

高考版答案页第7期

数学



扫码免费下载
习题讲解 ppt

第25期

第2~3版

专题一 集合与常用逻辑用语、复数 专项训练(1)

1.A 提示：因为集合 $A = \{x | \lg x < 1\} = (0, 10)$, $B = \{y | y = \sqrt{4-x^2}\} = [0, 2]$, 所以 $A \cup B = [0, 10)$. 故选 A.

2.B 提示：因为全称量词命题的否定为存在量词命题，所以命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, \ln(x^2+1) > 0$ ”的否定为“ $\exists x \in \mathbf{R}, \ln(x^2+1) \leq 0$ ”. 故选 B.

3.C 提示：由 $(1+i)z=2+i$, 可得 $z = \frac{2+i}{1+i} = \frac{(2+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3-i}{2}$, 则复数 z 的虚部是 $-\frac{1}{2}$. 故选 C.

4.C 提示：因为 $y=x^3$ 是增函数，且 $a^3 > b^3$, 所以 $a > b$, 又 $y=3^x$ 是增函数，则 $3^a > 3^b$, 故充分性成立；因为 $y=3^x$ 是增函数， $3^a > 3^b$, 所以 $a > b$, 又 $y=x^3$ 是增函数，所以 $a^3 > b^3$, 故必要性成立. 所以“ $a^3 > b^3$ ”是“ $3^a > 3^b$ ”的充要条件. 故选 C.

5.C 提示：由 $y = \ln(6+x-x^2)$, 得 $6+x-x^2 > 0$, 解得 $-2 < x < 3$, 则集合 $B = \{x | -2 < x < 3\}$, 因为集合 $A = \{x | a < x < a+2\} \neq \emptyset$, $A \subseteq B$, 所以 $\begin{cases} a \geq -2, \\ a+2 \leq 3, \end{cases}$ 解得 $-2 \leq a \leq 1$. 故选 C.

6.D 提示：因为 $(1+i)z = |1+\sqrt{3}i| = 2$, 所以 $z = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1-i$, 所以 $\bar{z} = 1+i$. 故选 D.

7.A 提示：由 $x^2-2x \leq 0$, 得 $x^2-2x \leq a$, 因为当 $x \in [-1, 3]$ 时, $x^2-2x = (x-1)^2-1 \geq -1$, 当且仅当 $x=1$ 时, 等号成立, 由题意得 $a \geq (x^2-2x)_{\min}$, 所以 $a \geq -1$, 则实数 a 可取的最小整数值是 -1 . 故选 A.

8.C 提示：因为集合 $A = \{x | x^2-4x+3 > 0\} = \{x | x < 1 \text{ 或 } x > 3\}$, $B = \{x | -1 < x < 2\}$, 所以 $\complement_{\mathbf{R}} A = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$, 所以阴影部分表示的集合为 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = \{x | 1 \leq x < 2\}$. 故选 C.

专项训练(2)

1.C 提示：因为集合 $B = \{-2, 0, 2, 4, 10\}$, $A = \{x | x^2-4x-5 < 0\} = \{x | -1 < x < 5\}$, 所以 $A \cap B = \{0, 2, 4\}$. 故选 C.

2.C 提示：因为存在量词命题的否定为全称量词命题，命题 $p: \exists x_0 > 0, \sin x_0 > 1 + \cos x_0$, 所以 $\neg p$ 为 $\forall x > 0, \sin x \leq 1 + \cos x$. 故选 C.

3.D 提示：因为复数 $\frac{2-i}{a+i} (a \in \mathbf{R})$ 为纯虚数， $\frac{2-i}{a+i} = \frac{(2-i)(a-i)}{(a+i)(a-i)} = \frac{2a-1+(-2-a)i}{a^2+1}$, 所以 $2a-1=0$, 且 $-2-a \neq 0$, 解得 $a = \frac{1}{2}$, 所以 $z = 2a-i = 1-i$ 在复平面对应的点为 $(1, -1)$, 位于第四象限. 故选 D.

4.C 提示：因为集合 $P = \{x | -1 \leq x-1 \leq 3\} = \{x | 0 \leq x \leq 4\}$, $Q = \{x | y = \sqrt{x-1}\} = \{x | x \geq 1\}$, 所以 $P \cup Q = \{x | x \geq 0\}$, $P \cap Q = \{x | 1 \leq x \leq 4\}$, 所以 $P \star Q = \{x | 0 \leq x < 1 \text{ 或 } x > 4\}$. 故选 C.

5.A 提示：由 $|x-a| \leq 3$, 得 $-3+a \leq x \leq 3+a$, 由 $2x^2+x-1 \leq 0$, 得 $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$. 因为 p 是 q 的必要不充分条件，所以 $\begin{cases} -1 \leq -3+a, \\ 3+a \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ (等号不能同时成立)，解

得 $-\frac{5}{2} \leq a \leq 2$. 故选 A.

6.C 提示：根据复数模的几何意义，可知 $|z-1+2i| = |z-(1-2i)| = 1$ 表示点 $Z(x, y)$ 的轨迹为复平面内以 $(1, -2)$ 为圆心，1 为半径的圆，又 $|z|$ 表示复数 z 对应的点到原点的距离，结合图形可知， $|z|_{\min} = \sqrt{1^2+(-2)^2}-1 = \sqrt{5}-1$. 故选 C.

7.A 提示：因为命题 $p: \forall x \in [1, 3], x^2-ax+3 \geq 0$, 所以 $a \leq x + \frac{3}{x}$ 在 $x \in [1, 3]$ 上恒成立，又 $x + \frac{3}{x} \geq 2\sqrt{3}$, 当且仅当 $x = \sqrt{3}$ 时，取等号，所以 $a \leq 2\sqrt{3}$, 则命题 p 的充要条件为 $a \leq 2\sqrt{3}$. 结合选项，知 p 的一个充分不必要条件是 $a < 3$. 故选 A.

