

第 1 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B

提示:根据题意,数列的通项公式为 $a_n = \frac{n+1}{4n+3}$, 令

$$\frac{n+1}{4n+3} = \frac{10}{39}, \text{解得 } n=9.$$

故选 B.

2.C

提示:因为数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{n}{n^2+6}$, 所以

$$a_n = \frac{4}{16+6} = \frac{2}{11}, \text{故选 C.}$$

3.D

提示:根据题意,数列 $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, \dots$, 即 $\frac{2 \times 1 + 1}{2 \times 1}$,

$$\frac{2 \times 2 + 1}{2 \times 2}, \frac{2 \times 3 + 1}{2 \times 3}, \frac{2 \times 4 + 1}{2 \times 4}, \dots,$$

故该数列的一个通项公式可以是 $\frac{2n+1}{2n}$. 故选 D.

4.C

提示:由 $(n+1)a_{n+1} = na_n$, 得 $a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n$,

$$\text{所以 } a_{15} = \frac{14}{15}a_{14} = \frac{14}{15} \times \frac{13}{14}a_{13} = \frac{14}{15} \times \frac{13}{14} \times \frac{12}{13}a_{12} = \dots$$

$$= \frac{14}{15} \times \frac{13}{14} \times \frac{12}{13} \times \dots \times \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{15}a_1.$$

故选 C.

5.C

提示:因为 $a_n = \frac{\sqrt{6} + (-1)^n \times \sqrt{6}}{2}$,

$$a_2 = \frac{\sqrt{6} + (-1)^2 \times \sqrt{6}}{2}, a_3 = \frac{\sqrt{6} + (-1)^3 \times \sqrt{6}}{2},$$

$$a_k = \frac{\sqrt{6} + (-1)^k \times \sqrt{6}}{2}, \text{所以该数列的一个通项公}$$

$$\text{式是 } a_n = \frac{\sqrt{6} + (-1)^n \times \sqrt{6}}{2} (n \in \mathbf{N}_+), \text{故选 C.}$$

6.A

提示:设 $\frac{a_n+n}{2^n} = k$ (k 为常数), 所以 $a_n = k \cdot 2^n - n$, 因为

$$a_n > 0, \text{所以 } k > \frac{n}{2^n}, \text{易得 } k > \frac{1}{2}.$$

$$\text{因为 } a_n - a_{n-1} = k \cdot 2^n - n - k \cdot 2^{n-1} + n - 1 = k \cdot 2^{n-1} - 1 > \frac{1}{2} \times 2^{n-1} -$$

$$1 = 0 (n \geq 2), \text{所以 } a_n - a_{n-1} > 0 (n \geq 2), \text{即 } a_n > a_{n-1} (n \geq 2), \text{所以数列 } \{a_n\} \text{ 是递增数列.}$$

故选 A.

7.A

提示:数列 $\{a_n\}$ 中, 对任意 $n \in \mathbf{N}_+$, $a_n > 0$, 则 $S_n = S_{n-1} +$

$$a_n > S_{n-1}, n \geq 2,$$

所以数列 $\{S_n\}$ 是递增数列, 充分性成立;当数列 $\{S_n\}$ 为递增数列时, $S_n > S_{n-1}, n \geq 2$, 即 $S_{n-1} +$

$$a_n > S_{n-1}, \text{所以 } a_n > 0 (n \geq 2), \text{如数列 } \{a_n\} \text{ 为 } -1, 2, 2, 2, \dots,$$

不满足“对任意 $n \in \mathbf{N}_+$, $a_n > 0$ ”, 故必要性不成立.所以“对任意 $n \in \mathbf{N}_+$, $a_n > 0$ ”是“数列 $\{S_n\}$ 为递增数列”的充分不必要条件. 故选 A.

8.B

提示:因为数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n + \frac{\lambda}{n}$, 数列当 $n \geq 8$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = a_1 + \dots + a_7 -$

$$a_8 - \dots - a_n = -S_7 + 2(a_1 + \dots + a_7) = -\left[13n + \frac{n(n-1)}{2} \times (-2)\right] + 2 \times$$

$$\frac{13+1}{2} \times 7 = n^2 - 14n + 98.$$

$$\text{综上, } T_n = \begin{cases} -n^2 + 14n, & 1 \leq n \leq 7, \\ n^2 - 14n + 98, & n \geq 8. \end{cases}$$

17.(1)解: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 因为 S_n, T_n 为 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和, $S_7 = 32, T_3 = 16$,

$$\text{则 } \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 32, \\ a_1 - 6 + 2a_2 + a_3 - 6 = 16, \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} 4a_1 + \frac{4 \times (4-1)}{2} d = 32, \\ a_2 = 7, \end{cases} \text{解得}$$

$$\begin{cases} a_1 = 5, \\ d = 2, \end{cases} \text{故 } a_n = 5 + 2(n-1) = 2n + 3.$$

$$(2) \text{证明: 由 (1) 可知, } b_n = \begin{cases} 2n-3, & n \text{ 为奇数,} \\ 4n+6, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$$

$$S_n = \frac{(5+2n+3)n}{2} = (n+4)n.$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } n > 5, T_n = (b_1 + b_3 + \dots + b_{n-1}) + (b_2 + b_4 + \dots + b_n) =$$

$$-1 + 3 + \dots + 2(n-1) - 3 + 14 + 22 + \dots + 4n + 6 =$$

$$\frac{\frac{n}{2}[-1+2(n-1)-3]}{2} + \frac{\frac{n}{2}(14+4n+6)}{2} = \frac{\frac{n}{2}(14+6n)}{2} =$$

