

高考版答案页第2期

数学

第5期

第2-3版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.D 提示:由题意,得 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, $f(x)=x+\ln x-5$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, $f(1)=-4<0$, $f(2)=\ln 2-3<0$,

$f(3)=\ln 3-2<\ln e^2-2=0$, $f(4)=\ln 4-1>\ln e-1=0$,所以 $f(x)$ 的零点所在的一个区间是 $(3,4)$,故选D.

2.C 提示:由表格数据可知, $h(0.437\ 5)<0$, $h(0.75)>0$,又函数 $h(x)$ 在 $[0.437\ 5,0.75]$ 上连续,且函数 $h(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增,所以函数 $h(x)$ 在区间 $[0.4375,0.75]$ 上存在一个零点,又 $0.75-0.437\ 5=0.312\ 5<0.5$,即方程 $h(x)=0$ 的近似解(精确度为0.5)可以是 $[0.437\ 5,0.75]$ 内的任意一个数,由四个选项可知,C选项正确.故选C.

3.D 提示:作出 $f(x)$ 的大致图象(图略),由图象可知, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,因为 $f(a+1)-f(2a-1)\geqslant 0$,所以 $f(a+1)\geqslant f(2a-1)$,所以 $\begin{cases} a+1>0,\\ 2a-1>0,\\ a+1\geqslant 2a-1. \end{cases}$

解得 $\frac{1}{2}<a\leqslant 2$,即实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2},2\right]$.故选D.

4.D 提示:令 $f(x)=x\sin x-x-1=0$,则 $x\sin x=x+1$, $\sin x=1+\frac{1}{x}$,问题转化为函数 $y=\sin x$ 与 $y=1+\frac{1}{x}$ 的图象在 $(0,+\infty)$ 上的交点个数,因为当 $x\in(0,+\infty)$ 时, $y=\sin x\in[-1,1]$, $y=1+\frac{1}{x}\in(1,+\infty)$,即 $1+\frac{1}{x}>\sin x$,所以两函数图象没有交点,则 $f(x)=x\sin x-x-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上没有零点.故选D.

5.C 提示:根据题意,可得 $p=0.5$, $A=2.225$, $B=1.3$,代入 $Q=kt^p=e^{A+Bmp}$,可得 $Q=e^{2.225+1.3M}\cdot t^{0.5}$,因为该品牌电池初始荷电状态 $M=80\%$ $=0.8$,所以存放16天后,电容容量损失量 $Q=e^{2.225+1.3\times 0.8}\times 16^{0.5}=4\times e^{3.265}\approx 4\times 26.26=105.04$.故选C.

6.D 提示:设 $t=f(x)$,当 $x\geqslant 0$ 时, $f(x)=2^{x-1}-1$,此时 $t\geqslant 0$,由 $f(t)=0$,得 $t=1$,即 $f(x)=2^{x-1}-1=1$,解得 $x=0$ 或 $x=2$,所以 $y=f(f(x))$ 在 $[0,+\infty)$ 上有2个零点.当 $x<0$ 时,若 $a\geqslant 0$, $f(x)=-x^2+ax$,对称轴为 $x=\frac{a}{2}$,作出 $y=f(x)$ 的大致图象(图略),此时 $f(x)=-x^2+ax<0$,即 $t<0$,则 $f(t)<0$,所以 $f(t)=0$ 无解,则 $y=f(f(x))$ 无零点,综上,此时 $y=f(f(x))$ 只有2个零点,不符合题意.若 $a<0$,作出 $y=f(x)$ 的大致图象(图略),令 $-t^2+at=0$,解得 $t=a<0$,显然 $f(x)=a$ 在 $(-\infty,0)$ 上存在唯一负根,要使 $y=f(f(x))$ 恰有3个零点,只需 $f(f(x))=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上除 $x=0$ 或 $x=2$ 外不能再有其他解,即 $f(x)=1$ 不能再有除 $x=0$ 或 $x=2$ 外的其他解,所以 $f\left(\frac{a}{2}\right)\in(0,1)$,即 $0<\frac{a^2}{4}<1$,解得 $-2< a < 2$,所以 $a\in(-2,0)$.故选D.

7.C 提示:由 $f(x+2)=-\frac{1}{f(x)}$,得 $f(x+4)=-\frac{1}{f(x+2)}=f(x)$,所以 $f(x)$ 为周期函数,最小正周期为4,又当 $-2\leqslant x\leqslant 0$

时, $f(x)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^x-2$ 单调递减,过点 $(0,-1)$,作出函数 $y=f(x)$ 的图象(图略),且 $f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$,因为关于 x 的方程 $f(x)-\log_a(x+1)=0$ 至少有两解,即函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=\log_a(x+1)$ 的图象至少有两个交点,作出 $y=f(x)$ 与 $y=\log_a(x+1)$ 的大致图象(图略),所以当 $0<a<1$ 时, $\log_a(4+1)>-1=\log_a\frac{1}{a}$,解得 $a\leqslant\frac{1}{5}$,则 $a\in\left(0,\frac{1}{5}\right]$,当 $a>1$ 时, $\log_a(2+1)\leqslant 1=\log_a a$,解得 $a\geqslant 3$,则 $a\in[3,+\infty)$.