8.B 提示：对于①，将方程中的 x 换成 $-x$, y 换成 $-y$ 原方程不变，故①正确；对于②，将方程中的 x 换成 $-y$, y 换成 $-x$, 或 x 换成 y , y 换成 x , 原方程不变，故②正确；对于③，由方程，得 $x^2 > 1$, $y^2 > 1$, 所以曲线 C 不是封闭图形，故

$|OM|$ 的最小值为点 O 到直线 AB 的距离 $d = \frac{|\frac{-2}{\sqrt{2}}|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. 故选 B.

7.C 提示：抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 $F(\frac{p}{2}, 0)$,

则直线 $l: x = \frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{p}{2}$, 联立 $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{p}{2}, \\ y^2 = 2px, \end{cases}$ 得 $y^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}py -$

$p^2 = 0$, 解得 $y_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}p, y_2 = \sqrt{3}p$ 因为 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}|y_1 - y_2| \cdot |OF| = \frac{\sqrt{3}}{3}p^2 = \sqrt{3}$, 解得 $p = \sqrt{3}$. 故选 C.

8.C 提示：过 M 作 MP 与抛物线的准线垂直，垂足为点 P , 则 $|FM| = |MP|$, 所以 $\frac{|AM|}{|FM|} = \frac{|MA|}{|MP|} = \frac{1}{\cos \angle AMP} = \frac{1}{\cos \angle FAM}$. 所以 $\frac{|AM|}{|FM|}$ 当取得最大值时， $\angle MAF$ 取到最大值，此时直线 AM 与抛物线相切. 易知此时直线 AM 的斜率不为 0, 抛物线 $C: y^2 = 2px$ 的焦点 F 的坐标为 $(1, 0)$, 可得 $y^2 = 4x$, 设切线 AM 的方程为 $x = my - 1$, 联立 $\begin{cases} x = my - 1, \\ y^2 = 4x, \end{cases}$ 得 $4my + 4 = 0$, 则 $\Delta = 16m^2 - 16 = 0$, 解得 $m = \pm 1$, 所以切线 AM 的方程为 $x = \pm y - 1$, 即 $y = x + 1$ 或 $y = -x - 1$, 又点 M 在第一象限，所以直线 AM 的方程为 $y = x + 1$. 故选 C.

专题九 统计与概率

1.B 提示：将这组数据从小到大排序为 188, 240, 260, 284, 288, 290, 300, 360, 因为 $8 \times 75\% = 6$, 所以 75 百分位数为 $\frac{290+300}{2} = 295$. 故选 B.

2.C 提示：因为每项比赛的冠军都可以是四人中的一人，所以共有 $4^4 = 256$ 种等可能的情况，又甲恰好拿到其中一项比赛冠军，则先从四项比赛中选择一项甲拿到冠军，再考虑剩余的 3 场比赛，冠军可以从剩余的 3 人中任选，所以有 $3^3 C_4^1 = 108$ 种等可能的情况，所以所求概率 $P = \frac{108}{256} = \frac{27}{64}$. 故选 C.

3.D 提示：根据分层随机抽样的方法，得抽取的甲型号产品的数量为 $\frac{300}{200+300+400} \times 45 = 10$, 乙种型号产品的数量为 $\times 45 = 15$, 所以抽取的甲、乙两种型号产品的数量之和为 $10+15=25$. 故选 D.

4.D 提示： $\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^7$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_7^r \cdot (2x)^{7-r} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)^r = (-1)^r \cdot 2^{7-r} \cdot C_7^r \cdot x^{7-3r}$, $r = 0, 1, 2, \dots, 7$, 令 $7-3r = -2$, 解得 $r = 3$, 所以 $\frac{1}{x^2}$ 项的系数是 $(-1)^3 \times 2^4 \times C_7^3 = -560$. 故选 D.

5.C 提示：由题意，得分 2 类情况，①恰有 3 个学校所选研学基地不同有 $C_4^2 A_3^3 = 360$ 种选法；② 4 个学校所选研学基地都不相同有 $A_4^4 = 120$ 种选法. 所以不相同的选择种数共有 $360+120=480$. 故选 C.

6.B 提示：设事件 A 表示“自驾”，事件 B 表示“坐公交车”，事件 C 表示“骑共享单车”，事件 D 表示“迟到”，由题意，得 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}, P(D|A) = \frac{1}{4}, P(D|B) = \frac{1}{5}, P(D|C) = \frac{1}{6}$, 所以 $P(D) = P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = \frac{37}{180}$, $P(AD) = P(A)P(D|A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, 所以所求概率是 $P(A|D) = \frac{P(AD)}{P(D)} = \frac{15}{37}$. 故选 B.

7.C 提示：由题意，得 $\bar{x} = \frac{1}{5} \times (20+30+40+50+60) = 40$, $\bar{y} = \frac{1}{5} \times (25+27.5+29+32.5+36) = 30$, 所以样本点的中心为 $(40, 30)$, 将点 $(40, 30)$ 代入 $\hat{y} = 0.25x + k$, 可得 $30 = 0.25 \times 40 + k$, 解得 $k = 20$, 所以 $\hat{y} = 0.25x + 20$, 当 $x = 80$ 时， $\hat{y} = 0.25 \times 80 + 20 = 40$. 所以当蟋蟀每分钟鸣叫 80 次时，该地当时的气温预报值为 40°C . 故选 C.

