

第5期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.D 提示： $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1.1)-f(1)}{1.1-1} = \frac{(1.1^2+3)-(1^2+3)}{0.1}$

2.1.故选 D.

2.C 提示：根据题意，由导数的定义，得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2+2x)-f(2)}{2x} = 2f'(2) = 8$. 故选 C.

3.B 提示： $y = 3t^2 + 6t - 1$ ，因为当 $t = t_0$ 时，该质点的瞬时速度大于 8 m/s ，所以 $3t_0^2 + 6t_0 - 1 > 8$ ，即 $t_0^2 + 2t_0 - 3 = (t_0 + 3)(t_0 - 1) > 0$ ，显然 t_0 不是负数，所以 $t_0 > 1$. 故选 B.

4.B 提示： $f(x) = e^x \sin x$ ，则 $f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x$ ，故选 B.

5.A 提示：由图可知，经过点 $(2, f(2))$ 和点 $(4, f(4))$ 的割线的斜率大于曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线斜率，且小于曲线 $y = f(x)$ 在点 $(4, f(4))$ 处的切线斜率，所以 $f'(2) < \frac{f(4)-f(2)}{4-2} < f'(4)$ ，所以 $2f'(2) < f(4) - f(2) < 2f'(4)$. 故选 A.

6.C 提示：由 $y = \frac{e^x}{x+1}$ ，得 $y' = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$ ，

故函数 y 在点 $(1, \frac{e}{2})$ 处的切线斜率为 $k = y'|_{x=1} = \frac{e}{4}$ ，切线方程为 $y - \frac{e}{2} = \frac{e}{4}(x-1)$ ，即 $y = \frac{e}{4}x + \frac{e}{4}$. 故选 C.

7.B 提示：① $f(x) = \sin x + \cos x$ ，则 $f'(x) = \cos x - \sin x$ ，所以 $f''(x) = -\sin x - \cos x$ ，当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时， $\sin x > 0$ ， $\cos x > 0$ ，则 $-\sin x - \cos x < 0$ ，故①满足题意；

② $f(x) = xe^{-x}$ ，则 $f'(x) = -e^{-x} + xe^{-x}$ ，所以 $f''(x) = (2-x)e^{-x}$ ，当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时， $2-x > 0$ ，即 $f''(x) > 0$ ，故②不满足题意；

③ $f(x) = \ln x - 2x$ ，则 $f'(x) = \frac{1}{x} - 2$ ，所以 $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ ，

当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时， $f''(x) < 0$ ，故③满足题意；

④ $f(x) = -x^3 + 2x - 1$ ，则 $f'(x) = -3x^2 + 2$ ，所以 $f''(x) = -6x$ ，当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时， $f''(x) < 0$ ，故④满足题意.

综上，有 3 个函数满足题意. 故选 B.

8.A 提示：对 $f(x) = e^x + a \cdot e^{-x}$ 求导，得 $f'(x) = e^x - ae^{-x}$. 又 $f'(x)$ 是奇函数，故 $f'(0) = 1 - a = 0$ ，解得 $a = 1$ ，故有 $f'(x) = e^x - e^{-x}$. 设切点为 (x_0, y_0) ，则 $f'(x_0) = e^{x_0} - e^{-x_0} = \frac{3}{2}$ ，

得 $e^{x_0} = 2$ 或 $e^{x_0} = -\frac{1}{2}$ (舍去)，得 $x_0 = \ln 2$. 故选 A.

二、多项选择题

9.AC 提示：对于 A，若 $y = x^2 - \frac{1}{x}$ ，则 $y' = 2x + \frac{1}{x^2}$ ，故 A 正确；对于 B，若 $y = x \sin x$ ，则 $y' = \sin x + x \cos x$ ，故 B 错误；对于 C，若 $y = \frac{2x}{e^x}$ ，则 $y' = \frac{2e^x - 2xe^x}{(e^x)^2} = \frac{2-2x}{e^x}$ ，故 C 正确；对于 D，若 $y = (2x+1)^4$ ，则 $y' = 8(2x+1)^3$ ，故 D 错误. 故选 AC.

10.BCD 提示：对于 A，令 $f(x) = x$ ， $g(x) = x+1$ ，则 $f'(x) = g'(x) = 1$ ，但是 $f(x) = g(x)$ 不成立，故 A 错误；对于 B，若 $f(x) = g(x)$ ，则 $f'(x) = g'(x)$ ，故 B 正确；对于 C，由已知可得 $f(-x) = -f(x)$ ，两边同时求导得 $-f'(-x) = -f'(x)$ ，即 $f'(-x) = f'(x)$ ，故 $f'(x)$ 是偶函数，故 C 正确；

对于 D，由已知可得 $g(-x) = g(x)$ ，两边同时求导得 $-g'(-x) = g'(x)$ ，所以 $g'(x)$ 是奇函数，故 D 正确. 故选 BCD.

