

高一必修(第二册)答案页第1期

第1期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B

提示:由已知,得是向量的有弹力、风速、加速度,共3个,故选B.

2.B

提示:可以用同一条有向线段表示的向量是相等向量.在□ $ABCD$ 中, \overrightarrow{DA} 和 \overrightarrow{BC} 方向相反,不是相等向量; \overrightarrow{DC} 和 \overrightarrow{AB} 方向相同且长度相等,是相等向量; \overrightarrow{DC} 和 \overrightarrow{BC} 方向不同,不是相等向量; \overrightarrow{DC} 和 \overrightarrow{DA} 方向不同,不是相等向量.

故选B.

3.A

提示:由单位向量的定义可知, $|a| \cdot |b| = 1$,则 $|a|^2 = |b|^2$,即 $a^2 = b^2$,故A正确,B错误;因为 a, b 的方向和夹角不确定,故C、D错误.故选A.

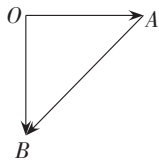
4.A

提示:因为 a, b 为非零向量,所以由 $|a+b| = |a|+|b|$,得 a 与 b 方向相同,所以 $a \parallel b$,即充分性成立.当 a, b 方向相反时, $a \nparallel b$ 成立,但 $|a+b| \neq |a|+|b|$,即必要性不成立.

故选A.

5.C

提示: $b-a+b=2b-a$.如图所示,作 $\overrightarrow{OA}=a, \overrightarrow{OB}=2b$,则 $\overrightarrow{AB}=2b-a$.



(第5题图)

因为 $|\overrightarrow{OA}| = |a| = 6$ km, $|\overrightarrow{OB}| = |2b| = 6$ km, $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$,

所以 $\angle OAB = 45^\circ$,且 $|\overrightarrow{AB}| = 6\sqrt{2}$ km.

所以 $b-a+b$ 所表示的意义为向西南走 $6\sqrt{2}$ km.

故选C.

6.C

提示:因为 $a=2e_1+e_2, b=-2e_1+3e_2$,所以 $2a+b=2(2e_1+e_2)+(-2e_1+3e_2)=2e_1+5e_2=\frac{1}{2}(4e_1+10e_2)$.

所以 $4e_1+10e_2$ 与 $2a+b$ 共线.故选C.

7.B

提示:由已知,得 $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos 60^\circ = |a| \cdot 2|a| \cdot \frac{1}{2} = |a|^2$.

所以 $(2a-b) \cdot b = 2a \cdot b - b^2 = 2|a|^2 - 4|a|^2 = -2|a|^2$.

所以 $2a-b$ 在 b 上的投影向量为 $\frac{(2a-b) \cdot b}{|b|} \times \frac{b}{|b|} = \frac{-2|a|^2}{4|a|^2} b = -\frac{1}{2} b$.故选B.

8.C

提示:由 $|a+b| = |a-2b|$,得 $|a+b|^2 = |a-2b|^2$,即 $|a|^2 + 2a \cdot b + |b|^2 = |a|^2 - 4a \cdot b + 4|b|^2$,化简得 $|b|^2 = 2a \cdot b \leq 2|a||b|$.又 $|b| = \frac{1}{2}$,得 $|a| \geq \frac{1}{4}$.所以 $|a|$ 的最小值为 $\frac{1}{4}$,无最大值.故选C.

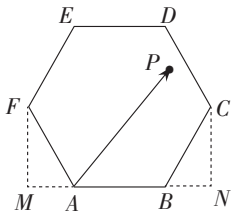
二、多项选择题

9.BC

提示: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OD} \neq \mathbf{0}$, $\overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PN} = \mathbf{0}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \mathbf{0}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC} \neq \mathbf{0}$. 故选BC.

10.BC

提示:根据 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AP}| \cos \angle BAP$,可将 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}$ 看作 $|\overrightarrow{AB}|$ 和 \overrightarrow{AP} 在 \overrightarrow{AB} 上的投影向量的模的乘积,正负由 $\angle BAP$ 的余弦值的正负决定.如图所示,在正六边形 $ABCDEF$ 中,分别过点 F, C 作 $FM \perp AB$ 于 $M, CN \perp AB$ 于 N .



