

高二选择性必修(第一册)答案页第2期

数学
北师大

第5期

第3~4版同步周测参考答案
一、单项选择题1.A 提示:因为椭圆 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 的焦点在 x 轴上,所以 $a^2=3$, $b^2=1$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{2}$,所以焦点坐标为 $(\pm\sqrt{2},0)$.故选A.2.C 提示:由椭圆 $M:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}=1$,可得 $a^2=16$,所以 $a=$ 4.因为 F_1,F_2 分别是椭圆 $M:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}=1$ 的左、右焦点, P 为 M 上一点,所以 $|PF_1|+|PF_2|=2a=8$,又 $|PF_1|=3$,所以 $|PF_2|=5$.故选C.3.C 提示:设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,由题意可知, $\begin{cases} \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{3}, \\ 2c=2\sqrt{2}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=3, \\ c=\sqrt{2}, \end{cases}$ 则 $b^2=9-2=7$,所以该椭圆的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{7}=1$.故选C.4.C 提示:因为椭圆 $E:x^2+\frac{y^2}{a^2}=1$ 经过点 $\left(\frac{1}{2},\sqrt{3}\right)$,所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{a^2}=1$,解得 $a^2=4$,所以 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$,所以 E 的长轴长为 $2\times 2=4$.故选C.5.D 提示:因为方程 $\frac{x^2}{4-k}+\frac{y^2}{k-1}=1$ 表示的曲线为焦点在 y 轴上的椭圆,所以 $k-1>4-k>0$,解得 $\frac{5}{2}<k<4$.故选D.6.B 提示:由椭圆定义得 $|MF_1|+|MF_2|=2a=4$,由基本不等式,得 $|MF_1|\cdot|MF_2|\leqslant\left(\frac{|MF_1|+|MF_2|}{2}\right)^2=4$,当且仅当 $|MF_1|=|MF_2|=2$ 时,等号成立,故 $|MF_1|\cdot|MF_2|$ 的最大值为4.故选B.7.A 提示:由题意知, $\begin{cases} 2a=20, \\ \frac{c}{a}=\frac{3}{5}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=10, \\ b=8, \\ b^2+c^2=a^2, \\ c=6, \end{cases}$ 所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$.因为 C 的左、右焦点分别为 F_1,F_2 ,又 C 上的点 P 满足 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$,所以由椭圆定义得 $|PF_1|+|PF_2|=20$,所以 $|PF_1|^2+|PF_2|^2+2|PF_1|\cdot|PF_2|=400$.①
由余弦定理,得 $|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos\angle F_1PF_2=|F_1F_2|^2=4\times 36=144$.②由①②,得 $|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{256}{3}$,所以 $\triangle F_1PF_2$ 的面积是 $S=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin\angle F_1PF_2=\frac{1}{2}\times\frac{256}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{64\sqrt{3}}{3}$.

故选A.

8.C 提示:设切点为 M ,连接 PF_1 ,由已知 $|OP|=|OF_2|=|OF_1|$,所以 $PF_1\perp PF_2$.
因为 $OM\perp PF_2$,所以 $OM\parallel PF_1$,又 O 是 F_1F_2 的中点,圆 $x^2+y^2=\frac{1}{4}b^2$ 的半径为 $\frac{1}{2}b$,所以 $|PF_1|=2|OM|=b$, $|PF_2|=2a-b$,所以 $b^2+(2a-b)^2=4c^2=4(a^2-b^2)$,即 $2a=3b$,得 $\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$.所以椭圆 C 的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.故选C.

二、多项选择题

9.AB 提示:因为 $2c=6$,所以 $c=3$.
当焦点在 x 轴上时,由椭圆的标准方程,知 $a^2=25$, $b^2=m^2$,所以 $25-m^2=9$,又 $m>0$,解得 $m=4$;
当焦点在 y 轴上时,由椭圆的标准方程,知 $a^2=m^2$, $b^2=25$,所以 $m^2-25=9$,又 $m>0$,解得 $m=\sqrt{34}$.
综上, $m=4$ 或 $\sqrt{34}$.故选AB.10.ABD 提示:设椭圆 $C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的长轴长为 $2a$,短轴长为 $2b$,焦距为 $2c$,则 $a^2=9$, $b^2=4$, $c^2=9-4=5$,故 $a=3$, $b=2$, $c=\sqrt{5}$.对于A, C 的焦距为 $2\sqrt{5}$,故A正确;对于B, C 的离心率为 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$,故B正确;对于C, $\triangle F_1PF_2$ 的周长为 $|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=2a+2c=6+2\sqrt{5}$.故C错误;对于D,当点 P 位于椭圆的上、下顶点时, $\triangle F_1PF_2$ 的面积最大,最大值为 $\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{5}=2\sqrt{5}$,故D正确.
故选ABD.11.ABD 提示:设椭圆 $C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 的长轴长为 $2a$,短轴长为 $2b$,焦距为 $2c$,则 $a=4$, $b=3$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{7}$,所以椭圆 C 的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$,故A正确;设椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{6}=1$ 的长轴长为 $2a_1$,短轴长为 $2b_1$,焦距为 $2c_1$,则 $a_1=\sqrt{13}$, $b_1=\sqrt{6}$, $c_1=\sqrt{13-6}=\sqrt{7}$,故椭圆 Γ 与椭圆 C 的焦点相同,故B正确;取椭圆 $C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 的两条互相垂直的切线 $x=4$ 与 $y=3$,其交点为 $(4,3)$,所以点 $(4,3)$ 在椭圆 C 的蒙日圆上,则半径 $r=\sqrt{4^2+3^2}=5$,所以椭圆 C 的蒙日圆方程为 $x^2+y^2=25$.故C错误;设矩形 R 的边长分别为 m 和 n ,则有 $m^2+n^2=(2r)^2=10^2=100$,所以矩形 R 的面积为 $S=mn\leqslant\frac{1}{2}(m^2+n^2)=50$,当且仅当 $m=n=5\sqrt{2}$ 时取等号,故D正确.故选ABD.