$$\frac{n(3n+7)}{2}, T_n - S_n = \frac{n(n-1)}{2} > 0;$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } n > 5, T_n = T_{n-1} + b_n = \frac{(n-1)(3n+4)}{2} +$$

$$2n-3 = \frac{3n^2+5n-10}{2},$$

$$T_n - S_n = \frac{n^2-3n-10}{2} > \frac{25-15-10}{2} = 0, \text{故原式得证.}$$

18.(1)证明: 由条件 $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1 (n \in \mathbf{N}_+)$, 得 $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$,

$$\text{因为 } a_1 + 1 = 2 \neq 0, \text{所以 } \frac{a_{n+1}+1}{a_n+1} = 2, n \in \mathbf{N}_+, \text{即 } \frac{b_{n+1}}{b_n} = 2,$$

 $n \in \mathbf{N}_+$,

$$\text{所以数列 } \{b_n\} \text{ 是以 } 2 \text{ 为首项, } 2 \text{ 为公比的等比数列.}$$

$$(2) \text{解: 由 (1) 知, 数列 } \{b_n\} \text{ 的通项公式为 } b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n, n \in \mathbf{N}_+,$$

$$\text{选 } \textcircled{1}, b_n + \log_2 b_n = 2^n + n, \text{则 } S_n = (2+1) + (2^2+2) + (2^3+3) + \dots + (2^n+n) = (2+2^2+\dots+2^n) + (1+2+\dots+n) = \frac{2(1-2^n)}{1-2} +$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = 2^{n+1} + \frac{n^2+n-4}{2}.$$

$$\text{选 } \textcircled{2}, \frac{1}{\log_2 b_n \cdot \log_2 b_{n+1}} = \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$\text{则 } S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

$$\text{选 } \textcircled{3}, nb_n = n \cdot 2^n, \text{则 } S_n = 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + \dots + n \cdot 2^n, 2S_n = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + \dots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1},$$

$$\text{两式相减得, } S_n = -(2+2^2+\dots+2^n) + n \cdot 2^{n+1} = -\frac{2(1-2^n)}{1-2} + n \cdot 2^{n+1} = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

$$19. \text{解: (1) 若分期付款, 十年后终值为 } R = 6 \times (1+4\%)^{10} + 6 \times (1+4\%)^9 + \dots + 6 \times (1+4\%) = 6 \times$$

$$1.04 \times \frac{1.04^{10}-1}{1.04-1} \approx 74.88 (\text{万元}).$$

若全款 50 万, 十年后终值为 $S = 50 \times (1+4\%)^{10} \approx 74.4R$. 所以方案一更好.(2) 十年房租到期后小明所获得全部租金的终值为 $T = 2 \times (1+4\%)^{10} + 2.1 \times (1+4\%)^9 + \dots + 2.9 \times (1+4\%)$.

$$\text{记 } 1+4\% = q, a_n = 3-0.1n, \text{则 } T = a_1q + a_2q^2 + \dots + a_{10}q^{10},$$

$$\text{所以 } qT = a_1q^2 + a_2q^3 + \dots + a_{10}q^{11},$$

$$\text{两式相减得 } (1-q)T = 2.9q - 0.1(q^2 + q^3 + \dots + q^{10}) - 2q^{11} = 3q - 0.1(q + q^2 + q^3 + \dots + q^{10}) - 2q^{11},$$

$$\text{所以 } T = 3 - \frac{q}{1-q} - 0.1 \times \frac{q(1-q^{10})}{(1-q)^2} - 2 \cdot \frac{q^{11}}{1-q} \approx 3 \times \frac{1.04}{-0.04} -$$

$$0.1 \times \frac{1.04 \times (1-1.48)}{(-0.04)^2} - 2 \times \frac{1.04 \times 1.48}{-0.04} = 30.16 (\text{万元}).$$

所以预计第十年房租到期后小明所获得全部租金的终值为 30.16 万元.

第 4 期

第 2~3 版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.C 提示: 设数列 7, 10, 13, 16, \dots 为数列 $\{a_n\}$, 则数列 $\{a_n\}$ 是以 7 为首项, 3 为公差的等差数列, 其通项公式为 $a_n = 7 + 3(n-1) = 3n + 4$, 令 $3n + 4 = 82$, 解得 $n = 26$.

故选 C.

2.A 提示: 设数列 $\{a_n\}$ 公差为 d , 则 $a_1 + a_2 + a_3 = 3a_1 + 3d = 6$, 解得 $d = -1$, 所以 $a_3 + a_4 + a_5 = 3a_1 + 9d = 0$. 故选 A.3.B 提示: 因为 $\{a_n\}$ 为正项等比数列, 所以 $a_n = \sqrt{a_3 a_9} = 8$, 又 $a_2 + a_6 = 10$, 所以 $a_2 = 10 - 8 = 2$,

$$\text{所以 } a_4 = \sqrt{a_2 a_6} = \sqrt{2 \times 8} = 4. \text{故选 B.}$$

4.D 提示: 由 $S_{n+1} = 3S_n + 2$, 得 $S_n = 3S_{n-1} + 2 (n \geq 2)$, 所以 $S_{n+1} - S_n = 3S_n - 3S_{n-1}$, 得 $a_{n+1} = 3a_n$,所以等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q = 3$, 所以由 $S_{n+1} = 3S_n + 2$, 得 $\frac{a_1(1-3^{n+1})}{1-3} = 3 \cdot \frac{a_1(1-3^n)}{1-3} + 2$,

$$\text{所以 } a_1(3^{n+1} - 1) = 3a_1(3^n - 1) + 4, \text{解得 } a_1 = 2, \text{所以 } S_5 = \frac{2 \times (1-3^5)}{1-3} = 3^5 - 1 = 242. \text{故选 D.}$$