综上, $a\in\left(0,\frac{1}{5}\right]\cup[3,+\infty)$.故选C.

8.D 提示:作 $y=f(x)$ 的大致图象(图略),因为方程 $f(x)=a$ 有4个不同的解 x_1,x_2,x_3,x_4 ,且 $x_1<x_2<x_3<x_4$,所以 $y=f(x)$ 的图象与 $y=a$ 有4个交点,且 $0<a\leqslant 1$, x_1,x_3 关于直线 $x=-1$ 对称,即 $x_1+x_3=-2$, $0<x_1<1<x_4$,则 $|\log_3 x_3|=|\log_3 x_4|$,即 $-\log_2 x_3=\log_2 x_4$,则 $\log_2 x_3+\log_2 x_4=\log_2 x_3 x_4=0$,则 $x_3 x_4=1$.令 $|\log_2 x_3|=1$,得 $x=2$ 或 $x=\frac{1}{2}$,则 $1< x_4\leqslant 2$, $\frac{1}{2}\leqslant x_3<1$,所以 $x_3\cdot x_4^2-$

$$\frac{1+\sin 2\theta}{2\cos^2\theta+\sin 2\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2\cos\theta}=\frac{\frac{1}{2}(\tan\theta+1)}{1}=\frac{1}{4}.$$

四、解答题

15. 解:(1)由题意,得 $A\left(4,\frac{3}{5}\right)$, $B\left(\frac{5}{13},\frac{12}{13}\right)$,则是弧长为 $\frac{4\pi}{3}$ 的扇形的圆心角, $0<\alpha<2\pi$,则 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$,所以 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin\beta=\frac{12}{13}$, $\cos\beta=\frac{5}{13}$,所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\frac{16}{65}$.

(2)将 OA 绕原点 O 顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 到 OC ,则 OC 终边所对应的角为 $\alpha-\frac{\pi}{2}$,则 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\alpha=-\frac{4}{5}$,所以点 C 的坐标为 $\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$.

16. 解:(1)因为 $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{3\cos\theta-\sin\theta}=3$,所以 $\frac{\tan\theta+1}{3-\tan\theta}=3$,解得 $\tan\theta=2$.

(2)因为 $\theta\in(0,\pi)$,且 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$,①

两边平方,得 $1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{25}$,则 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{12}{25}$,

则 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\frac{49}{25}$,所以 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{7}{5}$,②.由①②可得 $\sin\theta=\frac{4}{5}$, $\cos\theta=-\frac{3}{5}$,所以 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{4}{3}$.

17. 解:(1)若选①,因为 $\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{2}{5}$,所以 $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\frac{2}{5}$,解得 $\tan\alpha=-2$ 或 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$,因为角 $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}\right)$,所以 $\tan\alpha<-1$,故 $\tan\alpha=-2$.

若选②,因为 $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{4}\right)$,

所以 $\cos\alpha>0$,所以 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2$.

(2)由(1)知, $\tan\alpha=-2$,

所以原式 $=\frac{(-\cos\alpha)(-\cos\alpha)(-\tan\alpha)}{\cos\alpha\sin\alpha(-\tan\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\tan\alpha}=-\frac{1}{2}$.

18. 解:(1)由 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=3$,得

$$\tan\alpha=\tan\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}.$$

(2)由(1)得,原式 $=\frac{\sin^2\alpha-\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha-2\tan\alpha=-\frac{3}{4}$.

(3)由(1)得, $\tan\alpha=\frac{1}{2}$,即 $\cos\alpha=2\sin\alpha$,因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$,所以 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$,又 $\beta\in(-\pi,0)$,则 $\alpha+\beta\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$,又 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{10}}{10}>0$,所以 $\alpha+\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin(\alpha+\beta)=\frac{3\sqrt{10}}{10}$,所以 $\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\frac{\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha}{\sqrt{10}}\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)+\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,又 $\beta\in(-\pi,0)$,所以 $\beta=-\frac{3\pi}{4}$.

19. 解:(1)因为 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$, $\tan\beta=-\frac{3}{4}$, $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,所以 $\cos\alpha=\frac{7\sqrt{2}}{10}$, $\tan\alpha=\frac{1}{7}$,所以 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=1$,因为 $-\pi<\alpha-\beta<0$,所以 $\alpha-\beta=-\frac{3\pi}{4}$.

(2)由 $\tan\beta=-\frac{3}{4}$, $\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,得 $\cos\beta=-\frac{4}{5}$, $\sin\beta=\frac{3}{5}$,所以 $\sin 2\beta=2\sin\beta\cos\beta=2\times\frac{3}{5}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{24}{25}$, $\cos 2\beta=2\cos^2\beta-1=2\times\frac{16}{25}-1=\frac{7}{25}$,所以 $\cos\left(2\beta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\beta+\frac{1}{2}\sin 2\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{7}{25}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{24}{25}\right)=-\frac{1}{2}$,所以 $2\beta-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,所以 $2\beta=\frac{\pi}{6}$,则 $\beta=\frac{\pi}{12}$.

20. 解:(1)因为 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$, $\tan\beta=-\frac{3}{4}$, $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,所以 $\cos\alpha=\frac{7\sqrt{2}}{10}$, $\tan\alpha=\frac{1}{7}$,所以 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=1$,因为 $-\pi<\alpha-\beta<0$,所以 $\alpha-\beta=-\frac{3\pi}{4}$.