(第10题图)

数学人教A



扫码免费下载
习题讲解 ppt

17.解:(1)由 $\sin 2B = \frac{\sqrt{3}}{7} b \cos B$,

得 $2\sin B \cos B = \frac{\sqrt{3}}{7} b \cos B$.

因为 A 为钝角,所以 B 为锐角, $\cos B \neq 0$,

所以 $\frac{b}{\sin B} = \frac{14}{\sqrt{3}}$.

在 $\triangle ABC$ 中,由正弦定理,得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{14}{\sqrt{3}}$.

又 $a=7$,所以 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 A 为钝角,所以 $A = \frac{2\pi}{3}$.

(2)若选条件①,因为 $b=7, a=7$,所以 $B=A=\frac{2\pi}{3}$,与 $A+B+C=\pi$ 矛盾,此时 $\triangle ABC$ 不存在,故条件①不符合要求.

若选条件②,由 $\cos B = \frac{13}{14}$,得 $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$.

在 $\triangle ABC$ 中, $a=7, A=\frac{2\pi}{3}$,

由正弦定理,得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,所以 $b = \frac{a \sin B}{\sin A} = 3$.

又 $\sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{13}{14} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$,

所以 $\triangle ABC$ 的面积

$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 7 \times 3 \times \frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$.

若选条件③,因为 $A = \frac{2\pi}{3}, \sin A = \frac{5\sqrt{3}}{2}$,所以 $c=5$.

由余弦定理,得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

即 $7^2 = b^2 + 5^2 - 2b \times 5 \times \cos \frac{2\pi}{3}$,解得 $b=3$.

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$.

18.(1)解:设 $\overrightarrow{BP} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC}$,则 $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BC} = x\overrightarrow{BA} + (y-1)\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BA} = (x-1)\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC}$.

由已知,得 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$,

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$,

因为 \overrightarrow{BA} 与 \overrightarrow{BC} 不共线, \overrightarrow{CP} 与 \overrightarrow{CD} 共线, \overrightarrow{AP} 与 \overrightarrow{AE} 共线,

所以 $\begin{cases} \frac{x}{\frac{2}{3}} = \frac{y-1}{-1}, \\ \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{\frac{1}{3}} \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = \frac{4}{7}, \\ y = \frac{1}{7}. \end{cases}$ 所以 $\overrightarrow{BP} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{7}\overrightarrow{BC}$.

(2)证明:设正 $\triangle ABC$ 的边长为 a ,结合(1)可得 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CD} = \left(\frac{4}{7}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{7}\overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}\right) = \frac{8}{21}\overrightarrow{BA}^2 - \frac{10}{21}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - \frac{1}{7}\overrightarrow{BC}^2 = \frac{8}{21}a^2 - \frac{10}{21}a^2 \cos \frac{\pi}{3} - \frac{1}{7}a^2 = 0$.所以 $\overrightarrow{BP} \perp \overrightarrow{CD}$,即 $BP \perp CD$.

19.解:(1)因为 $m=(2a, 2b), n=(\cos B, \cos A)$,

所以 $m \cdot n = 2a \cos B + 2b \cos A = \frac{c}{\cos C}$.

结合正弦定理,得 $2\sin A \cos B + 2\sin B \cos A = \frac{\sin C}{\cos C}$,即

$2\sin(A+B) = \frac{\sin C}{\cos C}$,即 $2\sin C = \frac{\sin C}{\cos C}$,显然 $\sin C \neq 0$,所以

$\cos C = \frac{1}{2}$.又 $0 < C < \pi$,所以 $C = \frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)得 $C = \frac{\pi}{3}$,所以 $f(B) = \cos 2B - 4 \cos C \sin B = 1 - 2\sin^2 B - 2\sin B = -2\left(\sin B + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$.

由 $C = \frac{\pi}{3}$,得 $0 < B < \frac{2\pi}{3}$,所以 $0 < \sin B \leq 1$.

所以当 $\sin B = 1$ 时, $f(B)$ 取得最小值,此时 $B = \frac{\pi}{2}$.

因为 $c=3$,所以 $b = \frac{c}{\sin C} = 2\sqrt{3}, a = b \cos C = \sqrt{3}$.

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=3+3\sqrt{3}$.

(3)因为 $C = \frac{\pi}{3}$,所以 $B = \frac{2\pi}{3}, A \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$.