8.B 提示：由题意，得 X 的所有可能的取值为 0, 1, 2, 由题意，得 $P(X=0) = \frac{C_2^0}{C_3^2} = \frac{3}{10}, P(X=1) = \frac{C_2^1 C_1^1}{C_3^2} = \frac{3}{5}, P(X=2) = \frac{C_2^2}{C_3^2} = \frac{1}{10}$, 所以 $E(X) = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{4}{5}$, 所以 $E(5X+1) = 5E(X) + 1 = 5$. 故选 B.

$BM \subset$ 平面 BCC_1B_1 , 所以 $AP \perp BM$, 又 $AP \cap B_1P = P$, $AP, B_1P \subset$ 平面 B_1AP , 所以 $BM \perp$ 平面 B_1AP , 又 $AB_1 \subset$ 平面 B_1AP , 所以 $BM \perp AB_1$, 故 D 正确. 故选 D.

6.D 提示：以 A 为坐标原点， AB, AD, AA_1 所在直线分别为 x 轴， y 轴， z 轴，建立空间直角坐标系 $Axyz$, 设正方体的棱长为 2, 则 $A(0, 0, 0), C_1(2, 2, 2), A_1(0, 0, 2), E(2, 1, 0)$, 则 $\overrightarrow{AC_1} = (2, 2, 2), \overrightarrow{EA_1} = (-2, -1, 2), \overrightarrow{EC_1} = (0, 1, 2)$, 设平面 A_1EC_1 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EA_1} = -2x - y + 2z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EC_1} = y + 2z = 0, \end{cases}$ 令 $z = 1$, 则 $x = 2, y = -2$, 所以

平面 A_1EC_1 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (2, -2, 1)$. 设直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = \left| \cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{AC_1} \rangle \right| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AC_1}|}{|\mathbf{n}| \cdot |\overrightarrow{AC_1}|} = \frac{2}{3 \times 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$. 故选 D.

7.A 提示：因为 $AB = \sqrt{3}, \angle ACB = 120^\circ$, 所以 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 $r = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin 120^\circ} = 1$, 在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos 120^\circ$, 即 $3 = AC^2 + BC^2 + AC \cdot BC = (AC + BC)^2 - AC \cdot BC$, 又 $AC + BC = 2$, 所以 $AC \cdot BC = 1$, 所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$, 因为 $V_{O-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times h = \frac{\sqrt{6}}{6}$, 所以 $h = 2\sqrt{2}$, 则球 O 的半径 $R = \sqrt{h^2 + r^2} = 3$, 所以球 O 表面积 $S = 4\pi R^2 = 36\pi$. 故选 A.

8.B 提示：连接 AE, DE , 因为 $AB = BC = AC = DB = DC$, 则 $\triangle ABC, \triangle DBC$ 都为正三角形，又 E 为 BC 的中点，所以 $AE \perp BC, DE \perp BC$, 又平面 $ABC \perp$ 底面 BCD , 平面 $ABC \cap$ 底面 $BCD = BC, AEC$ 平面 ABC , 所以 $AE \perp$ 平面 BCD , 则 $AE \perp DE$, 故 ED, EB, EA 两两垂直，以 E 为坐标原点，分别以 ED, EB, EA 所在直线为 x 轴， y 轴， z 轴，建立空间直角坐标系，

设 $AB = 2$, 由 $EF \parallel AD, EF = AD$, 得 $A(0, 0, \sqrt{3}), D(\sqrt{3}, 0, 0), B(0, 1, 0), F(-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3})$, 则 $\overrightarrow{AB} = (0, 1, -\sqrt{3}), \overrightarrow{AD} = (\sqrt{3}, 0, -\sqrt{3}), \overrightarrow{AF} = (-\sqrt{3}, 0, 0)$, 设平面 ADB 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AB} = y - \sqrt{3}z = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AD} = \sqrt{3}x - \sqrt{3}z = 0, \end{cases}$ 令 $x = 1$, 得 $y = \sqrt{3}, z = 1$, 则 $\mathbf{m} = (1, \sqrt{3}, 1)$, 设平面 ABF 的法向量为 $\mathbf{n} = (a, b, c)$, 则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = b - \sqrt{3}c = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AF} = -\sqrt{3}a = 0, \end{cases}$ 令 $c = 1$, 得 $a = 0, b = \sqrt{3}$, 得 $\mathbf{n} = (0, \sqrt{3}, 1)$, 所以 $|\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{4}{\sqrt{5} \times 2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 则平面 ADB 与平面 ABF 夹角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 故选 B.

专题八 直线和圆、圆锥曲线

专项训练(1)

1.B 提示：由 $l_1 \perp l_2$, 得 $a(a+1) - 2 = 0$, 且 $2a+4 \neq 0$, 解得 $a = 1$, 由 $l_1 \perp l_2$, 得 $-2ab+1 = 0$, 则 $b = \frac{1}{2}$. 故选 B.

2.C 提示：由题意，得圆的半径为 $\sqrt{(1-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{2}$ 所以所求圆的方程为 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$, 故选 C.

3.B 提示：设椭圆 C 的左焦点为 $F_1(-1, 0)$, 由椭圆方程，得 $a = 2$, 由椭圆的定义，得 $|PF| + |PF_1| = 4$, 则 $|PF| = 4 - |PF_1|$, 所以 $|PA| + |PF| = 4 + |PA|$, $|PF_1| \leq 4 + |AF_1| = 5$. 故选 B.

