第16期

第2~3版综合测试(八)参考答案

一、单项选择题

1.D　提示：由$\{a_n\}$是等差数列，得$S_9=\frac{9}{2}(a_1+a_9)=\frac{9}{2}\cdot(a_4+a_6)=\frac{9}{2}\times10=45$.故选D.

2.C　提示：因为$y=x\ln x$，所以$y'=1+\ln x$，当$x=1$时，$y'=1$，所以曲线$y=x\ln x$在$x=1$处的切线的斜率为1，故切线的倾斜角为$\frac{\pi}{4}$.故选C.

3.A　提示：设点D的坐标为(x,y,z)，则$\overrightarrow{AD}=(x-1,y,z-1)$，$\overrightarrow{AB}=(2,2,1)$，因为$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}$，

则$\begin{cases}x-1=4,\\y=4,\\z-1=2,\end{cases}$ 解得$x=5,y=4,z=3$，所以$D(5,4,3)$.故选A.

4.D　提示：由题得直线$l:\lambda(x-1)-y+1=0$，令$x=1$，则$y=1$，所以直线l过定点$(1,1)$，因为圆心$(0,2)$到直线l的距离$d\leqslant\sqrt{(1-0)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}$，所以$|AB|=2\sqrt{2^2-d^2}\geqslant2\sqrt{2}$.故选D.

5.A　提示：根据题意，先涂区域C,D,E,F四块，

(1)若涂区域C,D,E,F用了4种颜色，则有$A_4^4=24$种方法，然后涂区域A,B，有以下3种方案：

①区域A,D同色且区域B,C同色；②区域A,D同色且区域B,F同色；③区域A,F同色且区域B,C同色.根据分步乘法计数原理，知此时的涂色方法的总数是$24\times3=72$种.

(2)若涂区域C,D,E,F用了3种颜色，考虑到区域C,D不相邻，用同一种颜色，则有$C_4^3A_3^3=24$种方法，然后涂区域A,B，有以下2种方案：

①区域A,F同色且涂区域B用第4种颜色；②区域B,F同色且涂区域A用第4种颜色.

根据分步乘法计数原理，知此时的涂色方法的总数是$24\times2=48$种.

综上所述，不同的涂色方法有$72+48=120$种.故选A.

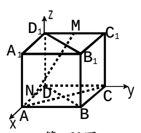
6.B　提示：由题意可知，X的取值可能是-2,0,2，因为$P(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$，$P(X=-2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$，$P(X=0)=C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$，

所以$EX=\frac{4}{9}\times2+(-2)\times\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\times0=\frac{2}{3}$，

故$DX=\left(2-\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{4}{9}+\left(-2-\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{9}+\left(0-\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{4}{9}=\frac{16}{9}$.故选B.

7.D　提示：不妨设正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为2，连接AC，以D为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，则$A(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$N(1,0,0)$，$M(0,1,2)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{MN}=(1,-1,-2)$，因为$DD_1\perp$平面$ABCD$，$AC\subset$平面$ABCD$，所以$AC\perp DD_1$，又$AC\perp BD$，$DD_1\cap BD=D$，$DD_1,BD\subset$平面$DBB_1D_1$，故$AC\perp$平面$DBB_1D_1$，所以$\overrightarrow{AC}$为平面$DBB_1D_1$的一个法向量，设直线MN与平面$DBB_1D_1$所成角为$\theta$，则$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{MN}|}=\frac{4}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

故直线MN与平面DBB_1D_1所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.故选D.



(第7题图)

8.D　提示：因为$\angle AFB=60°$，$|FB|=|FA|=a$，所以$\triangle AFB$为正三角形，所以$F(c,0)$到渐近线$bx-ay=0$的距离为$\frac{\sqrt{3}a}{2}$，所以$\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{3}a}{2}$，因为$a^2+b^2=c^2$，所以$b=\frac{\sqrt{3}a}{2}$，所以$c^2=\frac{7}{4}a^2$，所以该双曲线的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.故选D.

二、多项选择题

9.AC　提示：由题意知，总的基本事件共有36种，其中事件A包含(3,6),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)，共10种；

事件B包含(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)，共15种.

所以$P(A)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$，$P(B)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$，$P(AB)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$，$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{5}{18}}=\frac{2}{5}$，$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{5}{12}}=\frac{4}{15}$.故选AC.

10.ABC　提示：一个等比数列的前n项和、前$2n$项和、前$3n$项和分别为P,Q,R，

由等比数列的性质得$S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$成等比数列，所以$P,Q-P,R-Q$成等比数列，

所以$(Q-P)^2=P(R-Q)$，解得$P^2+Q^2=P(Q+R)$.故选ABC.

11.BD　提示：函数$f(x)=e^{\sin x}-e^{\cos x}$，

因为$f(x+2\pi)=e^{\sin(x+2\pi)}-e^{\cos(x+2\pi)}=e^{\sin x}-e^{\cos x}=f(x)$，所以$2\pi$为函数$f(x)$的周期，故A错误；因为$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+f(-x)=e^{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}-e^{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}+e^{\sin(-x)}-e^{\cos(-x)}=e^{\cos x}-e^{-\sin x}+e^{-\sin x}-e^{\cos x}=0$，所以$f(x)$关于点$\left(\frac{\pi}{4},0\right)$对称，故B正确；因为函数$f(x)=e^{\sin x}-e^{\cos x}$，则$f'(x)=e^{\sin x}\cos x+e^{\cos x}\sin x$，

当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，故C错误；令$f(x)=e^{\sin x}-e^{\cos x}=0$，即$e^{\sin x}=e^{\cos x}$，即$\sin x=\cos x$，因为$x\in(0,\pi)$，所以$\tan x=1$，所以$x=\frac{\pi}{4}$，故方程在$(0,\pi)$上只有一个根，所以$f(x)$在$(0,\pi)$内有且只有一个零点，故D正确.故选BD.

12.ACD　提示：对于A，由题意知，$a+c=3$，$a-c=1$，得$a=2$，$c=1$，所以椭圆C的离心率为$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，故A正确；

对于B，$\triangle PF_2F_1$的周长为$2a+2c=6$，故B错误；对于C，若$\angle F_2PF_1=90°$，则$|F_2F_1|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2=(|PF_1|+|PF_2|)^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|$，

即$(2c)^2=(2a)^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|$，故$|PF_1|\cdot|PF_2|=6$，

故$S_{\triangle PF_2F_1}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=3$，故C正确；

对于D，由余弦定理，可得$|F_2F_1|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2\cdot|PF_1|\cdot|PF_2|\cos\angle F_2PF_1=(|PF_1|+|PF_2|)^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|(1+\cos\angle F_2PF_1)$，即$4=16-2\times4(1+\cos\angle F_2PF_1)$，

解得$\cos\angle F_2PF_1=\frac{1}{2}$，故$\angle F_2PF_1=60°$，故D正确.故选ACD.

三、填空题

13.60°　提示：因为$A(1,-1,-1)$，$B(-1,-2,2)$，$C(2,-4,1)$，所以$\overrightarrow{AB}=(-2,-1,3)$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}$，$\overrightarrow{AC}=(1,-3,2)$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}$，

所以$\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{-2+3+6}{\sqrt{14}\times\sqrt{14}}=\frac{1}{2}$.

因为$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle\in[0°,180°]$，所以$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为60°.

14.8.6　提示：由题意知，$\bar{X}=\frac{2+4+5+6+8}{5}=5$，

$\bar{Y}=\frac{3+4.5+8.5+7.5+9}{5}=6.5$，

因为Y关于X的线性回归方程为$Y=1.05X+a$，所以$6.5=1.05\times5+a$，解得$a=1.25$，

所以Y关于X的线性回归方程为$Y=1.05X+1.25$，

当$X=7$时，维护费用约为$Y=1.05\times7+1.25=8.6$(千元).

15.$-\frac{1}{506}$　提示：由等差数列$\{a_n\}$满足$a_3a_4+2a_4a_6+a_5a_{12}=2024d$，可得$a_4(a_4-d)+2a_4(a_4+2d)+(a_4+d)(a_4+8d)=2024d$，即$4a_4^2+12a_4d+8d^2=2024d$，所以$4(a_4+2d)(a_4+d)=2024d$，即$4a_6a_5=2024d$，故$a_6a_5=506d$，所以$\frac{1}{a_6}-\frac{1}{a_5}=\frac{a_5-a_6}{a_6a_5}=\frac{-d}{506d}=-\frac{1}{506}$.