所以 $\sin A \sin B = \sin A \sin \left(\frac{2\pi}{3} - A\right)$

$= \sin A \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos A + \frac{1}{2} \sin A\right)$

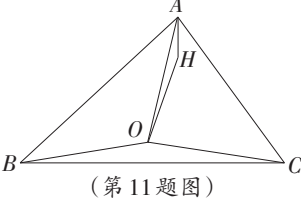
$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A \cos A + \frac{1}{2} \sin^2 A = \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2A + \frac{1}{4}(1 - \cos 2A)$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2A - \frac{1}{4} \cos 2A + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \sin \left(2A - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{4}$.

因为 $A \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$,所以 $2A - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right)$, $\sin \left(2A - \frac{\pi}{6}\right) \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right]$, $\frac{1}{2} \sin \left(2A - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{4} \in \left(0, \frac{3}{4}\right]$.

所以 $\sin A \sin B$ 的取值范围是 $\left(0, \frac{3}{4}\right]$.

确.故选ACD.



(第11题图)

三、填空题

12. $\sqrt{2}$

提示:建立平面直角坐标系,则 $a=(1, 1), b=(2, 0)$,所以 $a-b=(-1, 1)$.所以 $|a-b| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

13.1 000 m

提示:在 $\triangle BCD$ 中,由正弦定理,得 $\frac{BD}{\sin C} = \frac{BC}{\sin \angle CDB}$,所以 $\sin \angle CDB = \frac{BC \sin C}{BD} = \frac{400 \sin 45^\circ}{1\,000} = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

所以 $\cos \angle ADB = \sin \angle CDB = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

在 $\triangle ABD$ 中,由余弦定理,得 $AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD \cdot AD \cdot \cos \angle ADB$

$= 1\,000^2 + (400\sqrt{2})^2 - 2 \times 1\,000 \times 400\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{5} = 10^6$.

所以 $AB = 1\,000$,即隧道口A、B间的距离是1 000 m.

14. $\frac{4}{3}$; $-\frac{5}{18}$

提示:由题意知, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$,

又 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BA} + \mu \overrightarrow{BC}$,

所以 $\lambda = \frac{1}{3}, \mu = 1$.所以 $\lambda + \mu = \frac{4}{3}$.

因为 F 为线段 BE 上的动点,

所以设 $\overrightarrow{BF} = m \overrightarrow{BE}$ ($0 \leq m \leq 1$),

则 $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{BA} + m \overrightarrow{BE}$

$= -\overrightarrow{BA} + m \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) = \left(\frac{m}{3} - 1\right)\overrightarrow{BA} + m \overrightarrow{BC}$.

因为 G 为 AF 中点,所以 $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} = \left(\frac{m}{6} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{BA} + \left(\frac{m}{2} - 1\right)\overrightarrow{BC}$.

因为正方形 $ABCD$ 的边长为1,

所以 $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}| = 1, \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

所以 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DG} = \left(\frac{m}{3} - 1\right) \left(\frac{m}{6} - \frac{1}{2}\right) + m \left(\frac{m}{2} - 1\right)$

$= \frac{5}{9}m^2 - \frac{4}{3}m + \frac{1}{2} = \frac{5}{9} \left(m - \frac{6}{5}\right)^2 - \frac{3}{10}$.

又 $0 \leq m \leq 1$,

所以当 $m=1$ 时, $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DG}$ 取得最小值,最小值为 $-\frac{5}{18}$.

四、解答题

15.解:(1)因为点 $A(1, -2), B(2, 1), C(3, 2), D(-2, 3)$,所以 $\overrightarrow{AB} = (1, 3), \overrightarrow{AC} = (2, 4), \overrightarrow{AD} = (-3, 5), \overrightarrow{BD} = (-4, 2), \overrightarrow{CD} = (-5, 1)$.所以 $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} = (-12, 8)$.

设 $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$,

则 $(-12, 8) = m(1, 3) + n(2, 4) = (m+2n, 3m+4n)$,

所以 $\begin{cases} m+2n=-12, \\ 3m+4n=8, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=32, \\ n=-22. \end{cases}$

所以 $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} = 32\overrightarrow{AB} - 22\overrightarrow{AC}$.

(2)由(1)知 $\overrightarrow{AB} = (1, 3), \overrightarrow{AC} = (2, 4)$,

所以 $\overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AC} = (1+2\lambda, 3+4\lambda)$.