4.D 提示：由圆 $C: (x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$, 得圆心为 $C(3, 1)$, 半径为 3, 因为 $P(0, -3)$, 则 $|CP| = \sqrt{3^2 + (1+3)^2} = 5$, 所以 P 在圆 C 外，因为 A, B 是圆 $C: (x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$ 上的两个动点，且 $|AB| = 2\sqrt{5}$, 所以圆心 C 到 AB 的距离 $d = \sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = 2$, 所以点 P 到直线 AB 距离的最大值为 $|CP| + d = 5 + 2 = 7$. 故选 D.

5.C 提示：由题意，得 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, 则以 F_1F_2 为直径的圆的方程为 $x^2 + y^2 = c^2$, 渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 联

立 $\begin{cases} y = \frac{b}{a}x, \\ x^2 + y^2 = c^2, \end{cases}$ 得 $A(a, b)$, 由 $\overrightarrow{F_1B} = \overrightarrow{BA}$, 得 B 为 AF_1 的中点，

则 $B\left(\frac{a-c}{2}, \frac{b}{2}\right)$, 所以 $k_{OB} = \frac{b}{a-c}$, 得 $c = 2a$, 则离心率 $e = \frac{c}{a} = 2$. 故选 C.

6.C 提示：过点 A 作 AB 垂直准线于点 B , 过焦点 F

$3 = 7$, 当且仅当 $\frac{4x}{y} = \frac{y}{x}$, 且 $x+y=1$, 即 $x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$ 时，取等号.

所以 $\frac{2x^2+x+1}{xy}$ 的最小值为 7. 故选 A.

5.C 提示：由不等式 $ax^2+bx+c > 0$ 的解集是 $|x| < x < 3$, 得 $x=1$ 或 $x=3$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，且 $a < 0$, 则 $1+3 = -\frac{b}{a}, 1 \times 3 = \frac{c}{a}$, 得 $b = -4a, c = 3a$. 对于 A, 由二次函数的性质，得 $a < 0$, 故 A 正确；对于 B, 由 $x=1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，得 $a+b+c=0$, 故 B 正确；对于 C, $4a+2b+c = 4a-8a+3a = -a > 0$, 故 C 错误；对于 D, 不等式 $cx^2-bx+a < 0$ 化为 $3ax^2+4ax+a < 0$, 又 $a < 0$, 则原不等式等价于 $3x^2+4x+1 > 0$, 解得 $x < -1$ 或 $x > -\frac{1}{3}$, 故 D 正确. 故选 C.

6.A 提示：设函数 $f(x) = x^2 + (a-1)x + a + 2$, 因为 $f(x_1) = f(x_2) = 0$, 且 $-1 < x_1 < 1, 1 < x_2 < 2$, 所以 $\begin{cases} f(-1) > 0, \\ f(1) < 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 4 > 0, \\ 2a+2 < 0, \end{cases}$ 解得 $-\frac{4}{3} < a < -1$, 所以实数 a 的取值范围是 $\left(-\frac{4}{3}, -1\right)$. 故选 A.

7.A 提示：因为 $2x+y = (2x+y)\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y}\right) = 5 + \frac{2y}{x} + \frac{2x}{y} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{2y}{x} \cdot \frac{2x}{y}} = 9$, 当且仅当 $\frac{2y}{x} = \frac{2x}{y}$, 即 $x=y=3$ 时，等号成立，所以要使 $2x+y > m^2-8m$ 恒成立，只需 $m^2-8m < 9$, 解得 $-1 < m < 9$. 故选 A.

8.D 提示：因为正实数 x, y 满足 $x+y=4, e^x > 0, e^y > 0$, 所以 $e^x + e^y \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^y} = 2\sqrt{e^{x+y}} = 2e^2$, 当且仅当 $e^x = e^y$, 即 $x=y=2$ 时，取等号，故 A 正确； $\lg x + \lg y = \lg(xy) \leq \lg\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \lg 4$, 当且仅当 $x=y=2$ 时，取等号，故 B 正确； $x^2+y^2 \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 8$, 当且仅当 $x=y=2$ 时，取等号，故 C 正确；由题意，得 $y=4-x > 0$, 则 $0 < x < 4$, 所以 $x(y+4) = x(8-x) = -x^2+8x = -(x-4)^2+16 \in (0, 16)$, 故 D 错误. 故选 D.

专题三 函数与导数

专项训练(1)

1.B 提示：要使函数 $f(x) = \frac{1}{\ln(x+1)} + \sqrt{9-x^2}$ 有意义，

则 x 应满足 $\begin{cases} x+1 > 0, \\ x+1 \neq 1, \\ 9-x^2 \geq 0, \end{cases}$ 解得 $-1 < x < 0$ 或 $0 < x \leq 3$, 所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 0) \cup (0, 3]$. 故选 B.

2.B 提示：由题意，得 $f(-3) = f(-1) = f(1) = 2$. 故选 B.

3.B 提示：因为 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + ax$, 所以 $f'(x) = x^2 + 2x + a$, 又 $f'(1) = 6$, 即 $f'(1) = 3 + a = 6$, 解得 $a = 3$. 故选 B.

4.B 提示：因为 $y = \frac{3x^2+5}{x^2-2} = \frac{3(x^2-2)+11}{x^2-2} = 3 + \frac{11}{x^2-2}$, 当 $x \in [-4, -2)$ 时， $x^2 \in (4, 16]$, 则 $\frac{11}{x^2-2} \in \left[\frac{11}{14}, \frac{11}{2}\right)$, 所以 $y = 3 + \frac{11}{x^2-2} \in \left[\frac{53}{14}, \frac{17}{2}\right)$. 故选 B.

