

所以 $\frac{\lg(1+a_{n+1})}{\lg(1+a_n)}=2$, 而 $a_1=2$, 则 $\lg(1+a_n)=\lg 3$, 所以数列 $\{\lg(1+a_n)\}$ 是以 $\lg 3$ 为首项, 2 为公比的等比数列.

(2)解: 由(1)得 $\lg(1+a_n)=(\lg 3) \cdot 2^{n-1}$, 则 $a_n=3^{2^{n-1}}-1$, 因为 $\frac{1}{a_n+2}=\frac{1}{a_n} \cdot \frac{1}{a_n+1}$, 所以 $\frac{1}{a_n+2}+\frac{1}{a_n}=\frac{2}{a_n} \cdot \frac{1}{a_n+1}$, 所以 $b_n=\frac{2}{a_n} \cdot \frac{1}{a_n+1}=2\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$, 所以 $S_n=2\left[\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)\right]=2\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)=2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3^{2^n}-1}\right)=1-\frac{2}{3^{2^n}-1}$, 因为数列 $\{S_n\}$ 单调递增, 则 $S_n \geq S_1=\frac{3}{4}$, 所以 S_n 的最小值为 $\frac{3}{4}$.

18.解: (1) $f'(x)=\frac{1}{x} - \frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$, 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x)=0$, 解得 $x=a$. 若 $x > a$, 则 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增; 若 $0 < x < a$, 则 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内单调递减. 综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, a)$ 内单调递减.

(2) $f(x) \geq 1$ 在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 上有解 $\Leftrightarrow \ln x + \frac{a}{x} \geq 1$ 在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 上有解, 即 $a \geq x - \ln x$ 在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 上有解.

令 $g(x)=x - \ln x$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$, 则 $g'(x)=-\ln x$.

当 $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增; 当 $x \in (1, 3]$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减.

因为 $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2} + \ln 2 > 0$, $g(3)=3 - \ln 3 < 0$, 所以 $g(x)_{\min}=g(3)=3 - \ln 3$, 所以 $a \geq 3 - \ln 3$, 故实数 a 的取值范围是 $[3 - \ln 3, +\infty)$.

19.解: (1) 选条件①, 因为 $a_3=5$, $a_2+a_3=6b_2$, $a_1=b_1$, $d=$

$q, d > 1$, 所以 $\begin{cases} a_1+2d=5, \\ 2a_1+5d=6a_1d, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1=1, \\ d=2, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1=\frac{25}{6}, \\ d=\frac{5}{12} \end{cases}$ (舍去),

所以 $b_1=1, q=2$, 所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2n-1, b_n=b_1q^{n-1}=2^{n-1}$.

选条件②, 因为 $b_2=2, a_3+a_4=3b_3, a_1=b_1, d=q, d > 1$,

所以 $\begin{cases} a_1d=2, \\ 2a_1+5d=3a_1d^2, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} a_1d=2, \\ 2a_1+5d=6d, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a_1=1, \\ d=2, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1=1, \\ d=-2 \end{cases}$ (舍去),

所以 $b_1=1, q=2$, 所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2n-1, b_n=b_1q^{n-1}=2^{n-1}$.

选条件③, 因为 $S_3=9, a_4+a_5=8b_2, a_1=b_1, d=q, d > 1$,

所以 $\begin{cases} 3a_1+3d=9, \\ 2a_1+7d=8a_1d, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1=1, \\ d=2, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1=\frac{21}{8}, \\ d=\frac{3}{8} \end{cases}$ (舍去),

所以 $b_1=1, q=2$, 所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2n-1, b_n=b_1q^{n-1}=2^{n-1}$.

