

高考版答案页第8期

数学



扫码免费下载
习题讲解 ppt

第27期 第2~3版 专题一 三角函数 专项训练(1)

1.ABD 提示:对于A,由 α 是第一象限的角,得 $2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,则 $-\frac{\pi}{2} - 2k\pi < -\alpha < -2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,所以 $-\alpha$ 是第四象限的角,故A正确;对于B,因为 $-317^\circ = -360^\circ + 43^\circ$,所以 43° 角与 -317° 角的终边重合,故B正确;对于C,由圆心角为 $\frac{\pi}{3}$ 的扇形弧长为 π ,得该扇形所在圆的半径为3,则该扇形的面积为 $\frac{1}{2} \times \pi \times 3 = \frac{3\pi}{2}$,故C错误;对于D,由 α 是第二象限角,得 $\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$,则点 $P(\sin \alpha, \cos \alpha)$ 在第四象限,故D正确.故选ABD.

2. BC 提示: $f(x) = \sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.对于A,由 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$,得 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 不对称,故A错误;对于B,由 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 0$,得 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称,故B正确;对于C,当 $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}, 0\right]$ 时, $x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$,因为 $y = \sin z$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增,所以 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{2\pi}{3}, 0\right]$ 上单调递增,故C正确;对于D,当 $x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 时, $x + \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$,则 $f(x) \in (-1, 2]$,故D错误.故选BC.

3.ACD 提示:由 $f(x) = \sin \omega x + a \cos \omega x = \sqrt{1 + a^2} \cdot \sin(\omega x + \varphi)$,且 $\tan \varphi = a$,由函数 $f(x)$ 的最大值为2,得 $\sqrt{1 + a^2} = 2$,解得 $a = \pm\sqrt{3}$,因为 $f(0) = a > 0$,所以 $a = \sqrt{3}$,故A正确; $f(x) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x = 2 \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$,又 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} \omega + \frac{\pi}{3}\right) = 1$,即 $\sin\left(\frac{\pi}{4} \omega + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$,且 $f(x)$ 在 $\frac{\pi}{4}$ 的附近区间上单调递减,所以 $\frac{\pi}{4} \omega + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,解得 $\omega = 2 + 8k, k \in \mathbf{Z}$.又 $\frac{T}{2} > \frac{\pi}{4}$,得 $T > \frac{\pi}{2}$,所以 $\frac{2\pi}{\omega} > \frac{\pi}{2}$,解得 $0 < \omega < 4$,所以 $\omega = 2$,此时 $f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$,其最小正周期为 $T = \pi$,

故C正确,D正确;因为 $f\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = 2 \sin 2x$,所以函数 $f\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 为奇函数,故B错误.故选ACD.

专项训练(2)

1.ABC 提示:由 $391^\circ = 360^\circ + 31^\circ$,得 31° 角与角 391° 的终边相同,故A正确;由 α 为第三象限角,得 $\sin \alpha < 0$,所以 $\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sin \alpha < 0$,故B正确;由 $4\pi x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$,得 $x \neq \frac{1}{8} + \frac{k}{4}, k \in \mathbf{Z}$,故C正确;由角 α 的终边经过点 $\left(\cos \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6}\right)$,即 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$,得角 α 的终边在第一象限,且 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,故D错误.故选ABC.

2. BC 提示: $2 \sin 15^\circ \sin 75^\circ = 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$,故A错误; $\frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ} = \frac{\tan 45^\circ + \tan 15^\circ}{1 - \tan 45^\circ \cdot \tan 15^\circ} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$,故B正确; $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,故C正确; $\cos 15^\circ - \sqrt{3} \sin 15^\circ = 2 \sin(30^\circ - 15^\circ) = 2 \sin 15^\circ \neq \sqrt{3}$,故D错误.故选BC.

3.ABD 提示:由题意,知 $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$,则 $\omega = 2$,因为将 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到 $y = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3} + \varphi\right)$ 的图象,其关于 y 轴对称,所以 $\frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$,又 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$,故A正确; $f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$,则 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 \sin \frac{3\pi}{2} = -2$,所以直线 $x = \frac{2\pi}{3}$ 为函数 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴,故B正确;由 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2 \neq 0$,得 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 不是函数 $y = f(x)$ 图象的一个对称中心,故C错误;由 $-\frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$,得 $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$,则 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ 内单调递增,又 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 内单调递增,所以 $0 < a \leq \frac{\pi}{6}$,故D正确.故选ABD.

专项训练(3)

1.ABD 提示:由 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{5}$ ①,得 $(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{25}$,则 $\sin \theta \cos \theta = \frac{12}{25}$,因为 $\theta \in (\pi, 2\pi)$,所以

$\frac{4}{9} < \frac{20}{27}$,故选BCD.

专项训练(2)

1. ABC 提示:由题意,得 $\bar{x} = \frac{5+6+8+9+12}{5} = 8$,故A正确;把 $(8, 25)$ 代入 $\hat{y} = 2.6x + \hat{a}$,得 $25 = 2.6 \times 8 + \hat{a}$,解得 $\hat{a} = 4.2$,故B正确;当 $x = 5$ 时, $\hat{y} = 2.6 \times 5 + 4.2 = 17.2$,则残差为 $17 - 17.2 = -0.2$,故C正确;由相关系数公式,可知去掉样本点 $(8, 25)$ 后, x 与 y 的样本相关系数 r 不变,故D错误.故选ABC.

2. BC 提示:对于A,该学校男生中经常体育锻炼的概率的估计值为 $\frac{40}{50} = \frac{4}{5}$,故A错误;对于B,经常体育锻炼的概率的估计值男生为 $\frac{30}{50} = \frac{3}{5}$,女生为 $\frac{3}{5} > \frac{3}{5}$,故B正确;对于C, $\chi^2 \approx 4.762 > 3.841$,故有95%的把握认为男、女生在体育锻炼的经常性方面有差异,故C正确;对于D, $\chi^2 \approx 4.762 < 6.635$,所以没有99%的把握认为男、女生在体育锻炼的经常性方面有差异,故D错误.故选BC.