(2)由 $\tan\beta=-\frac{3}{4}$, $\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,得 $\cos\beta=-\frac{4}{5}$, $\sin\beta=\frac{3}{5}$,所以 $\sin 2\beta=2\sin\beta\cos\beta=2\times\frac{3}{5}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{24}{25}$, $\cos 2\beta=2\cos^2\beta-1=2\times\frac{16}{25}-1=\frac{7}{25}$,所以 $\cos\left(2\beta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\beta+\frac{1}{2}\sin 2\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{7}{25}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{24}{25}\right)=-\frac{1}{2}$,所以 $2\beta-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,所以 $2\beta=\frac{\pi}{6}$,则 $\beta=\frac{\pi}{12}$.

二、多项选择题

9.BC 提示:因为 $P(-3,3\sqrt{3})$ 是 α 终边上一点,所以 $\tan\alpha=-\sqrt{3}$ 且 α 为第二象限角,所以 $\alpha=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,故A错误; $\tan 2\alpha=\tan\left(\frac{4\pi}{3}+4k\pi\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$,故B正确;若 α 是弧长为 $\frac{4\pi}{3}$ 的扇形的圆心角, $0<\alpha<2\pi$,则 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$,所以 $\alpha r=\frac{4\pi}{3}$,则扇形的半径 $r=2$,故C正确;因为 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$,所以 $\frac{3\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{3\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}=5+2\sqrt{3}$,故D错误.故选BC.

10.BC 提示:对于A,由 $\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$,得 $(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x=\frac{1}{25}$,所以 $\sin x\cos x=-\frac{12}{25}$,故A错误;对于B,因为 $(\cos x-\sin x)^2=1-2\sin x\cos x=\frac{49}{25}$,且 $-\frac{\pi}{2}<x<0$,所以 $\cos x>0$, $\sin x<0$, $\cos x-\sin x=\frac{7}{5}$,结合 $\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$,解得 $\cos x=\frac{4}{5}$, $\sin x=-\frac{3}{5}$,所以 $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{3}{4}$,故B正确;对于C,由B项知, $\sin x-\cos x=-\frac{7}{5}$,故C正确;对于D,由B项知, $\sin x-\cos x=-\frac{7}{5}$,故C正确;

对于D, $\frac{1+\sin 2x}{2\cos^2 x+\sin 2x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}{2\cos^2 x+2\sin x\cos x}=\frac{(\sin x+\cos x)^2}{2\cos x(\cos x+\sin x)}=\frac{\sin x+\cos x}{2\cos x}=\frac{\tan x+1}{2}=\frac{1}{8}$,故D错误.故选BC.

11.ACD 提示:对于A, $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$,故A正确;对于B,因为 $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$,所以 $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$,所以 $\tan\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\pm 2\sqrt{2}$,故B错误;对于C, $\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2\alpha\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-1=-\frac{7}{9}$,故C正确;对于D, $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)-1=\frac{1}{3}$,所以 $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$,故D正确.故选ACD.

三、填空题

12. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 提示:由 $\sin\left(\alpha-\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$,得 $\sin\left(\alpha-\frac{5\pi}{3}+2\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$,即 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $\cos\left(\frac{19\pi}{6}-\alpha\right)=\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

13. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 提示:因为 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $2\theta-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$,又 $\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{3}<0$,所以 $2\theta-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$, $\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,所以 $\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)=2\cos^2\left(\theta-\frac{\pi}{12}\right)-1=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,得 $\cos^2\left(\theta-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2\sqrt{2}+3}{6}$,所以 $\sin^2\left(\theta-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{3-2\sqrt{2}}{6}$,因为 $2\theta-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$,所以 $\theta-\frac{\pi}{12}\in\left(-\frac{\pi}{12},0\right)$,所以 $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{\frac{2\sqrt{2}+3}{6}}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6}$, $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{6}$.

所以 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{12}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\cos\left(\theta-\frac{\pi}{12}\right)\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

14. $\frac{1}{4}$ 提示:因为 $\tan 2\theta=-4\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$,所以 $\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=-\frac{4(\tan\theta+1)}{1-\tan\theta}$,显然 $1-\tan\theta\neq 0$,所以 $\frac{\tan\theta}{1+\tan\theta}=-2(\tan\theta+1)$,整理得 $2\tan^2\theta+5\tan\theta+2=0$,解得 $\tan\theta=-2$ 或 $\tan\theta=-\frac{1}{2}$,又 $\theta\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$,则 $\tan\theta\in(-1,0)$,所以 $\tan\theta=-\frac{1}{2}$,所以

第8期
第2-3版同步周测参考答案
一、单项选择题
1.A 提示:由角 α 的终边过点 $(3,1)$,得 $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$,所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.故选A.
2.D 提示:因为 $\tan\alpha=3$,所以 $\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1-2\tan^2\alpha}=-\frac{6}{17}$.
故选D.

3.B 提示:因为 $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\frac{1}{3}$,所以 $\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)=\sin\left[\pi-\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\right]-\cos\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\left[-\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\right]=2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\frac{2}{3}$.故选B.

