得 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(-x)=\frac{\sin(-3x)}{\ln\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)}=-\frac{\sin 3x}{\ln\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)}=-f(x)$,则 $f(x)$ 为奇函数,排除A;当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 时, $e^x+\frac{1}{e^x}>1$,则 $\ln\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)>0$,又 $\sin 3x>0$,则 $f(x)>0$,排除B、D.故选C.

- 5.D 提示:因为 $f(x)=(m^2-2m-2)x^m$ 为幂函数,且函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $m^2-2m-2=1$ 且 $m>0$,解得 $m=3$,所以 $g(x)=a^{x^3+2}(a>1)$.令 $x=3$,得 $g(3)=a^9+2=3$,所以 $g(x)$ 的图象过定点 $(3,3)$.故选D.

- 6.B 提示:由题意,得 $\begin{cases} m\ln(1+a)=0.4, \\ m\ln(3+a)=0.8, \end{cases}$ 两式相除,

得 $\frac{\ln(3+a)}{\ln(1+a)}=2$,则 $\ln(3+a)=2\ln(1+a)$,所以 $3+a=(1+a)^2$,又 $a>0$,解得 $a=1$,所以 $h=m\ln(t+1)$.设 t 天后金针菇失去的新鲜度为60%,则 $m\ln(t+1)=0.6$,又 $m\ln 2=0.4$,所以 $\frac{\ln(t+1)}{\ln 2}=\frac{3}{2}$,即 $2\ln(t+1)=3\ln 2$,得 $(t+1)^2=8$,则 $t+1=2\sqrt{2}$,得 $t\approx 1.8$.故选B.

- 7.D 提示:令 $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$,则 $g'(x)=\frac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}$,由 $xf'(x)-2f(x)<0$,得 $g'(x)<0$,所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,由 $f(2^x)-4>0$,得 $\frac{f(2^x)}{4^x}>1$,又 $f(2)=4$,则 $\frac{f(2^x)}{(2^x)^2}>\frac{f(2)}{2^2}$,所以 $g(2^x)>g(2)$,又 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减, $g(2^x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减,所以 $2^x<2$,解得 $x<1$.故选A.

- 8.C 提示:由题意,得 $a\neq 0$ 且 $x>0$,不等式 $\ln x\leq ax^3-bx^2-1$,即 $\frac{\ln x+1}{x^2}\leq a\left(x-\frac{b}{a}\right)$ 恒成立.设 $f(x)=\frac{\ln x+1}{x^2}$,则 $f'(x)=\frac{-1-2\ln x}{x^3}$,当 $x\in(0,e^{\frac{1}{2}})$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增,当 $x\in(e^{\frac{1}{2}},+\infty)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减,所以 $f(x)_{\max}=f(e^{\frac{1}{2}})=\frac{e}{2}$,且 $x>e^{\frac{1}{2}}$ 时, $f(x)>0$,又 $\frac{\ln x+1}{x^2}\leq a\left(x-\frac{b}{a}\right)$ 恒成立,所以 $y=a\left(x-\frac{b}{a}\right)$ 的图象恒在 $f(x)$ 的图象的上方.当 $a<0$ 时,不等式不恒成立,不符合题意;当 $a>0$ 时,直线 $y=a\left(x-\frac{b}{a}\right)$ 在 x 轴上的截距为 $\frac{b}{a}$,令 $f(x)=0$,得 $x=\frac{1}{e}$,所以当直线 $y=a\left(x-\frac{b}{a}\right)$ 与 $f(x)$ 在点 $\left(\frac{1}{e},0\right)$ 处相切时,横截距 $\frac{b}{a}$ 取得最大值, $f'\left(\frac{1}{e}\right)=e^3$,此时切线方程为 $y=e^3\left(x-\frac{1}{e}\right)$,则 $a=e^3$, $b=e^2$,所以 $\frac{b}{a}$ 的最大值为 $\frac{1}{e}$.故选C.

二、多项选择题

- 9.ACD 提示:对于A,B,当 $-1< x<3$ 时, $f'(x)>0$,则 $(-1,3)$ 为函数 $y=f(x)$ 的单调递增区间,故A正确,B错误;对于C,当 $-1< x<3$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增,当 $3< x<5$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减,则 $x=3$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点,故C正确;对于D,当 $3< x<5$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减,当 $x>5$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增,所以 $x=5$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点,故D正确.故选ACD.

- 10.BCD 提示:对于A,因为 $f(1+x)-f(1-x)=0$,所以 $f'(1+x)+f'(1-x)=0$, $f'(1+x)=-f'(1-x)$,即 $f'(x)$ 关于 $(1,0)$ 对称, $f'(1)=0$,故A错误;对于B,因为 $f'(x+2)$ 为偶函数,所以 $f'(x+2)=f'(-x+2)$,即 $f'(x)$ 关于 $x=2$ 对称,则 $f'(3)=f'(1)=0$,故B正确;对于C,因为 $f'(x)$ 关于 $x=2$ 对称和 $(1,$

- 17.解:(1)在 $\triangle ABN$ 中,由正弦定理,得 $\frac{AB}{\sin \angle ANB}=\frac{AN}{\sin \angle ABN}$,即 $\frac{a}{\sin(\delta-\beta)}=\frac{AN}{\sin(\pi-\delta)}$,所以 $AN=\frac{a\sin \delta}{\sin(\delta-\beta)}$.