(2) 因为 $c_n=\frac{a_n}{b_n}$, 所以 $c_n=\frac{2n-1}{2^{n-1}}=(2n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

所以 $T_n=1+3 \times \frac{1}{2}+5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+(2n-3) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+(2n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, ①

所以 $\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2+5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(2n-3) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+(2n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$, ②

由 ① - ②, 得 $\frac{1}{2}T_n=1+2 \times \left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]-$

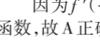
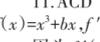
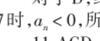
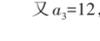
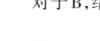
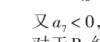
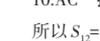
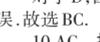
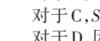
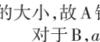
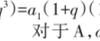
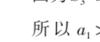
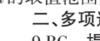
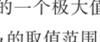
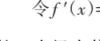
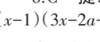
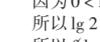
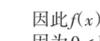
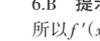
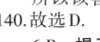
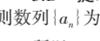
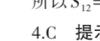
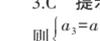
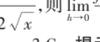
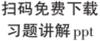
$(2n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$,

所以 $\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2+5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(2n-3) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1+2 \times \left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]-$

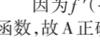
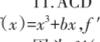
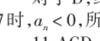
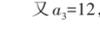
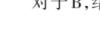
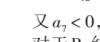
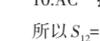
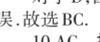
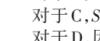
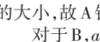
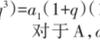
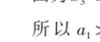
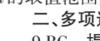
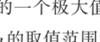
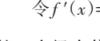
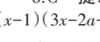
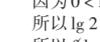
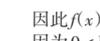
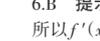
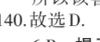
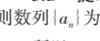
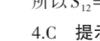
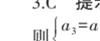
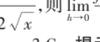
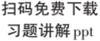
$(2n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$,

所以 $T_n=6-(2n+3) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

数学人教A



数学人教A



第9期

第2-3版综合测试(一)参考答案

一、单项选择题

1.C 提示: 因为数列 $\{a_n\}$ 是等比数列,

则 $a_4a_{13}=a_5(a_4a_{13})=a_5a_6a_7^2=8$, 即 $a_6=2$, 所以 $a_4a_8=a_6^2=4$. 故选 C.

2.B 提示: 因为 $f(x)=\sqrt{x}$, 所以 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. 故选 B.

3.C 提示: 设等差数列的公差为 d , 则 $\begin{cases} a_3=a_1+2d=4, \\ S_3=3a_1+3d=6, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1=0, \\ d=2, \end{cases}$ 所以 $S_{12}=12a_1+\frac{12 \times (12-1)}{2}d=132$. 故选 C.

4.C 提示: 因为 $f(x)=2f(-x)+e^x$, 所以 $f(-x)=2f(x)+e^{-x}$, 联立可解得 $f(x)=\frac{2e^{-x}+e^x}{3}$, 所以 $f'(x)=\frac{2e^{-x}-e^x}{3}$, 所以所求切线斜率为 $f'(0)=\frac{1}{3}$. 故选 C.

5.D 提示: 由题意可设善走男第 n 天走的路程为 a_n , 则数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 公差为 $d, a_1=100$, 所以 $9a_1+\frac{9 \times 8}{2} \cdot d=1\ 260$, 所以 $a_1+4d=140$, 所以该善走男第 5 日所走的路程里数为 $a_5=a_1+4d=140$. 故选 D.

6.B 提示: 因为 $f(x)=2\sin x+\cos x-\sqrt{5}x$, 所以 $f'(x)=2\cos x-\sin x-\sqrt{5}=\sqrt{5}\cos(x+\varphi)-\sqrt{5} \leq 0$, 其中 $\cos\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

因此 $f(x)=2\sin x+\cos x-\sqrt{5}x$ 为减函数, 因为 $0 < \lg 2 < 1, (-1)^6=1, \ln 3 > 1$, 所以 $\lg 2 < (-1)^0 < \ln 3$, 所以 $f(\lg 2) > f(-1^0) > f(\ln 3)$, 所以 $a > c > b$. 故选 B.

7.A 提示: 取 $m=1$, 得 $a_{n+1}=a_n \cdot a_1$, 即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=a_1$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是以 a_1 为首项, a_1 为公比的等比数列, 所以 $a_n=a_1 \cdot a_1^{n-1}=a_1^n$. 取 $m=n=1$, 得 $a_2=a_1^2=4$, 所以 $a_1=\pm 2$.

因为 $T_n=a_1a_2 \cdots a_n=a_1^{1+2+\cdots+n}=\frac{a_1^{n(n+1)}{2}}$, 所以 $T_5=a_1^15, T_4=a_1^10$. 因为 $T_5 < T_4$, 所以 $a_1=-2$, 所以 $T_{101}=(-2)^{\frac{101 \times 102}{2}}=-2^{5151}$. 故选 A.