5.A 提示：因为 $f(x) = \frac{x \cos x}{e^{|x|-1}}$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(-x) = \frac{-x \cos(-x)}{e^{-|x|-1}} = -\frac{x \cos x}{e^{|x|-1}} = -f(x)$, 所以函数 $y = f(x)$ 为奇函数，图象关于原点对称，故排除 C, D; 又 $f(\pi) = -\frac{\pi}{e^{\pi-1}} < 0$, 故排除 B. 故选 A.

6.C 提示：由 $y = axe^x + \ln x$, 得 $y' = ae^x + axe^x + \frac{1}{x}$, 由题意，得 $\begin{cases} 2ae+1=3, \\ ae=3+b, \end{cases}$ 解得 $a = \frac{1}{e}, b = -2$. 故选 C.

7.A 提示：因为 $f(x)$ 是奇函数，且在 $(0, +\infty)$ 上是增函数， $f(-2) = 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为增函数，且 $f(2) = -f(-2) = 0$, 所以当 $x < -2$ 或 $0 < x < 2$ 时， $f(x) < 0$, 当 $-2 < x < 0$ 或 $x > 2$ 时， $f(x) > 0$.

高考版答案页第7期

$\frac{12\sqrt{3}}{7}$. 故选 A.

专题六 数列 专项训练(1)

1.D 提示:奇数项为负,偶数项为正,可用 $(-1)^n$ 来实现,各项分母可依次看作 $2^1-1=1,2^2-1=3,2^3-1=7,2^4-1=15,2^5-1=31,\cdots$,各项分子均为1,所以该数列的通项公式为 $a_n=(-1)^n\frac{1}{2^n-1}$.故选 D.

2.A 提示:设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,首项为 a_1 ,因为 $a_3+a_5=4a_4$, $a_2=-6$,所以 $\begin{cases} 2a_1+10d=4a_1+16d, \\ a_1+d=-6, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1=-9, \\ d=3. \end{cases}$ 故选 A.

3.B 提示:根据等比数列的性质,得 $a_3a_8=a_4a_7=8$,则 $\log_2a_4+\log_2a_7=\log_2a_3a_8=\log_28=3$.故选 B.

4.D 提示:设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,则 $2a_{310}-a_7=2(a_1+509d)-(a_1+6d)=a_1+1012d=a_{1013}=4$,

所以 $S_{2025}=\frac{2025(a_1+a_{2025})}{2}=2025a_{1013}=8100$.故选 D.

5.C 提示:因为 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$,所以 $a_{n+3}=a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n-a_{n+1}=-a_n$,即 $a_{n+3}=-a_n$,则 $a_{n+6}=-a_{n+3}=-(a_n)=a_n$,所以数列 $\{a_n\}$ 是以6为周期的周期数列,又 $a_3=a_2-a_1=1$,所以 $a_{2025}=a_{337\times6+3}=a_3=1$.故选 C.

6.A 提示:因为 $2,b_1,b_2,b_3,8$ 成等比数列,则 $b_1^2=2\times8=16$,且 $b_1^2=2b_2>0$,则 $b_2>0$,所以 $b_2=4$,因为 $S_7=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=7a_4=7$,即 $a_4=1$,所以 $\frac{2b_2}{a_3+a_5}=\frac{b_2}{a_4}=4$.故选 A.

7.C 提示:设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,由题意,得 $\frac{a_5-a_3}{a_4-a_2}=q=\frac{12}{6}=2$,又 $a_4-a_2=a_2(q^2-1)=3a_2=6$,则 $a_2=2$,所以 $a_1=1$, $a_n=2^{n-1}$,所以 $T_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots\cdot a_n=2^0\times2^1\times2^2\times\cdots\times2^{n-1}=2^{0+1+2+\cdots+(n-1)}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$, $S_n=\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$, $\frac{T_n}{(S_n+1)^2}=\frac{2^{\frac{n^2-10n}{2}}}{2^{n-1}}$,因为 $y=2^n$ 单调递增, $t=\frac{n^2-10n}{2}$ 开口向上,且当 $n=5$ 时, t 取得最小值,所以当 $n=5$ 时, $\frac{T_n}{(S_n+1)^2}$ 取得最小值.故

选 C.

8.C 提示:因为 $S_n=n^2$,所以当 $n\geq2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$,又当 $n=1$ 时, $a_1=S_1=1$ 适合上式,则 $a_n=2n-1$, $b_n=\frac{2}{n(a_n+1)}=\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$ ($n\geq2$),又 $b_1=\frac{2}{a_1+1}=1$,所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n<1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}<2$.故选 C.

专项训练(2)

1.D 提示:因为 $2S_3=7a_2$,所以 $2\left(\frac{a_2}{q}+a_2+a_2q\right)=7a_2$,又

$a_2\neq0$,所以 $\frac{1}{q}+q=\frac{5}{2}$,即 $2q^2-5q+2=0$,解得 $q=\frac{1}{2}$,或 $q=2$.故选 D.

2.D 提示:因为 a_7,a_9 是方程 $x^2-6x+5=0$ 的两根,所以 $a_7+a_9=6$,又 $\{a_n\}$ 是等差数列,则 $a_7+a_9=2a_8=6$,所以 $a_8=3$.故选 D.

3.C 提示:因为 $OA_1=A_1A_2=A_2A_3=\cdots=A_nA_{n+1}=1$,由勾股定理,得 $a_n^2=a_{n-1}^2+1$,所以数列 $\{a_n^2\}$ 是以1为首项,1为公差的等差数列,所以 $a_n^2=1+(n-1)\times1=n$,则 $a_{36}^2=36$, $a_{16}^2=16$.所以 $a_{36}=6$, $a_{16}=4$,则 $a_{36}+a_{16}=10$.故选 C.