- (2)在 $\triangle ABM$ 中,由正弦定理,得 $\frac{AB}{\sin \angle AMB}=\frac{AM}{\sin \angle ABM}$,即 $\frac{a}{\sin(\pi-\alpha-\gamma)}=\frac{AM}{\sin \gamma}$,所以 $AM=\frac{a\sin \gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$,又 $a=10\sqrt{3}$, $\alpha=75^\circ$, $\gamma=45^\circ$, $\beta=30^\circ$, $\delta=60^\circ$,则 $AM=\frac{10\sqrt{3}\times \sin 45^\circ}{\sin 120^\circ}=10\sqrt{2}$,由(1)得 $AN=\frac{10\sqrt{3}\sin 60^\circ}{\sin(60^\circ-30^\circ)}=30$,在 $\triangle AMN$ 中, $\angle MAN=\alpha-\beta=45^\circ$,由余弦定理,得 $MN^2=AM^2+AN^2-2AM\cdot AN\cdot \cos \angle MAN=(10\sqrt{2})^2+30^2-2\times 10\sqrt{2}\times 30\times \frac{\sqrt{2}}{2}=500$,则 $MN=10\sqrt{5}$,所以 M,N 之间的距离为 $10\sqrt{5}$.

- 18.解:(1)因为 $2(a-c)\sin \frac{B+C}{2}\cos \frac{\pi-A}{2}=b\sin B-c\sin C$,且 $B+C=\pi-A$,所以 $2(a-c)\sin \frac{\pi-A}{2}\cos \frac{\pi-A}{2}=b\sin B-c\sin C$,得 $(a-c)\sin(\pi-A)=b\sin B-c\sin C$,即 $(a-c)\cdot \sin A=b\sin B-c\sin C$,由正弦定理,得 $(a-c)a=b^2-c^2$,即 $a^2+c^2-b^2=ac$,由余弦定理的推论,得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$,又 $0<B<\pi$,则 $B=\frac{\pi}{3}$,又 $b=2$,由余弦定理,得 $b^2=a^2+c^2-2accos B$,则 $4=a^2+c^2-ac\geq 2ac-ac=ac$,当且仅当 $a=c=2$ 时,取等号,所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B\leq \frac{1}{2}\times 4\times \frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$,所以 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$.

- (2)设 $\angle ADC=\theta(0<\theta<\pi)$,由 $DA=2$, $DC=1$,得 $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}DA\cdot DC\cdot \sin \theta=\sin \theta$,在 $\triangle ADC$ 中,由余弦定理,得 $AC^2=DA^2+DC^2-2DA\cdot DC\cos \theta=5-4\cos \theta$,由(1)知, $B=\frac{\pi}{3}$,又 $A=\frac{\pi}{3}$,所以 $\triangle ABC$ 为正三角形,所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}AC^2=\frac{5\sqrt{3}}{4}-\sqrt{3}\cos \theta$,所以 $S_{ABCD}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABC}=\sin \theta+\frac{5\sqrt{3}}{4}-\sqrt{3}\cos \theta=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{5\sqrt{3}}{4}+2$,所以 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=1$,因为 $0<\theta<\pi$,所以 $\theta-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$,则 $\theta=\frac{5\pi}{6}$.

- 19.解:(1)因为 $f(x)=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos^2 x=\frac{1-\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)}{2}+\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x}{2}+\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1+\cos 2x}{2}$

- $=\frac{3}{4}\cos 2x+1=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$,所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\pi$.令 $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$,得 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$, $k\in\mathbf{Z}$,得 $f(x)$ 的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6},1\right)(k\in\mathbf{Z})$.

- (2)将函数 $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]+1=1$,当 $x=1,2,3,\cdots$ 时, $\sin\frac{\pi}{2}x$ 的值依次为 $1,0,-1,0,\cdots$ 成周期性变化,且周期为4,相邻4个之和为0,所以 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2\ 024)=2\ 024\times 2-\left(\sin\frac{\pi}{2}+\sin\pi+\cdots+\sin\frac{2\ 024\pi}{2}\right)=4\ 048-506\times 0=4\ 048$.

- 四、解答题
15.解:(1)因为 $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, $\cos \alpha=-\frac{4}{5}$,所以 $\sin \alpha=-\frac{3}{5}$,所以 $\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin \alpha\cos \frac{2\pi}{3}+\cos \alpha\sin \frac{2\pi}{3}=-\frac{3}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$.

- (2)由题意,得 $\tan \beta=\frac{3}{7}$,由(1)得, $\tan \alpha=-\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}=\frac{3}{4}$,所以 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan \alpha}{1-\tan^2 \alpha}=\frac{24}{7}$,

- 所以 $\tan(2\alpha-\beta)=\frac{\tan 2\alpha-\tan \beta}{1+\tan 2\alpha\tan \beta}=\frac{147}{121}$.

- 16.解:(1)由 $2a-b=2ccos B$,得 $2sin A-sin B=2sin Ccos B$,则 $2sin(B+C)-sin B=2sin Ccos B$,即 $2sin Bcos C+2cos Bsin C-sin B=2sin Ccos B$,所以 $2sin Bcos C=sin B$,又 $B\in(0,\pi)$,所以 $\sin B\neq 0$,所以 $\cos C=\frac{1}{2}$,又 $C\in(0,\pi)$,所以 $C=\frac{\pi}{3}$.

- (2)因为 D 为 AB 的中点,所以 $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$,所以 $\overrightarrow{CD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})^2$,所以 $13=\frac{1}{4}(b^2+a^2+2ab\cdot\frac{1}{2})$,所以 $a^2+b^2+ab=52$,因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$,所以 $\frac{1}{2}ab\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$,则 $ab=12$, $a^2+b^2=40$,在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理,得 $c^2=a^2+b^2-2abcos\angle ACB=a^2+b^2-ab=40-12=28$,所以 $c=2\sqrt{7}$.

二、多选题

- 9.BC 提示:对于A,若 $a\parallel b$,则 $1\cdot x-2\times(-2)=0$,解得 $x=-4$,故A错误;对于B,若 $x=2$,则 $a+b=(-1,4)$,所以 $|a+b|=\sqrt{17}$,故B正确;对于C,若 $a\perp b$,则 $a\cdot b=-2+2x=0$,解得 $x=1$,故C正确;对于D,若 $\cos \theta=\frac{a\cdot b}{|a||b|}=\frac{-2+2x}{\sqrt{5}\times\sqrt{4+x^2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$,则 $x=2$ 或 $x=\frac{2}{7}$,故D错误.故选BC.