8.C 提示: 由函数 $f(x)=(x-1)^2(x-a)$, 可得 $f'(x)=(x-1)(3x-2a-1)$. 令 $f'(x)=0$, 可得 $x=1$ 或 $x=\frac{2a+1}{3}$, 因为 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值点, 则满足 $\frac{2a+1}{3} > 1$, 解得 $a > 1$, 所以实数 a 的取值范围为 $(1, +\infty)$. 故选 C.

二、多项选择题

9.BC 提示: 根据题意, 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 因为 $S_3=a_1(1+q+q^2) > 0$, 又 $1+q+q^2=\left(q+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} > 0$, 所以 $a_1 > 0$. 又 $S_4 > 0$, 即 $S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=a_1(1+q+q^2+q^3)=a_1(1+q)(1+q^2) > 0$, 所以 $q > -1$.

对于 A, $a_2=a_1q$, 由于 q 正负不定, 故无法确定 a_2 与 0 的大小, 故 A 错误;

对于 B, $a_3=a_1q^2 > 0$, 故 B 正确;

对于 C, $S_5=S_4+a_5q^4 > 0$, 故 C 正确;

对于 D, 因为 $S_8-S_6=a_7q^6(1+q) > 0$, 所以 $S_7 > S_6$, 故 D 错误. 故选 BC.

10.AC 提示: 对于 A, 因为 $S_{12} > 0$, 所以 $S_{12}=\frac{(a_1+a_{12}) \times 12}{2}=\frac{(a_6+a_{13}) \times 12}{2}=6(a_6+a_7) > 0$, 又 $a_7 < 0$, 所以 $a_6 > 0$, 故 A 正确;

对于 B, 结合选项 A 知, $a_6 > 0, a_7 < 0, a_6+a_7 > 0$, 又 $a_7=12$, 所以 $\begin{cases} a_6=12+3d > 0, \\ a_7=12+4d < 0, \end{cases}$ 所以 $a_6+a_7=24+7d > 0$, 解得 $-\frac{24}{7} < d < -3$, 故 B 错误;

对于 C, $S_{13}=\frac{(a_1+a_{13}) \times 13}{2}=13a_7 < 0$, 又结合选项 A 知, $S_{12} > 0$, 所以 $S_n < 0$ 时, n 的最小值为 13, 故 C 正确;

对于 D, 结合选项 A 和 B 知, 当 $1 \leq n \leq 6$ 时, $a_n > 0$, 当 $n \geq 7$ 时, $a_n < 0$, 所以当 S_n 最大时, $n=6$, 故 D 错误. 故选 AC.

11.ACD 提示: 对于 A, 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $a=0$, $f(x)=x^3+bx, f'(x)=3x^2+b$, 因为 $f'(-x)=3(-x)^2+b=3x^2+b=f'(x)$, 所以 $f'(x)$ 为偶函数, 故 A 正确;

对于 B, 若 $a=0$, 不妨取 $b=-1$, 则 $f(x)=x^3-x=0$, 解得 $x=$

(2) 由(1)可得 $b_n=(-1)^n \cdot \frac{2n+3}{a_n a_{n+1}} = (-1)^n \cdot \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} =$

$(-1)^n \cdot \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$, 则

$T_3 = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

16.解: (1) 选择①②, 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 因为 $a_3=9, S_5=5a_3=20$, 所以 $a_3=9, a_5=4$, 则 $5d=a_5-a_3=5$, 即 $d=1$, 则 $a_n=4+(n-3) \times 1=n+1$.

选择①③, 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 设公差为 d , 因为 $a_3=9, a_2+a_5=13$, 所以 $a_3-6d+a_5+d=13$, 则 $5d=5$, 即 $d=1$, 则 $a_n=9+(n-8) \times 1=n+1$.

选择②③, 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 设公差为 d , 因为 $S_5=20, a_2+a_5=13$, 所以 $a_3=4, a_3-d+a_3+6d=13$, 则 $5d=5$, 即 $d=1$, 则 $a_n=4+(n-3) \times 1=n+1$.

(2) 由(1)可得 $b_n=\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$, 则 $T_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$.

