

## 高一必修(第二册)答案页第2期

对于 B,若  $z+i=a+(b+1)i \in \mathbf{R}$ , 则  $b+1=0$ , 得  $b=-1, z=a-i$ ,

故  $z$  的虚部为  $-1$ , 故 B 正确;

对于 C, 令  $z=i$ , 满足  $|z|=1$ , 但  $z \neq \pm 1$ , 故 C 错误;

对于 D, 令  $z=i$ , 满足  $z^2=i^2=-1 \in \mathbf{R}$ , 但  $z \notin \mathbf{R}$ , 故 D 错误.

故选 AB.

11.BC

提示:利用复数的几何意义知,在复平面内, $z$  对应的点  $Z$  到点  $A(1,0)$  的距离与到点  $B(-1,0)$  的距离相等,所以点  $Z$  在线段  $AB$  的垂直平分线,即虚轴上.

设  $z=bi(b \in \mathbf{R})$ , 当  $b \neq 0$  时,  $z \notin \mathbf{R}$ , 故 A 错误;

$|z-1|=|-bi-1|=\sqrt{1+b^2}$ ,  $|\bar{z}+1|=|-bi+1|=\sqrt{1+b^2}$ ,

则  $|\bar{z}-1|=|\bar{z}+1|$ , 故 B 正确;

$z+\bar{z}=bi-bi=0$ , 故 C 正确;

$z \cdot \bar{z}=bi(-bi)=b^2, z^2=(bi)^2=-b^2$ , 当  $b \neq 0$  时,  $z \cdot \bar{z} \neq z^2$ , 故 D 错误.

故选 BC.

三、填空题

12.7- $\sqrt{5}$  i

提示:  $(\sqrt{5}+i) \cdot (\sqrt{5}-2i)=5-2\sqrt{5}i+\sqrt{5}i+2=7-\sqrt{5}i$ .

13.2

提示:由虚数  $z$  的实部为 1, 设  $z=1+bi(b \in \mathbf{R},$  且  $b \neq 0)$ .

由  $z+\frac{2}{z}=m$ , 得  $z^2-mz+2=0$ . 又  $m \in \mathbf{R}$ , 所以关于  $z$  的方程

$z^2-mz+2=0$  有两个根为  $1 \pm bi$ . 所以  $m=(1+bi)+(1-bi)=2$ .

14. $\frac{5}{2}$

提示:因为  $z_1, z_2, z_3$  的模都为 1, 所以  $|z_3|=1, \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=1$ .

又  $\frac{z_1}{z_2}$  的实部为  $\frac{1}{8}$ , 所以  $\frac{z_1}{z_2}$  的虚部为  $\pm \frac{3\sqrt{7}}{8}$ .

所以  $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1 \pm 3\sqrt{7}i}{8}$ , 所以  $z_1=\frac{1 \pm 3\sqrt{7}i}{8}z_2$ .

所以  $|z_1+z_2+z_3|=\left|\frac{1 \pm 3\sqrt{7}i}{8}z_2+z_2+z_3\right|=\left|\frac{9 \pm 3\sqrt{7}i}{8}z_2+z_3\right| \leq$

$\left|\frac{9 \pm 3\sqrt{7}i}{8}z_2\right|+|z_3|=\left|\frac{9 \pm 3\sqrt{7}i}{8}\right||z_2|+|z_3|=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$ .

故  $|z_1+z_2+z_3|$  的最大值为  $\frac{5}{2}$ .

四、解答题

15.解:(1)因为复数  $z$  是纯虚数,

所以  $\begin{cases} m^2-11m+18=0, \\ m^2-9m+14 \neq 0, \end{cases}$  解得  $m=9$ .

(2)因为复数  $z$  在复平面内对应的点位于第二象限,

所以  $\begin{cases} m^2-11m+18 < 0, \\ m^2-9m+14 > 0, \end{cases}$  解得  $7 < m < 9$ .

所以  $m$  的取值范围为  $(7, 9)$ .

16.解:(1)设  $z=a+bi(a, b \in \mathbf{R})$ , 则由  $|z|^2+2z-2i=0$ , 得  $a^2+b^2+2(a+bi)-2i=0$ , 即  $a^2+b^2+2a+(2b-2)i=0$ .

所以  $\begin{cases} a^2+b^2+2a=0, \\ 2b-2=0, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} a=-1, \\ b=1. \end{cases}$  所以  $z=-1+i$ .