5.A 提示: 设 $b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$, 由题意知 $\{b_n\}$ 是公差为 1 的等差数列, 则 $b_1 = a_1 + a_2 + a_3 = 9$,

$$\text{故 } b_n = 9 + (n-1) \times 1 = n + 8,$$

$$\text{则 } b_2 + b_3 + \dots + b_{36} = (2+8) + (5+8) + \dots + (38+8) = 13 \times 8 + \frac{13 \times (2+38)}{2} = 364.$$

$$\text{于是 } S_{40} = a_1 + (a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7) + \dots + (a_{38} + a_{39} + a_{40}) = a_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{36} = 2 + 364 = 366. \text{故选 A.}$$

6.B 提示: 由题意得, 分到的钱数构成以 3 为首项, 1 为公差的等差数列, 设有 n 人,

$$\text{则 } 3n + \frac{n(n-1)}{2} \times 1 = 10n, \text{整理得 } n^2 - 15n = 0, \text{故 } n = 15.$$

故选 B.

$$7.D \text{ 提示: 由 } a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n, & 0 \leq a_n < \frac{1}{2}, \\ 2a_n - 1, & \frac{1}{2} \leq a_n < 1, \end{cases} a_1 = \frac{1}{5}, \text{得 } a_2 =$$

$$\frac{2}{5}, a_3 = \frac{4}{5}, a_4 = \frac{3}{5}, a_5 = \frac{1}{5}, \dots, \text{可得数列 } \{a_n\} \text{ 是以 } 4 \text{ 为周}$$

$$\text{期的周期数列, 所以 } a_{2023} = a_{1011 \times 4 + 3} = a_3 = \frac{4}{5}. \text{故选 D.}$$

$$8.D \text{ 提示: 由题意知, 当 } n=1 \text{ 时, } a_1 = \frac{2}{3}, \text{当 } n \geq 2$$

$$\text{时, 由 } a_1 + 3a_2 + 9a_3 + \dots + 3^{n-1}a_n = \frac{n+1}{3}, \text{可得 } a_1 + 3a_2 + 9a_3 + \dots + 3^{n-2}a_{n-1} = \frac{n}{3}, \text{两式相减, 可得 } 3^{n-1}a_n = \frac{n+1}{3} - \frac{n}{3} = \frac{1}{3}. \text{解得 } a_n = \frac{1}{3^n},$$

$$\text{因为当 } n=1 \text{ 时, } a_1 = \frac{2}{3} \text{ 不满足上式,}$$

$$\text{所以 } a_n = \begin{cases} \frac{2}{3}, & n=1, \\ \frac{1}{3^n}, & n \geq 2, \end{cases} \text{则当 } n=1 \text{ 时, } S_1 = a_1 = \frac{2}{3},$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} =$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{5}{6} - \frac{1}{2 \cdot 3^n},$$

$$\text{因为当 } n=1 \text{ 时, } S_1 = \frac{2}{3} \text{ 也满足上式, 所以 } S_n = \frac{5}{6} - \frac{1}{2 \cdot 3^n}, n \in \mathbf{N}_+, \text{因为 } S_n = \frac{5}{6} - \frac{1}{2 \cdot 3^n} < \frac{5}{6}, \text{且 } S_n < k \text{ 对任意 } n \in \mathbf{N}_+ \text{ 恒成立, 所以 } k \geq \frac{5}{6}, \text{即实数 } k \text{ 的最小值为 } \frac{5}{6}. \text{故选 D.}$$

二、多项选择题

9.BD 提示: 因为 1, $a, b, c, 16$ 成等比数列, 设该数列的公比为 q , 则 $1 \times q^4 = 16$, 解得 $q = \pm 2$,

$$\text{当 } q=2 \text{ 时, } a=2, b=4, c=8, ac=16; \text{当 } q=-2 \text{ 时, } a=-2, b=4, c=-8, ac=16. \text{故选 BD.}$$

$$10.AC \text{ 提示: 设等差数列 } \{a_n\} \text{ 的公差为 } d, a_1 + 5a_3 =$$

$$S_7, \text{则 } a_1 + 5(a_1 + 2d) = 7a_1 = 7(a_1 + 3d), \text{化简得, } a_1 + 11d = a_{12} = 0, \text{故 A 正确; 由于无法判断公差 } d \text{ 的正负, 不能确定 } S_{12} \text{ 最小, 故 B 错误;}$$

$$S_{15} - S_9 = a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} = 7a_{12} = 0, \text{即 } S_9 = S_{15}, \text{故 C 正确;}$$

$$S_{23} = \frac{23(a_1 + a_{23})}{2} = 23a_{12} = 0, \text{故 D 错误. 故选 AC.}$$

11.AD 提示: 对于 A, 因为等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 且 $a_1 > 1, a_{1012} a_{1013} > 1, (a_{1012} - 1)(a_{1013} - 1) < 0$, 所以 $a_{1012} > 1, 0 < a_{1013} < 1$, 所以 $q \in (0, 1)$, 故 A 正确;对于 B, 因为 $a_{1012} a_{1014} = a_{1013}^2 < 1$, 所以 $a_{1012} a_{1014} - 1 < 0$, 故 B 错误; 对于 C, 当 $n \leq 1012$ 时, $a_n > 1$, 当 $n \geq 1013$ 时, $a_n < 1$, 则 T_n 的最大值为 T_{1012} , 故 C 错误;对于 D, $T_{2023} = a_{1012}^2 > 1, T_{2024} = (a_{1012} a_{1013})^{1012} > 1, T_{2025} = (a_{1013})^{2025} < 1$, 所以使 $T_n < 1$ 成立的最小自然数 $n = 2025$, 故 D 正确. 故选 AD.