4.C 提示:过点 O 作 $OM\perp AB$ 于点 M ,则 OM 垂直平分 AB ,所以 $AM=BM=4$,又 $OA=5$,所以 $OM=3$,所以 $\sin\angle OAM=\frac{OM}{OA}=\frac{3}{5}$,所以 $\angle OAM\approx 37^\circ$,所以 $\angle AOM\approx 53^\circ$,则 $\angle AOB=106^\circ$,所以横身(即曲边四边形 $ABCD$)面积 $S\approx S_{\text{扇形}AOB}-S_{\text{扇形}BOC}=\frac{106^\circ}{360^\circ}\times 3.14\times 5^2-\frac{106^\circ}{360^\circ}\times 3.14\times(5-2)^2\approx 14.8(\text{cm}^2)$.故选C.

5.C 提示:因为 $2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$,令 $\beta=\alpha-\frac{\pi}{6}$,则 $\alpha=\beta+\frac{\pi}{6}$,则 $2\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)$,

所以 $2\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta+\frac{1}{2}\sin\beta$,所以 $\sin\beta=(4-\sqrt{3})\cdot\cos\beta$,即 $\tan\beta=4-\sqrt{3}$,则 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\beta=4-\sqrt{3}$.故选C.

6.D 提示:由 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{10}$,得 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$,①由 $\tan\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)=7$,得 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=7$,即 $\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=7$,解得 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$,所以 $3\sin\alpha+4\cos\alpha=0$.②

由①②,解得 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$.所以 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}}{\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}}=2$.故选D.

7.A 提示:由 $\tan\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}-\cos\alpha}{\sin\alpha}$,显然 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\neq 0$,两边同时乘以 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$,得 $\sin^2\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\alpha-\cos^2\alpha$,整理可得 $\sqrt{2}\cos\alpha-\sin\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,所以 $\sqrt{2}\cos\alpha=\sin\alpha+1$,两边平方,得 $2\cos^2\alpha=(\sin\alpha+1)^2=\sin^2\alpha+2\sin\alpha+1=2-2\sin^2\alpha$,即 $3\sin^2\alpha+2\sin\alpha-1=0$,解得 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ 或 $\sin\alpha=-1$.当 $\sin\alpha=-1$ 时, $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=0$,此时 $\cos\alpha=0$,不满足题意,舍去.所以 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$,则 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{7}{9}$.故选A.

8.B 提示:当 $0<x<\pi$ 时, $-\frac{\pi}{6}<2x-\frac{\pi}{6}<\frac{11\pi}{6}$,因为方程 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$ 在 $(0,\pi)$ 的解为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$,令 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,则 $x=\frac{\pi}{3}$,根据对称性可知, $x_1+x_2=\frac{2\pi}{3}$,则 $x_1-x_2=x_1-\frac{2\pi}{3}$.

又 $\sin\left(2x_1-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}>0$,则 $0<2x_1-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}<2x_2-\frac{\pi}{6}<\pi$,所以 $\cos\left(2x_1-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$,所以 $\sin(x_1-x_2)=\sin\left(2x_1-\frac{2\pi}{3}\right)=-\cos\left(2x_1-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{4}{5}$, $\cos(x_1-x_2)=\cos\left(2x_1-\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(2x_1-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$,所以 $\sin(2x_1-2x_2)=2\sin(x_1-x_2)\cos(x_1-x_2)=2\times\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{3}{5}=-\frac{24}{25}$, $\cos(2x_1-2x_2)=2\cos^2(x_1-x_2)-1=2\times\frac{9}{25}-1=-\frac{7}{25}$,所以 $\tan(2x_1-2x_2)=\frac{\sin(2x_1-2x_2)}{\cos(2x_1-2x_2)}=-\frac{24}{7}$.故选B.

解得 $\frac{1}{2}<m<1$.当1个根 $t_1\in(0,1)$,1个根 $t_2=0$,则 $g(0)=2m-1=0$ 时,得 $m=\frac{1}{2}$,则 $g(t)=0$,即 $t^2-2t=0$,解得 $t=0$ 或 $t=2\notin(0,1)$,与条件矛盾.所以实数 m 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

四、解答题

15. (1) 证明: $f(x)=2^x-\frac{1}{x}-2$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,且 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$ 上均单调递增且连续,因为 $f(-1)=-\frac{1}{2}<0$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}>0$,则 $f(-1)f\left(-\frac{1}{2}\right)<0$,所以 $f(x)$ 在 $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ 内有唯一零点,又 $f(1)=-1<0$, $f(2)=\frac{3}{2}>0$,则 $f(1)f(2)<0$,所以 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 内有唯一零点.

综上,函数 $f(x)$ 有且只有两个不同的零点.

(2) 解:①③为真命题,②④为假命题.理由如下:函数 $f(x)$ 的两个零点为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$,由(1)可知 $x_1\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$,故 $x_1\in\left(n,n+\frac{1}{2}\right)$, $x_1\notin\left(n+\frac{1}{2},n+1\right)$,又 $f(1)=-1<0$, $f\left(\frac{3}{2}\right)=2^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}-2=\sqrt{8}-\sqrt{\frac{64}{9}}>0$,即 $x_2\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$,故 $x_2\in\left(n,n+\frac{1}{2}\right)$, $x_2\notin\left(n+\frac{1}{2},n+1\right)$,故①③为真命题,②④为假命题.