3.ABD 提示:由题意,得 A_1, A_2, A_3 是两两互斥的事件,故D正确; $P(A_1) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, P(A_2) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}, P(A_3) = \frac{3}{10}$, $P(B|A_1) = \frac{5}{11}, P(B|A_2) = \frac{4}{11}, P(B|A_3) = \frac{4}{11}$,故A正确; $P(B) = P(A_1B) + P(A_2B) + P(A_3B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{11} + \frac{1}{5} \times \frac{4}{11} + \frac{3}{10} \times \frac{4}{11} = \frac{9}{22}$,又 $P(A_1B) = P(A_1)P(B|A_1) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{11} = \frac{5}{22}$,则 $P(A_1B) \neq P(A_1)P(B)$,所以事件B与事件 A_1 不相互独立,故C错误; $P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{5}{9}$,故B正确.故选ABD.

专项训练(3)

1.AD 提示:由题意,得 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减,所以 $\begin{cases} 2a-1 < 0, \\ 0 < a < 1, \end{cases}$ 解得 $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$,所以条件成立的充要条件为 $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$,结合选项,得其必要不充分条件为A、D,故AD.

2. BCD 提示:对于A,因为 $f(1+x) - f(1-x) = 0$,所以 $f'\left(\frac{1+x}{2}\right) + f'\left(\frac{1-x}{2}\right) = 0$,即 $f'(x)$ 关于 $(1, 0)$ 对称,故A错误;对于B, $f'(x+2)$ 为偶函数,则 $f'(x+2) = f'(-x+2)$,即 $f'(x)$ 关于 $x=2$ 对称,由A项知, $f'(1) = 0$,由 $f'(x)$ 关于 $x=2$ 对称,知 $f'(3) = f'(1) = 0$,故B正确;对于C, $f'(x)$ 关于 $x=2$ 对称和 $f'(x)$ 关于 $(1, 0)$ 对称,得 $f'(-x+2) = f'(-x+4)$,则 $f'(x+4) = f'(-x+2) = -[f'(x)] = -f'(x)$,所以 $f'(x)$ 的周期为4,所以 $f'(2 \cdot 025) = f'(1) = 0$,故C正确;对于D,由 $f'(x+2) = f'(-x+2)$,得 $f'(x+2) = -f'(-x+2) + m$,即 $f'(x+2) + f'(-x+2) = m$,令 $x=0$,得 $2f(2) = m$,则 $f(2+x) + f(2-x) = 2f(2)$,故D正确.故选BCD.

3. BCD 提示:由函数 $f(x) = \ln x - \frac{x+1}{x-1}$,得 $\begin{cases} x > 0, \\ x-1 \neq 0, \end{cases}$ 解得 $x > 0$ 且 $x \neq 1$,即 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$,故A错误;由 $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^2}$,则 $f'(2) = \frac{5}{2}$,即 $f(x)$ 的图象在点 $(2, f(2))$ 处的切线斜率为 $\frac{5}{2}$,故B正确; $f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \ln \frac{1}{x} + \frac{1}{x} - 1 + \ln x - \frac{x+1}{x-1} = -\ln x + \frac{x+1}{x-1} + \ln x - \frac{x+1}{x-1} = 0$,故C正确;因为 $x > 0$ 且 $x \neq 1$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立,所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增,又 $f(e) = -\frac{2}{e-1} < 0, f(e^2) = \frac{e^2-3}{e^2-1} > 0$,所以 $f(x)$ 在 (e, e^2) 上存在 x_0 ,使 $f(x_0) = 0$,由选项C得, $f\left(\frac{1}{x_0}\right) = -f(x_0) = 0$,所以 $f(x)$ 在定义域内有两个零点 x_1, x_2 ,则 $x_1 = \frac{1}{x_0}, x_2 = x_0$,或 $x_1 = x_0, x_2 = \frac{1}{x_0}$,所以 $x_1 x_2 = 1$,故D正确.故选BCD.

专项训练(4)

1. BD 提示:对于A,数据 $3x_1 - 1, 3x_2 - 1, 3x_3 - 1$ 的平均数为 $3 \times 2 - 1 = 5$,故A错误;对于B,数据 $3x_1 - 1, 3x_2 - 1, 3x_3 - 1$ 的方差为 $3^2 \times 1 = 9$,故B正确;对于C,样本数据 x_1, x_2, x_3 的平均数为2,方差为1,所以 $x_1 + x_2 + x_3 = 2 \times 3 = 6, \frac{1}{3}[(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2] = 1$,所以数据 x_1, x_2, x_3 的平均数为 $\frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + 2) = \frac{1}{4} \times 8 = 2$,方差为 $\frac{1}{4}[(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2 + 0] = \frac{1}{4} \times (3 \times 1 + 0) = \frac{3}{4}$,故C错误;对于D,由C项,知 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4(x_1 + x_2 + x_3) + 12 = 3$,由C项,知 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3 - 12 + 4(x_1 + x_2 + x_3) = -9 + 24 = 15$,所以数据 x_1^2, x_2^2, x_3^2 的平均数为 $\frac{1}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \frac{1}{3} \times 15 = 5$,故D正确.故选BD.

2. BCD 提示:因为 $P(A) = \frac{2}{5}, P(B|A) = \frac{1}{4}$,所以 $P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$,故A错误; $P(AB) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{6}$,故B正确; $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$,故C正确; $P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) = \frac{3}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$,故D正确.故选BCD.