17.解: (1) $f(x)$ 为奇函数, 证明如下:

由 $\frac{1-x}{1+x} > 0$, 解得 $-1 < x < 1$, 则函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$,

而 $f(-x)=\log_2 \frac{1+x}{1-x} = -\log_2 \frac{1-x}{1+x} = -f(x)$, 故 $f(x)$ 为奇函数.

(2) 由 $m=\frac{1-x}{1+x}=\frac{2}{1+x}-1$ 在 $x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ 上单调递减,

所以 $y=\log_2 m$ 在定义域上为增函数, 所以 $f(x)$ 在 $x \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ 上单调递减, 故 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{3}\$

所以 $a_n - \frac{4}{5} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$, 即 $a_n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} + \frac{4}{5}$. 令 $a_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} + \frac{4}{5} > \frac{3}{5}$, 即 $\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} > \frac{2}{5}$.

两边取常用对数得 $(n-1)\lg \frac{4}{5} < \lg \frac{2}{5}$,

所以 $n-1 > \frac{\lg \frac{2}{5}}{\lg \frac{4}{5}} = \frac{\lg 2 - \lg 5}{2\lg 2 - \lg 5} = \frac{\lg 2 - (1 - \lg 2)}{2\lg 2 - (1 - \lg 2)}$

$= \frac{2\lg 2 - 1}{3\lg 2 - 1} \approx \frac{2 \times 0.301 0 - 1}{3 \times 0.301 0 - 1} = \frac{0.398}{0.097} \approx 4.1$,

所以 $n > 5.1$, 所以至少经过 6 年, 绿洲面积可超过 60%.

18. 解: (1) 当 $a=1$ 时, $f(x) = x \ln x - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2x} + 2, x > 0$,

$f'(x) = \ln x + x - \frac{1}{x} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2x^2} = \ln x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2}$,

令 $g(x) = \ln x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2}, x > 0, g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} = \frac{x^2 - 1}{x^3}$,

令 $g'(x) = 0$, 得 $x=1$, 所以在 $(0, 1)$ 内 $g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上 $g'(x) > 0, g(x)$ 单调递增, 所以 $g(x)_{\min} = g(1) = 0$,

所以 $g(x) \geq 0$, 即 $f'(x) \geq 0$, 所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 无单调递减区间.

(2) $f'(x) = a \ln x + \frac{1}{2x^2} + a - \frac{3}{2}$, 令 $h(x) = a \ln x + \frac{1}{2x^2} + a - \frac{3}{2}$,

$h'(x) = \frac{a}{x} - \frac{1}{x^3} = \frac{ax^2 - 1}{x^3}$,

由 (1) 知, 若 $a=1$, 则当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = x \ln x - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2x} + 2 \geq f(1) = 0$;

若 $a > 1$, 则当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = a \ln x - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2x} + 2 \geq x \ln x - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2x} + 2 \geq 0$;

$\ln x - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2x} + 2 \geq 0$, 符合题意;

若 $0 < a < 1$, 令 $h'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{\sqrt{a}}$, 所以在 $\left(1, \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ 上

$h'(x) < 0, h(x)$ 单调递减, 此时 $f'(x) = h(x) < h(1) = a - 1 < 0$, $f(x)$ 单调递减, 所以 $f(x) < f(1) = 0$, 与题意矛盾;

若 $a < 0$, 则当 $x > 1$ 时, $h'(x) < 0$,

此时 $f'(x) = h(x) < h(1) = a - 1 < 0, f(x)$ 单调递减, 所以 $f(x) < f(1) = 0$, 与题意矛盾.

综上所述, a 的取值范围为 $[1, +\infty)$.

19. 解: (1) 因为 $f(x) = \ln x - mx + 2$, 定义域为 $(0, +\infty)$, 所以 $f'(x) = \frac{1}{x} - m$.

当 $m \leq 0$ 时, 由于 $\frac{1}{x} > 0$, 则 $f'(x) > 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $f(x)$ 无极值; 当 $m > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{m}$, 当 $0 < x < \frac{1}{m}$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{m}\right)$ 内

单调递增, 当 $x > \frac{1}{m}$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{m}, +\infty\right)$ 上单调

递减, 所以当 $m > 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{m}$ 处取极大值 $1 - \ln m$, 无极小值.