② $|2^x-1|$ 的大致图象 (图略). 因为原方程有 3 个不同的实数解, 所以 $0<t_1<1$, $t_2=1$, 则 $0<3k+1<1$, 解得 $-\frac{1}{3}<k<0$, 即实数 k 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$.

19. 解: (1) 因为 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=2x+1+\frac{2}{x}=2x+\frac{2}{x}+2=0$ 不恒成立, 所以 $y=f(x)$ 不满足性质 P .

(2) ① 当 $x>1$ 时, $0<\frac{1}{x}<1$, 由 $y=f(x)$ 满足性质 P , 得 $f(x)+$

$f\left(\frac{1}{x}\right)=0$, 则 $f(x)=-f\left(\frac{1}{x}\right)=-\left(\log_3\frac{1}{x}-3x^2\right)=3x^2+\log_3x$, 又当

$x=1$ 时, $f(1)+f(1)=0$, 则 $f(1)=0$,

所以 $f(x)=\begin{cases}\log_3x-\frac{3}{x^2}, & 0<x<1, \\ 0, & x=1, \\ 3x^2+\log_3x, & x>1.\end{cases}$

假设方程 $f(x)=255$ 有正整数解 n , 则 $3n^2+\log_3n=255$, 要使上式能成立, 则必有 $n=3^k$, $k\geq 1$, $k\in\mathbf{N}$, 所以 $3\times 3^{2k}+\log_33^k=3^{2k+1}+k=255$, 显然 $y=3^{2k+1}+k$ 为增函数, 又当 $k=2$ 时, $3^{2k+1}+k=3^5+2=245<255$, 当 $k=3$ 时, $3^{2k+1}+k=3^7+3=2\ 190>255$, 所以方程 $f(x)=255$ 没有正整数解.

② $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 证明如下:

任取 $x_1>x_2>1$, 则 $0<\frac{1}{x_1}<\frac{1}{x_2}<1$, 则 $f(x_1)-f(x_2)=-f\left(\frac{1}{x_1}\right)-$

$-f\left(\frac{1}{x_2}\right)=f\left(\frac{1}{x_2}\right)-f\left(\frac{1}{x_1}\right)$, 因为 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内单调递增,

且 $0<\frac{1}{x_1}<\frac{1}{x_2}<1$, 所以 $f\left(\frac{1}{x_2}\right)>f\left(\frac{1}{x_1}\right)$, 所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$, 即

$f(x_1)>f(x_2)$, 所以 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

第6期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C 提示:依题意,知 $f'(x_0)=2$, 则 $\lim_{\Delta x\rightarrow 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}=\frac{1}{3}f'(x_0)=\frac{2}{3}$. 故选 C.

2.D 提示:由 $s(t)=3t^3-\frac{1}{2}gt^2$, 得 $s'(t)=9t^2-gt=9t^2-10t$, 所以 $s'(4)=9\times 16-10\times 4=104$, 即该质点的瞬时速度是 104 m/s. 故选 D.

3.B 提示:由图象,知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f'(2)<\frac{f(4)-f(2)}{4-2}<f'(4)$, 即 $2f'(2)<f(4)-f(2)<2f'(4)$. 故选 B.

4.C 提示:因为 $f(x)=2xf'\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin x$, 所以 $f'(x)=$

$2f'\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos x$, 令 $x=\frac{\pi}{3}$, 得 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=2f'\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\frac{\pi}{3}$, 则 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$. 故选 C.

5.D 提示:因为 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 1)\cup(1, +\infty)$, $f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$, 令 $f'(x)<0$, 即 $\ln x-1<0$, 得 $0<x<e$ 且 $x\neq 1$, 所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 1)$ 和 $(1, e)$. 故选 D.

6.C 提示:因为 $f(x)=e^{ax}-x\ln x+(1-a)x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 所以 $f'(x)=e^{ax}-\ln x-a\geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $e^{ax}+x-a\geq x+\ln x=e^{\ln x}+\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 因为函数 $y=e^x+x$ 为增函数, 所以转化为 $x-a\geq \ln x$, 即 $a\leq x-\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立. 令 $g(x)=x-\ln x$, 则 $g'(x)=1-\frac{1}{x}$, 当 $x\in(0, 1)$ 时, $g'(x)<0$, $g(x)$ 单调递减, 当 $x\in(1, +\infty)$ 时, $g'(x)>0$, $g(x)$ 单调递增, 所以 $g(x)_{\min}=g(1)=1$, 所以 $a\leq 1$, 即实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 1]$. 故选 C.

7.D 提示:令 $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$, 所以 $a=e^{-1}=f(1)$, $b=4e^{-2}=f(2)$, $c=e^{-2}=f(e)$, 且 $f'(x)=\frac{-x^2+2x}{e^x}=\frac{-x(x-2)}{e^x}$, 令 $f'(x)<0$, 得 $x>2$ 或 $x<0$; 令 $f'(x)>0$, 得 $0<x<2$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 内单调递增, 在 $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$ 上单调递减, 则 $f(1)<f(2)$, $f(2)>f(e)$, 即 $a<b, b>c$, 由 $a-c=\frac{1}{e}-\frac{e^2}{e^3}=\frac{e^{-1}-e^2}{e^3}<0$, 则 $a<c$, 所以 $a<c<b$. 故选 D.