16.$[1,+\infty)$　提示：因为$f(x)=xe^x-\ln x-x(x>0)$，

所以$f'(x)=e^x+xe^x-\frac{1}{x}-1=(x+1)\left(e^x-\frac{1}{x}\right)$，

令$f'(x)=0$，得$e^x=\frac{1}{x}$，设$e^{x_1}=\frac{1}{x_1}$，$x_1\in(0,1)$，所以$x_1e^{x_1}=1$，即$\ln x_1+x_1=0$，

因为函数$y=e^x-\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上单调递增，所以当$x\in(0,x_1)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当$x\in(x_1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，所以$[f(x)]_{\min}=f(x_1)=x_1e^{x_1}-\ln x_1-x_1=x_1e^{x_1}-(\ln x_1+x_1)=1-0=1$，所以$a\geqslant1$，即实数$a$的取值范围是$[1,+\infty)$.

四、解答题

17.解：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由$a_3+a_5=2a_4=2\cdot(a_1+3d)=-20$，又$a_1=-16$，得$2(-16+3d)=-20$，解得$d=2$，所以$a_n=-16+2(n-1)=2n-18$.

(2)由(1)可知$S_n=\frac{n}{2}(-16+2n-18)=n^2-17n$，由于$n\in N_+$，根据二次函数的性质可知当$n=8$或9时，$S_n$取得最小值，所以$S_n$取最小值时的项数为8或9.

18.解：(1)由表中数据可得，$\bar{x}=\frac{1+2+3+4}{4}=\frac{5}{2}$，$\bar{y}=\frac{1250+1050+1000+900}{4}=1050$，所以$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{4}x_iy_i-4\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum_{i=1}^{4}x_i^2-4\bar{x}^2}$

$=\frac{1250+2100+3000+3600-4\times\frac{5}{2}\times1050}{1+4+9+16-4\times\left(\frac{5}{2}\right)^2}=-110$，

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=1050+110\times\frac{5}{2}=1325$，

故回归直线方程为$y=-110x+1325$，

当$x=5$时，$y=-110\times5+1325=775$.所以估计该路口2024年不戴头盔的人数为775.

(2)2×2列联表如下：

	不戴头盔	戴头盔	合计
伤亡	7	3	10
不伤亡	13	27	40
合计	20	30	50

因为$\chi^2=\frac{50\times(7\times27-3\times13)^2}{10\times40\times20\times30}=4.6875>3.841$，

所以有95%的把握认为不戴头盔行为与事故伤亡有关.

19.解：(1)由已知选取的三个年级的人数之比为3:2:2，由于采用分层随机抽样的方法从中抽取7人，

因此应从高一、高二、高三三个年级的学生中分别抽取3人，2人，2人.

(2)①随机变量X服从超几何分布，随机变量X的所有可能取值为0,1,2,3，则$P(X=k)=\frac{C_4^k\cdot C_3^{3-k}}{C_7^3}(k=0,1,2,3)$，

所以随机变量X的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

②抽取一个学生就是一次试验，有"睡眠不足"和"睡眠充足"两个结果，抽3个学生相当于3次独立重复抽一个学生的试验，于是Y符合二项分布$Y\sim B\left(3,\frac{4}{7}\right)$，

所以期望$EY=3\times\frac{4}{7}=\frac{12}{7}$，

方差$DY=3\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{7}=\frac{36}{49}$.

20.解：(1)如图所示，以B为坐标原点，以BC,BA,BP所在直线分别为x轴，y轴，z轴，建立空间直角坐标系，则$A(0,2,0)$，$B(0,0,0)$，$D(t,2,0)$，$P(0,0,2)$.

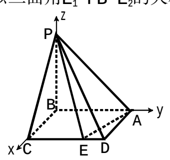
设$E(t,x,0)(0\leqslant x\leqslant2)$，所以$\overrightarrow{PE}=(t,x,-2)$，$\overrightarrow{EA}=(-t,2-x,0)$，因为$\overrightarrow{PE}\perp\overrightarrow{EA}$，

所以$-t^2+x(2-x)=0$，所以$t^2=x(2-x)=-(x-1)^2+1$，又$x\in[0,2]$，所以$0\leqslant t^2\leqslant1$，所以在所给的数据中，t可以取①②③.

(2)由(1)知$t=\frac{\sqrt{3}}{2}$，此时，$x=\frac{1}{2}$或$x=\frac{3}{2}$，即满足条件的点E有两个.

根据题意得，其坐标为$E_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$和$E_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$，

因为$PB\perp$底面$ABCD$，所以$PB\perp BE_1$，$PB\perp BE_2$，所以$\angle E_1BE_2$是二面角E_1-PB-E_2的平面角，由$\cos\langle\overrightarrow{BE_1},\overrightarrow{BE_2}\rangle=\frac{\overrightarrow{BE_1}\cdot\overrightarrow{BE_2}}{|\overrightarrow{BE_1}||\overrightarrow{BE_2}|}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}}{1\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由题意得，二面角$E_1-PB-E_2$为锐角，所以二面角$E_1-PB-E_2$的大小为30°.



(第20题图)

21.(1)解：由题意可得$\begin{cases}e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{5}}{3},\\2a=6,\end{cases}$解得$a=3$，$b=2$，所以椭圆E的标准方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)证明：由(1)可得，$A(0,2)$，$B(0,-2)$，$C(3,0)$，易知直线AP斜率存在，设直线AP的方程为$y=kx+2$，

由$\begin{cases}y=kx+2,\\4x^2+9y^2=36,\end{cases}$整理可得$(4+9k^2)x^2+36kx=0$，可得$x_P=-\frac{36k}{4+9k^2}$，$y_P=\frac{-36k^2}{4+9k^2}+2=\frac{8-18k^2}{4+9k^2}$，即$P\left(-\frac{36k}{4+9k^2},\frac{8-18k^2}{4+9k^2}\right)$，

则$Q\left(-\frac{36k}{4+9k^2},\frac{18k^2-8}{4+9k^2}\right)$.

直线BC的方程为$\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$，即$y=\frac{2}{3}x-2$，由$\begin{cases}y=kx+2,\\y=\frac{2}{3}x-2,\end{cases}$得$x_M=\frac{-4}{k-\frac{2}{3}}$，$y_M=\frac{-2k-\frac{4}{3}}{k-\frac{2}{3}}$，所以$M\left(\frac{-4}{k-\frac{2}{3}},\frac{-2k-\frac{4}{3}}{k-\frac{2}{3}}\right)$.直线AQ的方程为$y=\frac{4}{9k}x+2$，由$\begin{cases}y=\frac{4}{9k}x+2,\\y=\frac{2}{3}x-2,\end{cases}$得$N\left(\frac{-4}{\frac{4}{9k}-\frac{2}{3}},\frac{-2\cdot\frac{4}{9k}-\frac{4}{3}}{\frac{4}{9k}-\frac{2}{3}}\right)$，即$N\left(\frac{6k}{k-\frac{2}{3}},\frac{2k+\frac{4}{3}}{k-\frac{2}{3}}\right)$，

此时$y_M+y_N=0$，$x_M+x_N=6$，所以MN的中点为$(3,0)$，又AT的中点$\left(\frac{6}{2},\frac{-2+2}{2}\right)$，即$(3,0)$，所以AT,MN互相平分，则四边形ANTM为平行四边形，所以$|AM|=|TN|$.

22.解：(1)$f(x)=\frac{1}{x}-x+3\ln x(x>0)$，所以$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-1+\frac{3}{x}=-\frac{x^2-3x+1}{x^2}$，

令$f'(x)>0$，得$\frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$；令$f'(x)<0$，得$0<x<\frac{3-\sqrt{5}}{2}$或$x>\frac{3+\sqrt{5}}{2}$，

所以$f(x)$的单调递增区间为$\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$，单调递减区间为$\left(0,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$，$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$.

(2)结论：$f(x_1)+f(x_2)\geqslant-\frac{1}{2}(a-2)^2$.证明如下：

$f(x_1)+f(x_2)=\left(\frac{1}{x_1}-x_1+a\ln x_1\right)+\left(\frac{1}{x_2}-x_2+a\ln x_2\right)=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}-(x_1+x_2)+a\ln(x_1x_2)=\frac{2}{x_1x_2}-2+a\ln(x_1x_2)$.