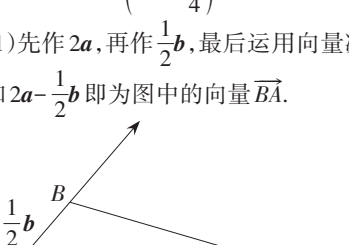
设点 $P(x, y)$,因为 $A(1, -2)$,所以 $\overrightarrow{AP} = (x-1, y+2)$.

又 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AC}$,所以 $\begin{cases} x-1=1+2\lambda, \\ y+2=3+4\lambda, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=2+2\lambda, \\ y=1+4\lambda. \end{cases}$

因为点 P 在第四象限,所以 $\begin{cases} 2+2\lambda > 0, \\ 1+4\lambda < 0, \end{cases}$ 解得 $-1 < \lambda < -\frac{1}{4}$.

所以 λ 的取值范围是 $\left(-1, -\frac{1}{4}\right)$.

16.解:(1)先作 $2a$,再作 $\frac{1}{2}b$,最后运用向量减法的三角形法则可知 $2a - \frac{1}{2}b$ 即为图中的向量 \overrightarrow{BA} .



(第16题图)

(2)设 $a+b$ 与 $a-b$ 的夹角为 θ .因为 $|a|=1, |b|=2$,且 a 与 b 的夹角为 45° ,所以 $a \cdot b = 1 \times 2 \times \cos 45^\circ = \sqrt{2}$.

所以 $|a+b| = \sqrt{(a+b)^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{5+2\sqrt{2}}$,

$|a-b| = \sqrt{(a-b)^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{5-2\sqrt{2}}$,

$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2 = -3$.

所以 $\cos \theta = \frac{(a+b) \cdot (a-b)}{|a+b| \cdot |a-b|}$

$= \frac{-3}{\sqrt{5+2\sqrt{2}} \times \sqrt{5-2\sqrt{2}}} = -\frac{3\sqrt{17}}{17}$.

所以 $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$,即 $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.故D正确.

第4期

第2~3版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.B

提示:向量既有大小又有方向,不可以比较大小,但向量的模是数量,可以比较大小,故A错误,B正确;速度和位移都有大小和方向,都是向量,故C错误;零向量的方向是任意的,故D错误.故选B.

2.B

提示:由题图可知, \overrightarrow{OA} 与 $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CF}, \overrightarrow{AB}$ 与 \overrightarrow{DE} 分别共线,不能作为基底; \overrightarrow{OA} 与 \overrightarrow{CD} 不共线,可作为基底.故选B.

3.C

提示:由题意可知 $\overrightarrow{AO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$,则 $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{5}{8}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$.故选C.

4.A

提示:由 $a \sin B = b \sin C$ 及正弦定理,得 $ab = bc$.显然 $b \neq 0$,所以 $a = c$.所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.故选A.

5.A

提示:因为 $b^2 = ac$,所以 $a^2 + \sqrt{3}bc = c^2 + ac = c^2 + b^2$,得 $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$.所以 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $A \in (0, \pi)$,所以 $A = \frac{\pi}{6}$.故选A.

6.B

提示:由 $a \cdot b = a \cdot c$,得 $a \cdot b - a \cdot c = 0$,即 $a \cdot (b - c) = 0$,所以 $a \perp (b - c)$.

又 $a \parallel (b + c)$,所以 $(b + c) \perp (b - c)$.

所以 $(b + c) \cdot (b - c) = 0$,即 $b^2 = c^2$.故选B.

7.C

提示:根据题意,设小猴子的重力为 G ,每只胳膊的拉力分别为 F_1, F_2 ,则 $|F_1| = |F_2| = 50$ N, F_1, F_2 的夹角为 60°

一、单项选择题

1.C

提示:显然向量 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与向量 $\mathbf{0},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 都共线,所以不能构成平面的一个基底;向量 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 不共线,所以能构成平面的一个基底.故选C.

2.B

提示:由已知,得 $\boldsymbol{a}=(1,2),\boldsymbol{b}=(1,-1)$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times1+2\times(-1)=-1$.故选B.

3.C

提示:因为 $A(3,7),B(5,2)$,所以 $\overrightarrow{AB}=(2,-5)$.把向量 \overrightarrow{AB} 按向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$ 平移后,所得向量 $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}=(2,-5)$.