- 10.ABD 提示:由 $a^2+c^2-b^2=ac$ 及余弦定理的推论,得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{ac}{2ac}=\frac{1}{2}$,又 $B\in(0,\pi)$,所以 $B=\frac{\pi}{3}$,由正弦定理及 $\sin B=3\sin A\sin C$,得 $b^2=3ac$,又 $b=1$,所以 $ac=\frac{1}{3}$,所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{12}$,因为 $a^2+c^2-b^2=ac$,所以 $b^2=1=a^2+c^2-ac=(a+c)^2-2ac=(a+c)^2-1$,则 $a+c=\sqrt{2}$,所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=\sqrt{2}+1$.故选ABD.

- 11.ABD 提示:由图象,知 $A=2$, $T=4\times\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)=\pi$,所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$,所以 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$,又 $f(x)$ 过点 $\left(\frac{\pi}{12},2\right)$,得 $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=1$,则 $\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$,得 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$,又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.对于A,由 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=0$,得 $f(x)$ 的图象关于 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 对称,故A正确;

- 对于B,由 $f\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=-2$,故B正确;对于C,当 $x\in\left[-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right]$ 时, $2x+\frac{\pi}{3}\in[-\pi,0]$,则 $f(x)$ 不单调,故C错误;对于D, $f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=2\sin 2x$,故D正确.故选ABD.

- 三、填空题
12. $\frac{16}{65}$ 提示:设 a,b 的夹角为 θ ,因为 $a=(4,3)$, $2a+b=(3,18)$,所以 $b=2a+b-2a=(-5,12)$,所以 $a\cdot b=16$, $|a|=5$, $|b|=13$,所以 $\cos \theta=\frac{a\cdot b}{|a||b|}=\frac{16}{65}$.

13. $-\frac{\pi}{12}$ 提示:因为 $\cos 2\alpha=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$,所以 $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha-\sin \alpha)$.又 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,所以 $\cos \alpha-\sin \alpha\neq 0$,则 $\cos \alpha+\sin \alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$,由 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,得 $\alpha+\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$,则 $\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}$,解得 $\alpha=-\frac{\pi}{12}$.

- 14.4 048 提示:因为 $f(x)=A\cos^2(\omega x+\varphi)+1=\frac{1}{2}A\cdot \cos(2\omega x+2\varphi)+\frac{1}{2}A+1$, $f(x)$ 的最大值是3,所以 $A+1=3$,得 $A=2$,则 $f(x)=\cos(2\omega x+2\varphi)+2$,又 $f(x)$ 的图象与 y 轴的交点坐标为 $(0,2)$,所以 $\cos 2\varphi=0$,又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以 $2\varphi=\frac{\pi}{2}$,则 $\varphi=\frac{\pi}{4}$,因为 $f(x)$ 图象的相邻两个对称中心的距离为2,则 $\frac{1}{2}T=2$,得 $T=4$,即 $\frac{2\pi}{\omega}=4$,得 $\omega=\frac{\pi}{4}$,所以 $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)+2=-\sin\frac{\pi}{2}x+2$.当 $x=1,2,3,\cdots$ 时, $\sin\frac{\pi}{2}x$ 的值依次为 $1,0,-1,0,\cdots$ 成周期性变化,且周期为4,相邻4个之和为0,所以 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2\ 024)=2\ 024\times 2-\left(\sin\frac{\pi}{2}+\sin\pi+\cdots+\sin\frac{2\ 024\pi}{2}\right)=4\ 048-506\times 0=4\ 048$.

四、解答题

- 15.解:(1)因为 $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, $\cos \alpha=-\frac{4}{5}$,所以 $\sin \alpha=-\frac{3}{5}$,所以 $\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin \alpha\cos \frac{2\pi}{3}+\cos \alpha\sin \frac{2\pi}{3}=-\frac{3}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$.

- (2)由题意,得 $\tan \beta=\frac{3}{7}$,由(1)得, $\tan \alpha=-\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}=\frac{3}{4}$,所以 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan \alpha}{1-\tan^2 \alpha}=\frac{24}{7}$,

- 所以 $\tan(2\alpha-\beta)=\frac{\tan 2\alpha-\tan \beta}{1+\tan 2\alpha\tan \beta}=\frac{147}{121}$.

- 16.解:(1)由 $2a-b=2ccos B$,得 $2sin A-sin B=2sin Ccos B$,则 $2sin(B+C)-sin B=2sin Ccos B$,即 $2sin Bcos C+2cos Bsin C-sin B=2sin Ccos B$,所以 $2sin Bcos C=sin B$,又 $B\in(0,\pi)$,所以 $\sin B\neq 0$,所以 $\cos C=\frac{1}{2}$,又 $C\in(0,\pi)$,所以 $C=\frac{\pi}{3}$.

- (2)因为 D 为 AB 的中点,所以 $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$,所以 $\overrightarrow{CD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})^2$,所以 $13=\frac{1}{4}(b^2+a^2+2ab\cdot\frac{1}{2})$,所以 $a^2+b^2+ab=52$,因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$,所以 $\frac{1}{2}ab\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$,则 $ab=12$, $a^2+b^2=40$,在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理,得 $c^2=a^2+b^2-2abcos\angle ACB=a^2+b^2-ab=40-12=28$,所以 $c=2\sqrt{7}$.

- 减;当 $a>0$ 时,令 $f'(x)=0$,得 $x=\frac{a+2}{2a}$,又 $\frac{a+2}{2a}>\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$,所以当 $x>\frac{a+2}{2a}$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增,当 $\frac{1}{2}<x<\frac{a+2}{2a}$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减.

- 综上,当 $a\leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减;当 $a>0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},\frac{a+2}{2a}\right)$ 内单调递减,在 $\left(\frac{a+2}{2a},+\infty\right)$ 上单调递增.

- 18.解:(1)当 $a=1$ 时, $f(x)=e^{x-1}-\ln x-1$, $x\in(0,+\infty)$,则 $f'(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$,易知 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,且 $f'(1)=0$,所以当 $x\in(0,1)$ 时, $f'(x)<0$,当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,1)$,单调递增区间是 $(1,+\infty)$,所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(1)=0$.