11.BC 提示：由图可知 $f(-1) = 2$ ， $f(-2) > 2$ ，又因为函数 $f(x)$ 是奇函数，

所以 $f(1) = -2$ ， $f(2) < -2$ ，所以 $f(1) \cdot f(2) > 4$ ，所以 A 错误. B 正确；

由 $f(x)$ 是奇函数，结合图象可知 $f'(1) < 0$ ， $f'(2) > 0$ ，所以 $f'(1) \cdot f'(2) < 0$ ，所以 C 正确，D 错误. 故选 BC.

三、填空题

12.e 提示：因为函数 $f(x) = f'(1)x^2 - e^x$ ，所以 $f'(x) = 2f'(1)x - e^x$ ，故 $f'(1) = 2f'(1) - e$ ，得 $f'(1) = e$ ，

即 $[f'(x) + f'(x_2)](x-x_2) - 2[f(x) - f(x_2)] > 0$ ，

因为 $x_1 > x_2$ ，所以 $[f'(x_1) + f'(x_2)](x_1-x_2) - 2[f(x_1) - f(x_2)] > 0$ ，

又 $x_1 - x_2 > 0$ ，所以 $\frac{f'(x_1) + f'(x_2)}{2} > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$.

$\frac{e^3 - x}{x^2}$ ，当 $7 \leq x < e^3$ 时， $P'(x) > 0$ ，函数 $P(x)$ 单调递增，当 $x > e^3$ 时， $P'(x) < 0$ ，函数 $P(x)$ 单调递减，所以当 $x = e^3$ 时， $P(x)$ 取得最大值，最大值为 $P(e^3) = 9 - \ln e^3 - 1 = 5$ (万元).

综上，当 $x = e^3 \approx 20$ 时， $P(x)$ 取得最大值 5 万元，故当年产量约为 20 万件时，该同学的这一产品所获年利润最大，最大年利润为 5 万元.

17.解：(1) 当 $a = 1$ 时， $f(x) = x - \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ ， $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，

所以 $f'(x) = 1 - \frac{\cos x \cos^2 x - 2 \cos x (-\sin x) \sin x}{\cos^4 x} = 1 - \frac{\cos^3 x + 2 \sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{\cos^3 x + \cos^2 x - 2}{\cos^4 x}$.

令 $t = \cos x$ ，因为 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，所以 $t \in (0, 1)$ ，所以 $\cos^3 x + \cos^2 x - 2 = t^3 + t^2 - 2 = (t-1)(t^2 + 2t + 2) = (t-1) \cdot [(t+1)^2 + 1] < 0$ ，

又 $\cos^2 x = t^2 > 0$ ，所以 $f'(x) = \frac{\cos^3 x + \cos^2 x - 2}{\cos^4 x} < 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减.

(2) $f(x) + \sin x < 0$ ，设 $g(x) = f(x) + \sin x = ax - \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \sin x$ ， $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，则 $g'(x) < 0$ ，注意到 $g(0) = 0$ ，则 $g'(0) \leq 0$ ，

因为 $g'(x) = a - \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^3 x} + \cos x$ ， $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，所以 $g'(0) = a - 1 + 1 \leq 0$ ，故 $a \leq 0$ 。

当 $a \leq 0$ 时，证明 $g(x) < 0$ ， $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 恒成立。即证明 $-\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \sin x < 0$ 成立，令 $m(x) = \sin x - \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ ，

则 $m'(x) = \cos x - \frac{2 - \cos^2 x}{\cos^3 x} = \frac{\cos^3 x + \cos^2 x - 2}{\cos^3 x} = \frac{(\cos^3 x - 1)(\cos^2 x + 2)}{\cos^3 x} < 0$ ， $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ，所以 $m(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减， $m(x) < m(0) = 0$ 。

综上， a 的取值范围为 $(-\infty, 0]$ 。

18.解：(1) 因为 $f(x) = e^x - a \sin x$ ，所以 $f'(x) = e^x - a \cos x$ ，所以 $f(0) = 1$ ， $f'(0) = 1 - a$ ，所以函数 $y = f(x)$ 在 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y = (1-a) \cdot x + 1$ 。

(2) 因为 $a = 0$ ，所以 $f(x) = e^x$ ，又 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 有公共点，