(2) $|z|+|z+3i|=|-1+i|+|-1+4i|=\sqrt{2}+\sqrt{17}$ ,

$|2z+3i|=|-2+5i|=\sqrt{29}$ .

因为  $(\sqrt{2}+\sqrt{17})^2-(\sqrt{29})^2=19+2\sqrt{34}-29=2\sqrt{34}-$

$10=2\sqrt{34}-2\sqrt{25}>0$ ,

所以  $(\sqrt{2}+\sqrt{17})^2 > (\sqrt{29})^2$ .

又  $\sqrt{2}+\sqrt{17}>0, \sqrt{29}>0$ ,

所以  $\sqrt{2}+\sqrt{17}>\sqrt{29}$ , 即  $|z|+|z+3i|>|2z+3i|$ .

17.解:(1)由  $z(1+i)=2i$ , 得

$z=\frac{2i}{1+i}=\frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2(i-i^2)}{2}=1+i$ .

所以  $|z+3-4i|=|4-3i|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$ .

## 数学人教 A



扫码免费下载  
习题讲解 ppt

第 5 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B

提示:因为  $i+7i^2=-7+i$ , 所以  $i+7i^2$  的

实部与虚部之和为  $-7+1=-6$ . 故选 B.

2.C

提示:  $|z|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ . 故选 C.

3.D

提示:由  $z+3i=3+i$ , 得  $z=3+i-3i=3-2i$ . 所以  $\bar{z}=3+2i$ .

故选 D.

4.A

提示:由  $z=(1-i)(3+i)=3+i-3i-i^2=4-2i$ , 得  $\bar{z}=4+2i$ .

所以在复平面内  $z$  的共轭复数  $\bar{z}$  对应的点的坐标为  $(4, 2)$ , 位于第一象限. 故选 A.

5.A

提示:由题意得,在复平面内, $z_1$  对应的点为  $(1, 2)$ ,

则  $z_2$  对应的点为  $(1, -2)$ . 所以  $z_2=1-2i$ .

则  $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+2i}{1-2i}=\frac{(1+2i)^2}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{1+4i+4i^2}{5}=\frac{-3+4i}{5}$ .

故  $\frac{z_1}{z_2}$  的虚部为  $\frac{4}{5}$ .

故选 A.

6.B

提示:设  $z=a+bi(a, b \in \mathbf{R})$ ,

则  $z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi=4-3i$ .

所以  $\begin{cases} a^2-b^2=4, \\ 2ab=-3, \end{cases}$  解得  $a^2=\frac{9}{2}, b^2=\frac{1}{2}$ .

所以  $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}$ .

故选 B.

7.B

提示:根据题意,当  $n=4k, k \in \mathbf{N}_+$  时,  $i^{4k}=1, z=1+\frac{1}{1}=2$ ;

当  $n=4k+1, k \in \mathbf{N}_+$  时,  $i^{4k+1}=i, z=i+\frac{1}{i}=0$ ;

当  $n=4k+2, k \in \mathbf{N}_+$  时,  $i^{4k+2}=-1, z=-1+\frac{1}{-1}=-2$ ;

当  $n=4k+3, k \in \mathbf{N}_+$  时,  $i^{4k+3}=-i, z=-i+\frac{1}{(-i)}=0$ .

故集合  $\left\{z \mid z=i^n+\frac{1}{i^n}, n \in \mathbf{N}_+\right\}=\{2, -2, 0\}$ , 共 3 个元素.

故选 B.

8.A

提示:因为  $z_1=2+i$  是关于  $x$  的方程  $x^2+px+q=0(p, q \in \mathbf{R})$  的一个根, 所以此方程的两根为  $2 \pm i$ .

所以  $p=-[(2+i)+(2-i)]=-4, q=(2+i)(2-i)=5$ .

所以  $|z-z_1|=p+q=1$ .

在复平面内, 设复数  $z_1=2+i$  表示点  $Z_1$ , 则点  $Z$  的集合即图形  $M$  是以  $Z_1$  为圆心, 半径为 1 的圆.

所以  $M$  围成的面积为  $\pi \times 1^2=\pi$ .

故选 A.

二、多项选择题

9.ACD

提示:设  $z=a+bi(a, b \in \mathbf{R})$ , 则  $z^2=a^2-b^2+2abi, \bar{z}=a-bi$ .

所以  $A(a^2-b^2, 2ab), B(a, -b)$ ,

即  $\overrightarrow{OA}=(a^2-b^2, 2ab), \overrightarrow{OB}=(a, -b)$ .