综上所述, 当 $m \leq 0$ 时, $f(x)$ 无极值. 当 $m > 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{m}$ 处取极大值 $1 - \ln m$, 无极小值.

(2) $f(x) = \ln x - mx + 2$, 令 $\ln x - mx + 2 = 0$, 得 $\frac{\ln x + 2}{x} = m$,

令 $g(x) = \frac{\ln x + 2}{x}$, 若 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{e^2}, e\right]$ 有 2 个零点,

则 $y=m$ 与 $y=g(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{e^2}, e\right]$ 有 2 个交点,

因为 $g(x) = \frac{\ln x + 2}{x}$, 所以 $g'(x) = \frac{-1 - \ln x}{x^2}$, 令 $g'(x) = \frac{-1 - \ln x}{x^2} = 0$, 得 $x = \frac{1}{e}$.

当 $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ 时, $g'(x) > 0, g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 内单调递增,

当 $x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ 时, $g'(x) < 0, g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e}, e\right)$ 上单调递减,

所以 $g(x)$ 的最大值为 $g\left(\frac{1}{e}\right) = e$, 又 $g(e) = \frac{3}{e}, g\left(\frac{1}{e^2}\right) = 0$,

所以 $y=m$ 与 $y=g(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{e^2}, e\right]$ 有 2 个交点, 则 $\frac{3}{e} \leq m < e$.

所以 m 的取值范围为 $\left[\frac{3}{e}, e\right)$.

第 11 期

第 2-3 版综合测试(三)参考答案

一、单项选择题

1.A 提示: 因为 $S(t) = 2^t$, 所以 $S'(t) = 2^t \ln 2$, 则 $S'(1) = 2 \ln 2$. 故选 A.

2.C 提示: 由题意知, $a_1 + a_{13} = 2a_7 = \frac{2}{3} \times (5a_7) = \frac{2}{3} \times (a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11}) = 40$. 故选 C.

3.A 提示: 根据题意, 在区间 $(0, 1)$ 内, 若 $f'(x) > 1$, 则在曲线 $f(x)$ 上任意一点切线的斜率都大于 1, 分析选项, A 符合这个特点. 故选 A.

4.B 提示: 因为 $\{a_n\}$ 是等比数列, 所以 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3} =$

$\frac{a_1 + a_3}{a_1 a_3} = \frac{a_1 + a_3}{a_2^2}$,

所以 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = \frac{a_1 + a_3}{a_2^2} + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 + a_3 + a_2}{a_2^2} = \frac{S_3}{a_2^2} = 7$, 因

为 $a_2 = \frac{1}{2}$, 所以 $4S_3 = 7$, 即 $S_3 = \frac{7}{4}$.

故选 B.

5.A 提示: $h'(x) = \frac{1}{x} - ax - 2$,

因为函数 $h(x) = \ln x - \frac{1}{2}ax^2 - 2x$ 在 $[1, 4]$ 上单调递增,

所以 $h'(x) = \frac{1}{x} - ax - 2 \geq 0$ 在 $[1, 4]$ 上恒成立, 分离参数

得 $a \leq \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 - 1$,

当 $\frac{1}{x} = 1$, 即 $x=1$ 时, $\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 - 1$ 取得最小值 -1 , 所以 $a \leq -1$, 所以 a 的取值范围是 $(-\infty, -1]$.

故选 A.

6.C 提示: 由题意可设前 n 组里含有的正整数的个数为 S_n ,

则 $S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n - 1$,

因为 $S_{10} = 2^{10} - 1 = 1 023 < 2 025, S_{11} = 2^{11} - 1 = 2 047 > 2 025$, 所以 2 025 在第 11 组. 故选 C.

7.B 提示: 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d . 因为 $a_1 = 1, a_1 + a_4 = a_3$, 由等差数列的性质可知, $a_1 + a_4 = a_2 + a_3 = a_3$,

所以 $a_2 = 0, d = a_2 - a_1 = -1$, 则 $a_n = 2 - n$, 所以 $b_n = 2^{2-n} = 2 \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$, 所以 $\{b_n\}$ 是首项为 2, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, 所以 $S_n =$

$2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 4 - \frac{1}{2^{n-2}}$,

因为 $S_m = \frac{63}{16}$, 所以 $4 - \frac{1}{2^{m-2}} = \frac{63}{16}$, 解得 $m = 6$. 故选 B.