三、填空题

12. $2+\sqrt{3}$ 提示:依题意知, $a=2$, $b=1$, $c=\sqrt{3}$,所以 $|PF_1|\leqslant a+c=2+\sqrt{3}$.13. $\frac{5}{4}$ 提示:由椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的方程,得 $a=5$, $b=3$,所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=4$.所以点A, B 为该椭圆的焦点.由椭圆的定义可知 $|CB|+|CA|=2a$, $|AB|=2c$.在 $\triangle ABC$ 中,由正弦定理,得 $\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\frac{|CB|+|CA|}{|AB|}=\frac{2a}{2c}=\frac{a}{c}=\frac{5}{4}$.14. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 提示:由题意可知, $A(-a,0)$, $B(a,0)$,设 $M(x_0,y_0)$,所以 $k_{AM}=\frac{y_0}{x_0+a}$, $k_{BM}=\frac{y_0}{x_0-a}$,所以 $\frac{y_0}{x_0+a}\cdot\frac{y_0}{x_0-a}=-\frac{4}{9}$,整理得 $\frac{y_0^2}{x_0^2-a^2}=-\frac{4}{9}$.①又 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$,所以 $y_0^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x_0^2)$,即 $\frac{y_0^2}{x_0^2-a^2}=-\frac{b^2}{a^2}$.②联立①②,得 $-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{4}{9}$,即 $\frac{a^2-c^2}{a^2}=\frac{4}{9}$,即 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{5}{9}$.所以椭圆 C 的离心率 $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