- (2)由 $f(x)=0$,得 $a=\frac{\ln x+1}{e^{x-1}}$, $x\in(0,+\infty)$,令 $h(x)=\frac{\ln x+1}{e^{x-1}}$,则 $h'(x)=\frac{x}{e^{x-1}}-\frac{1-\ln x-1}{e^{x-1}}$,令 $g(x)=\frac{1}{x}-\ln x-1$,易知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,且 $g(1)=0$,所以当 $x\in(0,1)$ 时, $g(x)>0$, $h'(x)>0$, $h(x)$ 单调递增,当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $g(x)<0$, $h'(x)<0$, $h(x)$ 单调递减,所以 $h(x)_{\max}=h(1)=1$,又 $h\left(\frac{1}{e}\right)=0$,则当 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 时, $h(x)<0$,当 $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 时, $h(x)>0$,当 $x\rightarrow+\infty$ 时, $h(x)\rightarrow 0$,当 $x\rightarrow 0$ 时, $h(x)\rightarrow -\infty$,作出 $y=h(x)$ 的大致图象(图略).又 $f(x)$ 有且只有2个不同的零点等价于 $y=h(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 有且只有2个交点,所以 a 的取值范围是 $(0,1)$.

- 19.(1)解:当 $a=0$ 时, $f(x)=e^x-1-x$,定义域为 \mathbf{R} , $f'(x)=e^x-1$,当 $x<0$ 时, $f'(x)<0$,当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,0)$,单调递增区间为 $(0,+\infty)$.

- (2)解: $f'(x)=e^{x-1}-2ax$, $x\geq 0$,令 $h(x)=e^{x-1}-2ax$,则 $h'(x)=e^x-2a$,当 $2a\leq 1$,即 $a\leq \frac{1}{2}$ 时, $h'(x)\geq 0$, $h(x)$ 单调递增,所以 $h(x)\geq h(0)$,即 $f'(x)\geq f'(0)=0$,所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,则 $f(x)\geq f(0)=0$,满足题意;当 $2a>1$,即 $a>\frac{1}{2}$ 时,当 $0\leq x\leq \ln 2a$ 时, $h'(x)<0$, $h(x)$ 单调递减,所以 $h(x)<h(0)=0$,即 $f'(x)<f'(0)=0$,所以 $f(x)$ 在 $(0,\ln 2a)$ 上单调递减,则 $f(x)<f(0)=0$,不满足题意.

- 综上,实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

- (3)证明:由(2)得,当 $a=\frac{1}{2}$ 且 $x>0$ 时, $e^x-1>x+\frac{x^2}{2}=x^2+2x$,要证 $(e^x-1)\ln(x+1)>x^2$,需证 $e^x-1>\frac{x^2}{\ln(x+1)}$,即证 $\frac{x^2+2x}{2}>\frac{x^2}{\ln(x+1)}$,即证 $\ln(x+1)>\frac{2x}{x+2}$.设 $F(x)=\ln(x+1)-\frac{2x}{x+2}(x>0)$,得 $F'(x)=\frac{x^2}{(x+1)(x+2)}$,当 $x>0$ 时, $F'(x)>0$ 恒成立,所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,又 $F(0)=0$,所以 $F(x)>0$ 恒成立,即原不等式成立.

第34期

第2-3版专题检测

一、单项选择题

- 1.B 提示:令 $t=\sqrt{x}+1$,则 $t\geq 1$, $x=t^2-2t+1$,因为 $f(\sqrt{x}+1)=x+3$,所以 $f(t)=t^2-2t+1+3=t^2-2t+4(t\geq 1)$,即 $f(x)=x^2-2x+4(x\geq 1)$.故选B.

- 2.C 提示:因为 $4^x=3^x=m$,则 $x=\log_4 m$, $y=\log_3 m$,且 $m>0$,所以 $\frac{1}{x}=\frac{1}{\log_4 m}=\frac{1}{\log_3 m\cdot \log_4 3}=\log_3 4+2\log_3 3=\log_3 36=2$,所以 $m^2=36$,又 $m>0$,所以 $m=6$.故选C.

- 3.C 提示:因为 $f(x+2)f(x)=1$,所以 $f(x+2)=\frac{1}{f(x)}$,所以 $f(x+4)=\frac{1}{f(x+2)}=f(x)$,即 $f(x+4)=f(x)$,所以函数 $f(x)$ 的一个周期为4,又 $f(0)\in(1,2)$,所以 $f(2\ 026)=f(4\times 506+2)=f(2)=\frac{1}{f(0)}\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.故选C.

高考版答案页第 11 期

积为 $S_{\text{球}}=4\pi R^2\left(\sqrt{3}\right)^2=12\pi$,故 D 正确.故选 ACD.

10.ACD 提示:因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$, AB,ADC 平面 $ABCD$,所以 $PA\perp AB,PA\perp AD$.又 $AB\perp AD$,则以 A 为坐标原点, AB,AD,AP 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴,建立空间直角坐标系,则 $A(0,0,0),B(2,0,0),C(2,2,0),D(0,2,0),P(0,0,2),E(0,1,1),F(2,1,0)$,对于 $A,\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,故 A 正确;对于 $B,\overrightarrow{BE}=(-2,1,1),|\overrightarrow{BE}|=\sqrt{6}$,故 B 错误;对于 $C,\overrightarrow{EF}=(2,0,-1)$,平面 PAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,1,0)$,则 $\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}=0$,所以 $EF\perp\boldsymbol{n}$,又 $EF\subset$ 平面 PAB ,所以 $EF\parallel$ 平面 PAB ,故 C 正确;对于 D ,因为 $\overrightarrow{BE}=(-2,1,1),\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$,所以异面直线 BE 与 PA 夹角

的余弦值为 $\left|\frac{\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{BE}||\overrightarrow{AP}|}\right|=\frac{\sqrt{6}}{6}$,故 D 正确.故选 ACD.