设$t=x_1x_2$，由x_1,x_2均为正数，得$x_1x_2\leqslant\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2=1$，即$0<t\leqslant1$，设$g(t)=\frac{2}{t}-2+a\ln t(0<t\leqslant1)$，则$g'(t)=-\frac{2}{t^2}+\frac{a}{t}=\frac{at-2}{t^2}$.

①当$a\leqslant2$时，由$0<t\leqslant1$，得$at-2\leqslant0$，即$g'(t)\leqslant0$，所以$g(t)$单调递减，

所以$g(t)\geqslant g(1)=0$，又因为$-\frac{1}{2}(a-2)^2\leqslant0$，

所以$f(x_1)+f(x_2)\geqslant-\frac{1}{2}(a-2)^2$；

②当$a>2$时，$g(t)$在$\left(0,\frac{2}{a}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{2}{a},1\right)$上单调递增，所以$g(t)$的最小值为$g\left(\frac{2}{a}\right)=a-2+a\ln\frac{2}{a}$，此时只需证$a-2+a\ln\frac{2}{a}\geqslant-\frac{1}{2}(a-2)^2$，化简后即证$\ln\frac{2}{a}+\frac{1}{2}a-1\geqslant0$.

设$h(a)=\ln\frac{2}{a}+\frac{1}{2}a-1(a>2)$，$h'(a)=\frac{a-2}{2a}>0$，所以$h(a)$单调递增，所以$h(a)>h(2)=0$，即证得$\ln\frac{2}{a}+\frac{1}{2}a-1\geqslant0$.

综上所述，不等式得证.

扫码免费下载习题讲解ppt

第13期

第2~3版综合测试(五)参考答案

一、单项选择题

1.B　提示：向量$a=(1,3,0)$，$b=(2,1,1)$，则$a\cdot b=2+3+0=5$，$|b|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$，

故向量a在向量b上的投影向量$c=\frac{a\cdot b}{|b|}\times\frac{b}{|b|}=\frac{5}{6}b=\left(\frac{5}{3},\frac{5}{6},\frac{5}{6}\right)$.故选B.

2.C　提示：因为两直线l_1与l_2平行，所以$\frac{1}{1}=\frac{n}{-2}$，解得$n=-2$，又$d=\frac{|m+3|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，而$m>0$，所以$m=2$，所以$m+n=0$，故选C.

3.B　提示：每名同学都有3种选法，故6名同学共有3^6种选法.故选B.

4.A　提示：$(x+y)^5(x-y)^6=(x-y)(x^2-y^2)^5$，

$(x^2-y^2)^5$展开式的通项公式为$T_{r+1}=(-1)^rC_5^rx^{10-2r}y^{2r}(r=0,1,2,3,4,5)$.

当$r=3$时，$T_4=-10x^4y^6$，所以x^4y^7的系数为$-1\times(-10)=10$.故选A.

5.A　提示：冬至、小寒、大寒、立春、雨水、惊蛰、春分、清明、谷雨、立夏、小满、芒种这十二个节气日影长构成等差数列$\{a_n\}$，设其公差为d，则$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=28.5,\\a_{10}+a_{11}+a_{12}=1.5,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=10.5,\\d=-1,\end{cases}$所以$a_n=a_1+(n-1)d=11.5-n$，所以$a_7=11.5-7=4.5$，即所求的日影长为4.5尺，故选A.

6.B　提示：因为OP是$\triangle PF_1F_2$边F_1F_2的中线，所以$\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}=2\overrightarrow{PO}$，则$2|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|=4|\overrightarrow{PO}|$，因为$2|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|\leqslant|\overrightarrow{F_1F_2}|$，所以$4|\overrightarrow{PO}|\leqslant2c$.又$|\overrightarrow{PO}|\geqslant a$，所以$4a\leqslant2c$，所以$\frac{c}{a}\geqslant2$，即此双曲线的离心率$e$的取值范围是$[2,+\infty)$，故选B.

7.B　提示：以A为原点，直线AB,AD,AA_1为x轴，y轴，z轴，建立空间直角坐标系，不妨设正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，则$A_1(0,0,1)$，$B(1,0,0)$，$D(0,1,0)$，$E\left(\frac{1}{2},0,1\right)$，所以$\overrightarrow{A_1B}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{DE}=\left(\frac{1}{2},-1,1\right)$.设$A_1B$与$DE$所成的角为$\theta$，则$\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{A_1B},\overrightarrow{DE}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{DE}|}{|\overrightarrow{A_1B}|\cdot|\overrightarrow{DE}|}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{9}{4}}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$，故$A_1B$与$DE$所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{2}}{6}$，故选B.

8.D　提示：函数$f(x)=xe^x-mx+\frac{m}{2}$在$(0,+\infty)$上有两个零点，等价于$h(x)=xe^x$与$g(x)=m\left(x-\frac{1}{2}\right)$在$(0,+\infty)$上有两个不同的交点，$g(x)$恒过点$\left(\frac{1}{2},0\right)$，设$g(x)$与$h(x)$相切时切点为$(a,ae^a)$，因为$h'(x)=e^x(x+1)$，所以切线斜率为$e^a(a+1)$，则切线方程为$y-ae^a=(a+1)e^a(x-a)$，当切线经过点$\left(\frac{1}{2},0\right)$时，解得$a=1$或$a=-\frac{1}{2}$(舍去)，此时切线斜率为$2e$，由函数图象特征可知，函数$f(x)=xe^x-mx+\frac{m}{2}$在$(0,+\infty)$上有两个零点，则实数m的取值范围是$(2e,+\infty)$.故选D.

二、多项选择题

9.ABC　提示：化圆的方程为标准方程，得$(x-2)^2+y^2=5$，所以圆心为$(2,0)$，半径为$\sqrt{5}$.对于A，圆是关于圆心对称的中心对称图形，而点$(2,0)$是圆心，故A正确；对于B，圆是关于直径所在直线对称的轴对称图形，直线$y=0$过圆心，故B正确；对于C，圆是关于直径所在直线对称的轴对称图形，直线$x+3y-2=0$过圆心，故C正确；对于D，圆是关于直径所在直线对称的轴对称图形，而直线$x-y+2=0$不过圆心，故D错误.故选ABC.

10.BCD　提示：对于A，A_1发生时B发生的概率是$\frac{7}{11}$，A_1不发生时B发生的概率是$\frac{6}{11}$，由事件的独立性概念知，事件A_1与事件B不相互独立，故A错误；对于B，$P(B|A_1)=\frac{P(A_1B)}{P(A_1)}=\frac{\frac{4}{10}\times\frac{7}{11}}{\frac{4}{10}}=\frac{7}{11}$，故B正确；对于C，$P(B)=P(A_1)\cdot P(B|A_1)+P(A_2)\cdot P(B|A_2)=\frac{4}{10}\times\frac{7}{11}+\frac{6}{10}\times\frac{6}{11}=\frac{32}{55}$，故C正确；对于D，$P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{\frac{6}{10}\times\frac{6}{11}}{\frac{32}{55}}=\frac{9}{16}$，故D正确.故选BCD.

11.AC　提示：根据题意，结合图形分析可得纸板P_n相较于纸板$P_{n-1}(n\geqslant2)$，剪掉了半径为$\frac{1}{2^{n-1}}$的半圆，

对于数列$\{L_n\}$，则有$L_n-L_{n-1}=\frac{1}{2}\pi\times\frac{2}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n-1}}\times2=\frac{\pi-2}{2^{n-1}}$，故C正确；因为$L_1=\pi+2$，所以$L_2=L_1-1+\frac{1}{2}\times2\pi\times\frac{1}{2}=\frac{3\pi}{2}+1$，故A正确；

同时，每次剪掉的半圆形面积构成一个以$\frac{\pi}{8}$为首项，以$\frac{1}{4}$为公比的等比数列，对于数列$\{S_n\}$，则有$S_n-S_{n-1}=-\frac{\pi}{8}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}=-\frac{\pi}{2^{2n-1}}$，

则有$S_n=(S_n-S_{n-1})+(S_{n-1}-S_{n-2})+(S_{n-2}-S_{n-3})+\cdots+(S_2-S_1)+S_1=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2^3}+\frac{\pi}{2^5}+\cdots+\frac{\pi}{2^{2n-1}}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\frac{\pi}{8}\left(1-\frac{1}{4^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{1}{2^{2n-1}}\right)$，

故D错误，当$n=4$时，$S_4=\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{1}{2^7}\right)=\frac{43\pi}{128}$，故B错误.

故选AC.