所以方程 $f(x) = g(x)$ 有解，即 $e^x = b \sqrt{x}$ 有解，显然 $x \neq 0$ ，所以 $b = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解。

设 $h(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$ ($x > 0$)，所以 $h'(x) = \frac{e^x(2x-1)}{2x\sqrt{x}}$ ，

所以当 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 时， $h'(x) < 0$ ；当 $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ 时， $h'(x) > 0$ ，

所以 $h(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x)_{\min} = h(\frac{1}{2}) = \sqrt{2e}$ ，且当 $x \rightarrow 0$ 时， $h(x) \rightarrow +\infty$ ；当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $h(x) \rightarrow +\infty$ ，

所以 $h(x) \in [\sqrt{2e}, +\infty)$ ，所以 b 的取值范围为 $[\sqrt{2e}, +\infty)$ 。

19.(1) 解：当 $a = 0$ 时， $f'(x) = e^x - 1$ ，当 $x > 0$ 时， $f'(x) > 0$ ，当 $x < 0$ 时， $f'(x) < 0$ ，

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, 0)$ ，单调递增区间为 $(0, +\infty)$ ，

所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值，且极小值为 $f(0) = -1$ ， $f(x)$ 无极大值。

(2) 证明：设 $g(x) = f'(x) = e^x - 3ax^2 - 1$ ，则 $g'(x) = e^x - 6ax$ ，令 $h(x) = g'(x) = e^x - 6ax$ ，则 $h'(x) = e^x - 6a$ ，

当 $x \geq 0$ ，且 $a \leq \frac{1}{6}$ 时， $h'(x) = e^x - 6a \geq 0$ ，所以 $g'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，

所以 $g'(x) \geq g'(0) = 1$ ，当且仅当 $x = 0$ 时，等号成立，令函数 $F(x) = [f'(x) + f'(x_2)](x-x_2) - 2[f(x) - f(x_2)]$ ，

则 $F'(x) = g'(x)(x-x_2) - f'(x) + f'(x_2)$ ，令 $m(x) = F'(x) = g'(x)(x-x_2) - f'(x) + f'(x_2)$ ，

则 $m'(x) = h'(x)(x-x_2)$ ，当 $x > x_2 \geq 0$ 时， $m'(x) > 0$ ，所以 $F'(x)$ 在 $(x_2, +\infty)$ 上单调递增，则 $F'(x) > F'(x_2) = 0$ ，

所以 $F(x)$ 在 $(x_2, +\infty)$ 上单调递增，则 $F(x) > F(x_2) = 0$ ，即 $[f'(x) + f'(x_2)](x-x_2) - 2[f(x) - f(x_2)] > 0$ ，

因为 $x_1 > x_2$ ，所以 $[f'(x_1) + f'(x_2)](x_1-x_2) - 2[f(x_1) - f(x_2)] > 0$ ，

又 $x_1 - x_2 > 0$ ，所以 $\frac{f'(x_1) + f'(x_2)}{2} > \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ 。

11.CD 提示：对于 A， $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$ ，所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减， $(1, +\infty)$ 上单调递增，故 A 错误；

对于 B，设 $F(x) = f(x) + x$ ，则 $F'(x) = \frac{e^x(x-1) + x^2}{x^2}$ ，设

$g(x) = e^x(x-1) + x^2$ ， $g'(x) = e^x \cdot x + 2x$ ，

所以当 $x > 0$ 时， $g'(x) > 0$ ， $g(x)$ 单调递增， $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \sqrt{e} = \frac{1-2\sqrt{e}}{4} < 0$ ，故当 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 时， $g(x) < 0$ ， $F'(x) < 0$ ，

所以当 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 时， $F(x)$ 单调递减，当 $x_1 < x_2$ 时，

$f(x_1) + x_1 > f(x_2) + x_2$ ，故 B 错误；

对于 C，若 $0 < x_1 < x_2 < 1$ ，则 $f(x_1) > f(x_2)$ ，又 $-x_1 > -x_2$ ，所以 $f(x_1) - x_1 > f(x_2) - x_2$ ，故 C 正确；

对于 D，若 $1 < x_1 < x_2$ ，则 $f(x_1) < f(x_2)$ ，即 $f(x_1) - f(x_2) < 0$ ，又 $x_1 < x_2$ ，所以 $x_1 \cdot [f(x_1) - f(x_2)] > x_2 \cdot [f(x_1) - f(x_2)]$ ，整理得

$x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) > x_2 f(x_1) + x_1 f(x_2)$ ，故 D 正确. 故选 CD.