故选C.

4.C

提示:因为 $\boldsymbol{a}=(2,3)$,所以 $2\boldsymbol{a}=(4,6)$.

又 $\boldsymbol{b}=(3,2)$,所以 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,4)$.

所以 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$.故选C.

5.D

提示:由 $\boldsymbol{a}=(0,1),\boldsymbol{b}=(2,x)$,得 $\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a}=(2,x-4)$.

因为 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})$,所以 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})=2\times2+x(x-4)=0$,解得 $x=2$.故选D.

6.A

提示:设 $C(m,n),E(x,y)$.

由 $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BC}$,可知 B 是 AC 的中点.

又 $A(2,1),B(-1,4)$,

$$\text{所以}\begin{cases}\frac{2+m}{2}=-1,\\ \frac{1+n}{2}=4,\end{cases}\quad\text{解得}\begin{cases}m=-4,\\ n=7,\end{cases}\quad\text{即}C(-4,7).$$

由点 E 是直线 DC 上的一点,且 $|\overrightarrow{CE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{CD}|$,可知

$$\overrightarrow{DE}=-3\overrightarrow{EC}.$$

又 $D(-2,3)$,

$$\text{所以}\begin{cases}x=\frac{-2+(-3)\times(-4)}{1+(-3)}=-5,\\ y=\frac{3+(-3)\times7}{1+(-3)}=9,\end{cases}\quad\text{即}E(-5,9).\text{故选A.}$$

7.A

提示:因为 C 为线段 AB 上距 A 较近的一个三等分点, D 为线段 CB 上距 C 较近的一个三等分点,

$$\text{所以}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}=\frac{4}{9}\overrightarrow{BA}.$$

$$\text{又}\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},\text{所以}\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OB}+$$

$$\frac{4}{9}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=\frac{4}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{5}{9}\overrightarrow{OB}=\frac{4}{9}\boldsymbol{a}+\frac{5}{9}\boldsymbol{b}.$$

所以 \overrightarrow{OD} 在基底 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$ 下的坐标为 $\left(\frac{4}{9},\frac{5}{9}\right)$.故选A.

8.A

提示:由题意,得 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{ED}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE})+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$$

$$=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

因为 $MN\perp BC$,所以 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\cdot(\overrightarrow{AC}-$

$$\overrightarrow{AB})=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}^2=-\frac{1}{6}\times3-\frac{1}{6}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\cos A+$$

$$\frac{1}{3}\times2=0,\text{解得}\cos A=\frac{\sqrt{6}}{6}.\text{故选A.}$$

二、多项选择题

9.ACD

提示:由平面内任一向量 \boldsymbol{c} 都可唯一表示为 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$,可知 \boldsymbol{a} 与 \boldsymbol{b} 不共线.又 $\boldsymbol{a}=(1,2),\boldsymbol{b}=(m,3m-3)$,所以 $1\times(3m-3)-2m\neq0$,解得 $m\neq3$.结合选项可知选ACD.

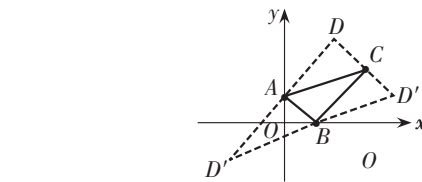
10.ACD

提示:以 $A(0,1),B(1,0),C(3,2)$ 三个点为顶点作平行四边形,如图所示.设 D 的坐标为 (x,y) .

若四边形是 $\square ABCD$,则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,即 $(1,-1)=(3-x,2-y)$,得 $x=2,y=3$,所以 $D(2,3)$.

若四边形是 $\square ABDC$,则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$,即 $(1,-1)=(x-3,y-2)$,得 $x=4,y=1$,所以 $D(4,1)$.

若四边形是 $\square ACBD$,则 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$,即 $(x,y-1)=(-2,-2)$,得 $x=-2,y=-1$,所以 $D(-2,-1)$.故选ACD.