3.ACD 提示:设甲、乙、丙三个社团分别需抽取 x 人, y 人, z 人,则 $\frac{x}{14} = \frac{y}{21} = \frac{z}{14}$,解得 $x=2, y=3, z=2$,所以从甲、乙、丙三个社团抽取的人数分别为2人,3人,2人,故A正确;随机变量 X 的所有可能的取值为1,2,3,则 $P(X=1) = \frac{C_2^2 C_3^2}{C_7^3} = \frac{1}{7}, P(X=2) = \frac{C_2^1 C_3^2}{C_7^3} = \frac{4}{7}, P(X=3) = \frac{C_2^0 C_3^3}{C_7^3} = \frac{2}{7}$,所以 X 服从超几何分布,故B错误; $E(X) = 1 \times \frac{1}{7} + 2 \times \frac{4}{7} + 3 \times \frac{2}{7} = \frac{15}{7}$,故C正确;因为 $P(A) = P(X=3) = \frac{2}{7}$,故D正确.故选ACD.

所以 $a \leq (\ln x + 1)_{\min}$ 又函数 $y = \ln x + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增且值域为 \mathbf{R} ,所以函数 $y = \ln x + 1$ 无最小值,故不存在实数 a ,使得函数 $f(x)$ 在定义域上单调递增,故C错误;对于D,若 $f(x) \geq 0$ 恒成立,即 $a \leq \ln x + \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,令 $g(x) = \ln x + \frac{1}{x} (x > 0)$,得 $g'(x) = \frac{x-1}{x^2}$,当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减,当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0, g(x)$ 单调递增,所以 $x=1$ 时, $g(x)$ 取得极小值也是最小值, $g(x)_{\min} = g(1) = 1$,所以 $a \leq 1$,故D正确.故选AD.

专项训练(2)

1.AC 提示:由 $y=f(x+3)$ 的图象关于直线 $x=-3$ 对称,得 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称,则 $f(x)$ 是偶函数,故B错误; $f(x)=f(x+4)+f(2)$ 中,令 $x=-2$,得 $f(-2)=2f(2)$,又 $f(-2)=f(2)$,所以 $f(2)=2f(2)$,得 $f(2)=0$,故A正确;因为 $f(x)=f(x+4)+f(2)$, $f(2)=0$,所以 $f(x)=f(x+4)$,即 $f(x)$ 是周期为4的周期函数,故C正确;由 $f(x)$ 是周期为4的周期函数,且 $f(x)$ 是偶函数,得 $f(0)=f(-4)$, $f(3)=f(-1)=f(1)$,由题意,得 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递增,则 $f(1) > f(0)$,所以 $f(3) > f(-4)$,故D错误.故选AC.

2.AC 提示: $g(x)$ 有4个零点等价于 $g'(x)=0$ 有4个根,由 $g'(x)=[f(x)]^2 - (m-1)f(x) - m = [f(x)+1][f(x)-m] = 0$,解得 $f(x)=1$ 或 $f(x)=m$,所以 $g(x)$ 有4个零点等价于函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=1$ 和直线 $y=m$ 共有4个交点.当 $x \geq 0$ 时, $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$,由 $f'(x) > 0$,得 $x > 1$,由 $f'(x) < 0$,得 $0 < x < 1$,则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,且 $f(0) = -1, f(1) = -2$,作出 $f(x)$ 的大致图象(图略),由图可知,函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=-1$ 有2个交点,所以 $g(x)$ 有4个零点等价于函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=m$ 有2个交点,且 $m \neq -1$,所以 $m \in (-2, -1) \cup [0, 1]$.故选AC.

3.ACD 提示:对于A, $B, f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ,由 $f(x) = e^x - x$,得 $f'(x) = e^x - 1$,当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增;当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减,所以 $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 上单调递减,在 $(0, 1]$ 上单调递增,所以 $f(x)_{\min} = f(0) = 1$,因为 $f(1) = e - 1, f(-1) = \frac{1}{e} + 1$,又 $e - 1 > \frac{1}{e} + 1$,所以 $f(x)_{\max} = f(1) = e - 1$,故A正确,B错误;对于C,因为 $f''(0) = 0, f'(0) = 1$,所以 $f(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程是 $y=1$,故C正确;对于D,因为 $a = -b$,所以 $f(a) - f(b) = f(a) - f(-a) = e^a - a - e^{-a} - a = e^a - e^{-a} - 2a$,令 $g(x) = e^x - e^{-x} - 2x, x > 0$,则 $g'(x) = e^x + e^{-x} - 2 \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} - 2 = 0$,且当仅当 $x=0$ 时,等号成立,所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,则 $g(x) > g(0) = 0$,所以 $f(a) > f(b)$,故D正确.故选ACD.

专项训练(3)

1.AD 提示:对于A,因为 $f(x)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的奇函数,且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 2 + 2x + b$,得 $f(0) = 1 + b = 0$,解得 $b = -1$,所以当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 2 + 2x - 1$,则 $f(-1) = -f(1) = -3$,故A正确;对于B,由 $f(3) = 13$,得 $f(-3) = -f(3) = -13$,故B错误;对于C,当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 2 + 2x - 1$,因为函数 $y=2$ 和 $y=2x-1$ 都是增函数,所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,又 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的奇函数,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增,故C错误;对于D,由 $f(0) = 0$,且由C项,得 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增,所以 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上仅有一个零点,故D正确.故选AD.

2. ABC 提示:令 $x=y=0$,则 $f(0) \cdot f(0) = 2[f(0)]^2$,又 $f(0) \neq 0$,则 $f(0) = 1$,故A正确;令 $x=0$,则 $f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y)$,又 $f(0) = 1$,则 $f(-y) = f(y)$,所以函数 $f(x)$ 是偶函数,故B正确;令 $x = \frac{1}{2}$,则 $f\left(\frac{1}{2} + y\right) + f\left(\frac{1}{2} - y\right) = 2f\left(\frac{1}{2}\right)f(y)$,因为 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$,所以 $f\left(\frac{1}{2} + y\right) + f\left(\frac{1}{2} - y\right) = 0$,令 $y = \frac{1}{2} - x$,得 $f(1-x) + f(x) = 0$,所以 $f(1+x) = -f(x) = -f(x)$,故C正确,D错误.故选ABC.