三、填空题

12. $y = 8x - 72$ 提示：因为 $f(0) = 81 + m = 0$ ，所以 $m = -81$ ， $f(-1) = 1 + m = -80$ ，

$f'(x) = 8(2x+3)^3$ ，所以 $f'(-1) = 8$ ，所以所求切线方程为 $y + 80 = 8(x+1)$ ，即 $y = 8x - 72$ 。

13. $(-\infty, 2e]$ 提示： $f'(x) = \ln x - 1$ ，当 $x \in (0, e)$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减，

当 $x \in (e, +\infty)$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增，所以当 $x = e$ 时，函数取得最小值 $f(e) = \ln e - 2e + m = m - e$ ，所以 $f(x) \in [m - e, +\infty)$ ，

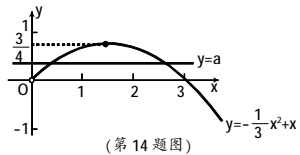
若 $f(x) \in [m - e, +\infty)$ ，函数 $y = f(f(x))$ 与 $y = f(x)$ 有相同的值域，只需 $m - e \leq e$ ，即 $m \leq 2e$ 。

14. $(0, \frac{3}{4})$ 提示：因为 $f''(x) = -\frac{a}{x^2} + \frac{1}{x}$ ，所以 $g(x) = f'(x) - \frac{1}{3} = -\frac{a}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{3}$ ($x > 0$)，

由 $g(x) = 0$ ，得 $a = -\frac{1}{3}x^2 + x$ ($x > 0$)，在同一坐标系中分

别作出 $y = -\frac{1}{3}x^2 + x$ ($x > 0$) 和 $y = a$ 的图象如下图所示，由图

可知当 $0 < a < \frac{3}{4}$ 时，两函数图象有两个不同的交点，即函数 $g(x)$ 有两个零点，所以实数 a 的取值范围是 $(0, \frac{3}{4})$ 。



(第14题图)

四、解答题

15.解：(1) 由 $f(x) = e^x \sin x - x$ ，得 $f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x - 1$ ，所以 $f'(0) = 0$ ，又 $f(0) = 0$ ，所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = 0$ 。

(2) 由 $f(x) = e^x \sin x - x$ ，得 $f''(x) = e^x \sin x + e^x \cos x - 1$ ， $f'''(x) = e^x \sin x + e^x \cos x + e^x \cos x - e^x \sin x = 2e^x \cos x$ ，

因为 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ，所以 $f'''(x) \geq 0$ ，则 $f''(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增，

又 $f''(0) = 0$ ，所以 $f'(x) \geq 0$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上成立，即 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 $f(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} \cdot \sin \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}$ 。

16.解：(1) 因为每件商品售价为 6 元，所以 x 万件商品销售收入为 $6x$ 万元。

依题意得当 $0 < x < 7$ 时， $P(x) = 6x - (\frac{4}{x} + 7x - 10) - 2 = -\frac{4}{x} - x + 8$ ，

所以当 $x \geq 7$ 时， $P(x) = 6x - (6x + \ln x + \frac{e^3}{x} - 11) - 2 = 9 - \ln x - \frac{e^3}{x}$ ，

所以 $P(x) = \begin{cases} -\frac{4}{x} - x + 8, & 0 < x < 7, \\ 9 - \ln x - \frac{e^3}{x}, & x \geq 7. \end{cases}$

(2) 当 $0 < x < 7$ 时， $P(x) = -\frac{4}{x} - x + 8 = -(\frac{4}{x} + x) + 8 \leq -2\sqrt{\frac{4}{x} \cdot x} + 8 = 4$ ，当且仅当 $x = 2$ 时，等号成立，此时 $P(x)$ 取得最大值 $P(2) = 4$ ；

当 $x \geq 7$ 时， $P(x) = 9 - \ln x - \frac{e^3}{x}$ ，所以 $P'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{e^3}{x^2} = \frac{e^3 - x}{x^2}$ ，

4.B 提示：因为 $f(x) = x - \frac{6}{x} - 5 \ln x$ ，所以 $x \in (0, +\infty)$ ，

$f'(x) = 1 + \frac{6}{x^2} - \frac{5}{x} = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2} = \frac{(x-2)(x-3)}{x^2}$ ，

令 $f'(x) < 0$ ，解得 $2 < x < 3$ ，故 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(2, 3)$ ，故选 B.