四、解答题

15.解:(1)由题意知, $a=\sqrt{b^2+c^2}=5$, $c=3$,所以 $b^2=25-9=16$,又焦点所在坐标轴可为 x 轴,也可为 y 轴,故椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 或 $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{16}=1$.(2)由题意知, $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,
设 $a=2k$, $c=\sqrt{3}k$, $k>0$,则 $b=k$.
椭圆经过的点 $(2,0)$ 为其顶点.
若点 $(2,0)$ 为长轴顶点,则 $a=2$, $b=1$,该椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$;
若点 $(2,0)$ 为短轴顶点,则 $b=2$, $a=4$,该椭圆的标准方程为 $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1$.故椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 或 $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1$.16.解:(1)由题意知, $2a=4$, $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,得 $a=2$, $c=\sqrt{3}$, $b^2=a^2-c^2=1$.所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.(2)由题意可设 $l:x=my-1$,点 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases} x=my-1, \\ x^2+4y^2=4, \end{cases}$ 消去 x 得 $(m^2+4)y^2-2my-3=0$,
设 AB 中点坐标为 (x_0,y_0) ,
则 $y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{m}{m^2+4}$,所以 $\frac{m}{m^2+4}=\frac{1}{5}$,解得 $m=1$ 或 $m=4$,所以直线 l 的方程为 $x-y+1=0$ 或 $x-4y+1=0$.17.解:(1)由已知椭圆 C 的长轴长为 $4\sqrt{3}$,短轴长为4,可得 $a=2\sqrt{3}$, $b=2$,则椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$.(2)设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,联立 $\begin{cases} y=x+m, \\ \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1, \end{cases}$ 得 $4x^2+6mx+3m^2-12=0$.因为 $\Delta=36m^2-4\times 4(3m^2-12)>0$,所以 $-4<m<4$,且 $x_1+x_2=-\frac{3m}{2}$, $x_1x_2=\frac{3m^2-12}{4}$,所以 $|AB|=\sqrt{1+1^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$ $=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{9m^2}{4}-(3m^2-12)}=3\sqrt{2}$,解得 $m=\pm 2$,所以直线 l 的方程为 $y=x\pm 2$.18.(1)解:设 $F(c,0)$,由题设有 $c=1$ 且 $\frac{b^2}{a}=\frac{3}{2}$,故 $\frac{a^2-1}{a}=\frac{3}{2}$.解得 $a=2$,故 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$,故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.(2)证明:直线 AB 的斜率必定存在,设直线 AB 的方程为 $y=k(x-4)$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases} 3x^2+4y^2=12, \\ y=k(x-4), \end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$,则 $\Delta=1\ 024k^4-4(3+4k^2)(64k^2-12)>0$,得 $-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$.又 $x_1+x_2=\frac{32k^2}{3+4k^2}$, $x_1x_2=\frac{64k^2-12}{3+4k^2}$,易知 $N\left(\frac{5}{2},0\right)$,故直线 $BN:y=\frac{y_2}{x_2-\frac{5}{2}}\left(x-\frac{5}{2}\right)$,故 $y_Q=\frac{-\frac{3}{2}y_2}{x_2-\frac{5}{2}}=\frac{-3y_2}{2x_2-5}$,所以 $y_1-y_Q=y_1+\frac{3y_2}{2x_2-5}=\frac{y_1(2x_2-5)+3y_2}{2x_2-5}$ $=\frac{k(x_1-4)(2x_2-5)+3k(x_2-4)}{2x_2-5}$ $=k\frac{2x_1x_2-5(x_1+x_2)+8}{2x_2-5}=k\frac{2\times\frac{64k^2-12}{3+4k^2}-5\times\frac{32k^2}{3+4k^2}+8}{2x_2-5}$ $=k\frac{128k^2-24-160k^2+24+32k^2}{3+4k^2}\cdot\frac{1}{2x_2-5}=0$,故 $y_1=y_Q$,即 $AQ\perp y$ 轴.19.解:(1)椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(\sqrt{3},0)$,则椭圆 C 的半焦距为 $c=\sqrt{3}$,因为 $a^2=b^2+c^2$,所以椭圆 C 的方程变为 $\frac{x^2}{b^2+3}+\frac{y^2}{b^2}=1$,将点 $\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 代入,得 $\frac{1}{b^2+3}+\frac{3}{4b^2}=1$,解得 $b^2=1$ 或 $b^2=-\frac{9}{4}$ (舍去),所以 $a^2=4$,所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.(2)依题意,直线 l 的斜率不为0,则设直线 l 的方程为 $x=my+\frac{3}{2}$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases} x^2+4y^2=4, \\ x=my+\frac{3}{2}, \end{cases}$ 消去 x 得 $(m^2+4)y^2+3my-\frac{7}{4}=0$,则 $y_1+y_2=-\frac{3m}{m^2+4}$, $y_1y_2=-\frac{7}{4(m^2+4)}$. $\triangle OAB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|OP|\|y_1\|+\frac{1}{2}|OP|\|y_2\|=\frac{3}{4}|y_1-y_2|$.又 $|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{4\sqrt{m^2+7}}{m^2+4}$,设 $t=\sqrt{m^2+7}\left(t\geqslant\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$,则 $m^2=t^2-\frac{7}{4}$,所以 $|y_1-y_2|=\frac{4\sqrt{m^2+7}}{m^2+4}=\frac{4t}{t^2+\frac{9}{4}}=\frac{4}{t+\frac{9}{4t}}$,因为 $t+\frac{9}{4t}\geqslant 2\sqrt{t\cdot\frac{9}{4t}}=3$,当且仅当 $t=\frac{3}{2}>\frac{\sqrt{7}}{2}$,即 $m^2=\frac{1}{2}$ 时,等号成立,于是得 $|y_1-y_2|=\frac{4}{t+\frac{9}{4t}}\leqslant\frac{4}{3}$,所以 $S=\frac{3}{4}|y_1-y_2|\leqslant 1$,所以 $\triangle OAB$ 面积的最大值为1.10.AC 提示:当 $6+m=3-m>0$,即 $m=-\frac{3}{2}$ 时,曲线 $E:$ $\frac{x^2}{6+m}+\frac{y^2}{3-m}=1$ 表示圆,故A正确;当 $m=6$ 时, $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$ 表示双曲线,其渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$,故B错误;若 E 表示双曲线,则 $(6+m)(3-m)<0$,解得 $m<-6$ 或 $m>3$,故C正确;若 E 表示椭圆,则 $\begin{cases} 6+m>0, \\ 3-m>0, \end{cases}$ 解得 $-6<m<3$ 且 $6+m\neq 3-m$, $m\neq-\frac{3}{2}$,故D错误.故选AC.11.BCD 提示:由椭圆 $C:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$,得 $a=5$, $b=4$, $c=3$.对于A,假设存在点 P 使得 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$,则 $PF_1\perp PF_2$,所以点 P 的轨迹是以原点 O 为圆心, F_1F_2 为直径的圆 O ,则 $r=\frac{1}{2}|F_1F_2|=3$,因为椭圆 C 上的任一点到原点 O 的最小距离是短轴顶点与原点 O 的距离,即 $b=4$,由 $r<b$ 可知,圆 O 与椭圆 C 没有交点,所以假设不成立,即不存在点 P 使得 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$,故A错误;对于B, $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 $|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=2a+2c=16$,故B正确;对于C,当 P 为椭圆 C 短轴顶点时,点 P 到 F_1F_2 的距离最大,则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积最大,此时 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times 2c\cdot b=\frac{1}{2}\times 6\times 4=12$,故C正确;对于D,因为 $F_2(3,0)$, $M(1,1)$,所以 $|MF_2|=\sqrt{(3-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{5}$,所以 $|PM|+|PF_1|=|PM|+2a-|PF_2|=10+|PM|-|PF_2|\leqslant 10+|MF_2|=10+\sqrt{5}$,故D正确.故选BCD.