3. AB 提示: $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}, f'(x) = (x^2 + x - 1)e^x = x(x+1)e^x$,令 $f'(x) > 0$,解得 $x < -1$ 或 $x > 0$,令 $f'(x) < 0$,解得 $-1 < x < 0$,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1), (0, +\infty)$ 上单调递增,在 $(-1, 0)$ 上单调递减,则 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值,在 $x=0$ 处取得极小值,即 $f(x)$ 有两个极值点,故A正确;又 $f'(1) = e, f'(x) = 2e$,所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y = e - 2e(x - 1)$,即 $y = 2ex - e$,故B正确;因为 $f(-1) = \frac{3}{e} > 1, f(1) = e$,所以 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的值域为 $[1, e]$,故C错误;方程 $f(x) = a$ 的解的个数,即函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 的交点个数,因为 $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}, e^x > 0$,所以 $f(x) = (x^2 - x + 1) \cdot e^x > 0$ 恒成立,所以当 $0 < a < 1$ 时,函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 有1个交点,当 $a \leq 0$ 时,函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 没有交点,故D错误.故选AB.

专项训练(4)

1.ACD 提示:因为函数 $y=g(x)$ 是 \mathbf{R} 上的偶函数, $y = x$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数,所以 $y=g(x)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数,又 $f(x) = (x+3) \cdot 0$,令 $x=1$,则 $x=+1$,所以 $f(1) + f(1+4) = 0$ ①,所以 $f(-1+4) = -f(-1) = f(1)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称,故A正确;由①得, $f(1+4) = -f(1)$,所以 $f(1+8) = -f(1+4) = f(1)$,则 $f(x)$ 是以8为周期的周期函数,故B错误;当 $x \in [-2, 0]$ 时, $f(x) = 2^{-x} + x$ 为增函数,所以 $f(x)$ 在 $(0, 2]$ 上单调递增,故C正确;因为 $0.225 = 253 \times 8 + 1$,所以 $f(0.225) = f(1)$,又 $1 = 0.5^0 > 0.5^{n2} > 0.5^1 = 0.5$,且 $f(x)$ 在 $(0, 2]$ 上单调递增,所以 $f(0.225) > f(0.5^{n2}) > f\left(\frac{1}{2}\right)$,故D正确.故选ACD.

2. BCD 提示:作出函数 $y=f(x)$ 的图象(图略),关于 x 的方程 $4[f(x)]^2 - 4a \cdot f(x) + 2a + 3 = 0$ 有5个不同的实根,令 $t=f(x)$,则方程 $4t^2 - 4at + 2a + 3 = 0$ 有2个不同的实根 t_1, t_2 ,则 $\Delta = 16a^2 - 16(2a+3) > 0$,解得 $a < -1$ 或 $a > 3$,若 $t_1 < t_2$,则 $-2 < t_1 \leq -1 < t_2 < 0$ 或 $-1 < t_1 < t_2 < 0$.令 $g(-1) = 4t^2 - 4at + 2a + 3$,若 $-2 < t_1 \leq -1 < t_2 < 0$,则 $\begin{cases} g(-2) > 0, \\ g(0) > 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 10a + 19 > 0, \\ 2a + 3 > 0, \end{cases}$ 解得 $-\frac{3}{2} < a \leq -\frac{7}{6}$;若 $-1 < t_1 < t_2 < 0$,则 $g(0) = 2a + 3 = 0$,解得 $a = -\frac{3}{2}$,此时 $4t^2 + 6t = 0$,解得 $t_1 = -\frac{3}{2}, t_2 = 0$,不符合 $-1 < t_1 < 0$,故舍去.综上,

$\triangle ABC$ 外接圆的面积 $S = \pi R^2 = \frac{7\pi}{3}$,故B正确,C错误,D正确.故选ABD.

2. BC 提示:对于A,由 $a - b = (2, -1)$,得 $|a - b| = \sqrt{5}$,故A错误;对于B,当 $b \parallel c$ 时, $-(n-1) = 2 \cdot 2m$,即 $4m + n = 1$,故B正确;对于C, $2a + b = (1, 4)$,由 $(2a + b) \cdot c = (2a + b) \cdot c = 0$,即 $2m + 4(n-1) = 0$,即 $m + 2n = 2$,故C正确;对于D, b 在 a 上的投影向量为 $\frac{a \cdot b}{|a|^2} \cdot a = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$,故D错误.故选BC.

3. AD 提示:对于A,因为 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$,所以 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$,故A正确;对于B,由 $\angle BAC = 90^\circ$,得 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$,又 $AB = 3$,所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3} \times 3^2 = 3$,故B错误;对于C,由 $AB = AC = 3$,得 $|\overrightarrow{AD}|^2 = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2 = \frac{1}{9}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AC}^2 = 5$,则 $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{5}$,故C错误;对于D,因为 $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}$,所以 $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$,故D正确.故选AD.

专项训练(2)

高考版答案页第8期

为 $r=1$, 圆 C_2 的标准方程为 $(x-3)^2+(y+4)^2=1$, 则 $C_2(3,-4)$, 半径 $R=1$, 所以圆心距 $|C_1C_2|=5>R+r=2$, 得两圆外离, 无相交弦, 故 D 错误; 又 P 在圆 C_1 上, Q 在圆 C_2 上, 所以 $|PQ|_{\min}=|C_1C_2|-R-r=3, |PQ|_{\max}=|C_1C_2|+R+r=7$, 故 A 错误, B

正确; $k_{C_1C_2}=\frac{-4-0}{3-0}=-\frac{4}{3}$, 故 C 正确. 故选 BC.