4.A 提示:设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ($q>0$),因为 $a_3=8$, $S_3=14$,所以 $S_3=\frac{8}{q}+\frac{8}{q^2}+8=14$,得 $3q^2-4q-4=0$,解得 $q=2$ 或

$q=-\frac{2}{3}$ (舍去),所以 $\frac{a_2+a_{11}}{a_5+a_9}=q^4=4$.故选 A.

5.D 提示:设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,由 $4a_1,2a_2,a_3$ 成等差数列,得 $4a_2=4a_1+a_3$,则 $4a_1q=4a_1+a_1q^2$,又 $a_1=1$,则 $q^2-4q+4=0$,解得 $q=2$,所以 $\frac{S_n}{n}=\frac{a_1(1-q^n)}{n(1-q)}=\frac{2^n-1}{n}$.令 $b_n=\frac{2^n-1}{n}$,则 $b_{n+1}-b_n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}-\frac{2^n-1}{n}=\frac{(n-1)2^n+1}{n(n+1)}>0$,所以数

数学

$-\cos\left(2x_1-\frac{2\pi}{3}\right)=-f(x_1)=\frac{4}{5}$.故选 C.

8.A 提示:由题意,得 $g(x)=8\sin\left(\frac{1}{4}x-\frac{\pi}{8}\right)$,方程

$g(x)=4$,即 $8\sin\left(\frac{1}{4}x-\frac{\pi}{8}\right)=4$,得 $\sin\left(\frac{1}{4}x-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}$,因为 $x\in$

$[0,8\pi]$,所以 $-\frac{\pi}{8}\leq\frac{1}{4}x-\frac{\pi}{8}\leq\frac{15\pi}{8}$,又方程 $g(x)=4$ 在 $[0,$

$8\pi]$ 内有两不等实根 α,β ,所以 $\frac{\frac{1}{4}\alpha-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\beta-\frac{\pi}{8}}{2}=\frac{\pi}{2}$,解得

$\alpha+\beta=5\pi$.所以 $\cos\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(5\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.故选 A.

专题五 平面向量、解三角形

1.A 提示:因为 $a=(0,1)$, $b=(2,x)$,所以 $b-4a=(2,x-4)$,因为 $b\perp(b-4a)$,所以 $b\cdot(b-4a)=0$,即 $2\times2+x(x-4)=0$,则 $x^2-4x+4=0$,解得 $x=2$,所以 $b=(2,2)$,所以 $a\cdot b=2$.故选 A.

2.C 提示:由题意,得 a 在 b 方向上的投影向量为

$\frac{a\cdot b}{|b|}\cdot\frac{b}{|b|}=\frac{1\times3\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{3}\times\frac{b}{3}=-\frac{\sqrt{2}}{6}b$.故选 C.

3.D 提示:因为 $3a=2b$, $B=2A$,由正弦定理,得 $3\sin A=2\sin B=2\sin 2A=4\sin A\cos A$,又 $A\in(0,\pi)$,则 $\sin A>0$,所以 $4\cos A=3$,即 $\cos A=\frac{3}{4}$,所以 $\cos B=\cos 2A=2\cos^2A-1=\frac{1}{8}$.故选 D.

4.A 提示:因为 $b=3$, $\sin^2A-\sin^2B=3\sin^2C$,所以由正弦定理,得 $a^2-b^2=3c^2$,则 $a^2=3c^2+b^2=3c^2+9$,又 $\cos A=-\frac{1}{3}$,所以由余弦定理,得 $a^2=b^2+c^2-2bccosA=9+c^2+2c$,所以 $3c^2+9=$

$9+c^2+2c$,即 $c^2-c=0$,解得 $c=1$,又 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bcsinA=\frac{1}{2}\times3\times1\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}$.故选 A.

5.A 提示:由图可知, A,M,Q 三点共线,所以存在实数 μ ,使得 $\overrightarrow{BQ}=\mu\overrightarrow{BM}+(1-\mu)\overrightarrow{BA}$,又 $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BQ}=\frac{5}{7}\overrightarrow{BN}$,

所以 $\frac{5}{7}\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\mu\overrightarrow{BC}+(1-\mu)\overrightarrow{BA}$,则 $\overrightarrow{BN}=\frac{7}{10}\mu\overrightarrow{BC}+\frac{7}{5}(1-\mu)\overrightarrow{BA}$,又

A,N,C 三点共线,所以 $\frac{7}{10}\mu+\frac{7}{5}(1-\mu)=1$,解得 $\mu=\frac{4}{7}$,即 $\overrightarrow{BN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}+\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}$,所以 $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=\frac{2}{5}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})+\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}$,所以 $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$,即 $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{NC}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$,则 $\overrightarrow{NC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$,又 $\overrightarrow{NC}=\lambda\overrightarrow{AC}$,则 $\lambda=\frac{3}{5}$.故选 A.

6.B 提示:因为 $a\perp b$,所以 $a\cdot b=0$,又 $a=(2,1)$, $|b|=2$,则 $|a|=\sqrt{5}$,所以 $|a-b|=\sqrt{(a-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2-2a\cdot b}=3$, $(a-b)\cdot a=a^2-a\cdot b=5$,所以 $\cos\langle a-b,a\rangle=\frac{(a-b)\cdot a}{|a-b||a|}=\frac{5}{3\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.故选 B.