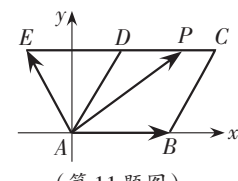


(第10题图)

11.BC

提示:建立如图所示平面直角坐标系,设菱形 $ABCD$ 的边长为2,则 $A(0,0),B(2,0),E(-1,\sqrt{3}),C(3,\sqrt{3}),D(1,\sqrt{3})$.设 $P(x,y)$,由 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AE}$,得 $(x,y)=\lambda(2,0)+\mu(-1,\sqrt{3})=(2\lambda-\mu,\sqrt{3}\mu)$,

$$\text{所以}\begin{cases}x=2\lambda-\mu,\\ y=\sqrt{3}\mu,\end{cases}\quad\text{整理得}\lambda+\mu=\frac{x+\sqrt{3}y}{2}.$$



(第11题图)

①当 P 在 AB 上时, $0\leq x\leq 2,y=0$,则 $\lambda+\mu=\frac{x}{2}\in[0,1]$;

②当 P 在 BC 上(不包含端点 B)时, $2<x\leq 3,y=\sqrt{3}(x-2)$,则 $\lambda+\mu=2x-3\in(1,3]$;

③当 P 在 CD 上(不包含端点 C)时, $1\leq x<3,y=\sqrt{3}$,则 $\lambda+\mu=\frac{x+3}{2}\in(\frac{5}{2},3]$;

④当 P 在 AD 上(不包含端点 A,D)时, $0<x<1,y=\sqrt{3}x$,则 $\lambda+\mu=2x\in(0,2)$.

综上, $\lambda+\mu\in[0,3]$,即 $\lambda+\mu$ 的最小值为0,最大值为3,故C正确,D错误;由①④可知,满足 $\lambda+\mu=1$ 的点 P 有两个,故A错误;由②③可知,满足 $\lambda+\mu=2$ 的点 P 有两个,故B正确.故选BC.

三、填空题

$$12.\left(\frac{5}{2},3\right)$$

提示:由梯形 $ABCD$ 中, $AB\parallel CD,AB=2CD$,得 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$.设 $C(x,y)$,因为 $A(-2,1),B(-1,3),D(2,2)$,所以 $\overrightarrow{AB}=(1,2),\overrightarrow{DC}=(x-2,y-2)$.

$$\text{所以}\begin{cases}1=2(x-2),\\ 2=2(y-2),\end{cases}\quad\text{解得}\begin{cases}x=\frac{5}{2},\\ y=3.\end{cases}$$

所以顶点 C 的坐标为 $\left(\frac{5}{2},3\right)$.

$$13.-2\sqrt{3};(-\sqrt{3},-1)$$

提示:因为 $\boldsymbol{a}=(m,2)$ 且 $m\neq0,\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},1)$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sqrt{3}m+2,|\boldsymbol{a}|=\sqrt{m^2+4},|\boldsymbol{b}|=2$.

$$\text{故}\cos 120^\circ=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\sqrt{3}m+2}{2\sqrt{m^2+4}}=-\frac{1}{2},\text{解得}m=-2\sqrt{3}.$$

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-4$.

故向量 \boldsymbol{a} 在向量 \boldsymbol{b} 上的投影向量的坐标是

$$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\times\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=-\boldsymbol{b}=(-\sqrt{3},-1).$$

$$14.\frac{1}{2}$$

提示:由已知,得 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DF}=\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{DC}=\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AB}$.

$$\text{所以}\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AB}.$$

因为 B,E,G 三点共线,所以存在 $m\in\mathbf{R}$,使得 $\overrightarrow{AG}=m\overrightarrow{AE}+(1-m)\overrightarrow{AB}=\frac{m}{3}\overrightarrow{AD}+(1-m)\overrightarrow{AB}$.

$$\text{所以}\overrightarrow{AF}=\frac{10}{3}\overrightarrow{AG}=\frac{10m}{9}\overrightarrow{AD}+\frac{10(1-m)}{3}\overrightarrow{AB}.$$

$$\text{由平面向量基本定理,得}\begin{cases}\frac{10m}{9}=1,\\ \frac{10(1-m)}{3}=\frac{\lambda}{1+\lambda},\end{cases}$$

$$\text{解得}\lambda=\frac{1}{2}.$$

四、解答题

15.(1)证明:根据题意,得 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量,假设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线,则 $\exists k\in\mathbf{R}$,使得 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$,即 $\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2=k(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)$,所以 $(1-k)\cdot\boldsymbol{e}_1+(3+2k)\boldsymbol{e}_2=\mathbf{0}$.因为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不平行,所以 $\begin{cases}1-k=0,\\ 3+2k=0,\end{cases}$ 该方程组无实数解.所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线不成立,即 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线.所以 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$ 是平面向量的一个基底.