三、填空题

12.-6 提示:由双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=1(a>0)$ 的离心率为 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$,所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{4}{a^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$,解得 $a^2=5$,所以 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5+4}=3$,所以抛物线 $y^2=2mx$ 的焦点为 $(-3,0)$,所以抛物线开口向左,故 $\frac{m}{2}=-3$,即 $m=-6$.13. $\frac{3}{2}$ 提示:因为 $|AB|=10$,所以 $|AF_2|=5$,又 $|AF_1|=13$,所以 $|F_1F_2|=\sqrt{13^2-5^2}=12$,所以 $2a=|AF_1|-|AF_2|=13-5=8$, $2c=12$,所以 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$.14. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$ 提示:因为 $|AF_2|=2|BF_2|$,所以 $|AB|=3|BF_2|$,又 $|AB|\parallel|BF_1|$,所以 $|BF_1|=3|BF_2|$,又 $|BF_1|+|BF_2|=2a$,所以 $|BF_2|=\frac{a}{2}$, $|AF_2|=a$, $|BF_1|=$ $\frac{3a}{2}$.又 $|AF_2|+|AF_1|=2a$,所以 $|AF_1|=a$,所以 $|AF_2|=|AF_1|$,所以A在 y 轴上(为椭圆的顶点).在 $\triangle BF_1F_2$ 中,由余弦定理,得 $\cos\angle BF_2F_1=\frac{16+\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{3a}{2}\right)^2}{2\times 4\times\frac{a}{2}}=\frac{8-a^2}{2a}$,由 $\cos\angle AF_2O+\cos\angle BF_2F_1=0$,可得 $\frac{2}{a}+\frac{8-a^2}{2a}=0$,解得 $a^2=12$,
所以 $b^2=a^2-c^2=12-4=8$,则椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$.

四、解答题

15.解:(1)设 $M(x,y)$,由题意得, $\frac{\sqrt{(x-5)^2+y^2}}{\left|x-\frac{9}{5}\right|}=\frac{5}{3}$,化简得 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$,所以动点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.(2)由(1)知,动点 M 的轨迹为双曲线且 $a=3$, $b=4$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=5$,所以 F_1 和 F_2 为双曲线两焦点, $|F_1F_2|=2c=10$,
设 $|PF_1|=s$, $|PF_2|=t$,则有 $|s-t|=2a=6$,再由余弦定理,得 $(2c)^2=s^2+t^2-2st\cos 60^\circ$,所以 $(2c)^2=s^2+t^2-2st+st$,所以 $(2c)^2=(s-t)+st$,解得 $st=64$,所以 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}st\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\times 64\times\frac{\sqrt{3}}{2}=16\sqrt{3}$.16.解:(1)由题意可设双曲线方程为 $x^2-y^2=\lambda(\lambda\neq 0)$,
将点 $(4,-\sqrt{10})$ 代入双曲线方程,得 $4^2-(-\sqrt{10})^2=\lambda$,即 $\lambda=6$,所以双曲线方程为 $x^2-y^2=6$.(2)由(1)知 $F_1(-2\sqrt{3},0)$, $F_2(2\sqrt{3},0)$,因为 $M(3,m)$,所以 $\overrightarrow{MF_1}=(-2\sqrt{3}-3,-m)$, $\overrightarrow{MF_2}=(2\sqrt{3}-3,-m)$,
又 $M(3,m)$ 在双曲线 $x^2-y^2=6$ 上,所以 $m^2=3$,所以 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=\left(-2\sqrt{3}-3\right)\times\left(2\sqrt{3}-3\right)+m^2=-12+9+3=0$.17.(1)解:过点 $F(1,0)$,且斜率为2的直线 l 的方程为 $y=2(x-1)$,设点 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,联立 $\begin{cases} y^2=4x, \\ y=2x-2, \end{cases}$ 得 $x^2-3x+1=0$,则 $x_1+x_2=3$,所以 $|AB|=x_1+x_2+p=3+2=5$.(2)证明:设过点 $F(1,0)$ 的直线 $l:x=my+1$,

一、单项选择题

- 1.D 提示:双曲线的方程为 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$,可得 $a=\sqrt{5}$, $b=2$,所以 $c=\sqrt{a^2+b^2}=3$,所以双曲线的焦距为 $2c=6$.故选D.
- 2.A 提示:由题意得, $c=\sqrt{9+16}=5$.由双曲线定义,可得 $||PF_1|-|PF_2||=2a=6$,又 $|PF_1|=7$,所以 $|PF_2|=13$ 或 $|PF_2|=1$,又因为在双曲线中 $|PF_2|\geq c-a=2$,所以 $|PF_2|=13$.故选A.
- 3.C 提示:在双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 中 $c=\sqrt{1+3}=2$,且焦点在 x 轴上,因为椭圆和双曲线的相同焦点为 F_1,F_2 ,它们在第一象限的交点为 P ,所以椭圆中 $\sqrt{a-12}=2$,得 $a=16$.

因为 $|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{a}=8$, $|PF_1|-|PF_2|=2$,所以 $|PF_1|=5$, $|PF_2|=3$.因为 $|F_1F_2|=2c=4$,所以由余弦定理,得 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2\times5\times3}=\frac{3}{5}$.故选C.