11.BCD 提示:由题意,得 AE,AB,AD 两两垂直,则以 A 为原点, AB,AD,AE 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴,建立空间直角坐标系,则 $B(1,0,0),C(1,2,0),D(0,1,0),E(0,0,2),F\left(1,2,\frac{8}{7}\right)$,所以 $\overrightarrow{BD}=(-1,1,0),\overrightarrow{CE}=(-1,-2,2),\overrightarrow{BE}=(-1,0,2)$.对于 A ,因为 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CE}=-1\neq 0$,所以 BD,EC 不垂直,故 A 错误;对于 B ,平面 ADE 的一个法向量为 $\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$,又 $\overrightarrow{BF}=\left(0,2,\frac{8}{7}\right)$,得 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,则 $BF\perp AB$,又 $BF\subset$ 平面 ADE ,所以 $BF\parallel$ 平面 ADE ,故 B 正确;对于 C ,设平面 EBD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$,所以 $\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}=-a+b=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BE}=-a+2c=0,\end{array}\right.$ 令 $b=2$,得 $a=2,c=1$,则 $\boldsymbol{m}=(2,2,1)$,因为底面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\overrightarrow{AE}=(0,0,2)$,设平面 EBD 与平面 $ABCD$ 的夹角为 α ,则 $\cos\alpha=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{AE}\rangle|=|\frac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{AE}}|=\frac{1}{3}$,故 C 正确;对于 D ,设直线 CE 与平面 BDE 所成角为 θ ,则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{CE}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CE}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{CE}|}=\frac{4}{9}$,故 D 正确.

故选 BCD.

三、填空题

12. $\frac{16\pi}{3}$ 提示:几何体可视为半径为 1 的球和底面圆半径为 1,高为 h 的圆柱组合而成,所以几何体的表面积 $S=4\pi\times1^2+2\pi\times1\times h=4\pi+2\pi h=12\pi$,解得 $h=4$,所以该几何体的体积 $V=\frac{4\pi}{3}\times1^3+\pi\times1^2\times4=\frac{16\pi}{3}$.

13. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 提示:以 A 为原点, AB,AA_1 所在直线分别为 x 轴, z 轴,在平面 ABC 内过 A 作 $Ay_1\perp AB$,建立空间直角坐标系,则 $A(0,0,0),B(1,0,0),B_1(1,0,1),C_1\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$,所以 $\overrightarrow{AB_1}=(1,0,1),\overrightarrow{BC_1}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$,设 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB_1}=(t,0,t)$,以 $\overrightarrow{AB_1}=(1,0,1),\overrightarrow{BC_1}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$ 为平面 BB_1C_1C 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}x-\frac{a}{2}y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EC}=x+\frac{a}{2}y-z=0,\end{array}\right.$ 令 $x=a$,得 $y=1,z=\frac{3a}{2}$,所以 $\boldsymbol{n}=\left(a,1,\frac{3a}{2}\right)$,设 $\overrightarrow{PG}=\lambda\overrightarrow{PC},\lambda\in[0,1]$,因为 $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PG}=(\lambda,\lambda a,2-2\lambda)$,因为 $AG\perp$ 平面 EFC ,则 $\overrightarrow{AG}\perp\boldsymbol{n}$,所以 $\frac{\lambda a}{1}=\frac{2-2\lambda}{\frac{3a}{2}}$,解得 $a=1,\lambda=\frac{4}{7}$,则 $\frac{CG}{CP}=\frac{3}{7}$.故选 B.

数学

所以 $\angle ADC=135^\circ$,所以 $\angle BDC=\angle ADC-\angle ADB=90^\circ$,即 $CD\perp BD$,故 B 正确;对于 A ,由 B 项知, $CD\perp BD$,又平面 $ABD\perp$ 平面 $BCD,CD\subset$ 平面 BCD ,平面 $ABD\cap$ 平面 $BCD=BD$,所以 $CD\perp$ 平面 ABD ,所以 $CD\perp AB$,故 A 正确;对于 C ,由 A 项知, $CD\perp$ 平面 ABD ,因为 $CD\subset$ 平面 ADC ,所以平面 $ADC\perp$ 平面 ABD ,故 C 正确;对于 D ,过点 A 作 $AE\perp BD$,垂足为 E ,因为平面 $ABD\perp$ 平面 BCD,AEC 平面 ABD ,平面 $ABD\cap$ 平面 $BCD=BD$,所以 $AE\perp$ 平面 BCD ,又 $AE\subset$ 平面 ABC ,所以平面 ABC 与平面 BCD 不垂直,故 D 错误.故选 D.

6.A 提示:当三棱锥 $M-BCD$ 的体积最大时,点 M 到平面 $ABCD$ 的距离最大,此时点 M 位于 \overrightarrow{AD} 的中点处,过点 M 作 $MO\perp AD$,则 O 为 AD 中点,在菱形 $ABCD$ 中, $\angle ABC=\frac{\pi}{3}$,则 $OC\perp AD$,又平面 $AMD\perp$ 底面 $ABCD$,平面 $AMD\cap$ 平面 $ABCD=AD,OC\subset$ 平面 $ABCD$,则 $OC\perp$ 平面 AMD ,所以 $MO\perp OC$,故 OC,OD,OM 两两垂直,以 O 为坐标原点,以 OC,OD,OM 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴,建立空间直角坐标系,则 $B(\sqrt{3},-2,0),C(\sqrt{3},0,0),M(0,0,1),\overrightarrow{MB}=(\sqrt{3},-2,-1),\overrightarrow{MC}=(\sqrt{3},0,-1)$,设平面 MBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MB}=\sqrt{3}x-2y-z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MC}=\sqrt{3}x-z=0,\end{array}\right.$ 令 $x=1$,得 $y=0,z=\sqrt{3}$,则 $\boldsymbol{n}=(1,0,\sqrt{3})$,可取平面 BCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$,则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,又二面角 $M-BC-D$ 为锐二面角,所以二面角 $M-BC-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.故选 A.