若  $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ , 则  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}=a(a^2-b^2)-b \cdot 2ab=0$ ,

得  $a=0$ , 或  $a^2=3b^2$ .

结合选项可知选 ACD.

10.AB

提示:设  $z=a+bi(a, b \in \mathbf{R})$ .

对于 A, 若  $z+1=a+1+bi \in \mathbf{R}$ , 则  $b=0$ , 故  $z=a \in \mathbf{R}$ , 故 A 正确;

16.解:(1)由  $SO=8, OB=4$ , 可知正六棱锥  $S-ABCDEF$

的侧棱长为  $\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$ ,

底面正六边形  $ABCDEF$  的边长为 4,

所以该正六棱锥的底面积为  $6 \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin 60^\circ = 24\sqrt{3}$ ,

体积为  $\frac{1}{3} \times 24\sqrt{3} \times 8 = 64\sqrt{3}$ .

又侧面等腰三角形的斜高为  $\sqrt{(4\sqrt{5})^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2} = 2\sqrt{19}$ ,

所以该正六棱锥的侧面积为  $6 \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{19} = 24\sqrt{19}$ .

(2)易知球心  $M$  一定在直线  $SO$  上.

设球  $M$  的半径为  $R$ , 则  $RM=MS=MB$ .

又  $MB^2=OM^2+OB^2$ , 所以  $R^2=(8-R)^2+4^2$ , 解得  $R=5$ . 所以球  $M$  的表面积为  $4\pi R^2=100\pi$ , 体积为  $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{500\pi}{3}$ .

17.解:(1)由已知可得,铆钉是以 15 mm 为半径的半球与圆柱的组合物, 其中圆柱的高为  $3 \times 15 = 45$  mm, 底面半径为 8 mm.

所以半球的表面积  $S_1=\frac{1}{2} \times 4\pi \times 15^2 = 450\pi$  (mm<sup>2</sup>),

圆柱的侧面积  $S_2=2\pi \times 8 \times 45 = 720\pi$  (mm<sup>2</sup>),

半球大圆的面积  $S_3=\pi \times 15^2 = 225\pi$  (mm<sup>2</sup>).

所以铆钉的表面积  $S=S_1+S_2+S_3=1395\pi$  (mm<sup>2</sup>).

(2)设钉身的长度为  $x$  mm, 则  $x > 20$ , 钉身的体积  $V=\pi \cdot 8^2 \cdot x = 64\pi x$ .

由已知,得加工前后体积不变,加工后体积为钉身与钉帽体积之和, 其中钉身是长度为 20 mm, 底面圆半径为 8 mm 的圆柱, 钉帽是以 15 mm 为半径的半球, 得  $V=\pi \times 8^2 \times 20 + \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi \times 15^3 = 64\pi x$ , 解得  $x \approx 55$ , 满足条件.

所以钉身的长度为 55 mm.

18.解:(1)设圆锥筒的底面半径为  $r$ . 由扇形铁皮所在圆的半径为 3, 圆心角为  $\frac{2\pi}{3}$  rad,

得  $2\pi r = 3 \times \frac{2\pi}{3}$ , 解得  $r=1$ . 所以  $h=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$ .

所以圆锥筒的容积为  $\frac{1}{3}\pi \times 1^2 \times 2\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$ .

(2)设内接圆柱的高为  $h_0$ ,

则有  $\frac{x}{1} = \frac{2\sqrt{2}-h_0}{2\sqrt{2}} \Rightarrow h_0 = 2\sqrt{2}(1-x)$ .

所以内接圆柱的侧面积为

$S=2\pi x h_0 = 4\sqrt{2}\pi(-x^2+x) = -4\sqrt{2}\pi\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]$ .

又  $0 < x < 1$ , 所以当  $x=\frac{1}{2}$  时, 内接圆柱侧面积最大, 且最大值为  $\sqrt{2}\pi$ .

19.解:(1)设圆锥的母线长为  $l$ , 底面半径为  $r$ .

由  $\cos \angle APB = \frac{1}{4}$ , 得  $\sin \angle APB = \sqrt{1 - \cos^2 \angle APB} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ .

因为  $\triangle PAB$  的面积为  $2\sqrt{15}$ , 所以  $\frac{1}{2}l^2 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = 2\sqrt{15}$ ,

解得  $l=4$  (负值舍去).

又圆锥的轴截面是顶角为  $90^\circ$  的等腰三角形,

所以  $r=2\sqrt{2}$ .

所以该圆锥的侧面积为  $\pi \times 2\sqrt{2} \times 4 = 8\sqrt{2}\pi$ .