2.ABD 提示: 易知 $F(1,0)$, 准线 $l:x=-1$, 所以 F 到直线 l 的距离为 2, 故 A 正确; 由抛物线的定义, 点 P 到准线 l 的距离等于 $|PF|$, 所以以 P 为圆心, $|PF|$ 为半径的圆与 l 相切, 故 B 正确; 当直线 MP 与抛物线相切时, 直线 MP 的斜率取得最大值. 设直线 MP 的方程为 $x=my-1$, 与抛物线 $y^2=4x$ 联立, 得 $y^2-4my+4=0$, 令 $\Delta=16m^2-16=0$, 得 $m=\pm 1$, 则直线 MP 的方程为 $x=\pm y-1$, 又点 P 在第一象限, 所以直线 MP 斜率的最大值为 1, 故 C 错误; $|FM|\neq|FP|=2$, 设 $P\left(\frac{y_0^2}{4}, y_0\right), y_0>0$, 则 $\frac{y_0^2}{4}+1=2$, 解得 $y_0=2$ (舍去负值), 所以

$\triangle FMP$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times|FM|\times|y_0|=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$, 故 D 正确.

故选 ABD.

3.BD 提示: 对于 A, 由双曲线的定义, 得 $|PF_1|-|PF_2|=2a$, 又 $|PF_1|=2|PF_2|$, 所以 $|PF_1|=4a, |PF_2|=2a$, 因为 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$, 则 $\angle F_1PF_2=90^\circ$, 所以 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{1}{2}\cdot 4a\cdot 2a=4a^2$, 故 A 错误; 对于 B, 在 $\text{Rt}\triangle F_1PF_2$ 中, $|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$, 即 $(4a)^2+(2a)^2=(2c)^2$, 则 $5a^2=c^2$, 所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$, 故 B 正确; 对于 C, 由 $c=\sqrt{5}a$, 得 $b^2=c^2-a^2=4a^2$, 则 $\frac{b^2}{a^2}=4$, 即 $\frac{b}{a}=2$, 则双曲线 C 的渐近线方程为 $2x\pm y=0$, 故 C 错误; 对于 D, 由双曲线 C 的焦距为 $2\sqrt{5}$, 得 $c=\sqrt{5}$, 则 $c^2=5a^2=5$, 所以 $a^2=1, b^2=4$, 所以双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$, 故 D 正确. 故选 BD.

专项训练(4)

1.BC 提示: 因为直线 $y=\frac{3}{2}x+1$ 与渐近线 $y=\frac{3}{2}x$ 平行, 则直线 $y=\frac{3}{2}x+1$ 与双曲线只有一个交点, 故 A 错误; 两双曲线的渐近线方程均为 $y=\pm\frac{3}{2}x$, 故 B 正确; 右焦点为 $\left(\sqrt{13}, 0\right)$, 则该点到渐近线 $y=\frac{3}{2}x$ 的距离为 $\frac{\frac{3\sqrt{13}}{2}}{\sqrt{1+\frac{9}{4}}}=3$, 故 C 正确; 因为 $c^2=a^2+b^2=13$, 所以双曲线 C 的焦点坐标为 $(\sqrt{13}, 0), (-\sqrt{13}, 0)$, 故 D 错误. 故选 BC.

2.BD 提示: 对于 A, 圆 C 的圆心为 $C(1,0)$, 半径 $r=\sqrt{2}$, 由圆心 C 到直线 $l:x+y-5=0$ 的距离为 $d=\frac{|1+0-5|}{\sqrt{2}}$

$2\sqrt{2}>=\sqrt{2}$, 得直线 l 与圆 C 相离, 故 A 错误; 对于 B, 圆上的点到直线 l 的最小距离为 $d-r=\sqrt{2}$, 最大距离为 $d+r=3\sqrt{2}$, 且 $\sqrt{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}<3\sqrt{2}$, 所以圆 C 上存在两个点到直线的距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, 故 D 正确. 故选 BD.

3.BC 提示: 对于 A, 设椭圆 C 的右焦点为 F' , 连接 AF', BF' , 则四边形 $AF'BF$ 为平行四边形, 所以 $|AF|+|BF|=|AF|+|AF'|=2a=4$, 所以 $\frac{1}{|AF|}+\frac{4}{|BF|}=\frac{1}{4}(|AF|+|BF|)\left(\frac{1}{|AF|}+\frac{4}{|BF|}\right)=\frac{1}{4}\left[5+\frac{|BF|}{|AF|}+\frac{4|AF|}{|BF|}\right]\geq\frac{9}{4}$, 当且仅当 $|BF|=2|AF|$, 即 $|AF|=\frac{4}{3}, |BF|=\frac{8}{3}$ 时, 取等号, 故 A 错误; 对

于 B, 联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1, \\ y=kx, \end{cases}$ 解得 $x=\frac{\pm 2}{\sqrt{1+2k^2}}$, 所以 $|y_A-y_B|=2\sqrt{\frac{4|k|}{1+2k^2}}$, 所以 $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{4|k|}{1+2k^2}=\frac{4|k|}{1+2k^2}\leq\frac{4}{1+2|k|}$, 所以 $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{4|k|}{1+2|k|}=\frac{4|k|}{1+2|k|}$, 当且仅当 $\frac{1}{|k|}=2|k|$, 即 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成立. 故 B 正确; 对于 C, 设 $A(x_0, y_0)$, 则 $B(-x_0, -y_0), E(x_0, 0)$, 所以直线 BE 的斜率 $k_{BE}=\frac{1}{2}\cdot\frac{y_0}{x_0}=\frac{1}{2}k$, 故 C 正确; 对于 D, 设 $P(m, n)$, 则

$k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{-n-y_0}{m-x_0}\cdot\frac{n+y_0}{m+x_0}=\frac{n^2-y_0^2}{m^2-x_0^2}$, 因为点 P 和点 A 在椭圆 C 上, 所以 $\frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{2}=1$, $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{2}=1$ ②, 由 ①-②, 得