7.B 提示:由题意,得 $\angle PAQ=45^\circ$, $\angle BAQ=15^\circ$,则 $\angle PAB=30^\circ$, $\angle APQ=45^\circ$,在 $\text{Rt}\triangle PBC$ 中, $\angle PBC=60^\circ$,则 $\angle BPC=30^\circ$,所以 $\angle BPA=15^\circ$, $\angle PBA=135^\circ$, $\sin 15^\circ=\sin(60^\circ-45^\circ)=\sin 60^\circ\cos 45^\circ-\cos 60^\circ\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.在 $\triangle PAB$ 中, $AB=$

90 m ,由正弦定理,得 $\frac{AP}{\sin\angle ABP}=\frac{AB}{\sin\angle APB}$,则 $AP=\frac{90\sin 135^\circ}{\sin 15^\circ}=\frac{180\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\text{ m}$.在 $\text{Rt}\triangle PAQ$ 中, $PQ=AP\sin 45^\circ=$

$45(\sqrt{6}+\sqrt{2})\text{ m}$,即山高 PQ 为 $45(\sqrt{6}+\sqrt{2})\text{ m}$.故选 B.

8.A 提示:由余弦定理,得 $a^2+c^2-b^2=2accos\angle ABC$,因为 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2)$,所以 $\frac{1}{2}ac\sin\angle ABC=\frac{\sqrt{3}}{4}$. $2ac\cos\angle ABC$,得 $\tan\angle ABC=\sqrt{3}$,又 $\angle ABC\in(0,\pi)$,所以 $\angle ABC=\frac{\pi}{3}$,在 $\triangle ABC$ 中,由等面积法,得 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BAD}+S_{\triangle BCD}$,则 $\frac{1}{2}ac\cdot\sin\angle ABC=\frac{1}{2}BA\cdot BD\cdot\sin\frac{\angle ABC}{2}+\frac{1}{2}BC\cdot BD\cdot\sin\frac{\angle ABC}{2}$,即 $\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\times4\times BD\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times3\times BD\times\frac{1}{2}$,解得 $BD=$

$x=2\pi$ 时,函数 $f(x)$ 取得最大值,所以 $2\pi\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$),解得 $\omega=k+\frac{1}{6}$ ($k\in\mathbf{Z}$),因为 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{13\pi}{6}\right]$ 上有3条对称轴,所以 $T\leq\frac{13\pi}{6}-\frac{\pi}{6}<\frac{3T}{2}$,即 $\frac{2\pi}{\omega}\leq2\pi<\frac{3\pi}{\omega}$,解得 $1\leq\omega<\frac{3}{2}$,因为 $\omega=k+\frac{1}{6}$ ($k\in\mathbf{Z}$),所以当 $k=0$ 时, $\omega=\frac{1}{6}$ 不满足条件;当 $k=1$ 时, $\omega=\frac{7}{6}$ 满足条件; $k=2$ 时, $\omega=\frac{13}{6}>\frac{3}{2}$ 不满足条件.故选 B.

专项训练(2)

1.A 提示:因为 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}$,所以 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left[2\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\pi\right]=-\cos\left[2\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\right]=-\left[1-2\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\right]=-\left(1-\frac{8}{9}\right)=-\frac{1}{9}$.故选 A.

2.B 提示:因为函数 $y=\tan x$ 的图象与直线 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$)没有交点,函数 $y=\tan(x+\varphi)$ 的图象与直线 $x=2\pi$ 没有交点,所以 $2\pi+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$),解得 $\varphi=-\frac{3\pi}{2}+k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$),又 $\varphi>0$,所以当 $k=2$ 时, φ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$.故选 B.

3.C 提示:由 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$,得 $0<\alpha+\beta<\pi$,因为 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$,即 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$,所以 $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=$

$\frac{4}{5}$,又 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{5}$,即 $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{5}$,两式联立,得 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$, $\cos\alpha\sin\beta=\frac{3}{10}$.

所以 $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}=\frac{5}{3}$.故选 C.

4.B 提示:因为 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ ($\omega>0$)满足 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, $f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=0$,所以 $\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{T}{4}+nT$, $n\in\mathbf{N}_+$,解得 $T=\frac{17\pi}{3+6n}$ ($n\in\mathbf{N}_+$),则 $\frac{2\pi}{\omega}=\frac{17\pi}{3+6n}$ ($n\in\mathbf{N}_+$),所以 $\omega=\frac{6+12n}{17}$ ($n\in\mathbf{N}_+$),又 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right)$ 上单调,所以 $\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\leq\frac{T}{2}$,即 $\frac{7\pi}{12}\leq\frac{\pi}{\omega}$,解得 $\omega\leq\frac{12}{7}$,又 $\omega>0$,所以当 $n=1$ 时, ω 取得最大值,最大值为 $\frac{18}{17}$.故选 B.

5.C 提示:因为 $f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=1$,所以 $f(x)$ 的图象关于点

$\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$ 不对称,故 A 错误;因为 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}$,所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 不对称,故 B 错误;因为 $f\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\cos 2x$,所以 $f\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$ 为偶函数,故 C 正确; $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$,故 D 错误.故选 C.

6.A 提示:由题意,得 $\begin{cases} \frac{2\pi}{\omega}=4\pi, \\ \frac{\pi}{3}\omega+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi, \end{cases}k\in\mathbf{Z}$,解得

$\begin{cases} \omega=\frac{1}{2}, \\ \varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}, \end{cases}$ 又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,则 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,所以 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$,令 $\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}=n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$,解得 $x=-\frac{2\pi}{3}+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$,令 $n=0$,得 $x=-\frac{2\pi}{3}$,所以 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的一个对称中心为 $\left(-\frac{2\pi}{3},0\right)$.故选 A.