(2)解:设 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=x(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)+y(\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)=(x+y)\boldsymbol{e}_1+(3y-2x)\boldsymbol{e}_2$,其中 $x,y\in\mathbf{R}$,且 $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$,

$$\text{由平面向量基本定理,得}\begin{cases}x+y=3,\\ 3y-2x=-1,\end{cases}$$

$$\text{解得}\begin{cases}x=2,\\ y=1.\end{cases}\text{所以}\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

16.解:(1)因为 $\boldsymbol{a}=(2,0),\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\left(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{7}$.

$$\text{所以}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\text{方向的单位向量为}\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\left(\frac{5\sqrt{7}}{14},\frac{\sqrt{21}}{14}\right).$$

(2)因为向量 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{7b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{tb}$ 反向,所以存在 $k<0$,使得 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{7b}=k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{tb})$,

$$\text{则}\begin{cases}2t=k,\\ 7=kt,\end{cases}\quad\text{解得}t=\frac{\sqrt{14}}{2}(\text{舍去}),\text{或}t=-\frac{\sqrt{14}}{2}.$$

17.解:(1)因为 $\overrightarrow{OA}=(-3,1),\overrightarrow{OB}=(1,-1),\overrightarrow{OC}=(m,4)$,

$$\text{所以}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(4,-2),\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(m+3,3).$$

因为 A,B,C 三点共线,

$$\text{所以}\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{AC},\text{得}4\times3-(-2)(m+3)=0,\text{解得}m=-9.$$

(2)由已知,得 $\overrightarrow{AB}=(4,-2),\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(m-1,5)$,

$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=(m-x,4-y).$$

因为四边形 $ABCD$ 为矩形,所以 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$,且 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

$$\text{所以}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=4(m-1)-10=0,\text{且}\begin{cases}4=m-x,\\ -2=4-y,\end{cases}$$

$$\text{解得}m=\frac{7}{2},x=-\frac{1}{2},y=6.\text{所以}2x+y=5.$$

18.解:(1)因为 D,E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB,BC 上的

$$\text{点},AD=\frac{1}{2}AB,BE=\frac{2}{3}BC,$$

$$\text{所以}\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=$$

$$-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{又}\overrightarrow{DE}=\lambda_1\overrightarrow{AB}+\lambda_2\overrightarrow{AC}(\lambda_1,\lambda_2\text{为实数}),$$

$$\text{所以}\lambda_1=-\frac{1}{6},\lambda_2=\frac{2}{3}.\text{所以}\lambda_1+\lambda_2=-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{1}{2}.$$

$$(2)\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

由 A,F,E 三点共线,设 $\overrightarrow{AF}=m\overrightarrow{AE}(m\in\mathbf{R})$,

$$\text{则}\overrightarrow{AF}=\frac{m}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2m}{3}\overrightarrow{AC}.$$

由 C,F,D 三点共线,设 $\overrightarrow{CF}=n\overrightarrow{CD}(n\in\mathbf{R})$,

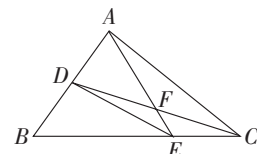
$$\text{则}\overrightarrow{AF}=n\overrightarrow{AD}+(1-n)\overrightarrow{AC}=\frac{n}{2}\overrightarrow{AB}+(1-n)\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{因为}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\text{不共线,所以}\begin{cases}\frac{m}{3}=\frac{n}{2},\\ \frac{2m}{3}=1-n,\end{cases}$$

$$\text{解得}\begin{cases}m=\frac{3}{4},\\ n=\frac{1}{2}.\end{cases}\quad\text{所以}\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{又}\overrightarrow{AF}=\lambda_3\overrightarrow{AB}+\lambda_4\overrightarrow{AC}(\lambda_3,\lambda_4\text{为实数}),$$

$$\text{所以}\lambda_3=\frac{1}{4},\lambda_4=\frac{1}{2}.\text{所以}\lambda_3+\lambda_4=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$



(第18题图)