7.B 提示:因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$,所以 $PA\perp AB,PA\perp AD$,又底面 $ABCD$ 是矩形,所以 $AB\perp AD$,以 A 为坐标原点, AB,AD,AP 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴,建立空间直角坐标系,设 $AD=a$,则 $A(0,0,0),P(0,0,2),C(1,a,0),E\left(0,\frac{a}{2},1\right),F\left(\frac{1}{2},0,1\right)$,所以 $\overrightarrow{EF}=\left(\frac{1}{2},-\frac{a}{2},0\right),\overrightarrow{AP}=(0,0,2),\overrightarrow{PC}=(1,a,-2),\overrightarrow{EC}=\left(1,\frac{a}{2},-1\right)$,设平面 EFC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}x-\frac{a}{2}y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EC}=x+\frac{a}{2}y-z=0,\end{array}\right.$ 令 $x=a$,得 $y=1,z=\frac{3a}{2}$,所以 $\boldsymbol{n}=\left(a,1,\frac{3a}{2}\right)$,设 $\overrightarrow{PG}=\lambda\overrightarrow{PC},\lambda\in[0,1]$,因为 $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PG}=(\lambda,\lambda a,2-2\lambda)$,因为 $AG\perp$ 平面 EFC ,则 $\overrightarrow{AG}\perp\boldsymbol{n}$,所以 $\frac{\lambda a}{1}=\frac{2-2\lambda}{\frac{3a}{2}}$,解得 $a=1,\lambda=\frac{4}{7}$,则 $\frac{CG}{CP}=\frac{3}{7}$.故选 B.

8.C 提示:在题图 6①中,由 $f(x)=\sin\left(\pi x+\frac{5\pi}{6}\right)$,得 $A\left(-\frac{1}{3},1\right),B\left(\frac{2}{3},-1\right),D\left(\frac{2}{3},0\right),M\left(0,\frac{1}{2}\right)$,在题图 6②中,以 O 为原点,以 OD,OM 分别为 y 轴, z 轴,建立空间直角坐标系,则 $A\left(0,-\frac{1}{3},1\right),B\left(1,\frac{2}{3},0\right),M\left(0,0,\frac{1}{2}\right),D\left(0,\frac{2}{3},0\right)$,则 $\overrightarrow{AB}=(1,1,-1)$,得 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3}$,故 A 正确;设平面 ABM 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,又 $\overrightarrow{AM}=\left(0,\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right)$,所以 $\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=x+y-z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}y-\frac{1}{2}z=0,\end{array}\right.$ 取 $y=3$,则 $z=2,x=-1$,所以平面 ABM 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(-1,3,2)$,又 $\overrightarrow{DB}=(1,0,0)$,所以点 D 到平面 ABM 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{DB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{14}$,故 B 正确;点 D 到直线 AB 的距离为 $\sqrt{|\overrightarrow{DB}|^2-\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,故 C 错误;平面 OBD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$,则平面 OBD 与平面 ABM 夹角的余弦值为 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=|\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}|=\frac{\sqrt{14}}{7}$,故 D 正确.故选 C.

二、多项选择题

9.ACD 提示:如图,画出圆台的轴截面,则四边形 $ABCD$ 是等腰梯形,且 $DN=1,AM=3$,内切圆 O 是球的大圆,所以圆台的母线长为 $AD=AE+ED=AM+DN=4$,故 A 正确;连接 OA,OD,OE ,则 $\triangle AOD$ 是直角三角形,且 $OE=AE\cdot DE=3$,所以球的半径为 $R=OE=\sqrt{3}$,则圆台的高 $MN=2R=2\sqrt{3}$,所以圆台的体积为 $V_{\text{圆台}}=\frac{1}{3}\pi\cdot(1^2+3^2+1\times3)\times2\sqrt{3}=\frac{26\sqrt{3}}{3}\pi$,故 B 错误;圆台的表面积为 $S_{\text{圆台}}=\pi\times(1^2+3^2)+\pi(1+3)\times4=26\pi$,故 C 正确;球 O 的表面

R 上单调递增,又 $x\in[0,1]$,则 $f(x)_{\min}=f(0)=1+a$.若 $a>0$, $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减,在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增,又 $x\in[0,1]$,则若 $1<a\leq e$,则 $0<\ln a<1,f(x)$ 在 $[0,\ln a)$ 上单调递减,在 $(\ln a,1]$ 上单调递增,所以 $f(x)_{\min}=f(\ln a)=2a-\ln a$;若 $a\geq e$,则 $\ln a\geq 1,f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减,所以 $f(x)_{\min}=f(1)=e$;若 $0<a\leq 1$,则 $\ln a\leq 0,f(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递增, $f(x)_{\min}=f(0)=1+a$.

综上, $f(x)_{\min}=\begin{cases} 1+a,a\leq 1,\\ 2a-\ln a,1<a\leq e,\\ e,a\geq e. \end{cases}$

(2)证明:由题意结合(1)可知 $a>0$,此时 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减, $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增,设 $x_1<x_2$,又 $f(0)=1+a>0$,所以 $0<x_1<\ln a<x_2$,要证 $x_1x_2<x_1+x_2$,即证 $(x_1-1)(x_2-1)<1$,由 $f(x)=0$,得 $e^x=a(x-1)$,又 $f(x_1)=f(x_2)=0$,则 $x_1-1=\frac{e^{x_1}}{a},x_2-1=\frac{e^{x_2}}{a}$,即证 $e^{x_1+x_2}<a^2$,即证 $x_1+x_2<2\ln a$.设 $F(x)=f(x)-f(2\ln a-x)=e^x-ax-e^{2\ln a-x}+a(2\ln a-x)=e^x-2ax-\frac{a^2}{e^x}+2a\ln a$,

$x>0$,则 $F'(x)=e^x-2a+\frac{a^2}{e^x}\geq 2\sqrt{a^2}-2a=0$,当且仅当 $e^x=\frac{a^2}{e^x}$,即 $x=\ln a$ 时,等号成立,所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,由 $0<x_1<\ln a<x_2$,得 $F(x_1)<F(\ln a)=0$,即 $f(x_1)<f(2\ln a-x_1)$,又 $f(x_1)=f(x_2)$,所以 $f(x_2)<f(2\ln a-x_1)$,由 $x_1<\ln a$,得 $2\ln a-x_1>\ln a$,又 $x_2>\ln a$,且 $f(x)$ 在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增,所以 $x_2<2\ln a-x_1$,即 $x_1+x_2<2\ln a$,所以 $x_1x_2<x_1+x_2$.