- 4.D 提示:因为双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$,所以 $c^2=a^2+b^2=4+3=7$.因为 $|OP|=|OF_1|=\frac{1}{2}|F_1F_2|$,所以 $PF_1\perp PF_2$,

所以 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2=28$.由双曲线的定义,知 $||PF_1|-|PF_2||=2a=4$,两边同时平方,得 $|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|=16$,

所以 $|PF_1||PF_2|=6$,故 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|=3$.故选D.

- 5.B 提示:由题意知,该双曲线的焦点在 x 轴上,实轴长为4,点 $A(4,3)$ 在该双曲线上.设该双曲线的方程为

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,则 $\begin{cases} 4a=4, \\ \frac{4^2}{a^2}-\frac{3^2}{b^2}=1, \end{cases}$ 解得 $a=2,b=\sqrt{3}$,故

该双曲线的方程是 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$.故选B.

- 6.C 提示:由题意知, $F_1(0,4),F_2(0,-4),P(-6,4)$,则 $|F_1F_2|=2c=8$, $|PF_1|=\sqrt{6^2+(4-4)^2}=6$, $|PF_2|=\sqrt{6^2+(4+4)^2}=10$.由双曲线定义,知 $2a=|PF_2|-|PF_1|=10-6=4$,所以该双曲线的离心率为 $e=\frac{2c}{2a}=\frac{8}{4}=2$.故选C.

- 7.B 提示:设点 $M(x,y)$,则 $x\leq-2$ 或 $x\geq2$,且由 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$,可得 $y^2=\frac{x^2}{4}-1$.又 $\overrightarrow{AM}=(x-3,y),\overrightarrow{OM}=(x,y)$,所以 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AM}=x(x-3)+y^2=x^2-3x+\frac{x^2}{4}-1=\frac{5x^2}{4}-3x-1$.令 $f(x)=\frac{5x^2}{4}-3x-1$,其中 $x\leq-2$ 或 $x\geq2$,可知二次函数 $f(x)$ 的图象开口向上,对称轴为直线 $x=\frac{6}{5}$.当 $x\leq-2$ 时,函数 $f(x)$ 单调递减,此时 $f(x)\geq f(-2)=10$;当 $x\geq2$ 时,函数 $f(x)$ 单调递增,此时 $f(x)\geq f(2)=-2$.综上所述,函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$ 上的值域为 $[-2,+\infty)$.因此, $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AM}$ 的最小值是 -2 .故选B.

- 8.B 提示:设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{b_1^2}=1(a_1>0,b_1>0)$, $c_1^2=a_1^2+b_1^2$,则长轴长为 $2a_1$,焦距为 $2c_1$,

P 为双曲线右支上的动点(非顶点), F_1,F_2 为双曲线的两个焦点.设 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆与 PF_1,PF_2,F_1F_2 分别切于 M,N,Q ,

则根据双曲线的定义及圆的性质,可知 $|PF_1|-|PF_2|=|F_1M|-|F_2N|=|F_1Q|-|F_2Q|=2a_1$,又 $|F_1Q|+|F_2Q|=2c_1$,得 $|F_1Q|=c_1+a_1,|F_2Q|=c_1-a_1$,故 Q 为双曲线的右顶点,此时双曲线实轴长为 $2\sqrt{a}$,右顶点坐标 $Q(\sqrt{a},0)$.

所以 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆恒过定点 $(\sqrt{a},0)$.故选B.

二、多项选择题

9.ACD 提示:对于双曲线 $\Gamma,a=2,b=1$,则 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$.

- 对于A,双曲线 Γ 的顶点坐标为 $(\pm2,0)$,A正确;
- 对于B,双曲线 Γ 的焦点坐标为 $(\pm\sqrt{5},0)$,B错误;
- 对于C,双曲线 Γ 的实轴长为 $2a=4$,C正确;
- 对于D,双曲线 Γ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$,即 $x\pm2y=0$,D正确.故选ACD.
- 10.BCD 提示:对于A,若 Γ 是等轴双曲线,则 $1-m+3+m=0$,显然不成立,故A错误;

对于B,因为 Γ 表示焦点在 y 轴上的椭圆,所以 $3+m>1-m>0$,解得 $-1<m<1$,故B正确;

对于C,若 Γ 是圆,则 $3+m=1-m>0$,解得 $m=-1$,此时圆的半径为 $\sqrt{2}$,故C正确;

- 对于D,若 Γ 表示焦点在 x 轴上的双曲线,则 $\begin{cases} 1-m>0, \\ 3+m<0, \end{cases}$ 解得 $m<-3$,故D正确.故选BCD.
- 11.AD 提示:连接 BF_1 ,由双曲线定义,可知 $|AF_1|-|AF_2|=2a$,由题意得, A,B 关于原点对称,故 $|AF_1|=|BF_2|$ 且 $AF_1\parallel BF_2$,即四边形 BF_1AF_2 为平行四边形.因为 $|BF_2|-|AF_2|=|AF_1|-|AF_2|=2a$,又 $|BF_2|=3|AF_2|$,所以 $|BF_2|=3a,|AF_2|=a$.