三、填空题

$$12.24 \text{ 提示: 因为 } \{a_n\} \text{ 为等差数列, 所以 } a_1 + a_5 = a_2 + a_4 = 2a_3,$$

$$\text{所以 } a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5a_3 = 120, \text{解得 } a_3 = 24, \text{又 } a_3 + a_7 = 2a_5, \text{所以 } 2a_5 - a_7 = a_4 = 24.$$

$$13.2 \text{ 提示: 设等比数列 } \{a_n\} \text{ 的公比为 } q, \text{则 } S_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = (a_1 + a_2 + a_3) + q^3 \cdot (a_1 + a_2 + a_3) = S_3(1 + q^3),$$

$$\text{所以 } q^3 = \frac{S_6}{S_3} - 1 = 8, \text{则 } q = 2, \text{又因为 } S_3 = \frac{a_1(1-2^3)}{1-2} =$$

$$7a_1 = \frac{7}{4}, \text{得 } a_1 = \frac{1}{4}, \text{则 } a_4 = a_1 q^3 = \frac{1}{4} \times 8 = 2, \text{由对数的运算性质以及等比中项的性质可得}$$

$$\log_2 a_3 + \log_2 a_5 = \log_2 (a_3 a_5) = \log_2 a_4^2 = \log_2 2^2 = 2.$$

$$14. \frac{2023}{4047} \text{ 提示: 已知等比数列 } \{a_n\} \text{ 各项均为正数, } a_2, a_4 \text{ 为方程 } x^2 + mx + 16 = 0 (m \text{ 为常数}) \text{ 的两根, 则 } a_2 a_4 = 16, \text{即 } a_1^2 q^4 = 16, \text{又 } a_1 = 1, q > 0, \text{所以 } q = 2, \text{所以 } S_n = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1, \text{则 } b_n = \log_{\sqrt{2}} 2^n = 2n,$$

$$\text{所以 } \frac{1}{b_n^2 - 1} = \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$\text{所以数列 } \left\{ \frac{1}{b_n^2 - 1} \right\} \text{ 的前 } 2023 \text{ 项和为 } \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{4045} - \frac{1}{4047} \right) \right] = \frac{2023}{4047}.$$

四、解答题

15.解: (1) 设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 因为 $a_2^3 = a_2 \cdot a_6 = 16$, 所以 $a_5 = a_1 \cdot q^8 = 4$,

$$\text{因为 } \frac{a_2 + a_7}{a_2 + a_4} = \frac{a_2 q^3 + a_2 q^3}{a_2 + a_4} = q^3 = \frac{1}{8}, \text{所以 } q = \frac{1}{2},$$

$$\text{因为 } a_5 = a_1 \times \left(\frac{1}{2} \right)^8 = 4, \text{所以 } a_1 = 1024$$

第 2 期
第 3~4 版同步周测参考答案
一、单项选择题

1.D
提示：等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=5a_4=90$ ，所以 $a_4=18$ ，所以 $a_1+a_7=2a_4=36$.故选 D.

2.C
提示：等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2+a_6=2a_4=10$ ，所以 $a_4=5$ ， $a_4a_6=5a_5=45$ ，

故 $a_5=9$ ，所以公差 $d=\frac{a_5-a_1}{8-4}=1$ ， $a_1=a_4-3d=5-3=2$ ，所以 $S_7=5a_4+\frac{5\times 4}{2}d=10+10=20$.故选 C.

3.C
提示：因为数列 $\{S_n\}$ 的最大项是第 20 项和第 21 项，根据 S_n 的对称性，

所以 $S_{20}=S_{21}$ ，整理得 $20a_1+\frac{20\times 19}{2}d=21a_1+\frac{21\times 20}{2}d$ ，故 $a_1+20d=0$ ，即 $a_{21}=0$ ，故 $a_{21}=a_{10}+11d=0$ ，因为数列 $\{a_n\}$ 的公差为-2，所以 $a_{10}=22$.故选 C.

4.B
提示：对于数列 $\left\{\frac{2}{1+a_1}\right\}$ ，因为 $a_1=1$ ， $a_k=-\frac{1}{2}$ ，所以 $\frac{2}{1+a_1}=1$ ， $\frac{2}{1+a_k}=4$ ，

设等差数列 $\left\{\frac{2}{1+a_1}\right\}$ 的公差为 d ，则 $3d=4-1=3$ ，得 $d=1$ ，所以 $\frac{2}{1+a_{2023}}=1+2022d=2023$ ，所以 $a_{2023}=-\frac{2021}{2023}$.故选 B.

5.C
提示：若 $\{a_n\}$ 是等差数列，设数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ，公差为 d ，则 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$ ，即 $\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{n-1}{2}d=\frac{d}{2}n+a_1-\frac{d}{2}$ ，故 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列，即甲是乙的充分条件.