$\frac{n^2-y_0^2}{m^2-x_0^2}=\frac{1}{2}$, 即 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{1}{2}$, 因为 P, B, E 三点共线, 所以

$\sqrt{2}$, 当且仅当 $\frac{1}{|k|}=2|k|$, 即 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成立. 故 B 正确; 对于 C, 设 $A(x_0, y_0)$, 则 $B(-x_0, -y_0), E(x_0, 0)$, 所以直线 BE 的斜率 $k_{BE}=\frac{1}{2}\cdot\frac{y_0}{x_0}=\frac{1}{2}k$, 故 C 正确; 对于 D, 设 $P(m, n)$, 则

$k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{-n-y_0}{m-x_0}\cdot\frac{n+y_0}{m+x_0}=\frac{n^2-y_0^2}{m^2-x_0^2}$, 因为点 P 和点 A 在椭圆 C 上, 所以 $\frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{2}=1$, $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{2}=1$ ②, 由 ①-②, 得

$\frac{n^2-y_0^2}{m^2-x_0^2}=\frac{1}{2}$, 即 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{1}{2}$, 因为 P, B, E 三点共线, 所以

数学

$\sqrt{3}, y_1=1$, 所以 $m=(\sqrt{3}, 1, \sqrt{3})$, 设面 PBC 的法向量为 $n=(x_2, y_2, z_2)$, 由 $\begin{cases} n\cdot\overrightarrow{PC}=-x_2+\sqrt{3}y_2-z_2=0, \\ n\cdot\overrightarrow{PB}=\sqrt{3}y_2-z_2=0, \end{cases}$ 则 $x_2=0$, 令 $z_2=\sqrt{3}$,

$y_2=1$, 所以 $n=(0, 1, \sqrt{3})$, 所以 $|\cos\langle m, n\rangle|=\frac{|m\cdot n|}{|m|\cdot|n|}=\frac{4}{2\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$, 所以平面 PAB 与平面 PBC 夹角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$, 故 D 正确, 故选 ACD.

专题五 直线和圆、圆锥曲线

专项训练(1)

1.CD 提示: 直线的点斜式方程不能表示斜率不存在直线, 故 A 错误; 点 $(2, -1)$ 不在方程 $k=\frac{y+1}{x-2}$ 所表示的直线上, 但在方程 $y+1=k(x-2)$ 表示的直线上, 故 B 错误; 倾斜角为 90° 的直线, 且过点 $P_0(x_0, y_0)$, 其直线方程为 $x=x_0$, 故 C 正确; 由 $y-3=k(x+1)$, 即 $(x+1)k-(y-3)=0$, 令 $x+1=0$, 且 $y-3=0$, 得 $x=-1, y=3$, 则恒过定点 $(-1, 3)$, 故 D 正确. 故选 CD.

2.CD 提示: 由直线 l 与直线 $4x+3y+10=0$ 垂直, 可设直线 l 为 $3x-4y+m=0$, 圆 C 的圆心为 $C(-1, -2)$, 半径为 $r=3$, 则点 C 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|-5+m|}{5}$. 因为直线 l 与圆 C 相切, 所以 $d=r$, 即 $\frac{|-5+m|}{5}=3$, 解得 $m=10$ 或 $m=-20$, 所以直线 l 的方程是 $3x-4y+10=0$ 或 $3x-4y-20=0$. 故选 CD.

3.AC 提示: 由题意, 得椭圆 C 的焦点在 y 轴上, 且 $c=2$, 所以 $m^2-2=4$, 则 $m^2=6$, 故 A 正确; 椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{6}=1$ 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$, 故 B 错误; 不妨设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $\frac{x_1^2}{2}+\frac{y_1^2}{6}=1, \frac{x_2^2}{2}+\frac{y_2^2}{6}=1$, 两式相减, 可得 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{2}-\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{6}=0$, 即 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-3\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$, 又点 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 为线段 MN 的中点, 所以 $\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=1$, 所以直线 l 的斜率为 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-3$, 则直线 l 的方程为 $y-\frac{1}{2}=-3\left(x-\frac{1}{2}\right)$, 即 $3x+y-2=0$, 故 C 正确; 因为直线 l 过点 $F(0, 2)$, 所以 $\triangle F_2MN$ 的周长为 $|F_2M|+|F_2N|+|MN|=(|F_2M|+|F_1M|)+(|F_2N|+|F_1N|)=2m+2n=4m+4\sqrt{6}$, 故 D 错误. 故选 AC.

专项训练(2)

1.BC 提示: 若 $l_1\perp l_2$, 则 $a+2=a^2$ 且 $-4(a+2)\neq-8a$, 解得 $a=-1$, 故 A 错误; 直线 $l_1:(a+2)x+ay-8=0$, 即 $a(x+y)+2x-8=0$, 令 $x+y=0$, 则 $2x-8=0$, 得 $x=4, y=-4$, 则直线 l_1 恒过定点 $A(4, -4)$, 所以原点 O 到直线 l_1 的最大距离为 $|OA|=4\sqrt{2}$, 故 B 正确; 若 $l_1\perp l_2$, 则 $(a+2)a+a=0$. 解得 $a=-3$ 或 $a=0$, 故 C 正确; 若 $l_1:(a+2)x+ay-8=0$ 不过第二象限, 当 l_1 斜率不存在时, $a=0$, 此时直线 l_1 为 $x=4$, 不经过第二象限, 则 a 可以为 0, 当 l_1 斜率存在时, 则 $-\frac{a+2}{a}>0$, 且 $\frac{8}{a}<0$. 解得 $-2< a < 0$. 综上, $-2< a \leq 0$, 故 D 错误. 故选 BC.