5.D 提示：因为 $f(x) = x^3 - 3ax + 2$ ， $x \in \mathbb{R}$ ，所以 $f'(x) = 3x^2 - 3a$ ，又因为 $x = 1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，

所以 $f'(1) = 3 - 3a = 0$ ，解得 $a = 1$ ，所以 $f(x) = x^3 - 3x + 2$ ， $f'(x) = 3x^2 - 3$ ，

令 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ ，得 $x_1 = -1$ ， $x_2 = 1$ ，所以当 $x \in (-\infty, -1)$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增；

当 $x \in (-1, 1)$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减；当 $x \in (1, +\infty)$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增。

所以 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取极大值，所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(-1) = -1 + 3 + 2 = 4$. 故选 D.

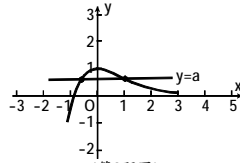
6.B 提示：令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ，则 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ，

当 $x > e$ 时， $f'(x) < 0$ ，函数 $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减；当 $0 < x < e$ 时， $f'(x) > 0$ ，函数 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 内单调递增，因为 $a = \sqrt{2}$ ，所以 $\ln a = \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\ln 4}{2} = f(4)$ ，又 $\ln b = \frac{\ln e}{e} = f(e)$ ，因为 $e < 4$ ，所以 $f(e) > f(4)$ ，即 $\ln b > \ln a$ ，故 $b > a$ 。

因为 $b = e^{-\frac{1}{e}} < e^{-\frac{1}{2}} < \sqrt{3}$ ，且 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{6^{\frac{1}{2}}} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$ ，

$\frac{3^{\frac{1}{6}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{1}{6}}}{4^{\frac{1}{4}}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{6}} < 1</$

$- \infty$, 又 $g(0)=1$, 所以 $g(x)$ 的图象如图所示.



(第8题图)

显然, 当 $0 < a < 1$ 时, $y=a$ 与 $g(x)$ 有两个交点, 故选 B.

二、多项选择题

9.ABD 提示: 由图可知, 当 $0 < x < 3$ 时, $f(x) > 0$, 当 $x > 3$ 时, $f(x) < 0$. 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$, 故要使得 $f(x) \cdot f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 异号.

故当 $x > 0$ 时, 仅需满足 $1 < x < 3$ 即可. 又 $f(x)$ 为奇函数, 故当 $-3 < x < 0$ 时, $f(x) < 0$. 当 $x < -3$ 时, $f(x) > 0$. 当 $-1 < x < 0$ 时, $f'(x) > 0$. 当 $x < -1$ 时, $f'(x) < 0$. 故要使得 $f(x) \cdot f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 异号, 故当 $x < 0$ 时, 需满足 $x < -3$ 或 $-1 < x < 0$. 故选 ABD.

10.AD 提示: $f(x) = x \sin x$, $f'(x) = \sin x + x \cos x$, 令 $g(x) = \sin x + x \cos x$, $g'(x) = \cos x + \cos x - x \sin x = 2 \cos x - x \sin x$.

对于 A, $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上连续, $f(0) = f(\pi) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上不单调, 故 A 正确;

对于 B, 因为 $g'(x) = 2 \cos x - x \sin x$, 当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

因为 $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0$, $g(\pi) = f''(\pi) = -\pi < 0$,

所以存在唯一 $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 使得 $f'(x_0) = 0$.

随着 x 的变化, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如下:

x	$\left(\frac{\pi}{2}, x_0\right)$	x_0	(x_0, π)
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 内有且只有一个极值点, 故 B 错误;

对于 C, 令 $f(x) = x \sin x = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, 所以在 $[-2\pi, 2\pi]$ 上有 5 个零点, 故 C 错误;

对于 D, 由选项 B 可知, $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, x_0\right)$ 内单调递增, 在 (x_0, π) 内单调递减,

又因为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0$, $f(\pi) = 0$, 所以当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

时, $\ln \frac{\pi}{2} < \ln x \leq \ln \pi$, 所以 $g(x) = \frac{f(x)+1}{\ln x} \geq \frac{1}{\ln \pi}$, 当且仅当 $x = \pi$ 时取等号, 所以 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上的最小值为 $\frac{1}{\ln \pi}$, 故 D 正确. 故选 AD.

11.ABC 提示: 对于 A, 令 $f(x) = e^x - (x+1)$, $f'(x) = e^x - 1$, 所以当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增. 当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 所以 $f(x) \geq f(0) = 0$, 所以 $e^x \geq x+1$, 所以 $e^{x^2} \geq x+3$, 故 A 正确;

对于 B, 令 $f(x) = x^2 - \ln x$, $f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$, 所以在 $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

上, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 所以 $f(x) \geq f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$.