因为 $\angle F_1AF_2=\frac{2\pi}{3}$,所以 $\angle AFB=\frac{\pi}{3}$,由 $\overrightarrow{F_2O}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{F_2A}+\overrightarrow{F_2B})$,得 $|\overrightarrow{F_2O}|^2=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{F_2A}|^2+|\overrightarrow{F_2B}|^2+2|\overrightarrow{F_2A}||\overrightarrow{F_2B}|\cos\angle AFB)$,即 $c^2=\frac{1}{4}\left[a^2+(3a)^2+2\times a\times3a\times\frac{1}{2}\right]=\frac{13}{4}a^2$,所以 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{13}{4}$,所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{2}$,故A正确;

又 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2-a^2}{a^2}=\frac{c^2}{a^2}-1=\frac{9}{4}$,所以 $\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$,所以渐近线方程为 $y=\pm\frac{3}{2}x,2b=3a$,故B,C错误;

设点 $P(x_0,y_0),A(x_1,y_1)$,因为 A,B 是直线 $y=kx$ 与双曲线的交点,根据对称性可得 $B(-x_1,-y_1)$,

所以 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{-y_1-y_0}{-x_1-x_0}=\frac{y_1^2-y_0^2}{x_1^2-x_0^2}$,又点 P,A 在双曲线 C 上,代入可得 $\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1, \\ \frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1, \end{cases}$

两式相减,得 $\frac{y_1^2-y_0^2}{b^2}=\frac{x_1^2-x_0^2}{a^2}$,所以 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{9}{4}$,故D正确.故选AD.

三、填空题

12. $y=\pm x$ 提示:因为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线互相垂直,又双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$,所以 $\frac{b}{a}\times\left(-\frac{b}{a}\right)=-1$,即 $b=a$,所以渐近线方程为 $y=\pm x$.
13. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 提示:由题意知, $\angle BOF=30^\circ$,则双曲线的一条渐近线的斜率为 $\tan 30^\circ$,即 $\frac{b}{a}=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以双曲线的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

14.12 提示:设双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ 的实半轴长为 a ,则 $a=3$,

设双曲线 C 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,MN 的中点为 P ,连接 PF_1,PF_2 .

因为 F_1 是 MA 的中点, P 是 MN 的中点,所以 F_1P 是 $\triangle MAN$ 的中位线,

则 $|PF_1|=\frac{1}{2}|AN|$,同理 $|PF_2|=\frac{1}{2}|BN|$,所以 $|AN|-|BN|=2(|PF_1|-|PF_2|)$.

因为 P 在双曲线的右支上,由双曲线的定义,知 $|PF_1|-|PF_2|=2a=6$,所以 $|AN|-|BN|=12$.

四、解答题

15.解:(1)设所求双曲线的实半轴长为 a ,虚半轴长为 b ,半焦距为 c .由过点 $(2,0)$,可知所求双曲线的焦点在 x 轴上,且 $a=2$,

因为所求双曲线与双曲线 $\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{16}=1$ 的离心率相等,所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{64+16}}{8}=\frac{\sqrt{5}}{2}$,解得 $c=\sqrt{5}$,所以 $b=\sqrt{c^2-a^2}=1$,所以所求双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$.

(2)与双曲线 $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{3}=1$ 具有相同的渐近线,且过点 $M(3,-2)$,

则可设所求双曲线的方程为 $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{3}=k(k\neq0)$,把点 $M(3,-2)$ 代入上述方程,得 $\frac{4}{4}-\frac{9}{3}=k$,解得 $k=-2$.

所以所求双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{8}=1$.

- 16.解:(1)由题意知, $a=1$,且 $\frac{b}{a}=1$,所以 $b=1$,所以 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$,

所以双曲线 E 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$.

(2)由(1)知双曲线 E 的方程为 $x^2-y^2=1$,将 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$,即 $x=2y+1$ 代入 $x^2-y^2=1$,得 $3y^2+4y=0$,解得 $y=0$ 或 $y=-\frac{4}{3}$.

不妨设 $y_P=0,y_Q=-\frac{4}{3}$,所以 $|PQ|=\sqrt{1+2^2}\cdot|y_P-y_Q|=\frac{4}{3}\sqrt{5}$.

- 17.(1)证明:由已知可得 $a=\sqrt{5},b=1$,所以双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}x$.

因为点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $y=\frac{1}{\sqrt{5}}x$,即直线 $x-\sqrt{5}y=0$ 的距离 $d_1=\frac{|x_0-\sqrt{5}y_0|}{\sqrt{6}}$,

点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $y=-\frac{1}{\sqrt{5}}x$,即直线 $x+\sqrt{5}y=0$ 的距离 $d_2=\frac{|x_0+\sqrt{5}y_0|}{\sqrt{6}}$,

所以点 P 到双曲线 C 的两条渐近线的距离的乘积为 $d_1d_2=\frac{|x_0-\sqrt{5}y_0|\cdot|x_0+\sqrt{5}y_0|}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{|x_0^2-5y_0^2|}{6}$,

又 $P(x_0,y_0)$ 在双曲线 C 上,所以 $\frac{x_0^2}{5}-y_0^2=1$,所以 $x_0^2-5y_0^2=5$,所以 $d_1d_2=\frac{5}{6}$ 是一个常数.