8.C 提示:令 $F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$, 则 $F'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$, 因为 $(x-2)[f'(x)-f(x)]>0$, 所以当 $x>2$ 时, $f'(x)-f(x)>0$, 即

$F'(x)>0$, $F(x)$ 单调递增, 当 $x<2$ 时, $f'(x)-f(x)<0$, 即 $F'(x)<0$, $F(x)$ 单调递减. 又 $f(4-x)=f(x)e^{4-2x}$, 所以 $\frac{f(4-x)}{e^{4-2x}}=\frac{f(x)}{e^x}$, 即 $F(4-x)=F(x)$, 所以 $y=F(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 的对称, 不等式 $e^3f(\ln x)<xf(3)$, 即 $\frac{f(\ln x)}{x}<\frac{f(3)}{e^3}$, 即 $\frac{f(\ln x)}{e^{\ln x}}<\frac{f(3)}{e^3}$, 所以 $F(\ln x)<F(3)=F(1)$, 又 $F(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 2)$ 上单调递减, 所以 $1<\ln x<3$, 解得 $e<x<e^3$. 故选 C.

二、多项选择题

9.ABD 提示: $(xe^x)'=e^x+xe^x$, 故 A 正确; $\left(\sqrt{x+1}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, 故 B 正确; $\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x}=\frac{1}{\cos^2x}$, 故 C 错误; $[\lg(2x)]'=\frac{2}{2x\ln 10}=\frac{1}{x\ln 10}$, 故 D 正确. 故选 ABD.

10.BC 提示:令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, 则 $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$,

因为当 $x>0$ 时, $xf'(x)-f(x)<0$, 所以 $x\in(0, +\infty)$ 时 $g'(x)<0$, $g(x)$ 单调递减, 因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(-x)=-f(x)$, 又 $g(-x)=\frac{f(-x)}{-x}=\frac{-f(x)}{-x}=\frac{f(x)}{x}=g(x)$, 所以 $g(x)$ 为偶函数, 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 又 $f(1)=0$, 所以 $g(1)=0$, 因为 $g(x)$ 为偶函数, 所以 $g(-1)=g(1)=0$. 对于 B, 由 $g(x)$ 的单调性知, $g(-2)>g(-3)$, 即 $\frac{f(-2)}{-2}>\frac{f(-3)}{-3}$, 所以 $3f(-2)<2f(-3)$, 故 B 正确;

对于 A, $2f(-2)$ 与 $3f(-3)$ 无法比较大小, 故 A 错误; 对于 C, 由以上可知, 当 $0<x<1$ 时, $g(x)>0$, 则 $f(x)>0$, 故 C 正确; 对于 D, 由以上可知, 当 $x<-1$ 时, $g(x)<0$, 则 $f(x)>0$, 故 D 错误. 故选 BC.

11.ACD 提示:由 $f(x)=4\ln x-\frac{1}{2}x^2+1$, 得 $f'(x)=\frac{4}{x}-$

$x=\frac{4-x^2}{x}(x>0)$. 对于 A, 因为 $f(1)=\frac{1}{2}$, $f'(1)=3$, 所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-\frac{1}{2}=3(x-1)$, 即 $y=3x-\frac{5}{2}$, 故

A 正确; 对于 B, C, 由 $f'(x)=\frac{4-x^2}{x}=0$, 得 $x=2$ 或 $x=-2$ (舍去), 当 $0<x<2$ 时, $f'(x)>0$, 当 $x>2$ 时, $f'(x)<0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 内单调递增, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减, 所以当 $x=2$ 时,

$f(x)$ 取极大值 $f(2)=4\ln 2-1$, 无极小值, 故 B 错误, C 正确; 对于 D, 当 $x\in[1, e]$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[1, 2)$ 上单调递增, 在 $(2, e]$ 上单调递减, 所以 $f(x)_{\max}=f(2)=4\ln 2-1$, 因为 $f(1)=\frac{1}{2}$, $f(e)=5-\frac{e^2}{2}>\frac{1}{2}$, 所以 $f(x)_{\min}=f(1)=\frac{1}{2}$, 故 D 正确. 故选 ACD.

三、填空题

12. $2x+y-1=0$ 提示:由 $f(x)=xe^x-3x+1$, 得 $f'(x)=e^x+xe^x-3$, 所以 $f'(0)=-2$, 所以曲线 $f(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程是 $y=-2x+1$, 即 $2x+y-1=0$.

13. $(-\infty, 0)\cup(2, +\infty)$ 提示:令 $g(x)=f(x)\ln x$, 则 $g'(x)=f'(x)\ln x+\frac{f(x)}{x}<0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 又 $g(1)=0$, 所以当 $x\in(0, 1)$ 时, $g(x)>0$, $\ln x<0$, 则 $f(x)<0$, 当 $x\in(1, +\infty)$ 时, $g(x)<0$, $\ln x>0$, 则 $f(x)<0$, 又 $f(1)\neq 0$, 所以当 $x\in(0, +\infty)$ 时, $f(x)<0$. 又函数 $f(x)$ 为奇函数, 所以当 $x\in(-\infty, 0)$ 时, $f(x)>0$, 不等式 $(x-2)f(x)<0$ 等价于 $\begin{cases} x<2, \\ f(x)>0, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x>2, \\ f(x)<0, \end{cases}$ 解得 $x<0$, 或 $x>2$, 所以不等式 $(x-2)f(x)<0$ 的解集为 $(-\infty, 0)\cup(2, +\infty)$.