$\ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \ln \sqrt{e} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$, 所以 $x^2 > \ln x$, 所以 $(x+1) > \ln(x+1) (x > -1)$, 故 B 正确;

对于 C, 令 $f(x) = \ln x - (x-1)$, $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 所以 $f(x) \leq f(1) = 0$, 所以 $\ln x - (x-1) \leq 0$, 所以 $\ln x \leq x-1$, 所以 $\ln(x+2) \leq x+1 (x > -2)$, 故 C 正确;

对于 D, 取 $x = -\pi$, 得 $e^{-\pi} < \frac{1}{8} = \sin(-\pi) + \frac{1}{8}$, 故 D 错误. 故选 ABC.

三、填空题

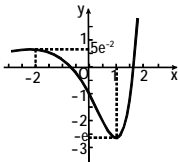
12.(答案不唯一) 提示: 由题意得, $f'(x) = 2 - \frac{a}{x^2}$ 在 $[1, 2]$ 上有变号零点, 故 $a = 2x^2$ 在 $(1, 2)$ 上有解, 所以 $2 < a < 8$. 故可填 3 (答案不唯一).

13. $(-\infty, 2e]$ 提示: $f(x) \leq 1$ 等价于 $e^{x \ln x} + (-x + \ln x) \leq$

② 10.ACD 提示: 由函数 $f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象可知, 当 $x_4 < x < x_5$ 时, $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 在 (x_4, x_5) 内单调递减, 故 $f(x_4) > f(x_5)$. A 正确; 当 $x_2 < x < x_3$ 时, $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 在 (x_2, x_3) 内单调递增, 当 $x_2 < x < x_4$ 时, $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 在 (x_3, x_4) 内单调递减, 故函数 $f(x)$ 在 $[x_2, x_4]$ 上不单调递减. B 错误; 当 $x \in [x_1, 0]$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $[x_1, 0]$ 上单调递增, 故函数 $f(x)$ 在 $[x_1, 0]$ 上无极值. C 正确; 当 $x_4 < x < x_5$ 时, $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 在 (x_4, x_5) 内单调递减, 当 $x > x_5$ 时, $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 在 $(x_5, +\infty)$ 上单调递增, 故 $x = x_5$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点, 即函数 $f(x)$ 在 $[x_4, +\infty)$ 上有极值. D 正确. 故选 ACD.

11.AC 提示: $f'(x) = e^x(x^2 - x - 1) + e^x(2x - 1) = e^x \cdot (x^2 + x - 2) = e^x(x+2)(x-1)$.

所以在 $(-\infty, -2)$, $(1, +\infty)$ 上, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 在 $(-2, 1)$ 上, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 所以 $f(x)$ 极大值为 $f(-2) = e^{-2}((-2)^2 - (-2) - 1) = 5e^{-2}$, $f(x)$ 极小值为 $f(1) = e(1 - 1 - 1) = -e$, 故 A 正确; 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 有两个零点, 故 B 不正确; $f(-2) = 5e^{-2}$, $f(2) = e^2(4 - 2 - 1) = e^2$, 所以当 $x \in [-2, 2]$ 时, $f(x)$ 的最大值为 e^2 , 故 C 正确; 由上可知, $f(x)$ 的图象如图所示.



(第 11 题图)

方程 $f(x) = k$ 恰有 3 个不等实根, 可转化为 $y = f(x)$ 与 $y = k$ 的交点有 3 个. 由图象可得, 当 $-e < k \leq 0$ 时, $f(x) = k$ 有 2 个实数根, 当 $0 < k < 5e^{-2}$ 时, $f(x) = k$ 有 3 个实数根, 当 $k = 5e^{-2}$ 时, $f(x) = k$ 有 2 个实数根, 当 $k > 5e^{-2}$ 时, $f(x) = k$ 有 1 个实数根, 故 D 不正确. 故选 AC.

三、填空题

12. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 提示: 由题意知, $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \ln \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \ln \sqrt{x} + \frac{1}{2}$,

令 $f'(x) < 0$, 解得 $0 < x < \frac{1}{e}$, 故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$.

13.50 提示: 设 A 系列木版画的月利润为 $g(x)$, 则 $g(x) = f(x)(x-30) = (x-90)(x-30)$, $30 < x < 90$, 得 $g'(x) = 2(x-90)(x-30) + (x-90) = 3(x-90)(x-50)$.

令 $g'(x) = 0$, 得 $x = 50$. 当 $x \in (30, 50)$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $x \in (50, 90)$ 时, $g'(x) < 0$.

故 $g(x)$ 在 $(30, 50)$ 内单调递增, $g(x)$ 在 $(50, 90)$ 内单调递减, 所以当 $x = 50$ 时, 利润 $g(x)$ 取到极大值, 也是最大值.