19.解:(1)因为 $|\boldsymbol{e}_1|\cdot|\boldsymbol{e}_2|=1\cdot1\times\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$,

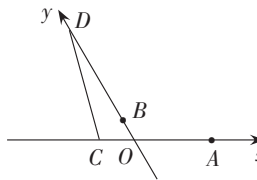
$$\text{所以}\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=1\times1\times\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}.$$

因为 $\overrightarrow{OP}=(1,2)$,所以 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$.

$$\text{所以}|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)^2}=\sqrt{\boldsymbol{e}_1^2+4\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+4\boldsymbol{e}_2^2}$$

$$=\sqrt{1+4\times\left(-\frac{1}{2}\right)+4}=\sqrt{3}.$$

(2)①如图所示,根据题意,得 $\overrightarrow{OA}=4\boldsymbol{e}_1,\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{e}_2,\overrightarrow{OC}=(4-3\times2)\boldsymbol{e}_1=-2\boldsymbol{e}_1,\overrightarrow{OD}=(1+3\times2)\boldsymbol{e}_2=7\boldsymbol{e}_2$,



(第19题图)

$$\text{所以}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=7\boldsymbol{e}_2-(-2\boldsymbol{e}_1)=2\boldsymbol{e}_1+7\boldsymbol{e}_2.$$

②结合①可知, t 时刻, $\overrightarrow{OM}=(4-3t)\boldsymbol{e}_1,\overrightarrow{ON}=(1+3t)\boldsymbol{e}_2$,

$$\text{则}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=(1+3t)\boldsymbol{e}_2-(4-3t)\boldsymbol{e}_1.$$

$$\text{所以}|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{(1+3t)^2-2(1+3t)(4-3t)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(4-3t)^2}$$

$$=\sqrt{9t^2-9t+21}=\sqrt{9\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{75}{4}}.$$

因为 $t\geq0$,所以当 $t=\frac{1}{2}$ 时, $|\overrightarrow{MN}|$ 取得最小值为 $\sqrt{\frac{75}{4}}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

$$\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

所以 $\frac{1}{2}$ h后,两质点相距最短,最短距离为 $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ m.

第3期

一、单项选择题

1.B

提示:由已知,得 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,且 $|\overrightarrow{AB}|=1$.所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.又 $|\overrightarrow{AD}|=1$,所以 $|\overrightarrow{AB}|\perp\overrightarrow{AD}$.所以四边形 $ABCD$ 是菱形.故选B.

2.C

提示:根据题意,得三角形空地的面积为 $\frac{1}{2}\times20\times30\times\sin 150^\circ=150(\text{m}^2)$.又草皮的价格为 x 元/ m^2 ,所以购买草皮需要150x元.故选C.

3.A

提示:由正弦定理,得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,

$$\text{所以}\sin A=\frac{a\sin C}{c}=\frac{2\sqrt{2}\sin 45^\circ}{4}=\frac{1}{2}.$$

所以 $A=30^\circ$ 或 150° .又 $a<c$,所以 $A<C$,则 $A=30^\circ$.故选A.

4.A

提示:在 $\triangle ABC$ 中,若 $A>B$,由大角对大边,得 $a>b$,又

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},\text{所以}\sin A>\sin B.\text{充分性成立.}$$

反之,若 $\sin A>\sin B$,由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,得 $a>b$,由大边对大角,得 $A>B$.必要性成立.故选A.

5.B

提示:由余弦定理,得 $a^2=b^2+c^2-2bccos A$,

$$\text{即}(\sqrt{3})^2=1^2+c^2-2ccos 60^\circ,\text{即}c^2-c-2=0,$$

解得 $c=2$,或 $c=-1$ (舍去).故选B.

6.C

提示:根据 $\sin A:\sin B:\sin C=2:5:6$ 及正弦定理,得 $a:b:c=2:5:6$.

设 $a=2x,b=5x,c=6x(x>0)$,由余弦定理的推论,得

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{(2x)^2+(6x)^2-(5x)^2}{2\cdot2x\cdot6x}=\frac{5}{8}.$$

$$\text{所以}\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{\sqrt{39}}{8}.$$

设 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 R ,因为 $AC=\sqrt{39}$,所以

$$\text{由正弦定理,得}2R=\frac{AC}{\sin B}=8.$$

所以 $R=4$.所以