19.(1)解: $f'(x)=2e^x-a$,当 $a\leq 0$ 时, $f'(x)>0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,所以 $f'(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增;当 $a>0$ 时,令 $f'(x)<0$,得 $x<\ln\frac{a}{2}$,令 $f'(x)>0$,得 $x>\ln\frac{a}{2}$,所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\frac{a}{2}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\ln\frac{a}{2},+\infty\right)$ 上单调递增.

综上,当 $a\leq 0$ 时, $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增;当 $a>0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\frac{a}{2}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\ln\frac{a}{2},+\infty\right)$ 上单调递增.

(2)证明:(i)由 $f(x)=g'(x)$,得 $2e^x-ax=xe^x+2$,得 $(2-x)\cdot e^x-ax-2=0$.令 $k(x)=(2-x)e^x-ax-2$,则 $k'(x)=(1-x)e^x-a$,令 $m(x)=(1-x)e^x-a$,则 $m'(x)=-xe^x$,当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $m'(x)<0,m(x)$ 单调递减,则 $k'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,又 $0\leq a<1$,则 $k'(0)=1-a>0,k'(1)=-a\leq 0$,所以 $\exists x_1\in(0,1]$,使得 $k'(x_1)=0$.当 $x\in(0,x_1)$ 时, $k'(x)>0,k(x)$ 单调递增;当 $x\in(x_1,+\infty)$ 时, $k'(x)<0,k(x)$ 单调递减,又 $k(0)=0,k(2)=-2a-2<0$,所以 $k(x)$ 在 $(0,2)$ 上只有一个零点 x_0 ,所以 $k(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上只有一个零点 x_0 ,所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在“单交点”($x_0,f(x_0)$).

(ii)因为 $0<x_0<2$,所以要证 $\ln[x_0(a+1)]<1$,即证 $x_0(a+1)<e$,即证 $ax_0+x_0-e<0$,又 $x_0\in(0,2)$,所以只需证 $ax_0+2-e\leq 0$.由(1)知, $k(x_0)=(2-x_0)e^{x_0}-ax_0-2=0$,得 $(2-x_0)e^{x_0}=ax_0+2$,所以只需证 $(2-x_0)e^{x_0}-e\leq 0$ 即可.令 $h(x)=(2-x)e^x-e$, $0<x<2$,则 $h'(x)=(1-x)e^x$,当 $x\in(0,1)$ 时, $h'(x)>0,h(x)$ 单调递增,当 $x\in(1,2)$ 时, $h'(x)<0,h(x)$ 单调递减,所以 $h(x)_{\max}=h(1)=0$,则 $(2-x_0)e^{x_0}-e\leq 0$,所以原不等式得证.

第 35 期

第 2-3 版专题检测

一、单项选择题

1.D 提示:若 $\alpha\parallel\beta,m\subset\alpha,n\subset\beta$,则 m 与 n 平行或异面,故 A 错误;若 $\alpha\perp\beta,m\parallel\alpha,n\parallel\beta$,则 m 与 n 平行、相交或异面, B 错误;若 $m\perp\alpha,m\parallel n$,则 $n\perp\alpha$.又 $n\perp\beta$,则 $\alpha\parallel\beta$,故 C 错误;若 $m\perp n,m\perp\alpha$,则 $n\parallel\alpha$ 或 $n\subset\alpha$.又 $n\perp\beta$,则 $\alpha\perp\beta$,故 D 正确.故选 D.

2.C 提示:设圆锥的底面半径为 r ,高为 h ,母线长为 l ,由 $2\pi r=2\pi$,得 $r=1$,又 $\frac{\pi}{2}l=2\pi$,得 $l=4$,所以 $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{15}$,所以圆锥的体积为 $V=\frac{1}{3}\cdot\pi r^2\cdot h=\frac{\sqrt{15}}{3}\pi$.故选 C.

3.C 提示:过 C 作 CE 垂直 AB 的延长线于点 E ,过 E 作 $EF\parallel A_1A$,交 A_1B_1 的延长线于点 F ,易证 $CE\perp$ 平面 ABB_1A_1 ,则 $AB_1\perp CE$.又 $A_1B_1\perp EF,CE\cap EF=E$,所以 $A_1B_1\perp$ 平面 CEF ,又 $CF\subset$ 平面 CEF ,所以 $CF\perp A_1B_1$,又 $CE=2\times\sin 60^\circ=\sqrt{3}$,所以 C 点到直线 A_1B_1 的距离为 $CF=\sqrt{EF^2+CE^2}=\sqrt{EF^2+3}=\frac{7}{2}$,解得 $EF=2$,所以 $AA_1=EF=2$,易得 $BC=2\sqrt{3}$,又 $\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$,所以 $\triangle ABC$ 的外接圆直径 $2r=$

$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}=4$,则 $r=2$,设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球半径 R ,则 $R^2=r^2+\left(\frac{AA_1}{2}\right)^2=5$,所以外接球表面积为 $4\pi R^2=20\pi$.故选 C.