反之，若 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列，则可设 $\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=D$ ，则 $\frac{S_n}{n}=S_1+(n-1)D$ ，即 $S_n=nS_1+n(n-1)D$ ，当 $n\geq 2$ 时，有 $S_{n-1}=(n-1)S_1+(n-1)(n-2)D$ ，两式相减，得 $a_n=S_n-S_{n-1}=S_1+2(n-1)D$ ，当 $n=1$ 时，上式成立，所以 $a_n=a_1+2(n-1)D$ ，则 $a_{n+1}-a_n=a_1+2nD-[a_1+2(n-1)D]=2D$ (常数)，所以数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，即甲是乙的必要条件.综上所述，甲是乙的充要条件.故选 C.

6.A 提示：因为 a_5, a_9 是方程 $x^2+x-2023=0$ 的两根，所以 $a_5+a_9=-1$ ， $a_5\cdot a_9=-2023$ ，又 $a_1>0$ ，所以 $a_5>0, a_9<0$ ，所以 $S_{16}=\frac{(a_1+a_{16})\times 16}{2}=8(a_5+a_9)=-8<0$ ， $S_{15}=\frac{(a_1+a_{15})\times 15}{2}=15a_8>0$ ，所以能使 $S_n>0$ 成立的 n 的最大值为 15.故选 A.

7.A
提示：由题意知，可将李白在每家店饮酒后所剩酒量构成一个数列 $\{a_n\}$ ，则李白在每家店饮酒后所剩酒量均为在前一家店饮酒后所剩酒量的 2 倍减去 5，即 $a_{n+1}=2a_n-5$ ，因为 $a_1=6\times 2-5=7$ ，所以 $a_2=2a_1-5=2\times 7-5=9$ ， $a_3=2a_2-5=2\times 9-5=13$ ， $a_4=2a_3-5=2\times 13-5=21$ ， $a_5=2a_4-5=2\times 21-5=37$ ，故李白在第 5 家店饮酒后所剩酒量是 37 升.故选 A.

8.C
提示：设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $\forall n\in\mathbf{N}_+$ ，都有 $\frac{S_n}{n}>\frac{S_{n+1}}{n+1}$ ，整理得 $\frac{n(a_1+a_n)}{2n}>\frac{(n+1)(a_1+a_{n+1})}{2(n+1)}$ ，化简得 $a_n>a_{n+1}$ ，故数列 $\{a_n\}$ 为单调递减数列.

因为 $a_7a_8<0$ ，所以 $a_7>0, a_8<0$ ，故 S_n 的最大值是 S_7 .故选 C.

二、多项选择题
9.ABD
提示：由 $4-1=7-4=10-7=3$ ，得数列 1, 4, 7, 10 是等差数列，故 A 正确；

由 $\lg 4-\lg 2=\lg 8-\lg 4=\lg 16-\lg 8=\lg 2$ ，得数列 $\lg 2, \lg 4, \lg 8, \lg 16$ 是等差数列，故 B 正确；

因为 $2^4-2^3=-16\neq 2^3-2^2=-8$ ，所以数列 $2^5, 2^4, 2^3, 2^2$ 不是等差数列，故 C 错误；

由 $8-10=6-8=4-6=2-4=-2$ ，得数列 10, 8, 6, 4, 2 是等差数列，故 D 正确.故选 ABD.

10.ABD
提示：等差数列 $\{a_n\}$ 中， $(a_5+a_6+a_7+a_8)(a_6+a_7+a_8)<0$ ，所以 $2(a_6+a_7)\cdot 3a_7<0$ ，即 $(a_6+a_7)\cdot a_7<0$ ，所以 $a_6a_7+a_7^2<0$ ，所以 $a_6a_7<0$ ，

又因为 $a_1>0$ ，所以 $a_6>0, a_7<0$ ，所以 $a_6+a_7>0$ ，所以 $S_{12}=\frac{12(a_1+a_{12})}{2}=6(a_6+a_7)>0$ ，故 A 正确，B 正确，D 正确；

又 $S_{13}=13a_7<0$ ，故 C 错误.故选 ABD.

11.AD
提示：对于 A，等差数列 $\{a_n\}$ 中，设公差为 d ，则 $S_3=4a_1+6d$ ， $S_6=8a_1+28d$ ， $S_{12}=12a_1+66d$ ，所以 $S_6-S_4=a_1+22d$ ， $S_{12}-S_8=4a_1+38d$ ，所以 $2(S_6-S_4)=S_8+(S_{12}-S_8)$ ，所以 $S_4, S_6-S_4, S_{12}-S_8$ 成等差数列，故 A 正确；

对于 B，因为数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=26-2n$ ，所以 $a_1=26-2=24$ ， $a_n-a_{n-1}=(26-2n)-[26-2(n-1)]=-2$ ，所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 24，公差为-2 的等差数列，

当 $a_n\geq 0$ 时， $n\leq 13$ ，且 $n\in\mathbf{N}_+$ ；当 $a_n<0$ 时， $n\geq 14$ ，且 $n\in\mathbf{N}_+$ ，所以当 $n=12$ 或 $n=13$ 时， $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 最大，故 B 错误；

对于 C，因为 $\{a_n\}$ 是等差数列， $S_{10}=S_{20}$ ，所以 $S_{30}-S_{10}=\frac{10(a_{11}+a_{30})}{2}=5(a_{15}+a_{16})=0$ ，即 $a_{15}+a_{16}=0$ ，因为 $a_1>0$ ，所以 $a_{15}>0, a_{16}<0$ ，所以 $S_{30}=\frac{30(a_1+a_{30})}{2}=15(a_{15}+a_{16})=0$ ，

$S_{31}=\frac{31}{2}(a_1+a_{31})=31a_{16}<0$ ，所以当 $n\geq 31$ 时， $S_n<0$ ，故 C 错误；

对于 D，因为数列 $\{a_n\}$ 为等差数列， $S_{15}>0, S_{16}<0$ ，所以 $a_{15}>0, a_{16}<0$ ，所以 $S_{30}=\frac{15}{2}(a_1+a_{15})=15a_{15}>0$ ，即 $a_{30}>0, S_{16}=8(a_1+a_{16})=8(a_3+a_6)<0$ ，

即 $a_3+a_6<0$ ，所以 $a_3<0$ ，所以 $n=8$ 时， S_8 最大，故 D 正确.故选 AD.