14. $\left(-\infty, \frac{9}{4}\right)$ 提示:由 $f(x)=\frac{\ln x+(x-b)^2}{2}$, 得 $f'(x)=$

$\frac{1}{2x}+x-b=\frac{2x^2-2bx+1}{2x}$, 因为函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上存在单调递增区间, 所以 $f'(x)>0$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上有解. 令 $2x^2-2bx+1>0$, 即 $2b<2x+\frac{1}{x}$, 条件转化为 $2b<\left(2x+\frac{1}{x}\right)_{\max}$. 令 $g(x)=2x+$

$\frac{1}{x}$, $x\in\left[\frac{1}{2}, 2\right]$, 由对勾函数的性质, 可得函数 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right]$ 上单调递增, $g\left(\frac{1}{2}\right)=3$,

$g(2)=\frac{9}{2}$, 所以 $2b<\frac{9}{2}$, 即 $b<\frac{9}{4}$, 所以 $g(x)_{\max}=\frac{9}{2}$, 所以实数 b 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{9}{4}\right)$.

四、解答题

15. 解: (1) $y'=\frac{2}{2x+1}$.

(2) $y'=\ln(1+x^2)+x+\frac{2x}{1+x^2}=\ln(1+x^2)+\frac{2x^2}{1+x^2}$.

(3) $y'=(x+2)(x+3)+(x+1)(2x+5)=3x^2+12x+11$.

(4) $y'=\frac{2\cos 2x\cdot e^x-\sin 2x\cdot e^x}{(e^x)^2}=\frac{2\cos 2x-\sin 2x}{e^x}$.

16. 解: (1) 由 $f(x)=x^3-x$, 得 $f'(x)=3x^2-1$, 则 $f'(1)=2$, 所以 $f(x)$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线方程为 $y=2(x-1)$, 即 $2x-y-2=0$.

(2) 设切点坐标为 $(x_0, x_0^3-x_0)$, 则在该切点处的切线方程为 $y-x_0^3+x_0=(3x_0^2-1)(x-x_0)$, 将 $(0, 2)$ 代入, 可得 $2-x_0^3+x_0=-x_0(3x_0^2-1)$, 整理得 $x_0^3=-1$, 解得 $x_0=-1$. 所以直线 l 的方程为 $y=2(x+1)$, 即 $2x-y+2=0$.

17. 解: (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 当 $a=-2$ 时, $f(x)=x^2-2\ln x$, 则 $f'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x+1)(x-1)}{x}$.

令 $f'(x)<0$, 得 $0<x<1$, 所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, 1)$.

(2) $g(x)=x^2+aln x+\frac{2}{x}$, 则 $g'(x)=2x+\frac{a}{x}-\frac{2}{x^2}$, 因为 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是单调函数, 所以分以下两种情况.

① 若 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 则 $g'(x)\geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 即 $a\geq\frac{2}{x}-2x^2$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立. 设 $h(x)=$

$\frac{2}{x}-2x^2$, 因为 $h(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $h(x)_{\max}=h(1)=0$, 所以 $a\geq 0$.

② 若 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 则 $g'(x)\leq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 由 ① 知, 这不可能.

综上, 实数 a 的取值范围为 $[0, +\infty)$.

18. 解: (1) 由 $f(x)=e^x-ax-1$, 得 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f'(x)=e^x-a$, 当 $a\leq 0$ 时, $f'(x)>0$ 恒成立, $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增. 当 $a>0$ 时, 令 $f'(x)>0$, 得 $x>\ln a$, 令 $f'(x)<0$, 得 $x<\ln a$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

综上, 当 $a\leq 0$ 时, $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增; 当 $a>0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 因为 $f(0)=0$, 由 (1) 知, 当 $a\leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, $f(x)\geq f(0)=0$, 符合题意. 当 $a>0$ 时, 若 $0<a\leq 1$, 则 $\ln a\leq 0$, 则 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, $f(x)\geq f(0)=0$, 符合题意; 若 $a>1$, 则 $\ln a>0$, 则 $f(x)$ 在 $[0, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增, 则 $x\in(0, \ln a)$ 时, $f(x)>f(0)=0$, 不符合题意. 综上, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

19. 解: (1) 由 $f(x)=\frac{a}{2}x^2+(2a-1)x-2\ln x$, 得 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x)=ax+2a-1-\frac{2}{x}=\frac{ax^2+(2a-1)x-2}{x}$. 若 $a\leq 0$, 当 $x\in(0, +\infty)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减. 若 $a>0$, 令 $f'(x)=0$, 得 $x=\frac{1}{a}$, 所以当 $x\in\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x\in\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增.

综上, 当 $a\leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减; 当 $a>0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 内单调递减, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增.