即当 A 系列木版画销售价格定为 50 元/套时, 月利润最大.

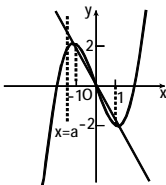
14.2; $(-\infty, -1)$ 提示: 若 $a = 0$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x, & x \leq 0, \\ -2x, & x > 0, \end{cases}$

若 $x \leq 0$, 则 $f(x) = x^3 - 3x$, $f'(x) = 3x^2 - 3$, 令 $3x^2 - 3 = 0$, 解得 $x = -1$ 或 $x = 1$ (舍去),

当 $x \leq -1$ 时, $f'(x) > 0$, 此时函数 $f(x)$ 单调递增, 当 $-1 < x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, 此时 $f(x)$ 单调递减. 若 $x > 0$, 则 $f(x) = -2x$, 此时函数 $f(x)$ 单调递减, 所以当 $x = -1$ 时, $f(x)$ 取得最大值, 为 $f(-1) = 2$. 函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x, & x \leq a, \\ -2x, & x > a, \end{cases}$

画出 $f(x)$ 的大致图象, 由图可知, 只有当 $a < -1$ 时, 函数 $f(x)$ 没有最大值.

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -1)$.



(第 14 题图)

四、解答题

15.解: (1) 当 $a = 2$ 时, $f(x) = e^x - 2x - 1$, 所以 $f'(x) = e^x - 2$. 令 $f'(x) > 0$, 即 $e^x - 2 > 0$, 解得 $x > \ln 2$; 令 $f'(x) < 0$, 即 $e^x - 2 < 0$, 解得 $x < \ln 2$.

所以当 $a = 2$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(\ln 2, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-\infty, \ln 2)$.

(2) 因为 $f(x) = e^x - ax - 1$, 所以 $f'(x) = e^x - a$.

因为 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 所以 $f'(x) = e^x - a \geq 0$ 恒

成立, 即 $a \leq e^x$ 恒成立.

因为 $x \in \mathbf{R}$ 时, $e^x \in (0, +\infty)$, 所以 $a \leq 0$, 即 a 的取值范围为 $(-\infty, 0]$.

16.解: (1) 由题意知, $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = -\frac{a}{x^2} - 1 + \frac{a}{x} = \frac{-x^2 + ax - a}{x^2}$, 令 $g(x) = -x^2 + ax - a$, 则 $g(x) = 0$ 有两个不等实根 x_1, x_2 ,

$\Delta = a^2 - 4a > 0$, 所以 $\begin{cases} x_1 + x_2 = a > 0, \\ x_1 x_2 = a > 0, \end{cases}$ 解得 $a > 4$, 所以实数 a 的取值范围为 $(4, +\infty)$.

(2) 由 (1) 知, $a > 4$, x_1, x_2 是 $g(x) = 0$ 的两根, 则 $x_1 + x_2 = x_1 x_2 = a$, 所以 $f(x_1) + f(x_2) - 3a = \frac{a}{x_1} - x_1 + a \ln x_1 + \frac{a}{x_2} - x_2 + a \ln x_2 - 3a = \frac{a(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} - (x_1 + x_2) + a \ln(x_1 x_2) - 3a = a \ln a - 3a$.

令 $h(a) = a \ln a - 3a$ ($a > 4$), 则 $h'(a) = \ln a - 2$, 所以当 $a \in (4, e^2)$ 时, $h'(a) < 0$;

当 $a \in (e^2, +\infty)$ 时, $h'(a) > 0$.

所以 $h(a)$ 在 $(4, e^2)$ 上单调递减, 在 $(e^2, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $h(a)_{\min} = h(e^2) = 2e^2 - 3e^2 = -e^2$, 即 $f(x_1) + f(x_2) - 3a$ 的最小值为 $-e^2$.

17.解: (1) $F(x) = xG(x) - 50 - 7x = x\left(-\frac{2}{x^2} + \frac{\ln x}{x} + \frac{80}{x} + 4\right) - 50 - 7x = -\frac{2}{x} + \ln x - 3x + 30$ ($x > 0$).

(2) 由 (1) 得 $F(x) = -\frac{2}{x} + \ln x - 3x + 30$ ($x > 0$), 则 $F'(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - 3 = -\frac{(3x+2)(x-1)}{x^2}$ ($x > 0$),

令 $F'(x) = 0$, 得 $x = 1$ 或 $x = -\frac{2}{3}$ (舍去), 所以在 $(0, 1)$ 内, $F'(x) > 0$, $F(x)$ 单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上, $F'(x) < 0$, $F(x)$ 单调递减, 所以 $F(x)_{\max} = F(1) = -2 + \ln 1 - 3 + 30 = 25$.