三、填空题
12.2
提示：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，因为 $S_3+2a_{17}=42$ ，所以 $S_3+2a_{17}=5a_1+10d+2a_1+32d=7(a_1+6d)=42$ ，所以 $a_1+6d=a_7=6$ ，又 $a_6=4$ ，所以 $d=a_7-a_6=2$ ，

13.4
提示：设每一层的球数构成数列 $\{a_n\}$ ，由题意得， $a_1=1, a_2-a_1=2, a_3-a_2=3, \dots, a_n-a_{n-1}=n$ ，以上 n 个式子累加得 $a_n=1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ($n\geq 2$)，又 $a_1=1$ 满足上式，所以 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$ ，所以 $S_7=a_1+a_2+\dots+a_7=1+3+6+10+15+21+28=84$ ，

$S_6=a_1+a_2+\dots+a_6=1+3+6+10+15+21=56$ ，所以剩余篮球的个数最少为 $60-56=4$ ，

14. $\frac{1}{4}, \frac{2n-1}{4}$
提示：因为数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数， $a_2=3a_1$ ，又 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列，所以 $\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}=\sqrt{a_1+a_2}-\sqrt{a_1}=2\sqrt{a_1}-\sqrt{a_1}=\sqrt{a_1}=\frac{1}{2}$ ，

所以 $a_1=\frac{1}{4}$ ， $\sqrt{S_1}=\frac{1}{2}$ ，所以 $\sqrt{S_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n}{2}$ ，所以 $S_n=\frac{n^2}{4}$ ，所以 $n\geq 2$ 时， $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n^2}{4}-\frac{(n-1)^2}{4}=\frac{2n-1}{4}$ ，又 $a_1=\frac{1}{4}$ 适合上式，故 $a_n=\frac{2n-1}{4}$ ，

四、解答题
15.解：(1)由 $S_4-S_1=a_2+a_3+a_4=3a_3=3$ ，得 $a_3=1$ ，所以 $a_n=a_3+(n-3)d=1+2(n-3)=2n-5$ ，

(2)由(1)知， $a_2=1$ ，所以 $a_1=-2d$ ，

$S_{10}=10a_1+\frac{10\times 9}{2}d=10(-2d)+45d=25d+10$ ，

因为 $|S_{10}|<60$ ，所以 $|25d+10|<60$ ，所以 $-60<25d+10<60$ ，解得 $-\frac{14}{5}<d<2$ ，故 d 的取值范围为 $\left(-\frac{14}{5}, 2\right)$ ，

16.解：(1)设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，由题意得， $\begin{cases} a_2+a_3=2a_1+3d=6, \\ a_6+a_7=2a_1+11d=-10, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1=6, \\ d=-2, \end{cases}$ 所以 $a_n=6+(n-1)\cdot(-2)=-2n+8$ ，

(2)由(1)可得， $S_n=\frac{[6+(-2n+8)]\cdot n}{2}=-n^2+7n$ ，令 $S_n<0$ ，则 $-n^2+7n<0$ ，解得 $n>7$ 或 $n<0$ (舍去)，因为 $n\in\mathbf{N}_+$ ，故 n 的最小值是 8.

17.解：(1)由题意可知， $a_1=33.6$ ，注意到 $33.6-24=9.6, 24-19.2=4.8$ ，

取等差数列的公差 $d=-2.4$ ，则 $a_n=33.6-2.4(n-1)=36-2.4n$ ，

令 $a_n=36-2.4n=24$ ，解得 $n=5$ ，即 24 为第 5 项；令 $a_n=36-2.4n=19.2$ ，解得 $n=7$ ，即 19.2 为第 7 项.故 $a_n=36-2.4n$ 符合题意.

(2)新堆叠塔塔的高度超过 310m，理由如下：由(1)可知， $m\leq 7, a_1=33.6, a_2=31.2, a_3=28.8, a_4=26.4, a_5=24, a_6=21.6, a_7=19.2$ ，

设数列 $\{(n+1)a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，则 $S_7=2a_1+3a_2+4a_3+\dots+8a_7=856.8>310$ ，故新堆叠塔塔的高度超过 310m.

18.解：(1)由已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，记其公差为 d ，当 $n\geq 2$ 时，由 $a_{n+1}+n=2a_n+8$ ，得 $a_n+n-1=2a_{n-1}+8$ ，两式相减可得 $d+1=2d$ ，所以 $d=1$ ；当 $n=1$ 时， $a_2+1=2a_1+8$ ，所以 $a_1=-6$ ，

综上， $a_n=-6+(n-1)\times 1=n-7$ ，

(2)由(1)知 $\cdot S_n=-6n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{1}{2}n^2-\frac{13}{2}n=\frac{1}{2}\left(n-\frac{13}{2}\right)^2-\frac{169}{8}$ ，

所以，当 n 取与 $\frac{13}{2}$ 最接近的整数 6 或 7 时， $S_6=S_7$ 最小，最小值为-21.