(2)根据圆锥的性质可知内切球球心在  $PO$  上, 设球心为  $G$ , 切  $PA$  于  $D$ , 作出轴截面如图 1 所示.

设内切球半径为  $R$ , 则  $GO=GD=R$ .

由  $\triangle PDG \sim \triangle POA$ , 得  $\frac{GD}{AO} = \frac{PG}{PA}$ , 即  $\frac{R}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-R}{4}$ ,

解得  $R=4-2\sqrt{2}$ .

所以该圆锥的内切球的表面积为

$4\pi \times (4-2\sqrt{2})^2 = (96-64\sqrt{2})\pi$ .

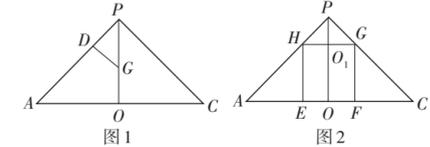


图 1

(3)作出轴截面如图 2 所示. 设正四棱柱的底面边长为  $a$ , 高为  $h$ , 则  $HC=\sqrt{2}a, PO_1=2\sqrt{2}-h$ .

由  $\frac{PO_1}{PO} = \frac{HG}{AC}$ , 得  $\frac{2\sqrt{2}-h}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}a}{2 \times 2\sqrt{2}}$ ,

解得  $a=\sqrt{2}(2\sqrt{2}-h)$ .

所以内接正四棱柱的侧面积  $S=4ah=4\sqrt{2}(2\sqrt{2}-h)h \leq$

$4\sqrt{2} \cdot \left(\frac{2\sqrt{2}-h+h}{2}\right)^2 = 8\sqrt{2}$ ,

当且仅当  $2\sqrt{2}-h=h$ , 即  $h=\sqrt{2}$ , 等号成立.

所以该圆锥的内接正四棱柱的侧面积的最大值为  $8\sqrt{2}$ .

$O, B=r_1, OA=r$ , 则  $\frac{h_1}{h} = \frac{r_1}{r}$ , 所以  $\frac{V_{SO_1}}{V_{SO}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \pi r_1^2 h_1}{\frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h} = \left(\frac{h_1}{h}\right)^3$ .

对于 A,  $h_1=15$  cm,  $h=25$  cm, 则  $\frac{V_{容器}}{V_{容器}} = \left(\frac{h_1}{h}\right)^3 = \frac{27}{125}$ , 故 A 错误;

对于 B, 设容器内液体倒去一半后液体的高度为  $h_2$  cm, 则  $\left(\frac{h_2}{15}\right)^3 = \frac{1}{2}$ , 解得  $h_2 = \frac{15\sqrt[3]{4}}{2}$  (cm), 故 B 正确;

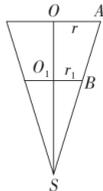
对于 C, 由  $\frac{h_1}{h} = \frac{r_1}{r}, h=25$  cm,  $r=5$  cm, 得  $r_1 = \frac{h_1}{5}$ , 则当  $h_1=15$  cm 时,  $r_1=3$  cm, 当  $h_1=15+5=20$  cm 时,  $r_1=4$  cm,

所以需要增加的液体的体积为  $\frac{1}{3}\pi \times 5 \times (3^2+3 \times 4+4^2) = \frac{185\pi}{3}$  (cm<sup>3</sup>), 故 C 正确;

对于 D, 设容器内液体的高度为  $h_3$  cm,

则  $\frac{\frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 15 + \left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}\right)^3}{\frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 15} = \left(\frac{h_3}{15}\right)^3$ ,

解得  $h_3 = \sqrt[3]{3450}$ , 故 D 正确. 故选 BCD.



(第 11 题图)

三、填空题

12.  $n^2, n^3$

提示: 设正方体的棱长为  $a$ ,

则其表面积  $S=6a^2$ , 体积  $V=a^3$ .

将正方体的棱长扩大到原来的  $n$  倍, 则  $a'=na$ , 所以

其表面积  $S'=6(na)^2=n^2 \cdot 6a^2=n^2S$ , 体积  $V'=(na)^3=n^3 \cdot a^3=n^3V$ , 即表面积扩大到原来的  $n^2$  倍, 体积扩大到原来的  $n^3$  倍.