12.AD　提示：因为椭圆C的长轴长与圆E的直径长相等，所以$2a=4$，即$a=2$，设椭圆的左焦点为$F'(-c,0)$，由椭圆的定义可知$|PF'|+|PF|=2a=4$，所以$|PQ|-|PF|=|PQ|-(4-|PF'|)=|PQ|+|PF'|-4\geqslant|QF'|-4\geqslant|EF'|-2-4=2\sqrt{5}-6$，所以$|EF'|=2\sqrt{5}=\sqrt{(c-3)^2+(4-0)^2}$，解得$c=1$或$c=5$(舍去).

对于A，因为$c=1$，所以椭圆C的焦距为$2c=2$，故A正确；

对于B，由$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，所以椭圆C的短轴长为$2\sqrt{3}$，故B错误；

对于C，$|PQ|+|PF|\geqslant|QF|\geqslant|EF|-|EQ|=\sqrt{(1+3)^2+(0-4)^2}-2=4\sqrt{2}-2$，故C错误；

对于D，若过点F的直线的斜率不存在，则直线方程为$x=1$，圆心$(-3,4)$到直线$x=1$的距离为4，不合题意；

设过点F的切线方程为$y=k(x-1)$，即$kx-y-k=0$，则$\frac{|-3k-k-4|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{4|k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得$k=\frac{-4\pm\sqrt{7}}{3}$，故D正确.

故选AD.

三、填空题

13.$\sqrt{13}$　提示：设过$A(-2,1)$，$B(-1,0)$，$C(2,3)$的圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$，

由已知得$\begin{cases}4+1-2D+E+F=0,\\1-D+F=0,\\4+9+2D+3E+F=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}D=0,\\E=-4,\\F=-1,\end{cases}$所以过A,B,C的圆的方程为$x^2+y^2-4y-1=0$，

因为点$D(a,3)$在此圆上，所以$a^2+3^2-4\times3-1=0$，解得$a^2=4$，

所以点D到坐标原点O的距离为$\sqrt{a^2+3^2}=\sqrt{4+3^2}=\sqrt{13}$.

14.$\left(5,\frac{1}{2},0\right)$　提示：设$P(x,y,z)$，则$\overrightarrow{AP}=(x-2,y+1,z-2)$，$\overrightarrow{AB}=(2,6,-3)$，$\overrightarrow{AC}=(-4,3,1)$，因为$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$，

所以$(x-2,y+1,z-2)=\frac{1}{2}(6,3,-4)=\left(3,\frac{3}{2},-2\right)$，所以点$P$的坐标为$\left(5,\frac{1}{2},0\right)$.

15.4　提示：由题意得$S_n+2=a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$，所以$S_{n+1}=2S_n+2$，所以$S_{n+1}+2=2(S_n+2)$，所以$\{S_n+2\}$是等比数列且公比$q=2$.又$S_1+2=a_1+2=2$，所以$S_n+2=2^n$，所以$S_n=2^n-2$，所以当$n\geqslant2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n-1}$，则有$\frac{a_{n+1}}{a_{n+4}}=\frac{1}{8}$.又因为$\frac{S_{n+1}}{S_{2n}}<\frac{a_{n+1}}{a_{n+4}}$，所以$\frac{2^{n+1}-2}{2^{2n}-2}<\frac{1}{8}$，化简得$2^{2n}-16\cdot2^n+14>0$，解得$2^n>8+5\sqrt{2}$或$2^n<8-5\sqrt{2}$.因为$n\in N_+$，所以$2^n>8+5\sqrt{2}$，则$n_{\min}=4$.

16.225　提示：将$x=8,9,10,11,12$分别代入该方程，得$y_1=4.2\times8+3=36.6$，$y_2=4.2\times9+3=40.8$，$y_3=4.2\times10+3=45$，$y_4=4.2\times11+3=49.2$，$y_5=4.2\times12+3=53.4$，这5个月的销售额相加，即$36.6+40.8+45+49.2+53.4=225$，

所以该国货品牌2023年8~12月在某网络平台的总销售额为225百万元.

四、解答题

17.解：(1)因为$f'(x)=xe^x$，所以$f'(0)=0$，又$f(0)=-1$，

故曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y=-1$.

(2)由$f'(x)=0$，得$x=0$，由$f'(x)>0$，得$x>0$；

由$f'(x)<0$，得$x<0$.所以当$x\in(0,+\infty)$时，$f(x)$单调递增，当$x\in(-\infty,0)$时，$f(x)$单调递减.

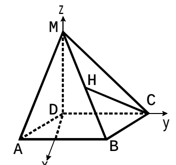
故$f(x)$的极小值为$f(0)=-1$，无极大值.

18.解：若选①：因为$MD\perp$平面$ABCD$，所以$AD\perp MD$，$CD\perp MD$，

所以$\angle ADC$就是二面角$A-MD-C$的平面角，所以$\angle ADC=\frac{2\pi}{3}$.

以D为坐标原点，以DC,DM所在直线为y轴，z轴，建立如图1所示的空间直角坐标系，

则$C(0,1,0)$，$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$，$M(0,0,1)$，$H\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$，所以$\overrightarrow{CH}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)$.取平面$MCD$的一个法向量$n=(1,0,0)$.设$CH$与平面$MCD$所成角为$\theta$，则$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{CH},n\rangle|=\frac{|\overrightarrow{CH}\cdot n|}{|\overrightarrow{CH}|\cdot|n|}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，所以$CH$与平面$MCD$所成角的正弦值是$\frac{\sqrt{3}}{4}$.



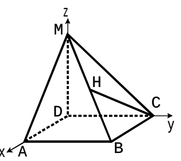
(第18题图1)

若选②：因为$MD\perp$平面$ABCD$，$\angle BAD=\frac{\pi}{2}$，所以DA，DC，DM两两垂直.

以D为坐标原点，以DA,DC,DM所在直线分别为x轴，y轴，z轴，建立如图2所示的空间直角坐标系，

则$C(0,1,0)$，$H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，所以$\overrightarrow{CH}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.取平面MCD的一个法向量$n=(1,0,0)$，

设CH与平面MCD所成角为θ，则$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{CH},n\rangle|=\frac{|\overrightarrow{CH}\cdot n|}{|\overrightarrow{CH}|\cdot|n|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以$CH$与平面$MCD$所成角的正弦值是$\frac{\sqrt{3}}{3}$.



(第18题图2)

19.解：(1)由调查数据，病例组生活习惯为良好的频率为$\frac{25}{100}=0.25$，因此，病例组生活习惯为良好的概率的估计值为0.25.对照组生活习惯为良好的频率为$\frac{45}{100}=0.45$，因此，对照组生活习惯为良好的概率的估计值为0.45.

(2)由题意可知$a=25$，$b=75$，$c=45$，$d=55$，

所以$\chi^2=\frac{200\times(25\times55-75\times45)^2}{100\times100\times70\times130}=\frac{800}{91}\approx8.791$，因为$8.791>6.635$，

所以有99%的把握认为感染此次流感疾病与生活习惯有关.

20.解：(1)由$a_2+a_8=10$，得$a_5=5$.设数列$\{a_n\}$的公差为d，则$a_5-a_1=4=4d$，所以$d=1$，故$a_n=n$.

(2)由(1)得$c_n=\frac{1}{n(n+1)}+2^n$，所以$T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=\left[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]+(2^1+2^2+\cdots+2^n)=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-1-\frac{1}{n+1}=2^{n+1}-\frac{n+2}{n+1}$.

21.解：(1)圆E：$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$，令$y=0$，解得$x=\pm\sqrt{2}$，

所以椭圆C的半焦距$c=\sqrt{2}$，$F_1(-\sqrt{2},0)$，$F_2(\sqrt{2},0)$，因为圆E的圆心$E\left(0,\frac{1}{2}\right)$，所以$OE/\!/PF_2$，$|OE|=\frac{1}{2}|PF_2|$，因为$2a=|PF_1|+|PF_2|=2\times\frac{3}{2}+2\times\frac{1}{2}=4$，所以$a=2$，

因为$a^2=b^2+c^2$，所以$b=\sqrt{2}$，

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，当AB斜率存在时，设直线AB的方程为$y=kx+m$，

由$\begin{cases}y=kx+m,\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$整理得$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-4=0$，

则$x_1+x_2=\frac{-4km}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-4}{1+2k^2}$，因为以线段AB为直径的圆经过坐标原点O，所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，即$x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=0$，整理得$(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=0$，即$(1+k^2)\cdot\frac{2m^2-4}{1+2k^2}+km\cdot\frac{-4km}{1+2k^2}+m^2=0$，化简得$3m^2=4(1+k^2)$，此时原点O到AB的距离$d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$；

当AB斜率不存在时，易知$|x_1|=|y_1|$，$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{2}=1$，解得$|x_1|=\frac{2}{\sqrt{3}}$，此时原点O到AB的距离$d=|x_1|=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

综上所述，存在以点O为圆心的定圆与直线AB相切，定圆的方程为$x^2+y^2=\frac{4}{3}$.