19.解：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，若选择条件①：因为 $S_2=2S_1+S_{21}-2$ ，所以 $2a_1+d=2a_1+\left(24a_1+\frac{24\times 23}{2}d\right)-2$ ，即 $24a_1+275d-2=0$ ，

又因为 $a_{12}=a_1+11d=1$ ，解得 $d=-2, a_1=23$ ，当 $S_m=S_n$ 时， $ma_1+\frac{m(m-1)}{2}d=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$ ，即 $23m-m(m-1)=23n-n(n-1)$ ，即 $(m-n)(m+n-24)=0$ ，

因为 $1\leq m<n$ ，所以 $m+n=24$ ，故存在正整数 m, n ，当 $m+n=24$ 时，使 $S_m=S_n$ 成立.

若选择条件②：因为 $\frac{S_6}{9}=\frac{S_{16}}{15}=6$ ，所以 $a_5=a_6+6$ ，所以 $d=-2$ ，

又因为 $a_{12}=a_1+11d=1$ ，所以 $a_1=1-11d=23$ ，当 $S_m=S_n$ 时， $ma_1+\frac{m(m-1)}{2}d=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$ ，

即 $23m-m(m-1)=23n-n(n-1)$ ，即 $(m-n)(m+n-24)=0$ ，

因为 $1\leq m<n$ ，所以 $m+n=24$ ，故存在正整数 m, n ，当 $m+n=24$ 时，使 $S_m=S_n$ 成立.

若选择条件③：因为 $\frac{a_2^2-a_1^2}{a_1^2-a_2^2}=\frac{3}{5}$ ，

所以 $\frac{(a_1+a_2)(a_1-a_2)}{(a_1+a_2)(a_1-a_2)}=\frac{3}{5}$ ，所以 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{3}{5}$ ，

所以 $5(a_1+7d)=3(a_1+4d)$ ，即 $2a_1+23d=0$ ，又因为 $a_{12}=a_1+11d=1$ ，解得 $d=-2, a_1=23$ ，

当 $S_m=S_n$ 时， $ma_1+\frac{m(m-1)}{2}d=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$ ，即 $23m-m(m-1)=23n-n(n-1)$ ，

即 $(m-n)(m+n-24)=0$ ，

因为 $1\leq m<n$ ，所以 $m+n=24$ ，故存在正整数 m, n ，当 $m+n=24$ 时，使 $S_m=S_n$ 成立.

数学
北师大

第 3 期
第 3~4 版同步周测参考答案
一、单项选择题

1.B 提示：因为 $\{a_n\}$ 是等比数列，所以 $S_6=(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)=S_3+q^3(a_1+a_2+a_3)=(1+q^3)S_3$ ，

由 $\frac{S_6}{S_3}=1+q^3=\frac{26}{27}$ ，解得 $q=-\frac{1}{3}$.故选 B.

2.C 提示：因为等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，且 $a_1\cdot a_5\cdot a_9=8$ ，所以 $a_1\cdot a_5=a_3^2$ ，所以 $a_3^2=8$ ，所以 $a_3=2$ ，所以 $\log_2a_1+\log_2a_3+\log_2a_5+\log_2a_7+\log_2a_9=\log_2(a_1a_3a_5a_7a_9)=\log_2a_3^5=5\log_2a_3=5\log_22=5$.故选 C.

3.C 提示：因为 $\{a_n\}$ 为等比数列， $a_{n+1}=2S_n+2$ ，所以 $a_2=2S_1+2=2a_1+2, a_3=2S_2+2=2(a_1+2a_1+2)+2=6a_1+6$ ，由等比数列的性质，可得 $a_2^2=a_1\cdot a_3$ ，即 $(2a_1+2)^2=(6a_1+6)\cdot a_1$ ，所以 $a_1=2$ 或 $a_1=-1$ (舍去)，所以 $a_2=6, q=3$ ，则 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}=2\times 3^{n-1}=54$.故选 C.

4.C 提示：等比数列 $\{a_n\}$ 中， $S_3=-5, S_6=21S_2$ ，显然公比 $q\neq 1$ ，设数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ，则 $\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=-5, ①$

$\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}=\frac{21a_1(1-q^2)}{1-q}, ②$

化简②得 $q^4+q^2-20=0$ ，解得 $q^2=4$ 或 $q^2=-5$ (舍去)，代入①得 $\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{3}$ ，所以 $S_8=\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}(1-q^4)(1+q^4)=-\frac{1}{3}\times(-15)\times(1+16)=-85$.故选 C.

5.B 提示：由题意知，数列从第二项开始，构成以 $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，所以前 6 项和为 $1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=1+\frac{1-\frac{1}{2^6}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{47}{16}$.故选 B.

6.D 提示：因为 $a_n=(2n-1)\cos n\pi$ ，所以 $a_1=\cos\pi=-1, a_2=3\cos 2\pi=3, a_3=5\cos 3\pi=-5, a_4=7\cos 4\pi=7$ ，所以 $a_1+a_2=2, a_3+a_4=2$ ，以此类推， $a_5+a_6=2, \dots, a_{2021}+a_{2022}=2$ ，所以 $S_{2023}=2\times 1011+a_{2023}=2022+4045\cos 2023\pi=2022-4045=-2023$.故选 D.