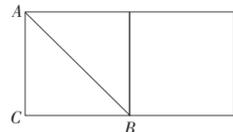
13.  $\frac{\sqrt{6}}{4}$

提示: 设甲、乙两个圆台的高分别为  $h_{甲}, h_{乙}$ , 则由已知条件, 得两个圆台的体积之比

$\frac{V_{甲}}{V_{乙}} = \frac{\frac{1}{3}\pi h_{甲$

$8\sin \theta$ . 所以当  $\theta = \frac{\pi}{2}$  时, 截面  $SBC$  的面积取得最大值, 最大值为 8.

18. 解: (1) 把圆柱的侧面沿过点  $A$  所在的母线剪开, 然后展开成为矩形, 如图所示.



(第 18 题(1)图)

连接  $AB$ , 则  $AB$  就是蚂蚁爬行的最短路线.

由已知, 得  $AC=3$  cm,  $BC=\pi \times 1 \approx 3$  (cm),

所以  $AB=\sqrt{AC^2+BC^2} \approx 3\sqrt{2}$  (cm).

故蚂蚁爬行的最短路线长约为  $3\sqrt{2}$  cm.

(2) ①如图 1, 将侧面  $A_1ABB_1$  与侧面  $B_1BCC_1$  展开成一个平面, 此时  $AM=\sqrt{2^2+(4+3)^2}=\sqrt{53}$  (cm).

②如图 2, 将底面  $ABCD$  与侧面  $D_1DCC_1$  展开成一个平面, 此时  $AM=\sqrt{4^2+(3+2)^2}=\sqrt{41}$  (cm).

③如图 3, 将底面  $ABCD$  与侧面  $B_1BCC_1$  展开成一个平面, 此时  $AM=\sqrt{3^2+(4+2)^2}=\sqrt{45}$  (cm).

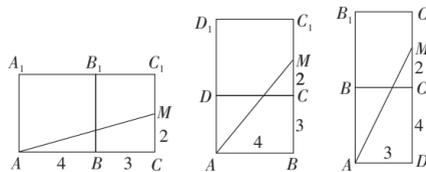


图 1

图 2

图 3

(第 18 题(2)图)

因为  $\sqrt{41} < \sqrt{45} < \sqrt{53}$ ,

所以蚂蚁爬行的最短路线长为  $\sqrt{41}$  cm.

19. (1) 解: 根据题意, 设足球有  $m$  个正五边形, 则有  $(32-m)$  个正六边形.

$m$  个正五边形有  $5m$  条边,  $(32-m)$  个正六边形有  $6(32-m)$  条边, 共  $(192-m)$  条边. 而每条棱出现在两个相邻的面中, 所以棱数  $e = \frac{192-m}{2}$ .

因为每条棱有两个顶点, 每个顶点与三条棱相邻,

所以顶点数  $n = \frac{2e}{3} = \frac{192-m}{3}$ .

又面数  $f=32$ , 代入欧拉公式  $n-e+f=2$ , 解得  $m=12$ .

所以足球的棱数  $e = \frac{192-m}{2} = 90$ .

(2) 证明: 由  $n$  个顶点的凸多面体, 其面数尽可能多, 则每一个面尽可能均为三角形.

所以当棱数最多时, 该凸多面体每一个面均为三角形, 此时  $e = \frac{3f}{2}$ , 即  $f = \frac{2e}{3}$ .

又  $n-e+f=2$ , 代入解得  $e=3n-6$ .

故  $n$  个顶点的凸多面体, 至多有  $(3n-6)$  条棱.

(3) 解: 设正多面体每个顶点有  $x$  条棱, 每个面都是正  $y$  边形,

则  $x, y \in \mathbf{N}_+, x, y \geq 3$ , 棱数  $e = \frac{yf}{2} = \frac{xn}{2}$ , 即  $f = \frac{2e}{y}, n = \frac{2e}{x}$ .

由欧拉公式  $n-e+f=2$ , 得  $e\left(\frac{2}{x} + \frac{2}{y} - 1\right) = 2$ .

所以  $\frac{2}{x} + \frac{2}{y} - 1 > 0$ , 即  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{2}$ .

所以  $\frac{1}{x} > \frac{1}{2} - \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ , 得  $3 \leq x < 6$ .

当  $x=3$  时,  $3 \leq y < 6$ , 则  $y=3, 4, 5$ , 相应的  $e=6, 12, 30$ ;

当  $x=4$  时,  $3 \leq y < 4$ , 则  $y=3, e=12$ ;

当  $x=5$  时,  $3 \leq y < \frac{10}{3}$ , 则  $y=3, e=30$ .

综上, 正多面体棱数的所有可能值为 6, 12, 30.