8.C 提示: $f'(x) = 6ax^2 - 6x = 6x(ax - 1)$, 因为函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值 1,

所以 $f'(1) = 6a - 6 = 0$, 解得 $a = 1$, 可得 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + b$, 则 $f(1) = 2 - 3 + b = 1$, 解得 $b = 2$,

所以 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2, f'(x) = 6x(x - 1)$. 当 $x \in [-1, 0)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, 2]$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增. 又 $f(0) = 2, f(-1) = -2 - 3 + 2 = -3, f(2) = 16 - 12 + 2 = 6$, 则 $f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的最大值为 6. 故选 C.

二、多项选择题

9.BCD 提示: 对于 A, $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -\frac{1}{x^2}$, 故 A 错误;

对于 B, $(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, 故 B 正确;

对于 C, $(x^x)' = ax^{x-1}$, 故 C 正确;

对于 D, $(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x \ln a}$, 故 D 正确. 故选 BCD.

10. BC 提示: 当 $q=1$ 时, $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d + nb_1 =$

$\frac{d}{2}n^2 + (a_1 + b_1 - \frac{d}{2})n$, 不合题意;

当 $q \neq 1$ 时, $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d + \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{d}{2}n^2 +$

$(a_1 - \frac{d}{2})n + \left(\frac{b_1}{1-q}\right)q^n + \frac{b_1}{1-q}$,

因为 $S_1 = n^2 - n + 2 = 1$, 所以 $\frac{d}{2} = 1, a_1 - \frac{d}{2} = -1, -\frac{b_1}{1-q} = 1, q = 2$, 所以 $a_1 = 0, d = 2, b_1 = 1, q = 2$, 所以 $d + q = 4$. 故选 BC.

11. AB 提示: 对于 A, 函数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2, f'(x) = 6x^2 -$

17. 解: (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$f'(x) = \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 1$.

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减.

所以 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点, 且是唯一的极值点,

故 C 正确;

设切点坐标为 $(x_0, x_0^3 - 3x_0 - 2)$, 则斜率 $k = f'(x_0) = 3x_0^2 - 3$,

则切线方程为 $y - (x_0^3 - 3x_0 - 2) = (3x_0^2 - 3)(x - x_0)$, 将点

$(0, 2)$ 代入切线方程, 整理可得 $x_0^3 + 2 = 0$, 解得 $x_0 = (-2)^{\frac{1}{3}}$, 即过点 $(0, 2)$ 可以作曲线 $y = f(x)$ 的一条切线, 故 D 错误.

故选 AC.

三、填空题

12. $\frac{3}{4}$ 提示: 由 $f(x) = x^3 + ax + \frac{1}{4}$, 得 $f'(x) = 3x^2 + a$, 设切

点为 $(x_0, 0)$, 则 $\begin{cases} 3x_0^2 + a = 0, \\ x_0^3 + ax_0 + \frac{1}{4} = 0, \end{cases}$ 消去 a 并整理, 得 $x_0^3 = \frac{1}{8}$, 则

$x_0 = \frac{1}{2}$, 所以 $a = -3x_0^2 = -\frac{3}{4}$.

13. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2^{n+1} - 2$

提示: 因为 $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,

所以数列 $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}$ 的前 n 项和为 $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$, 因

为 $n^2 + 2^n = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n + 2^n$, 所以数列 $\{n^2 + 2^n\}$ 的前 n 项和

$S_n = 2 \left[\frac{1 \times 2}{2} + \frac{2 \times 3}{2} + \dots + \frac{n(n+1)}{2} \right] - (1 + 2 + \dots + n) + (2^{2^1} + \dots + 2^{2^n}) =$

$\frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(1-2^{n+1})}{1-2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2^{n+1} - 2$.

14. $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ 提示: 函数 $f(x) = 2x + \frac{5}{x} + 3 \ln x$, 定义域为

$(0, +\infty)$, 则 $f'(x) = 2 - \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x} = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2} = \frac{(2x+5)(x-1)}{x^2}$,

令 $f'(x) = 0$, 可得 $x=1$ 或 $x = -\frac{5}{2}$ (舍去).