7.A 提示：因为 $S_n=2^{n+1}+a$ ，所以 $a_1=S_1=4+a, a_2=S_2-S_1=(2^3+a)-(2^2+a)=4, a_3=S_3-S_2=(2^4+a)-(2^3+a)=8$ ，又 $\{a_n\}$ 是等比数列，所以 $a_2^2=a_1a_3$ ，即 $4^2=8(4+a)$ ，解得 $a=-2$ ，所以 $S_n=2^{n+1}-2$ ，

当 $n\geq 2$ 时， $a_n=S_n-S_{n-1}=(2^{n+1}-2)-(2^n-2)=2^n$ ，又 $a_1=2$ 满足 $a_n=2^n$ ，对任意的 $n\in\mathbf{N}_+$ ， $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{n+1}}{2^n}=2$ ，故数列 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，

所以 $\frac{a_{2n}a_{2n+1}}{a_{n+1}a_n}=\frac{a_{2n+2}}{a_n}=\frac{2^{2n+2}}{2^n}=4$ ，故数列 $\{a_na_{n+1}\}$ 是公比为 4，首项为 $a_1a_2=2\times 4=8$ 的等比数列，

所以 $\frac{a_{10}a_{20}a_{30}}{a_{20}a_{10}a_{30}}=\frac{a_{30}^2}{a_{10}a_{20}}=\frac{2^{23}\cdot 8}{1\cdot 4}=\frac{2^{23}\cdot 8}{3}$ ，故选 A.

8.C 提示：对于 A，可列举公比 $q=-1$ 的等比数列 1, -1, 1, -1, \dots ，显然满足 $a_3>0$ ，但 $a_{2023}=1>0$ ，故 A 错误；对于 B，可列举公比 $q=-1$ 的等比数列-1, 1, -1, 1, \dots ，显然满足 $a_4=1>0$ ，但 $a_{2024}=1>0$ ，故 B 错误；对于 C，因为 $a_3>0$ ，即 $a_1\cdot q^2>0$ ，所以 $a_1>0$ ，

当公比 $q>0$ 时，任意 $a_n>0$ ，故有 $S_{2023}>0$ ，当公比 $q<0$ 时， $q^{2023}<0$ ，故 $1-q>0, 1-q^{2023}>0$ ，仍然有 $S_{2023}=\frac{a_1(1-q^{2023})}{1-q}>0$ ，故 C 正确；对于 D，可列举公比 $q=-1$ 的等比数列 1, -1, 1, -1, \dots ，显然满足 $a_3>0$ ，但 $S_{2024}=0$ ，故 D 错误.故选 C.

二、多项选择题
9.AC 提示：对于 A， $a_3+a_7=\frac{a_5}{q^2}+aq^2=\frac{1}{q^2}+q^2\geq 2\sqrt{\frac{1}{q^2}\times q^2}=2$ ，当且仅当 $q=\pm 1$ 时，等号成立，故 A 正确；对于 B， $a_4+a_6=\frac{a_5}{q}+aq$ ，当 $q<0$ 时， $a_4+a_6\geq 2$ 不成立，故 B 错误；

高二选择性必修 (第二册) 答案页第 1 期

对于 C， $a_5=1$ ，则 $a_7-2a_4+1=q^2-2q+1=(q-1)^2\geq 0$ ，故 C 正确；对于 D， $a_5=1$ ，则 $a_3-2a_4-1=\frac{1}{q^2}-\frac{2}{q}-1=\left(\frac{1}{q}-1\right)^2-2$ ，则 $a_3-2a_4-1\geq 0$ 不恒成立，故 D 错误.故选 AC.

10.ACD 提示：因为 $a_1=1$ ，数列 $\left\{\frac{1}{a_n}+1\right\}$ 是公比为 2 的等比数列，所以 $\frac{1}{a_n}+1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$ ，所以 $a_n=\frac{1}{2^n-1}$ ，故 A 正确，B 错误；根据指数函数的性质及反比例函数性质，可知 $\{a_n\}$ 为递减数列，故 C 正确；

$S_n=a_1+a_2+a_3=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}>\frac{7}{8}$ ，故 D 正确.故选 ACD.

11.BD 提示：对于 B，因为 $a_1>0, q>1$ ，所以 $a_n=a_1q^{n-1}>0$ ，又 $T_{2023}=a_1a_2\cdots a_{2023}<1, T_{2024}=a_1a_2\cdots a_{2024}>1$ ，所以 $a_{2024}>1$ ，故 B 正确；

对于 A 和 D，由等比数列的性质， $a_1a_{2023}=a_2a_{2022}=\cdots=a_{1012}a_{1012}=a_{1012}^2$ ，所以 $a_1a_2\cdots a_{2023}=a_{1012}^{2023}<1$ ，即 $a_{1012}<1$ ，因为 $a_1a_{2024}=a_2a_{2023}=\cdots=a_{1012}a_{1013}$ ，所以 $a_1a_2\cdots a_{2024}=(a_{1012}a_{1013})^{1012}>1$ ，即 $a_{1012}a_{1013}>1$ ，

故当 $n=1012$ 时， $T_n=a_1a_2\cdots a_n$ 最小，故 A 错误，D 正确；对于 C，因为 $a_1>0, q>1$ ，所以数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列，

所以当 $n<1012$ 时， $a_n<a_{1012}<1$ ，故 $a_na_{n+1}<a_{n+1}<a_{n+2}$ ，故 C 错误.故选 BD.

三、填空题
12.2ⁿ(答案不唯一，满足题意即可)
提示：因为 $a_1>0, \{a_n\}$ 是递增数列，所以 $q>1$ ，由 $S_3<13a_1$ ，得 $\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}<13a_1$ ，解得 $-4<q<3$ ，且 $q\neq 1$ ，而 $q>1$ ，所以 $1<q<3$ ，即只需满足 $a_1>0, 1<q<3$ ，取 $a_1=2, q=2$ ，则 $a_n=2^n$ ，