2.BC 提示: 直线 $l:(1-2m)x-(m-1)y+7m-4=0$, 即 $(-2x-y+7)m+x+y-4=0$, 令 $-2x-y+7=0$, 且 $x+y-4=0$, 解得 $x=3, y=1$, 则直线 l 恒过定点 $(3, 1)$, 故 A 错误; 圆 C 的方程可化为 $(x-1)^2+(y-2)^2=25$, 点 $(3, 1)$ 在圆 C 的内部, 则直线 l 与圆 C 恒相交, 故 B 正确; 在圆 $C:x^2+y^2-2x-4y-20=0$ 中, 令 $y=0$, 得 $x^2-2x-20=0, \Delta>0, x_1+x_2=2, x_1x_2=-20$, 所以 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2-4x_1x_2}=2\sqrt{21}$, 故 C 正确; 由直线 l 过定点 $(3, 1)$, 圆心为 $C(1, 2)$, 得过定点和圆心的直线的斜率 $k=\frac{1-2}{3-1}=-\frac{1}{2}$, 所以当直线 l 的斜率为 2 时, 被圆 C 截得的弦长最短, 则 $\frac{1-2m}{m-1}=2$, 解得 $m=\frac{3}{4}$, 故 D 错误. 故选 BC.

3.BCD 提示: 对于 A, 由 $F\left(2, \frac{0}{2}\right)$, 直线 AB 的斜率为 $\sqrt{3}$, 可得直线 AB 的方程为 $y=\sqrt{3}\left(x-\frac{p}{2}\right)$, 联立 $\begin{cases} y^2=2px, \\ y=\sqrt{3}\left(x-\frac{p}{2}\right), \end{cases}$ 得 $12x^2-20px+3p^2=0$, 又点 A 在第一象限, 则 $x_A=\frac{3p}{2}, x_B=\frac{p}{6}$, 由 $|AF|=x_A+\frac{p}{2}=2p=4$, 得 $p=2$, 故 A 错误; 对

于 B, 由 $|BF|=x_B+\frac{p}{2}=\frac{2p}{3}$, 得 $|AF|=3|BF|$, 故 B 正确; 对于 C, 设 $A(x_0, y_0)$, 则 $B(-x_0, -y_0)$, 由抛物线的定义, 得 $|ED|+|EE|+|ED|+|EF|+|DF|=\sqrt{2}$, 当且仅当 D, E, F 三点共线时, 取等号, 故 C 正确; 对于 D, 当直线斜率不存在时, 直线方程为 $x=0$, 与抛物线只有一个公共点; 当直线斜率存在时, 设直线方程为 $y=kx+1$, 联立 $\begin{cases} y=kx+1, \\ y^2=4x, \end{cases}$ 得 $k^2x^2-4y+4=0$, 当 $k=0$ 时, 方程为 $y=1$, 此直线与抛物线只有一个交点; 当 $k\neq 0$ 时, 令 $\Delta=16-16k=0$, 得 $k=1$, 直线方程为 $y=x+1$. 综上, 过点 D 与抛物线 C 有且仅有一个公共点的直线有 3 条, 故 D 正确. 故选 BCD.

专项训练(3)

1.BC 提示: 由已知, 得圆 C_1 的圆心为 $C_1(0,0)$, 半径

平面 ADD_1A_1 所成角为 θ , 则 $\sin\theta=\cos\left|\left\langle\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{DC}\right\rangle\right|=\frac{|\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DC}|}{|\overrightarrow{AF}|\cdot|\overrightarrow{DC}|}=\frac{\sqrt{14}}{7}$, 故 C 正确, D 错误. 故选 ABC.

专项训练(3)

1.ABD 提示: 对于 A, 由 $n\perp\alpha$, 得存在过直线 n 的平面 γ 与平面 α 相交, 令交线为 c , 则 $c\parallel n$, 由 $m\perp\alpha, c\subset\alpha$, 得 $m\perp c$, 所以 $m\perp n$, 故 A 正确; 对于 B, 根据直线与平面平行的判定定理, 故 B 正确; 对于 C, 由于 $\alpha\perp\beta$, 令 $\alpha\cap\beta=l$, 当 $m\parallel l, m\subset\alpha$ 时, 有 $m\parallel\alpha$, 此时 $m\subset\beta$ 或 $m\parallel\beta$, 当 m 与 l 不平行时, m 与 β 相交, 故 C 错误; 对于 D, 由 $m\perp\alpha, m\subset\beta$. 根据平面与平面垂直的判定定理, 得 $\alpha\perp\beta$, 故 D 正确. 故选 ABD.

2.AB 提示: 因为正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面积为 3, 所以底面边长为 $\sqrt{3}$, 设外接球的半径为 r , 又外接球的表面积为 8π , 则 $4\pi r^2=8\pi$, 所以 $r=\sqrt{2}$. 连接 AC, BD 交于点 E , 则 $EA=\frac{\sqrt{6}}{2}$, 设外接球的球心为 O , 则 $OE=\sqrt{r^2-EA^2}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 当球心 O 在线段 PE 上时, 则 $PE=r+OE=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, 所以正四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $\frac{1}{3}\times 3\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$; 当球心在线段 PE 的延长线上时, 则 $PE=r-OE=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以正四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $\frac{1}{3}\times 3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 AB.

3.BCD 提示: 以 D 为原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系, 则 $A_1(2,0,2), F(2,0,1), E(1,0,2), B_1(2,2,2), B(2,2,0), G(0,1,0), \overrightarrow{EB}=(-1,2,-2), \overrightarrow{BF}=(-2,1,-2), \overrightarrow{B_1G}=(-2,-1,-2), \overrightarrow{EF}=(1,0,-1), \overrightarrow{FA_1}=(0,0,1)$, 则 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EB}=3$, 故 A 错误; 因为 $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{B_1G}=0, \overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{B_1G}=0$, 所以 $BE\perp B_1G, BF\perp B_1G$, 又 $BE\cap BF=B$, 所以 $B_1G\perp$ 平面 BEF , 故 B 正确; 延长 B, B 至点 S , 使得 $BS=B, B$, 则 $CS\parallel EF$, 所以 E, F, C, S 四点共面, 连接 FS 与 AB 的交点就是直线 AB 与平面 EFC 的交点 P , 易知 $AF=\frac{1}{2}BS$, 则 $AP=\frac{1}{3}AB$, 故 C 正确; 由 $B, G\perp$ 平面 BEF , 得点 A_1 到平面 BEF 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{FA_1}\cdot\overrightarrow{B_1G}|}{|\overrightarrow{B_1G}|}=\frac{2}{3}$, 故 D 正确. 故选 BCD.