7.C 提示:由图象,得 $\frac{T}{2}=\frac{13\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$,则 $T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$,所以 $\omega=2$,因为 $f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=0$,所以 $\frac{7\pi}{12}\times2+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$,所以 $\varphi=2k\pi-\frac{2\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$,因为 $\varphi<\pi$,所以 $\varphi=-\frac{2\pi}{3}$,所以 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$.由 $0\leq x_1< x_2\leq\pi$,得 $-\frac{2\pi}{3}\leq2x_1-\frac{2\pi}{3}<2x_2-\frac{2\pi}{3}\leq\frac{4\pi}{3}$,由 $f(x_1)=f(x_2)=\frac{4}{5}$,结合图象,得 $2x_1-\frac{2\pi}{3}+2x_2-\frac{2\pi}{3}=2\pi$,则

$x_1+x_2=\frac{5\pi}{3}$,所以 $x_2=\frac{5\pi}{3}-x_1$,所以 $\cos(x_2-x_1)=\cos\left(\frac{5\pi}{3}-2x_1\right)=$

8.C 提示:因为 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ,且 $f(-x)=e^{-x}-e^x+2x=-f(x)$,所以 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的奇函数,因为 $f'(x)=e^x+e^{-x}-2\geq2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-2=0$,当且仅当 $x=0$ 时,等号成立,所以 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增,所以 $f(\sqrt{3}\sin x)+f(\cos x-a)<0$,即 $f(\sqrt{3}\sin x)<-f(\cos x-a)=f(a-\cos x)$,则 $\sqrt{3}\sin x<a-\cos x$,所以 $a>\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,又 $x\in\mathbf{R}$ 时, $2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\leq2$,所以 $a>2$,即实数 a 的取值范围是 $(2,+\infty)$.故选 C.

第26期 专题四 三角函数 专项训练(1)

1.C 提示: $y=\tan 2x$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$,故 A 错误; $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 为非奇非偶函数,故 B 错误; $y=\cos\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)=\sin 2x$ 为奇函数,且最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$,故 C 正确; $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$ 为偶函数,故 D 错误.故选 C.

2.B 提示:由 α 为锐角,得 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,则 $\frac{\pi}{3}<\alpha+\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{6}$,

因为 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}$,所以 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left[\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=\sin 2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cdot$

$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=2\times\frac{\sqrt{6}}{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.故选 B.

3.D 提示:设该扇形的圆心角为 α ,由扇形面积公式,得 $\frac{1}{2}\times4^2\times\alpha=\frac{16\pi}{3}$,解得 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$,取 \overline{AB} 的中点 C ,连接 OC ,交 AB 于点 D ,则 $OC\perp AB$, $OD=OA\cdot\cos\angle AOD=4\times\cos\frac{\pi}{3}=2$, $AB=2AD=2\times4\times\sin\frac{\pi}{3}=4\sqrt{3}$, $CD=OC-OD=2$,所以以扇形的弧长的近似值为 $AB+\frac{2CD^2}{2OA}=4\sqrt{3}+1$.故选 D.

4.B 提示:令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq2x-\frac{\pi}{3}\leq\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$,解得 $\frac{5\pi}{12}+k\pi\leq x\leq\frac{11\pi}{12}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.当 $k=-2$ 时, $-\frac{19\pi}{12}\leq x\leq-\frac{13\pi}{12}$,当 $k=-1$ 时, $-\frac{7\pi}{12}\leq x\leq-\frac{\pi}{12}$,故 B 正确, A 错误;当 $k=0$ 时, $\frac{5\pi}{12}\leq x\leq\frac{11\pi}{12}$,故 C、D 错误.故选 B.

5.D 提示:因为函数 $f(x)=\cos 2\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 π ,所以 $\omega=\frac{2\pi}{2\pi}=1$,则 $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,令 $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$,则 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$, $k\in\mathbf{Z}$.对比选项可知,只有当 $k=1$ 时, $x=\frac{\pi}{3}$ 符合题意.故选 D.

6.C 提示:由图象,得 $A=2$, $T=4\times\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)=\pi$,所以 $\omega=2$, $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$,因为 $2\times\frac{\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$,则 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$,又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$, $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,故 A 正确;因为 $2\times\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$,此时 $f(x)$ 取得最小值,故 B 正确;当 $-\frac{2\pi}{3}\leq x\leq-\frac{\pi}{6}$ 时, $-\pi\leq2x+\frac{\pi}{3}\leq0$,又 $y=\sin x$ 在 $[-\pi,0]$ 上不单调,故 C 错误;因为 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=0$,故 D 正确.故选 C.

7.B 提示:由水轮每分钟逆时针转动4圈,得函数 $y=f(x)$ 的最小正周期 $T=15$,则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{15}$,因为水轮的半

径为2 m,水轮圆心 O 距离水面 $\sqrt{3}\text{ m}$,且 $y=A\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)+$

$2\sin\left(\frac{2\pi}{15}x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}$,由题意,令 $2\sin\left(\frac{2\pi}{15}x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$,得 $\frac{2\pi}{15}x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$,令 $k=0$,得 $\frac{25}{4}$,所以点 P 到达最高点所需的最短时间为 $\frac{25}{4}\text{ s}$.故选 B.

8.B 提示:因为 $f(x)\leq f(2\pi)$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,所以当

7.因为 $\frac{f(x)}{x-1}<0$ 等价于 $\begin{cases} f(x)>0, & \text{或} & \begin{cases} f(x)<0, \\ x-1>0, \end{cases} \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} -2<x<0 \text{或} x>2, & \text{或} & \begin{cases} x<-2 \text{或} 0<x<2, \\ x>1, \end{cases} \end{cases}$ 解得 $-2<x<0$,或 $1<x<2$,所以原不等式的解集为 $(-2,0)\cup(1,2)$.故选 A.

8.A 提示:设 $f(x)=ae^x-\ln x+\ln a$,则 $x>0$, $a>0$,所以 $f'(x)=ae^x-\frac{1}{x}$,易知 $f'(x)$ 在