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增.

又因为函数 $f(x)$ 在 $(a, 2-3a)$ 内有最小值,

故 $0 \leq a < 1 < 2-3a$, 解得 $0 \leq a < \frac{1}{3}$,

所以 a 的取值范围是 $\left[0, \frac{1}{3}\right)$.

四、解答题

15. 解: (1) 当 $m=2$ 时, $f(x) = x^3 - 2x - 1$, 则 $f(1) = -2$, 即 $P(1, -2), f'(x) = 3x^2 - 2$, 所以曲线在 $P(1, -2)$ 处的切线的斜率 $k = 3 - 2 = 1$,

所以所求的切线方程为 $y - (-2) = x - 1$, 即 $x - y - 3 = 0$.

(2) 因为 $f'(x) = 3x^2 - m, P(1, -m)$,

所以曲线在 P 处的切线的斜率 $k = 3 - m$,

所以切线方程为 $y - (-m) = (3 - m)(x - 1)$,

即 $y = (3 - m)x - 3$,

又因为切线与两坐标轴围成三角形,

所以 $m \neq 3$. 令 $x=0$, 得 $y = -3$; 令 $y=0$, 得 $x = \frac{3}{3-m}$.

又因为所围成三角形的面积为 9,

所以 $\frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3}{|3-m|} = 9$, 所以 $|3-m| = \frac{1}{2}$,

解得 $m = \frac{5}{2}$, 或 $m = \frac{7}{2}$.

16. 解: (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d (d \neq 0)$.

选择①, 由题意得 $S_5 = 5a_1 + 10d = 15$, 又 $a_1 = S_1 = 1$, 则 $d = 1$, 所以 $a_n = 1 + (n-1)d = n$.

选择②, 由 a_1, a_3, a_5 成等比数列, 得 $a_1 a_5 = a_3^2$, 又 $a_1 = S_1 = 1$, 所以 $1 + 8d = (1 + 2d)^2$,

解得 $d = 1$ 或 $d = 0$ (舍去), 所以 $a_n = 1 + (n-1)d = n$.

选择③, 由 $a_6 = 3a_2$, 及 $a_1 = S_1 = 1$, 得 $1 + 5d = 3(1 + d)$, 解得 $d = 1$, 所以 $a_n = 1 + (n-1)d = n$.

(2) 由 (1) 得 $b_n = 2n - 1$, 则 $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{20} = 1 + 3 + 5 + \dots +$

$39 = \frac{20 \times (1 + 39)}{2} = 400$.

综上所述, 若 $f(x)$ 有 3 个零点, 则 a 的取值范围为 $\left(\frac{1}{e}, \frac{3}{e^2}\right)$.

第 19 题图

第 19 题图

令 $f(x) = 0$, 则 $x^3 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow (x+1)^2(x-2) = 0$, 解得 $x = -1$ 或 $x = 2$, 所以函数 $f(x)$ 有 2 个零点, 故 B 错误;

令 $g(x) = x^3 - 3x$, 则 $f(x) = g(x) - 2$, 又 $g(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -g(x)$, 所以 $g(x)$ 为奇函数, 其图象关于点 $(0, 0)$ 对称, 则 $f(x)$ 图象关于点 $(0, -2)$ 对称, 故 C 正确;

设切点坐标为 $(x_0, x_0^3 - 3x_0 - 2)$, 则斜率 $k = f'(x_0) = 3x_0^2 - 3$,

则切线方程为 $y - (x_0^3 - 3x_0 - 2) = (3x_0^2 - 3)(x - x_0)$, 将点

$(0, 2)$ 代入切线方程, 整理可得 $x_0^3 + 2 = 0$, 解得 $x_0 = (-2)^{\frac{1}{3}}$, 即过点 $(0, 2)$ 可以作曲线 $y = f(x)$ 的一条切线, 故 D 错误.

故选 AC.

三、填空题

12. $\frac{3}{4}$ 提示: 由 $f(x) = x^3 + ax + \frac{1}{4}$, 得 $f'(x) = 3x^2 + a$, 设切

点为 $(x_0, 0)$, 则 $\begin{cases} 3x_0^2 + a = 0, \\ x_0^3 + ax_0 + \frac{1}{4} = 0$