专项训练(4)

1.BD 提示: 以 D 为原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系 $Dxyz$, 设正方体棱长为 3, 则 $D_1(0,0,3), A_1(3,0,3), E(1,0,1), F(1,1,0), \overrightarrow{EB}=(-1,2,-2), \overrightarrow{BF}=(-2,1,-2), \overrightarrow{B_1G}=(-2,-1,-2), \overrightarrow{EF}=(1,0,-1), \overrightarrow{FA_1}=(0,0,1)$, 则 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EB}=3$, 故 A 错误; 因为 $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{B_1G}=0, \overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{B_1G}=0$, 所以 $BE\perp B_1G, BF\perp B_1G$, 又 $BE\cap BF=B$, 所以 $B_1G\perp$ 平面 BEF , 故 B 正确; 延长 B, B 至点 S , 使得 $BS=B, B$, 则 $CS\parallel EF$, 所以 E, F, C, S 四点共面, 连接 FS 与 AB 的交点就是直线 AB 与平面 EFC 的交点 P , 易知 $AF=\frac{1}{2}BS$, 则 $AP=\frac{1}{3}AB$, 故 C 正确; 由 $B, G\perp$ 平面 BEF , 得点 A_1 到平面 BEF 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{FA_1}\cdot\overrightarrow{B_1G}|}{|\overrightarrow{B_1G}|}=\frac{2}{3}$, 故 D 正确. 故选 BCD.

专项训练(5)

1.BD 提示: 因为 $S_1<S_2<S_3$, 所以 $a_1=a_2=1, a_3=2, a_4=3, a_5=5, a_6=8, a_7=13, a_8=21, a_9=34, a_{10}=55, a_{11}=89, a_{12}=144, a_{13}=233, a_{14}=377, a_{15}=610, a_{16}=987, a_{17}=1597, a_{18}=2584, a_{19}=4181, a_{20}=6765, a_{21}=10946, a_{22}=17711, a_{23}=28657, a_{24}=46368, a_{25}=75025, a_{26}=121393, a_{27}=196418, a_{28}=317811, a_{29}=514229, a_{30}=832040, a_{31}=1346269, a_{32}=2178309, a_{33}=3524568, a_{34}=5702867, a_{35}=9227436, a_{36}=14930305, a_{37}=24157741, a_{38}=39088046, a_{39}=63245787, a_{40}=102333833, a_{41}=165581519, a_{42}=267915352, a_{43}=433497185, a_{44}=701412537, a_{45}=1135409939, a_{46}=1836822524, a_{47}=2972232463, a_{48}=4809055002, a_{49}=7781287465, a_{50}=12590360467, a_{51}=20371647932, a_{52}=32962008397, a_{53}=53333656329, a_{54}=86295664726, a_{55}=139628673123, a_{56}=225924337950, a_{57}=365552911073, a_{58}=591477249023, a_{59}=957402160096, a_{60}=1548879409019, a_{61}=2506281568092, a_{62}=4055160977111, a_{63}=6561442545203, a_{64}=10616603522314, a_{65}=17178045017515, a_{66}=27794648539829, a_{67}=44972693657344, a_{68}=72767342197163, a_{69}=117740040756982, a_{70}=190507435954145, a_{71}=308247476711127, a_{72}=500154912665272, a_{73}=808402389376399, a_{74}=1308557302041671, a_{75}=2116959691617969, a_{76}=3425517003659640, a_{77}=5542476695277609, a_{78}=8968035816937250, a_{79}=14510512512216859, a_{80}=23478548328154109, a_{81}=38089061244070968, a_{82}=61567609572225077, a_{83}=100656670816296045, a_{84}=162224279388466122, a_{85}=262880950194691200, a_{86}=425105229583157272, a_{87}=687986180777848472, a_{88}=1113091410361039671, a_{89}=1801077600138887943, a_{90}=2914169010500927615, a_{91}=4715266610638816558, a_{92}=7629435621139744173, a_{93}=12344702231740671731, a_{94}=20074137852879515904, a_{95}=32418839984018187635, a_{96}=52492977836897703539, a_{97}=84911817790915909474, a_{98}=137404795627813625383, a_{99}=222316613418731534822, a_{100}=360721413046545144305, a_{101}=583036110964376679177, a_{102}=943757524011108213582, a_{103}=1526783637075483892759, a_{104}=2470541161086592106341, a_{105}=4007298788161875998100, a_{106}=6477840949237368094441, a_{107}=10485139737399244092541, a_{108}=16962980686636613090982, a_{109}=27448120423835884089523, a_{110}=44411101110472503180505, a_{111}=71859221797308387270028, a_{112}=116270322907780890450533, a_{113}=188129544605119277620561, a_{114}=304399867512898168071094, a_{115}=492529390418018058521612, a_{116}=796929257930806226592145, a_{117}=1289458648348924284613759, a_{118}=2086387906279732443110804, a_{119}=3375846554628656727724563, a_{120}=5462234460908389170835408, a_{121}=8838121415537113998549971, a_{122}=14300355876445503169385379, a_{123}=23138477391982617167935350, a_{124}=37438833268419721166484729, a_{125}=60577310660402338334420079, a_{126}=98016143928822059501805308, a_{127}=158593454589241780636225387, a_{128}=256609608518063839138030685, a_{129}=4152030$