22.解：(1)前4局A都不下场说明前4局A都获胜，

故前4局A都不下场的概率为$P=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$.

(2)X的所有可能取值为0,1,2,3,4，

其中，X=0表示第1局B负，第4局是B上场，且B负，

则$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$；

X=1表示第1局B负，第4局是B上场，且B胜；或第1局B胜，且第2局B负，则$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$；

X=2表示第1局B胜，且第2局B胜，第3局B负，则$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$；

X=3表示第1局B胜，且第2局B胜，第3局B胜，第4局B负，则$P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$；

X=4表示第1局B胜，且第2局B胜，第3局B胜，第4局B胜，则$P(X=4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$.

所以X的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

故X的数学期望为$EX=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{16}+4\times\frac{1}{16}=\frac{19}{16}$.

第14期 第2~3版综合测试(六)参考答案

一、单项选择题

1.B 提示：由双曲线方程可知$a^2=3,b^2=2$，所以渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}x$，故选B.

2.D 提示：因为等差数列$\{a_n\}$中，$a_{11}+7=2a_{12}$，所以$a_1+10d+7=2(a_1+11d)$，即$a_1+12d=7$，即$a_{13}=7$，所以$S_{25}=\frac{25(a_1+a_{25})}{2}=25a_{13}=25\times7=175$，故选D.

3.A 提示：因为随机变量X服从正态分布$X\sim N(10,\sigma^2)$，所以$P(X>10)=P(X\leqslant10)=\frac{1}{2}$，且$P(8\leqslant X\leqslant10)=P(10<X\leqslant12)$，故$P(10<X\leqslant12)=n$，所以$P(X>10)=P(10<X\leqslant12)+P(X>12)=m+n=\frac{1}{2}$.故选A.

4.A 提示：若直线$l:y=kx+1$与圆$O:x^2+y^2=1$相交于A，B两点，则圆心到直线距离$d=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$，$|AB|=2\sqrt{1-d^2}=2\sqrt{1-\frac{1}{1+k^2}}=2\sqrt{\frac{k^2}{1+k^2}}$.

若$k=1$，则$|AB|=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$，$d=\frac{1}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则$\triangle OAB$的面积为$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$，即充分性成立.若$\triangle OAB$的面积为$\frac{1}{2}$，则$S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\times2\sqrt{\frac{k^2}{1+k^2}}=\frac{|k|}{1+k^2}=\frac{1}{2}$，即$k^2+1=2|k|$，即$k^2-2|k|+1=0$，则$(|k|-1)^2=0$，即$|k|=1$，解得$k=\pm1$，即必要性不成立.故“$k=1$”是“$\triangle OAB$的面积为$\frac{1}{2}$”的充分不必要条件.故选A.

5.C 提示：$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos x$.当$x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$时，$f(x)$单调递减；当$x\in(0,\pi)$时，$f(x)$单调递增；当$x\in(\pi,2\pi)$时，$f(x)$单调递减，当$x=\pi$时，$f(x)$取得极大值，所以C项成立，故选C.

6.B 提示：设$|AB|=2r$，由题意知$r\geqslant2$，设AB中点为M，作$MN\perp y$轴于点N，过A，B作准线的垂线，垂足分别为P，Q，由抛物线定义及梯形中位线性质，知$2(|MN|+1)=|AP|+|BQ|=|AF|+|BF|=|AB|=2r$，于是$|MN|=r-1$，由垂径定理，得$|DE|=2\sqrt{r^2-(r-1)^2}=\frac{8}{5}r$，即$16r^2-50r+25=0$，解得$r=\frac{5}{2}$或$r=\frac{5}{8}$，又$r\geqslant2$，故$r=\frac{5}{2}$，于是M横坐标为$\frac{3}{2}$，设直线$l:y=k\cdot(x-1)$，与$y^2=4x$联立，得$k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$，则$x_A+x_B=\frac{2k^2+4}{k^2}=2x_M=3$，解得$k=\pm2$，故直线$l$方程为$2x\pm y-2=0$.故选B.

7.B 提示：取AC的中点D，以D为原点，BD,DC,DM所在直线分别为x轴，y轴，z轴，建立空间直角坐标系.不妨设$AC=2$，N为BC的中点，连接AN，则$A(0,-1,0)$，$M(0,0,2)$，$B(-\sqrt{3},0,0)$，$C(0,1,0)$，$N\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$，所以$\overrightarrow{AM}=(0,1,2)$，$\overrightarrow{AN}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$.由直棱柱的性质，知$C_1C\perp$平面$ABC$，所以$C_1C\perp AN$.又由等边三角形的性质，知$AN\perp BC$.因为$C_1C\cap BC=C$，所以$AN\perp$平面$BCC_1B_1$，所以$\overrightarrow{AN}$为平面$BCC_1B_1$的一个法向量.设$AM$与平面$BCC_1B_1$所成角为$\alpha$，所以$\sin\alpha=|\cos\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}|}{|\overrightarrow{AM}|\cdot|\overrightarrow{AN}|}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{10}$，即$AM$与平面$BCC_1B_1$所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{15}}{10}$，故选B.

8.D 提示：因为有95%以上的把握认为“支持增加中学生体育锻炼时间的政策与性别有关”，

所以$\frac{160\times[(70-m)(30-m)-(10+m)(50+m)]^2}{80\times80\times120\times40}\geqslant3.841$，

化简得$(m-10)^2\geqslant28.8075$，

因为函数$y=(m-10)^2$在$m\in[10,20]$上单调递增，且$m\in N_+$，$(15-10)^2<28.8075$，$(16-10)^2\geqslant28.8075$，所以m的最小值为16，即在这被调查的80名女生中支持增加中学生体育锻炼时间的人数的最小值为50+16=66.故选D.

二、多项选择题

9.ABD 提示：对于A，因为$a_3a_4a_5=a_4^3=1$，所以$a_4=1$，故A正确；对于B，因为$a_1a_2=a_1a_2a_3a_4a_5$，所以$T_2=T_5$，故B正确；对于C，$T_7=a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7=a_4^7=1$，故C错误；对于D，若$a_1=1$，则$q^3=\frac{a_4}{a_1}=1$，解得$q=1$，所以$a_2=a_1q=1$，故D正确.故选ABD.

10.AB 提示：对于A，若A展馆需要3种花卉，则有$C_4^3=4$种安排方法，故A正确；

对于B，共有$C_4^1+C_4^2+C_4^3=4+6+4=14$种安排方法，故B正确；

对于C，若“绿水晶”去A展馆，则有$C_3^0+C_3^1+C_3^2=1+3+3=7$种安排方法，故C错误；

对于D，若2种三角梅不能去往同一个展馆，则有$A_2^2\times2^2=8$种安排方法，故D错误.故选AB.

11.ABD 提示：设正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，以D为原点，DA，DC，DD_1所在直线分别为x轴，y轴，z轴，建立空间直角坐标系，则$A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$C(0,1,0)$，$D(0,0,0)$，$A_1(1,0,1)$，$B_1(1,1,1)$，$C_1(0,1,1)$，$D_1(0,0,1)$.

对于A，$\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BC}=(0,0,1)+(-1,0,0)=(-1,0,1)$，因为$\overrightarrow{AD_1}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BC}$，所以$\overrightarrow{AD_1}/\!/(\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BC})$，故A正确；

对于B，$\overrightarrow{A_1C}=(-1,1,-1)$，$\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{A_1A}=(0,1,0)-(0,0,-1)=(0,1,1)$，有$\overrightarrow{A_1C}\cdot(\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{A_1A})=0+1\times1+(-1)\times1=0$，故B正确；

对于C，$\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{A_1B}=(0,1,-1)$，记向量$\overrightarrow{AD_1}$与$\overrightarrow{A_1B}$的夹角为$\theta$，$\theta\in[0,\pi]$，则$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{A_1B}}{|\overrightarrow{AD_1}|\cdot|\overrightarrow{A_1B}|}=\frac{-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$，又$\theta\in[0,\pi]$，所以$\theta=\frac{2\pi}{3}=120°$，故C错误；

对于D，因为$\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{A_1C}$，又$\overrightarrow{A_1C}=(-1,1,-1)$，所以$(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{A_1B_1})^2=\overrightarrow{A_1C}^2=(-1)^2+1^2+(-1)^2=3$，又$\overrightarrow{A_1B_1}=(0,1,0)$，所以$\overrightarrow{A_1B_1}^2=1$，有$(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{A_1B_1})^2=3\overrightarrow{A_1B_1}^2$，故D正确.故选ABD.