(2)解:因为 $\frac{x_0^2}{5}-y_0^2=1$,所以 $y_0^2=\frac{x_0^2}{5}-1\geq0$,解得 $x_0\leq-\sqrt{5}$,或 $x_0\geq\sqrt{5}$,所以 $|PA|^2=(x_0-4)^2+y_0^2=(x_0-4)^2+\frac{x_0^2}{5}-1=\frac{6}{5}x_0^2-8x_0+15=\frac{6}{5}\left(x_0-\frac{10}{3}\right)^2+\frac{5}{3}$,

当 $x_0=\frac{10}{3}$ 时, $|PA|^2$ 的最小值为 $\frac{5}{3}$,所以 $|PA|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{15}}{3}$.

- 18.解:(1)椭圆 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 的焦点为 $(\pm2,0)$,因为双曲线 C 的焦点与椭圆的焦点重合,所以 $a^2+b^2=4$,

由双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$,得 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,故 $b=1,a=\sqrt{3}$,所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$.

(2)设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),AB$ 的中点为 M ,因为 M 在直线 $l:y=\frac{1}{3}x$ 上,故 $y_M=\frac{1}{3}x_M$.

而 $\frac{x_1^2}{3}-y_1^2=1,\frac{x_2^2}{3}-y_2^2=1$,两式相减,得 $\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{3}-(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0$,

故 $\frac{(x_1-x_2)x_M}{3}-(y_1-y_2)y_M=0$,因为 A,B 两点不关于 x 轴对称,所以 $y_M\neq0,x_1\neq x_2$,所以 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{x_M}{3y_M}=1$,故直线 AB 的斜率为1.

19.(1)解:因为 $e=\frac{c}{a}=2$,所以 $c=2a,b^2=c^2-a^2=3a^2$.所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1$,即 $3x^2-y^2=3a^2$.

因为点 $M(\sqrt{5},\sqrt{3})$ 在双曲线 C 上,所以 $15-3=3a^2$,所以 $a^2=4$.

所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$.

(2)证明:由题意可得直线 OP 的斜率存在,可设直线 OP 的方程为 $y=kx(k\neq0)$,则直线 OQ 的方程为 $y=-\frac{1}{k}x$,

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1, \\ y=kx, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x^2=\frac{12}{3-k^2}, \\ y^2=\frac{12k^2}{3-k^2}, \end{cases}$

所以 $|OP|^2=x^2+y^2=\frac{12(k^2+1)}{3-k^2}$.

同理,可得 $|OQ|^2=\frac{12\left(1+\frac{1}{k^2}\right)}{3-\frac{1}{k^2}}=\frac{12(k^2+1)}{3k^2-1}$,

所以 $\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{3-k^2+(3k^2-1)}{12(k^2+1)}=\frac{2+2k^2}{12(k^2+1)}=\frac{1}{6}$.

数学
北师大

第7期

第3~4版同步周测参考答案

- 一、单项选择题
- 1.C 提示:由 $y=x^2$,得 $x^2=y=2py$,所以 $p=\frac{1}{2}$,所以抛物线 $y=x^2$ 的焦点坐标为 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$,故选C.

2.D 提示:因为抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点为 $F(2,0)$,准线方程为 $x=-2$,又点 M 在 C 上,所以 M 到准线 $x=-2$ 的距离等于 $|MF|$,故 $|MF|=4$.故选D.

- 3.C 提示:直线 l 的方程为 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}y+\frac{p}{2}$,设点 A,B 的坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{3}y+\frac{p}{2}, \\ y^2=2px, \end{cases}$ 消去 x ,得 $y^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}py-p^2=0$.

则 $y_1+y_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}p,y_1y_2=-p^2$,又 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$,所以 $|OF|=\frac{p}{2}$,

故 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|y_1-y_2|\cdot|OF|=\frac{1}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}\cdot|OF|=\frac{\sqrt{3}}{3}p^2=\sqrt{3}$,所以 $p=\sqrt{3}$.故选C.

- 4.D 提示:设点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,不妨设 $y_1>0$,设直线 l 的方程为 $x=ty+1$,

由 $\begin{cases} x=ty+1, \\ y^2=4x, \end{cases}$ 消去 x ,得 $y^2-4ty-4=0$,则 $y_1+y_2=4t,y_1y_2=-4$.由 $|AF|=3|BF|$,可得 $y_1=-3y_2$.

由以上三式,解得 $t=\frac{\sqrt{3}}{3},y_1=2\sqrt{3},y_2=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

由抛物线定义,可知 $|AB|=x_1+x_2+2=\frac{y_1^2}{4}+\frac{y_2^2}{4}+2=\frac{16}{3}$.故选D.

- 5.D 提示:由题意可知,点 F 的坐标为 $(2,0)$,设点 A,B,C 的坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$,又 F 为 $\triangle ABC$ 的重心,

所以 $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=2$,即 $x_1+x_2+x_3=6$,由抛物线方程,可得 $2p=8$,所以 $p=4$,

所以由抛物线的定义,可知 $|\overrightarrow{AF}|+|\overrightarrow{BF}|+|\overrightarrow{CF}|=x_1+\frac{p}{2}+x_2+\frac{p}{2}+x_3+\frac{p}{2}=6+\frac{3}{2}p=12$.故选D.

6.C 提示:由题意知, M 在 x 轴上方,直线 F_1M 的斜率为 $\sqrt{3}$,则 $\angle MF_1F_2=60^\circ,\cos\angle MF_1F_2=\frac{1}{2}$.