答: 当 2023 年的年产量为 1 百件时, 该企业在这种茶文化衍生产品中获利最大, 且最大利润为 25 万元.

18.(1) 解: $f(x) = a(e^x + a) - x$, 则 $f'(x) = ae^x - 1$.

① 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$ 恒成立, $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减;

② 当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \ln \frac{1}{a}$, 当 $x \in \left(-\infty, \ln \frac{1}{a}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in \left(\ln \frac{1}{a}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减; 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(-\infty, \ln \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\ln \frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增.

(2) 证明: 由 (1) 可知, 当 $a > 0$ 时, $f(x)_{\min} = f\left(\ln \frac{1}{a}\right) = a\left(\frac{1}{a} + a\right) - \ln \frac{1}{a} = 1 + a^2 + \ln a$.

要证 $f(x) > 2 \ln a + \frac{3}{2}$, 只需证 $1 + a^2 + \ln a > 2 \ln a + \frac{3}{2}$, 只需证 $a^2 - \ln a - \frac{1}{2} > 0$.

设 $g(a) = a^2 - \ln a - \frac{1}{2}$, $a > 0$, 则 $g'(a) = 2a - \frac{1}{a} = \frac{2a^2 - 1}{a}$, 令 $g'(a) = 0$, 得 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 当 $a \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时, $g'(a) < 0$, $g(a)$ 单调递减, 当 $a \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ 时, $g'(a) > 0$, $g(a)$ 单调递增, 所以 $g(a) \geq g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$, 即 $g(a) > 0$, 所以 $a^2 - \ln a - \frac{1}{2} > 0$ 得证, 即 $f(x) > 2 \ln a + \frac{3}{2}$ 得证.

19.解: (1) 当 $a = 0$ 时, $f(x) = -\frac{1}{x} - \ln x$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$, 令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < 1$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $x > 1$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值, 同时也是最大值, 所以函数 $f(x)$ 的最大值为 $f(1) = -1$.

(2) $f'(x) = a + \frac{1}{x^2} - \frac{a+1}{x} = \frac{(x-1)(ax-1)}{x^2}$,

① 当 $a = 0$ 时, 由 (1) 可知, 函数 $f(x)$ 无零点;

② 当 $a < 0$ 时, 易知函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

又 $f(1) = a - 1 < 0$, 故此时函数 $f(x)$ 无零点;

③ 当 $0 < a < 1$ 时, 易知函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$, $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$

上单调递增, 在 $\left(1, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减,

且 $f(1) = a - 1 < 0$, $f\left(\frac{1}{a}\right) < f(1) < 0$, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 此时 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一零点;

④ 当 $a = 1$ 时, $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2} \geq 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(1) = 0$, 故此时函数 $f(x)$ 有唯一零点;

⑤ 当 $a > 1$ 时, 易知函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$, $(1, +\infty)$ 上

单调递增, 在 $\left(\frac{1}{a}, 1\right)$ 上单调递减, 且 $f(1) = a - 1 > 0$, $f\left(\frac{1}{a}\right) > f(1) > 0$, $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 故函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一零点.

综上, 实数 a 的取值范围为 $(0, +\infty)$.

第 7 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C 提示: 由题意知, $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{2-x}{x}$, 令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < 2$, 所以函数 $f(x)$ 单调递增区间为 $(0, 2)$. 故选 C.

2.A 提示: $f'(x) = x + \frac{1-x}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$, 故原函数单调递增, $f(x)$ 无极值点. 故选 A.

3.D 提示: 令 $f(x) = \ln(1+x) - \sqrt{x}$ ($x > 0$), 则 $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}(x+1)} \leq 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 $f(e) < f(0) = 0$, 即 $\ln(1+e) - \sqrt{e} < 0$, 故 $a < b$.

令 $g(x) = \sqrt{x} - \frac{2}{3}x$ ($x > 0$), 则 $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{3} = \frac{3-4\sqrt{x}}{6\sqrt{x}}$, 令 $g'(x) < 0$, 解得 $x > \frac{9}{16}$, 故 $g(x)$ 在 $\left(\frac{9}{16}, +\infty\right)$ 上

单调递减, 故 $g(e) < g\left(\frac{9}{4}\right) = 0$, 故 $\sqrt{e} < \frac{2}{3}e$, 即 $b < c$, 故 $a < b < c$. 故选 D.</