12.AD 提示：双曲线C_1的一条渐近线的方程为$y=\sqrt{3}x$，则设双曲线C_1的方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=\lambda(\lambda\neq0)$.由双曲线$C_1$过点$\left(1,\frac{3}{2}\right)$，得$1-\frac{3}{4}=\lambda$，得$\lambda=\frac{1}{4}$，所以双曲线$C_1$的方程为$\frac{x^2}{\frac{1}{4}}-\frac{y^2}{\frac{3}{4}}=1$，所以双曲线$C_1$的离心率$e=2$，实轴的长为1，故A正确，B错误；又易知椭圆$C_2$的两焦点为$F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，将$A(1,y_1)(y_1>0)$代入$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，得$\frac{1}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，所以$y_1=\frac{b^2}{a}$，所以直线$AB$的方程为$y=\frac{b^2}{2a}(x+1)$，联立$\begin{cases}y=\frac{b^2}{2a}(x+1),\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$整理得$(a^2+3)x^2+2(a^2-1)x-3a^2-1=0$，所以$1\cdot x_B=-\frac{3a^2+1}{a^2+3}$，则$x_B=-\frac{3a^2+1}{a^2+3}=-3+\frac{8}{a^2+3}$.由$a^2>1$，得$a^2+3>4$，则$0<\frac{8}{a^2+3}<2$，所以$-3<x_B<-1$，故C错误，D正确.故选AD.

三、填空题

13.$2x-y+1=0$ 提示：设与直线$2x-y+3=0$平行的直线为$2x-y+m=0$.因为点(0,1)在直线$2x-y+m=0$上，所以$2\times0-1+m=0$，可得$m=1$，所以该直线方程为$2x-y+1=0$.

14.21 提示：由题意知，$x^7=[(x-1)+1]^7=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_7(x-1)^7$，

根据二项式$[(x-1)+1]^7$的展开式的通项$T_{r+1}=C_7^r\cdot(x-1)^{7-r}(r=0,1,2,3,4,5,6,7)$，令$r=2$，故$a_5=C_7^2=21$.

15.$\frac{65}{2}$ 提示：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$a_1+d=4$，$a_1+5d=16$，解得$a_1=1$，$d=3$，设在数列$\{a_n\}$每相邻两项之间插入三个数所得新数列为$\{b_n\}$，则新的等差数列$\{b_n\}$的公差为$\frac{d}{4}=\frac{3}{4}$，首项为$b_1=a_1=1$，所以新数列的通项公式为$b_n=1+\frac{3}{4}(n-1)=\frac{3}{4}n+\frac{1}{4}$，故$b_{43}=\frac{3}{4}\times43+\frac{1}{4}=\frac{65}{2}$.

16.$[-1,2]$ 提示：因为$g(x)=(x-2)e^x-a(x+2)$，所以$g(-2)=-\frac{4}{e^2}$.由$g(x)=(x-2)e^x-a(x+2)=0$，得$a=\frac{x-2}{x+2}e^x=f(x)$，函数$f(x)$的定义域为$\{x|x\neq-2\}$，当$x<-2$或$x>2$时，$f(x)>0$，当$-2<x\leqslant2$时，$f'(x)=\frac{(x-1)(x+2)e^x-(x-2)e^x}{(x+2)^2}=\frac{x^2e^x}{(x+2)^2}\geqslant0$，所以函数$f(x)$在$(-2,2]$上单调递增.又因为$f(-1)=-\frac{3}{e}$，$f(2)=0$，由$-\frac{3}{e}\leqslant a\leqslant0$，即$-\frac{3}{e}\leqslant f(x)\leqslant0$，即$f(-1)\leqslant f(x)\leqslant f(2)$，解得$-1\leqslant x\leqslant2$，所以，若$a\in\left[-\frac{3}{e},0\right]$，则函数$g(x)=(x-2)e^x-a(x+2)$零点的取值范围是$[-1,2]$.

四、解答题

17.解：(1)因为$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=10$，$\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2=430$，$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=65$，

所以$r=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{65}{\sqrt{10}\times\sqrt{430}}=\frac{65}{\sqrt{4300}}\approx\frac{65}{65.57}\approx0.99>0.75$.

所以发布的短视频个数与收到的点赞数之和具有较高的线性相关程度.

(2)因为$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{65}{10}=6.5$，又$\bar{x}=\frac{1}{5}\times(3+4+5+6+7)=5$，$\bar{y}=\frac{1}{5}\times(45+50+60+65+70)=58$，所以$\hat{a}=58-6.5\times5=25.5$，所以y关于x的线性回归方程为$y=6.5x+25.5$.

18.解：(1)选条件①时，由$na_{n+1}=(n+1)a_n$，得$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}=\frac{a_1}{1}=1$，所以$a_n=n$.

选条件②时，由$S_n=\frac{(n+1)a_n}{2}$，得$2S_n=(n+1)a_n$，

当$n\geqslant2$时，$2S_{n-1}=na_{n-1}$，两式相减，得$2a_n=(n+1)a_n-na_{n-1}$，即$(n-1)a_n=na_{n-1}$，整理得$\frac{a_n}{n}=\frac{a_{n-1}}{n-1}=\frac{a_1}{1}=1$，所以$a_n=n$.

选条件③时，由于$a_n^2+a_n=2S_n$，当$n\geqslant2$时，$a_{n-1}^2+a_{n-1}=2S_{n-1}$，

两式相减，得$a_n^2-a_{n-1}^2=a_n+a_{n-1}$.因为$\{a_n\}$为正项数列，所以$a_n-a_{n-1}=1$，所以数列$\{a_n\}$是以1为首项，1为公差的等差数列，所以$a_n=n$.

(2)由(1)，得$b_n=-n\cdot2^n$，设$c_n=n\cdot2^n$，其前n项和为C_n，所以$C_n=1\times2^1+2\times2^2+\cdots+n\cdot2^n$，

$2C_n=1\times2^2+2\times2^3+\cdots+(n-1)\cdot2^n+n\cdot2^{n+1}$，

两式相减，得$-C_n=(2^1+2^2+\cdots+2^n)-n\cdot2^{n+1}=\frac{2\times(1-2^n)}{1-2}-n\cdot2^{n+1}$，故$C_n=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$，所以$T_n=(1-n)\cdot2^{n+1}-2$.

19.解：(1)由频率之和为1，得$(0.004+a+0.018+0.022+0.022+0.028)\times10=1$，

解得$a=0.006$，[80,90)这组的频率为$0.022\times10=0.22$，[90,100]这组的频率为$0.018\times10=0.18$，

$0.18<1-80\%$，$0.18+0.22>1-80\%$，故80%分位数在[80,90)组，设80%分位数为x，

则$0.022\times(90-x)+0.18=1-80\%$，解得$x\approx89.09$，故80%分位数为89.09.

(2)①任抽一份问卷，是来自甲社区业主的问卷记作事件A，问卷评分不足60分记作事件B，

由题意知，$P(A)=0.75$，$P(\bar{A})=0.25$，$P(B|A)=0.06$，$P(B|\bar{A})=0.10$，

所以$P(AB)=P(A)P(B|A)=0.75\times0.06=0.045$，

$P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B|\bar{A})=0.25\times0.10=0.025$，

所以$P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)=0.045+0.025=0.07$，

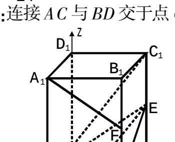
所以在所有评分不足60分的调查问卷中随机抽取一份，估计这份问卷恰好来自甲社区业主的概率为

$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.045}{0.07}=\frac{9}{14}$；

②70份评分不足60分的调查问卷中来自甲社区业主的问卷份数$X\sim B\left(70,\frac{9}{14}\right)$，

所以$EX=70\times\frac{9}{14}=45$.