(2) 因为对于 $\forall x\in[1, e]$, $\exists b\in[2, +\infty)$, 使得 $f(x)\geq b$, 所以 $f(x)\geq b_{\min}=2$ 对任意 $x\in[1, e]$ 恒成立. 当 $a\leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递减, 且 $f(1)=\frac{5a}{2}-1<0$, 不符合题意, 舍去. 当 $\frac{1}{a}>1$, 即 $0<a<1$ 时, $f(1)=\frac{5a}{2}-1<0$, 不符合题意, 舍去. 当 $\frac{1}{a}\leq 1$, 即 $a\geq 1$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增, 所以只需

$f(x)_{\min}=f(1)=\frac{5a}{2}-1\geq 2$, 解得 $a\geq\frac{6}{5}$, 符合题意. 综上, 实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{6}{5}, +\infty\right)$.

数学

第7期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.D 提示: $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f'(x)=12-3x^2=3(4-x^2)$, 令 $f'(x)=0$, 得 $x=\pm 2$, 当 $x\in(-\infty, -2)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x\in(-2, 2)$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x\in(2, +\infty)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $x=-2$ 处取得极小值 $f(-2)=-10$. 所以 $f(x)$ 的极小值点为 -2 . 故选 D.

2.C 提示: 由 $f(x)=e^x-ax$, 得 $f'(x)=e^x-a$, 则 $f'(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 因为函数 $f(x)=e^x-ax$ 在 $(0, 1)$ 内有极值点, 所以 $f'(0)=e^0-a<0$ 且 $f'(1)=e-a>0$, 解得 $1<a<e$, 即 $a\in(1, e)$. 故选 C.

3.C 提示: 由图象知, 当 $x<-2$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x>-2$ 时, $f'(x)\geq 0$, $f(x)$ 单调递增, 所以当 $x=-2$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极小值, 无极大值, 故 C 正确, A, B 错误. 因为 $y=f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递减, 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增, 故 D 错误. 故选 C.

4.B 提示: 由题意, 得 $f'(x)=3x^2+2ax+b$, 因为函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+a^2(a, b\in\mathbf{R})$ 在 $x=0$ 处取得极大值 9, 所以 $\begin{cases} f(0)=a^2=9, \\ f'(0)=b=0, \end{cases}$ 解得 $a=3$ 或 $a=-3$, $b=0$. 将 $a=3, b=0$ 代入 $f(x)$, 可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值, 不符合题意, 经检验, $a=-3, b=0$ 符合题意. 则 $a+b=-3$. 故选 B.

5.B 提示: 因为 $f(x)=\frac{1}{2}x-\sin x, x\in[0, \pi]$, 则 $f'(x)=\frac{1}{2}-\cos x$, 所以当 $0\leq x<\frac{\pi}{3}$ 时, $f'(x)<0$, 当 $\frac{\pi}{3}<x\leq\pi$ 时 $f'(x)>0$, 所以 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ 上单调递增,

所以 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 B.

6.B 提示: 由 $f(x)=x-\sin x$, 得 $f'(x)=1-\cos x\geq 0$, 则 $f(x)$ 单调递增, 所以不等式 $f(x+\ln a)\geq f(\ln x)$ 恒成立, 即 $x+\ln a\geq \ln x$, 即 $\ln a\geq \ln x-x$ 恒成立. 令 $g(x)=\ln x-x$, 则 $g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$, 所以当 $x>1$ 时, $g'(x)<0$, $g(x)$ 单调递减, 当 $0<x<1$ 时, $g'(x)>0$, $g(x)$ 单调递增, 所以 $g(x)_{\max}=g(1)=-1$, 可得 $\ln a\geq-1$, 解得 $a\geq\frac{1}{e}$. 故选 B.

7.D 提示: 由 $x_1\ln x_2-x_2\ln x_1<4(x_1-x_2)$, 得 $x_1\ln x_2-4x_1<x_2\ln x_1-4x_2$, 即 $\frac{\ln x_2-4}{x_2}<\frac{\ln x_1-4}{x_1}$, 又对任意的正实数 $x_1, x_2\in(a, +\infty)$, 满足当 $x_1<x_2$ 时, $\frac{\ln x_2-4}{x_2}<\frac{\ln x_1-4}{x_1}$. 设 $f(x)=\frac{\ln x-4}{x}$, 所以 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f'(x)=\frac{5-\ln x}{x^2}\leq 0$ 在 $(a, +\infty)$ 恒成立, 所以 $\ln x\geq 5$ 在 $(a, +\infty)$ 恒成立. 则 $\ln a\geq 5$, 解得 $a\geq e^5$. 即实数 a 的取值范围为 $[e^5, +\infty)$. 故选 D.

8.B 提示: 函数 $f(x)=2\ln x-3ax^2$ 在 $[\sqrt{2}, e]$ 上存在 2 个零点, 即 $3a=\frac{2\ln x}{x^2}$ 在 $[\sqrt{2}, e]$ 上有 2 个解, 令 $g(x)=\frac{2\ln x}{x^2}$, 则 $g(x)$ 与 $y=3a$ 的图象在 $[\sqrt{2}, e]$ 上有 2 个交点, $g'(x)=\frac{2(1-2\ln x)}{x^3}$. 当 $\sqrt{2}<x<\sqrt{e}$ 时, $g'(x)>0$, $g(x)$ 单调递增, 当 $\sqrt{e}<x<e$ 时, $g'(x)<0$, $g(x)$ 单调递减,