## 高一必修(第二册)答案页第 2 期

### 三、填空题

12.  $D \subseteq C \subseteq A \subseteq B$

提示: 在题设四种几何体中, 包含元素最多的是直平行六面体, 底面为长方形的直平行六面体是长方体, 底面为正方形的长方体是正四棱柱, 侧面都是正方形的正四棱柱是正方体, 即正六面体, 所以  $D \subseteq C \subseteq A \subseteq B$ .

13.  $8+4\sqrt{2}$

提示: 作  $O'D' \perp B'C'$  于  $D'$ . 根据题意, 可得  $\triangle O'D'C'$  是斜边长为 2 的等腰直角三角形. 所以  $C'D' = \sqrt{2}$ . 所以  $B'C' = 2 + \sqrt{2}$ . 根据斜二测画法的规则可知, 四边形  $OABC$  为直角梯形, 其中  $OA = O'A' = 2$ ,  $OC = 2O'C' = 4$ ,  $OC \perp x$  轴,  $BC // x$  轴, 且  $BC = B'C' = 2 + \sqrt{2}$ , 可得  $AB = \sqrt{4^2 + (\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$ . 所以四边形  $OABC$  的周长为  $OA + OC + BC + AB = 2 + 4 + 2 + \sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8 + 4\sqrt{2}$ .

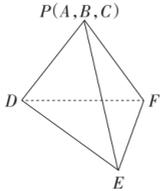
14.  $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

提示: 由题意可得, 鸟巢的底面是边长为 1 的正方形, 故经过 4 个顶点截鸡蛋所得的截面圆的直径为 1.

又鸡蛋(球)的半径为 1, 故球心到截面圆的距离为  $\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . 因为垂直折起的小直角三角形的高为  $\frac{1}{2}$ , 所以鸡蛋最高点与鸟巢底面的距离为  $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ .

### 四、解答题

15. 解: (1) 如图所示, 折起后形成的几何体是三棱锥, 共有 4 个面.



(第 15 题图)

(2) 根据题意, 在正方形  $ABCD$  中,  $AD = CD = 8$ ,  $AE = BE = BF = CF = 4$ ,  $AD \perp AB$ ,  $AB \perp BC$ ,  $BC \perp CD$ , 则  $DE = DF = 4\sqrt{5}$ ,  $EF = 4\sqrt{2}$ .

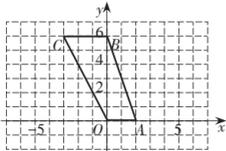
所以在三棱锥  $P-DEF$  中,  $PD = 8$ ,  $PE = PF = 4$ ,  $PD \perp PE$ ,  $PE \perp PF$ ,  $PF \perp PD$ ,  $DE = DF = 4\sqrt{5}$ ,  $EF = 4\sqrt{2}$ .

所以  $\triangle PDE$  和  $\triangle PDF$  是直角三角形, 面积均为  $\frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$ ;

$\triangle PEF$  是等腰直角三角形, 面积为  $\frac{1}{2} \times 4^2 = 8$ ;

$\triangle DEF$  是等腰三角形, 面积为  $8^2 - 2 \times 16 - 8 = 24$ .

16. 解: (1) 根据题意, 由斜二测画法可得四边形  $OABC$  如图所示.



(第 16 题图)

(2) 根据题意, 所得的几何体是由两部分组成的组合体, 第一部分是以为 2 为高, 6 为底面半径的圆锥, 另一部分是以 3 为高, 6 为底面半径的圆柱再挖去同底等高的圆锥所得的几何体.

17. 解: (1) 由题设, 得轴截面  $SAB$  的面积为  $\frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times SO = 4\sqrt{3}$ , 所以  $SO = 2$ .

所以圆锥  $SO$  的母线长  $l = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$ .

(2) 在轴截面  $SAB$  中,  $SO = 2$ ,  $SA = 4$ , 可得  $\angle ASO = \frac{\pi}{3}$ . 设  $\angle BSC = \theta$ . 当点  $C$  与点  $B$  重合时,  $\theta = 0$ ; 当点  $C$  与点  $A$  重合时,  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ . 则  $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$ . 所以  $\triangle SBC$  的面积为  $\frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin \theta =$

## 数学人教 A

### 第 7 期

#### 第 3~4 版同步周测参考答案

##### 一、单项选择题

1. B

提示: 由旋转体的概念可知,  $A, C, D$  是旋转体,  $B$  是多面体. 故选 B.

2. C

提示: 因为该棱锥有 12 个面, 所以该棱锥有 1 个底面, 11 个侧面. 所以该棱锥有 22 条棱.