4.C 提示:连接 A,D,D,E ,因为 $A_1B_1\parallel CD,A_1B_1=CD$,所以四边形 A_1B_1CD 是平行四边形,所以 $A_1D\parallel B_1C$,则 $\angle A_1DE$ 为异面直线 DE 与 B_1C 所成角.设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2,则 $A_1D=2\sqrt{2},A_1E=\sqrt{2}$,在 $\text{Rt}\triangle DD_1E$ 中, $DE=\sqrt{DD_1^2+D_1E^2}=\sqrt{6}$,所以 $A_1D^2=A_1E^2+DE^2$,即 $\triangle A_1ED$ 是直角三角形,所以 $\cos\angle A_1DE=\frac{DE}{A_1D}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,即异面直线 DE 与 B_1C 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.故选 C.

5.D 提示:对于 B ,在四边形 $ABCD$ 中,因为 $AD\parallel BC,AD=AB,\angle BAD=90^\circ$,所以 $\angle ABD=\angle ADB=45^\circ$,又 $\angle BCD=45^\circ$,

$x_1)$,所以 $f(x_2)<f(x_1)$,故 D 正确.故选 ACD.

三、填空题

12. $2x-y+1=0$ 提示: $f'(x)=e^x(\cos x+\sin x)+e^x(-\sin x+\cos x)=2e^x\cos x$,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线斜率为 $f'(0)=2$,又 $f(0)=1$,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y-1=2(x-0)$,即 $2x-y+1=0$.

13. $\frac{1}{e^{2a}}$ 提示:因为 $f(x)\leq xg(x)$,即 $\frac{1}{e^{2x}}+2x^2\leq x(2m-$

$\ln x)$ 有解,所以 $2m\geq\frac{1}{xe^{2x}}+2x+\ln x=e^{-2x-\ln x}-(-2x-\ln x)$ 有解,令 $t=-2x-\ln x$,则 $2m\geq e^{-t}$ 在 \mathbf{R} 上有解.令 $h(t)=e^{-t}$,则 $h'(t)=e^{-t}-1>0$,由 $h'(t)>0$,得 $t>0$,由 $h'(t)<0$,得 $t<0$,所以 $h(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $h(t)_{\min}=h(0)=1$,所以 $2m\geq 1$,得 $m\geq\frac{1}{2}$,所以 m 的最小值是 $\frac{1}{2}$.

14. $\left(2\sqrt{2},+\infty\right);(3,+\infty)$ 提示:因为 $f(x)=\ln x+x^2-$

$ax+2$,所以 $f'(x)=\frac{2x^2-ax+1}{xe^{2x}},x>0$,设 $f(x)$ 的两个极值点为

x_1,x_2 ,且 $0<x_1<x_2$,则方程 $2x^2-ax+1=0$ 有两个不相等的正根,则 $\Delta=a^2-8>0$,且 $x_1+x_2=\frac{a}{2}>0,x_1x_2=\frac{1}{2}>0$,解得 $a>2\sqrt{2}$,此时 $f(x)$ 的极小值为 $f(x_2)=\ln x_2+x_2^2-ax_2+2$,又 $f'(x_2)=0$,所以 $a=2x_2+\frac{1}{x_2}$,则 $f(x_2)=\ln x_2+x_2^2-x_2\left(2x_2+\frac{1}{x_2}\right)+2=\ln x_2-x_2^2+$

$1<0$.令 $g(x)=\ln x-x^2+1$,则 $g'(x)=\frac{1-2x^2}{x}$,所以 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 上单调递减,由 $x_1x_2=\frac{1}{2}$,得 $x_2>\frac{\sqrt{2}}{2}$,又 $g(x_2)<0=g(1)$,所以 $x_2>1$,所以 $a=2x_2+\frac{1}{x_2}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,所以 $a>3$.

四、解答题

15.解:(1)由 $f(x)=x^2-3x+\ln x+2$,得 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty),f'(x)=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$,当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时, $f'(x)>0,f(x)$ 单调递增,当 $\frac{1}{2}<x<1$ 时, $f'(x)<0,f(x)$ 单调递减,当 $x>1$ 时, $f'(x)>0,f(x)$ 单调递增,所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 和 $(1,+\infty)$,单调递减区间为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

(2)由(1)可知,函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 内单调递增,在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,所以当 $x=\frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 取得极大值,极大值为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}-\ln 2$,当 $x=1$ 时, $f(x)$ 取得极小值,极小值为 $f(1)=0$,所以 $f(x)$ 的极大值为 $\frac{3}{4}-\ln 2$,极小值为 0.

16.解:(1)当 $a=1$ 时, $f(x)=(x^2+x+1)e^x$,则 $f'(x)=(x^2+3x+2)e^x,f'(0)=2$,又 $f(0)=1$,所以所求切线方程为 $y-1=2x$,即 $y=2x+1$.

(2) $f'(x)=(x+2)(ax+1)e^x$,当 $a=0,f'(x)=(x+2)e^x$,当 $-2< x<-1$ 时, $f'(x)>0,f(x)$ 单调递增,当 $-3< x<-2$ 时, $f'(x)<0,f(x)$ 单调递减,所以 $x=-2$ 时, $f(x)$ 取得极小值,符合题意.当 $a>\frac{1}{2}$ 时, $-2< x<-\frac{1}{a}$ 时, $f'(x)<0,f(x)$ 单调递减,当 $x>-\frac{1}{a}$ 时, $f'(x)>0,f(x)$ 单调递增,所以当 $x=-\frac{1}{a}$ 时, $f(x)$ 取得极小值,由题意,得 $-\frac{1}{a}<-1$,解得 $0<a<1$,所以 $\frac{1}{2}<a<1$.当 $a=\frac{1}{2}$ 时, $f'(x)\geq 0,f(x)$ 单调递增,没有极值.当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时, $-\frac{1}{a}<x<-2$ 时, $f'(x)<0,f(x)$ 单调递减,当 $-2< x<-1$ 时, $f'(x)>0,f(x)$ 单调递增,所以当 $x=-2$ 时, $f(x)$ 取得极小值,符合题意.

综上, a 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$.

17.(1)证明:要证 $f(x)\geq 0$,需证 $f(x)_{\min}\geq 0$.当 $a=1$ 时, $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1$,定义域为 $(0,+\in$