由 $|F_1F_2|=2c,\frac{|MF_2|}{|F_1F_2|}=\frac{7}{8}$,得 $|MF_2|=\frac{7}{4}c$.

由椭圆的定义,知 $|MF_1|=2a-|MF_2|=2a-\frac{7}{4}c$.在 $\triangle MF_1F_2$ 中,由余弦定理得

$\cos\angle MF_1F_2=\frac{1}{2}=\frac{4c^2+\left(2a-\frac{7}{4}c\right)^2-\frac{49}{16}c^2}{2\times2c\left(2a-\frac{7}{4}c\right)}$,

整理得 $15c^2-22ac+8a^2=0$,得 $15c^2-22e+8=0$,即 $(5e-4)(3e-2)=0$.

解得 $e=\frac{4}{5}$ 或 $\frac{2}{3}$,故椭圆 C 的离心率为 $\frac{4}{5}$ 或 $\frac{2}{3}$.故选C.

- 7.C 提示:设点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,把 l 与抛物线 C 的方程联立,得 $\begin{cases} y=-x+\frac{p}{2}, \\ y^2=2px, \end{cases}$ 消去 y ,得 $x^2-3px+\frac{p^2}{4}=0$,

则 $x_1+x_2=3p$,又 l 经过 C 的焦点 $\left(\frac{p}{2},0\right)$,所以 $|AB|=x_1+x_2+p=3p+p=16$,所以 $p=4$,所以 C 的方程为 $y^2=8x$.故选C.

8.C 提示:过点 N 作 C 的准线的垂线,垂足为 H ,由抛物线定义,可知 $|MN|+|NF|=|MN|+|NH|$.当 M,N,H 共线,即 MN 与抛物线 C 的准线垂直时, $|MN|+|NF|$ 取得最小值,此时点 N 纵坐标为4,代入抛物线方程,可得 $4^2=6ax$,得 $x=\frac{8}{3}$,所以 $N\left(\frac{8}{3},4\right)$,则 $\triangle MNF$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times\left(6-\frac{8}{3}\right)\times4=\frac{20}{3}$.故选C.

二、多项选择题

9.AB 提示:由题设知,抛物线方程可化为 $x^2=-\frac{1}{8}y$,所以开口向下,焦点为 $\left(0,-\frac{1}{32}\right)$,准线方程为 $y=\frac{1}{32}$,所以A,B正确,C,D错误.故选AB.

10.AC 提示:对于A,直线 $y=-\sqrt{3}(x-1)$ 与 x 轴的交点为 $(1,0)$,所以抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 $F(1,0)$,所以 $\frac{p}{2}=1,p=2$,故A正确,且抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$;

对于B,设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases} y=-\sqrt{3}(x-1), \\ y^2=4x, \end{cases}$ 消去 y ,得 $3x^2-10x+3=(x-3)(3x-1)=0$,

解得 $x_1=3,x_2=\frac{1}{3}$,所以 $|MN|=x_1+x_2+p=3+\frac{1}{3}+2=\frac{16}{3}$,

高二选择性必修(第一册)答案页第2期

故B错误;

对于C,设 MN 的中点为 A,M,N,A 到直线 l 的距离分别为 d_1,d_2,d ,因为 $d=\frac{1}{2}(d_1+d_2)=\frac{1}{2}(|MF|+|NF|)=\frac{1}{2}|MN|$,即 A 到直线 l 的距离等于 MN 的一半,所以以 MN 为直径的圆与直线 l 相切,故C正确;

对于D,由上述分析,可知 $y_1=-\sqrt{3}\times(3-1)=-2\sqrt{3},y_2=-\sqrt{3}\times\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

所以 $M\left(3,-2\sqrt{3}\right),N\left(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$,

所以 $|OM|=\sqrt{3^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{21}$,

$|ON|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{3}$,

$|MN|=\sqrt{\left(3-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-2\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{16}{3}$,所以 $\triangle OMN$ 不是等腰三角形,故D错误.故选AC.

- 11.BD 提示:对于A,因为点 $\left(\sqrt{2},\frac{1}{2}\right)$ 在抛物线 C 上,所以 $(\sqrt{2})^2=2p\times\frac{1}{2}$,得 $p=2$,故A错误;

对于B,因为抛物线 $C:x^2=4y$,所以 $F(0,1)$,因为 $AB\perp y$ 轴,所以 $l_{AB}:y=1$,由 $\begin{cases} x^2=4y, \\ y=1, \end{cases}$ 消去 y ,得 $x^2=4$,解得 $x=\pm2$,所以 $|AB|=4$,故B正确;

对于C,设直线 AB 的方程为 $y=kx+1$,点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases} x^2=4y, \\ y=kx+1, \end{cases}$ 消去 y ,得 $x^2-4kx-4=0$,则 $x_1+x_2=4k,x_1x_2=-4$.

所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2=4k^2+2,y_1y_2=(kx_1+1)(kx_2+1)=k^2x_1x_2+k(x_1+x_2)+1=1$.

由抛物线定义,知 $|AF|=y_1+1,|BF|=y_2+1$,所以 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{1}{y_1+1}+\frac{1}{y_2+1}=\frac{2+y_1+y_2}{1+(y_1+y_2)+y_1y_2}=\frac{4k^2+4}{4k^2+2+1+1}$,故