故选 C.

3. B

提示: 根据棱台的定义可知, 用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥, 底面和截面之间的多面体叫做棱台.

故选 B.

4. A

提示: 底面为平行四边形的直四棱柱是直平行六面体, 底面为矩形的直四棱柱是长方体. 由此可知, 长方体必定是直平行六面体, 而直平行六面体的底面不一定为矩形, 所以直平行六面体不一定是长方体. 所以  $p$  是  $q$  的充分不必要条件.

故选 A.

5. D

提示: 由斜二测画法可知, 矩形的直观图是平行四边形. 故选 D.

6. B

提示: 由斜二测画法的规则可知, 边长为  $a$  的水平放置的正方形的直观图是相邻边长为  $a, \frac{1}{2}a$ , 一个内角为  $45^\circ$  的平行四边形.

所以直观图的面积为  $a \times \frac{1}{2}a \times \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}a^2$ .

故选 B.

7. C

提示: 用斜二测画法画直观图时, 平行于  $x$  轴或与  $x$  轴重合的线段长度不变, 则  $C'D', P'Q'$  长度不变, 平行于  $y$  轴或与  $y$  轴重合的线段长度减半, 则  $O'A'$  长度减半,  $P'B', P'C', Q'E', Q'D'$  也会缩小, 所以  $P', Q', C', D'$  作法正确,  $A', B', E'$  作法不正确. 故选 C.

8. D

提示: 过点  $B'$  作  $B'C' // y'$  轴, 交  $x'$  轴于点  $C'$ .

在  $\triangle O'B'C'$  中,  $\angle B'O'C' = 30^\circ$ ,  $\angle B'C'O' = 135^\circ$ ,  $O'B' = 2$ , 由正弦定理, 得  $\frac{B'C'}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\sin 135^\circ}$ , 解得  $B'C' = \sqrt{2}$ .

由斜二测画法规则知, 在原平面图形中, 顶点  $B'$  对应的点到  $x$  轴的距离是  $2\sqrt{2}$ .

故选 D.

##### 二、多项选择题

9. AD

提示: 三棱锥有 4 个顶点, 四棱柱有 8 个顶点, 所以两个几何体共有 12 个顶点, 故 A 正确;

四棱锥有 5 个顶点, 三棱柱有 6 个顶点, 所以四棱锥和三棱柱共有 11 个顶点, 四棱锥和四棱柱共有 13 个顶点, 故 B, C 不正确; 五棱锥有 6 个顶点, 所以五棱锥和三棱柱共有 12 个顶点, 故 D 正确. 故选 AD.

10. ACD

提示: 平行六面体的六个面都是平行四边形, 且相对的平行四边形全等, 所以六个平行四边形中的矩形可能有 0, 2, 4, 6 个. 所以各个表面的直角个数之和可能为 0, 8, 16, 24. 故选 ACD.

11. AC

提示: 若  $BC$  在  $x$  轴上, 则直观图中  $B'C' = BC = 2\sqrt{2}$ , 故 A 可能; 若  $BC$  在  $y$  轴上, 则  $B'C' = \frac{1}{2}BC = \sqrt{2}$ , 所以  $B'C'$  的长度范围是  $[\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ , 故 B, D 不可能; 若以  $AB, AC$  为  $x$  轴,

则  $B'C' = \sqrt{2^2 + 1^2 - 2 \times 2 \times 1 \times \cos 45^\circ} = \sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$ , 故 C 可能. 故选 AC.

所以点  $D$  对应的复数为 5.

(2) 由题意知  $\overline{BA} = (1, 2)$ ,  $\overline{BC} = (3, -1)$ ,

所以  $\cos B = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BA}| |\overline{BC}|} = \frac{1 \times 3 - 2 \times 1}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$ .

又  $B \in (0, \pi)$ , 所以  $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$ .

所以  $\triangle ABC$  的面积为

$$S = \frac{1}{2} |\overline{BA}| |\overline{BC}| \sin B = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{10} \times \frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{7}{2}.$$

17. 解: (1)  $z_1 = \frac{\sqrt{3} - i}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{(\sqrt{3} - i)(1 + \sqrt{3}i)}{(1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i)}$

$$= \frac{2\sqrt{3} + 2i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

因为  $z_1$  的虚部与  $z_2$  的虚部互为相反数,

所以  $z_2$  的虚部为  $-\frac{1}{2}$ .

又  $z_2$  为纯虚数, 所以  $z_2 = -\frac{1}{2}i$ .