20.(1)证明：连接AC与BD交于点O，连接OE，如图，



(第20题图)

因为四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$是正四棱柱，所以四边形$ABCD$是正方形，所以O为AC的中点，又因为E为CC_1的中点，所以$AC_1/\!/OE$，又$AC_1\not\subset$平面BDE，$OE\subset$平面BDE，所以$AC_1/\!/$平面BDE.

(2)解：以D为坐标原点，DA，DC，DD_1所在直线分别为x轴，y轴，z轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则$A_1(1,0,2)$，$F(1,1,1)$，$B(1,1,0)$，$D(0,0,0)$，$E(0,1,1)$，

所以$\overrightarrow{A_1F}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{BD}=(-1,-1,0)$，$\overrightarrow{BE}=(-1,0,1)$，

设平面BDE的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-x-y=0,\\ -x+z=0,\end{cases}$

令$x=1$，得$y=-1$，$z=1$，则$\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$，

设直线A_1F与平面BDE所成的角为θ，

则直线A_1F与平面BDE所成角的正弦值为$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{A_1F},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{A_1F}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{A_1F}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

21.(1)证明：设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_0,y_0)$，由题意知，$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，则$k_1=\frac{y_0}{x_0+2}$，$k_2=\frac{y_0}{x_0-2}$.因为点P为双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$上异于顶点的任意一点，所以$x_0^2-y_0^2=4$，所以$k_1k_2=\frac{y_0}{x_0+2}\cdot\frac{y_0}{x_0-2}=\frac{y_0^2}{x_0^2-4}$，即$k_1\cdot k_2=1$.

(2)解：由直线PF_1的方程为$y=k_1(x+2)$，

代入椭圆C的方程$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$，可得$(1+2k_1^2)x^2+8k_1^2\cdot x+8\cdot k_1^2-8=0$，所以$x_1+x_2=-\frac{8k_1^2}{2k_1^2+1}$，$x_1x_2=\frac{8k_1^2-8}{2k_1^2+1}$，所以$|AB|=\sqrt{1+k_1^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=4\sqrt{2}\cdot\frac{k_1^2+1}{2k_1^2+1}$.同理可得$|CD|=4\sqrt{2}\cdot\frac{k_2^2+1}{2k_2^2+1}$，因为$k_1\cdot k_2=1$，所以$|CD|=4\sqrt{2}\cdot\frac{k_1^2+1}{k_1^2+2}$，则$\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{2k_1^2+1}{k_1^2+1}+\frac{k_1^2+2}{k_1^2+1}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{8}$，即存在常数$\lambda=\frac{3\sqrt{2}}{8}$，使得$\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$恒成立.

22.(1)解：当$k=1$时，$f(x)=\frac{x^2}{2}-\ln x$，$f(1)=\frac{1}{2}$，$f'(x)=x-\frac{1}{x}$，所以$f'(1)=0$，所以$f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程为$y-\frac{1}{2}=0$.

(2)证明：当$k>0$时，$f(x)+\frac{3}{2}k^2-2k\geqslant0$，即$\frac{x^2}{2}+(1-k)x-k\ln x+\frac{3}{2}k^2-2k\geqslant0$，

令$g(x)=\frac{x^2}{2}+(1-k)x-k\ln x+\frac{3}{2}k^2-2k$，$x\in(0,+\infty)$，$k>0$，

则$g'(x)=x+(1-k)-\frac{k}{x}=\frac{(x-k)(x+1)}{x}$，

当$k>0$时，$x\in(0,k)$，$g'(x)<0$，此时函数$g(x)$单调递减；$x\in(k,+\infty)$，$g'(x)>0$，此时函数$g(x)$单调递增.

当$x=k$时，函数$g(x)$取得极小值，也是最小值，

所以只要证明$g(k)=k^2-k-k\ln k\geqslant0$，

即证明$k-1-\ln k\geqslant0(k>0)$即可.

令$h(k)=k-1-\ln k$，$k\in(0,+\infty)$，则$h'(k)=1-\frac{1}{k}=\frac{k-1}{k}$，

由$h'(k)<0$，得$0<k<1$；由$h'(k)>0$，得$k>1$，所以$k\in(0,1)$时，$h(k)$单调递减；$k\in(1,+\infty)$时，$h(k)$单调递增.

所以$k=1$时，函数$h(k)$取得极小值，也是最小值，$h(1)=0$，

所以$h(k)\geqslant0$在$k\in(0,+\infty)$上恒成立，

所以当$k>0$时，$f(x)+\frac{3}{2}k^2-2k\geqslant0$成立.

第15期 第2~3版综合测试(七)参考答案

一、单项选择题

1.A 提示：因为$a=(1,2,3)$，$b=(-1,0,-2)$，所以$a+b=(0,2,1)$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0\times(-1)+2\times0+1\times(-2)=-2$.故选A.

2.D 提示：$f'(x)=1+2e^{2x}$，所以$f(x)$在$(0,f(0))$处的切线的斜率为$k=f'(0)=3$，又$f(0)=1$，所以$f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y-1=3(x-0)$，即$y=3x+1$.故选D.

3.B 提示：由抛物线的方程可得准线的方程为$y=-\frac{p}{2}$，设P的纵坐标为n，由抛物线的性质，则$n+\frac{p}{2}-n=1$，解得$p=2$，故选B.

4.C 提示：设学校为A，B，C，先把甲乙两人安排到不同学校，有$A_3^2=6$种，不妨设甲在A，乙在B，只需剩余3人至少有1人去C即可，利用间接法计算，有$3^3-2^3=19$种不同安排方法，

根据分步乘法计数原理，可知共有$6\times19=114$种不同安排方法.故选C.

5.C 提示：过E作$EO\perp$平面ABCD，垂足为O，过E分别作$EG\perp BC$，$EM\perp AB$，垂足分别为G，M，连接OG，OM，

则等腰梯形所在的面、等腰三角形所在的面与底面夹角分别为$\angle EMO$和$\angle EGO$，所以$\tan\angle EMO=\tan\angle EGO=\frac{\sqrt{14}}{5}$.

因为$EO\perp$平面ABCD，$BC\subset$平面ABCD，所以$EO\perp BC$，因为$EG\perp BC$，EO，$EG\subset$平面EOG，$EO\cap EG=E$，所以$BC\perp$平面EOG，因为$OG\subset$平面EOG，所以$BC\perp OG$，同理，$OM\perp BM$，又$BM\perp BG$，故四边形OMBG是矩形，所以由BC=10，得BG=OM=5，所以$EO=\sqrt{14}$，所以OG=5，

所以在Rt△EOG中，$EG=\sqrt{EO^2+OG^2}=\sqrt{(\sqrt{14})^2+5^2}=\sqrt{39}$，

在Rt△EBG中，$EB=\sqrt{EG^2+BG^2}=\sqrt{(\sqrt{39})^2+5^2}=8$，

又因为$EF=AB-2OG=25-2\times5=15$，所以所有棱长之和为$2\times25+2\times10+15+4\times8=117$m.故选C.

6.D 提示：记事件A_1为“买到的洗衣机是甲厂产品”，事件A_2为“买到的洗衣机是乙厂产品”，事件B为“买到的洗衣机是合格品”，则$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=0.8\times0.9+0.2\times0.8=0.88$，即从该地市场上买到一台合格洗衣机的概率是0.88.故选D.

7.B 提示：在等比数列$\{a_n\}$中，由$a_1>1$，$a_6a_7>1$，得$a_1^2q^{11}>1$，所以$q>0$，$a_n>0$，

若$q\geqslant1$，则$a_6>1$，$a_7>1$，此时$\frac{a_6-1}{a_7-1}>0$，与已知条件$\frac{a_6-1}{a_7-1}<0$矛盾，因此$0<q<1$，故B正确，C错误；显然数列$\{a_n\}$是递减数列，由$\frac{a_6-1}{a_7-1}<0$，得$0<a_7<1<a_6$，则$a_6a_8=a_7^2<1$，故A错误；由于$\frac{T_{n+1}}{T_n}=a_{n+1}$，当$n\in N_+$，$n\leqslant5$时，$a_{n+1}>1$，而$T_n>0$，则$T_{n+1}>T_n$，当$n\geqslant6$时，$a_{n+1}<1$，则$T_{n+1}<T_n$，因此当$n\leqslant6$时，$T_n$逐渐增大，当$n\geqslant6$时，$T_n$逐渐减小，所以$T_n$的最大值为$T_6$，故D错误.故选B.