(2) 设  $z_2 = a + bi$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ).

因为  $z_1 z_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(a + bi) = \frac{\sqrt{3}a - b + (a + \sqrt{3}b)i}{2} \in \mathbf{R}$ ,

所以  $a + \sqrt{3}b = 0$ , 得  $a = -\sqrt{3}b$ .

所以  $z_2 = -\sqrt{3}b + bi$ ,

$$|2z_1 + z_2| = \left|\sqrt{3}(1-b) + (1+b)i\right| = \sqrt{3(1-b)^2 + (1+b)^2}$$

$$= \sqrt{4b^2 - 4b + 4} = \sqrt{4\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + 3} \geq \sqrt{3}.$$

故  $|2z_1 + z_2|$  的最小值为  $\sqrt{3}$ .

18. 解: (1) 由  $x^2 + x + 1 = 0$ ,

得  $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$ , 即  $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} = \frac{3}{4}i^2$ .

所以  $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  或  $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .

所以该方程的根为  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .

(2) 因为  $x^2 + x + 1 = 0$ , 所以  $x + 1 = -x^2$ , 且  $x^3 = 1$ . 所以

所以  $x(x-1) = x^2 - x = -2x - 1$ .

当  $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  时,  $x(x-1) = -2x - 1 = -\sqrt{3}i$ ;

当  $x = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$  时,  $x(x-1) = -2x - 1 = \sqrt{3}i$ .

故  $x(x-1)$  的值为  $-\sqrt{3}i$  或  $\sqrt{3}i$ .

(3) 因为  $x^2 + x + 1 = 0$ , 所以  $x + 1 = -x^2$ , 且  $x^3 = 1$ . 所以

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2024} + \left(\frac{1}{x+1}\right)^{2024} = \left(-\frac{x}{x^2}\right)^{2024} + \left(\frac{1}{x^2}\right)^{2024} = \frac{1}{x^{2024}} + \frac{1}{x^{4048}} = \frac{1}{(x^3)^{674} \cdot x^2} + \frac{1}{(x^3)^{1349} \cdot x} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{1+x}{x^2} = -1.$$

19. 解: (1) 设复数  $1 + \sqrt{3}i$  的模为  $r$ , 辐角为  $\theta$ ,

则  $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ ,  $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ,  $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

所以  $\theta$  的一个值为  $\frac{\pi}{3}$ .

所以  $1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ .

(2)  $z_1 z_2 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$

$= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)]$

$= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$ .

所以  $|z_1 z_2| = r_1 r_2$ ,  $z_1 z_2$  的辐角为  $\theta_1 + \theta_2$ .

(3) 由(2)的结论可知, 若复数  $z_1$  对应的向量  $\overrightarrow{OZ_1} =$

$r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ ,  $z_2$  对应的向量  $\overrightarrow{OZ_2} = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ , 则复数  $z_1 z_2$  的几何意义是把向量  $\overrightarrow{OZ_1}$  绕点  $O$  按逆时针方向

旋转角  $\theta_2$ , 再把它的模变为原来的  $r_2$  倍.

$2+i = \sqrt{5}(\cos \theta + i \sin \theta)$ , 其中  $\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ,  $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

根据题意, 将  $\overrightarrow{OA}$  绕原点  $O$  按逆时针方向旋转  $60^\circ$  可得  $\overrightarrow{OB}$ . 设  $\overrightarrow{OB}$  对应的复数为  $z$ ,

则  $z = (2+i)(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$

$$= (2+i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)i.$$

所以点  $B$  对应复数的代数形式为  $1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)i$ .

$2\sin \theta \cos \theta = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$ .

把②代入上式, 得

$$2wz = (\cos 2\theta - 4\cos \varphi) + i(\sin 2\theta - 4\sin \varphi).$$

所以  $2|wz| = \sqrt{(\cos 2\theta - 4\cos \varphi)^2 + (\sin 2\theta - 4\sin \varphi)^2}$

$$= \sqrt{(\cos^2 2\theta - 8\cos 2\theta \cos \varphi + 16\cos^2 \varphi) + (\sin^2 2\theta - 8\sin 2\theta \sin \varphi + 16\sin^2 \varphi)}$$

$$= \sqrt{17 - 8\cos(2\theta - \varphi)}.$$

因为  $-1 \leq \cos(2\theta - \varphi) \leq 1$ ,

所以  $\sqrt{17 - 8} \leq 2|wz| \leq \sqrt{17 + 8}$ , 得  $1.5 \leq |wz| \leq 2.5$ .