8.B 提示：函数$g(x)$的导数$g'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$，所以函数$g(x)$在$\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$上单调递减，在$\left[\frac{2}{3},2\right]$上单调递增，$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-5=-\frac{41}{8}$，$g(2)=8-4-5=-1$，则$g(x)_{\max}=-1$，

若对任意$x_1,x_2\in\left[\frac{1}{2},2\right]$，都有$f(x_1)-g(x_2)\geqslant2$成立，即当$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant2$时，$f(x)\geqslant1$恒成立，即$\frac{a}{x}+x\ln x\geqslant1$恒成立，即$a\geqslant x-x^2\ln x$在$x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$上恒成立.

令$h(x)=x-x^2\ln x$，则$h'(x)=1-2x\ln x-x$，$h''(x)=-3-2\ln x$，当$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant2$时，$h''(x)=-3-2\ln x<0$，即$h'(x)=1-2x\ln x-x$在$\left[\frac{1}{2},2\right]$上单调递减，

由于$h'(1)=0$，则当$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant1$时，$h'(x)>0$；当$1\leqslant x\leqslant2$时，$h'(x)<0$，所以$h(x)\leqslant h(1)=1$，所以$a\geqslant1$.故选B.

二、多项选择题

9.BC 提示：由等差数列$\{a_n\}$的公差$d<0$，得$\{a_n\}$是单调递减数列，又$|a_3|=|a_9|$，则$a_3>0$，$a_9<0$，即$a_3=-a_9$，所以$a_3+a_9=2a_6=0$，所以数列$\{a_n\}$的前5项或前6项和最大.故选BC.

10.BD 提示：根据题意抛掷一枚正四面体骰子，记向下的数字为X，则$P(X=2)=\frac{1}{4}$，故A错误；

抛掷一枚正六面体骰子，记向上的数字为Y，则$P(Y<3)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，故B正确；

根据期望与方差的计算公式，可得$EX=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$，

$EY=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$，故$EX<EY$，故C错误；

$DX=\frac{1}{4}\times\left[\left(1-\frac{5}{2}\right)^2+\left(2-\frac{5}{2}\right)^2+\left(3-\frac{5}{2}\right)^2+\left(4-\frac{5}{2}\right)^2\right]=\frac{5}{4}$，

$DY=\frac{1}{6}\times\left[\left(1-\frac{7}{2}\right)^2+\left(2-\frac{7}{2}\right)^2+\left(3-\frac{7}{2}\right)^2+\left(4-\frac{7}{2}\right)^2+\left(5-\frac{7}{2}\right)^2+\left(6-\frac{7}{2}\right)^2\right]=\frac{35}{12}$，故$DX<DY$，故D正确.故选BD.

11.AB 提示：因为$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$，故$\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，所以$OA\perp OB$，由题意知，圆心(0,0)到直线$x+y=a$的距离$d=\frac{|a|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，所以$a=\pm2$.故选AB.

12.BD 提示：设$P(x,y)$，不妨设椭圆的长轴在x轴上，则$|PQ|^2=y^2$，由$a^2-x^2=ky^2$，得$\frac{x^2}{a^2}+\frac{ky^2}{a^2}=1$，则$A(-a,0)$，$B(a,0)$，所以$|AQ|\cdot|BQ|=(x+a)(a-x)=a^2-x^2$，所以$M=\frac{|PQ|^2}{|AQ|\cdot|BQ|}=\frac{y^2}{a^2-x^2}=\frac{1}{k}$(常数)，所以$M$的值与$P$点在椭圆上的位置无关，故B正确，A错误；

此时椭圆离心率$e=\sqrt{1-\frac{a^2}{ka^2}}=\sqrt{1-M}$，所以$M$的值越大，椭圆的离心率越小，所以D正确，C错误.故选BD.

三、填空题

13.1 提示：由抛物线$x^2=8y$，得$F(0,2)$，由双曲线$\frac{y^2}{3}-x^2=1$的方程可得渐近线的方程为$\sqrt{3}x\pm y=0$，所以焦点F到渐近线的距离$d=\frac{|2|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}}=1$.

14.$(x+5)^2+y^2=16$ 提示：因为$x^2+y^2-2x-4y-11=0$可化为$(x-1)^2+(y-2)^2=16$，故该圆的圆心为(1,2)，半径$r=4$，设圆心(1,2)关于点$P(-2,1)$对称的点为(m,n)，则$\begin{cases}\frac{1+m}{2}=-2,\\ \frac{2+n}{2}=1,\end{cases}$解得$m=-5$，$n=0$，故所求圆的圆心为(-5,0)，所求圆的方程为$(x+5)^2+y^2=16$.

15.1359 提示：根据题意，X满足正态分布$X\sim N(10,4)$，$\mu=10$，$\sigma=2$，

则$P(8<X\leqslant12)\approx0.6826$，$P(6<X\leqslant14)\approx0.9544$，

则$P(12<X<14)\approx\frac{0.9544-0.6826}{2}=0.1359$，

现在抽取10 000件进行检查，则直径在(12,14)之间的零件大约有1359件.

16.$\left[2,\frac{8}{3}\right)$ 提示：因为$a_2=1$，$a_4=\frac{1}{4}$，且$a_n>0$，所以$q^2=\frac{1}{4}$，$q=\frac{1}{2}$，则$a_1=2$，$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$，$a_na_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3}$，所以数列$\{a_na_{n+1}\}$是以2为首项，公比为$\frac{1}{4}$的等比数列，则数列$\{a_na_{n+1}\}$的前$n$项和$S_n=\frac{2\times\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}=\frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$，

当$n=1$时，S_n有最小值2，又$S_n=\frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)<\frac{8}{3}$，所以$S_n$的取值范围是$\left[2,\frac{8}{3}\right)$.

四、解答题

17.解：(1)由题意知，甲校应抽取$72\times\frac{1000}{1800}=40$(人)，乙校应抽取$72\times\frac{800}{1800}=32$(人)，

所以$x=40-38=2$，$y=32-17=15$.

(2)由表中数据知，甲校尖子生5人，乙校尖子生3人，共8人，抽取4人，恰有1人来自乙校的概率为$P=\frac{C_3^1\cdot C_5^3}{C_8^4}=\frac{3}{7}$.

(3)根据题意填写2×2列联表，如下：

	甲校	乙校	总计
优秀	15	5	20
非优秀	25	27	52
总计	40	32	72

由表中数据，计算$\chi^2=\frac{72\times(15\times27-5\times25)^2}{40\times32\times20\times52}\approx4.240<6.635$，所以不能在犯错误的概率不超过0.01的前提下认为两所学校的数学成绩有差异.

18.解：(1)因为$f(x)=x\ln x-a(x-1)$，所以$f'(x)=\ln x+1-a$，

因为$x=e$是函数$f(x)$的一个极小值点，所以$f'(e)=2-a=0$，解得$a=2$.经检验，$a=2$符合题意.

(2)由(1)得，$f(x)=x\ln x-2x+2$，$f'(x)=\ln x-1$，令$f'(x)>0$，解得$x>e$，令$f'(x)<0$，解得$0<x<e$，故$f(x)$在$[1,e)$上单调递减，在$(e,3]$上单调递增，而$f(1)=0$，$f(3)=3\ln3-4<0$，

故$f(x)_{\max}=f(1)=0$，$f(x)_{\min}=f(e)=2-e$.

19.解：(1)数列$\{a_n\}$是公差不为零的等差数列，$a_1=1$，

选①时，设数列$\{a_n\}$的公差为d，因为a_1,a_2,a_5成等比数列，所以$a_2^2=a_1\cdot a_5$，所以$(1+d)^2=1+4d$，解得$d=2$或$d=0$(舍去)，所以$a_n=2n-1$.因为$T_n=2-b_n$，所以$T_{n+1}=2-b_{n+1}$，两式相减得$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1}{2}$(常数)，

当$n=1$时，$T_1=2-b_1$，所以$b_1=1$，所以$b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

选②时，$\frac{S_5}{5}-\frac{S_3}{3}=2$，整理得$\frac{5a_1+10d}{5}-\frac{3a_1+3d}{3}=2$，解得$d=2$，故$a_n=2n-1$.

由于$T_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，当$n=1$时，$b_1=1$；当$n\geqslant2$时，$T_{n-1}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$，所以$b_n=T_n-T_{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.当$n=1$时，也适合上式，所以$b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

(2)由(1)得，$\frac{a_n}{b_n}=(2n-1)\cdot2^{n-1}$，所以$M_n=1\times2^0+3\times2^1+\cdots+(2n-1)\cdot2^{n-1}$， ①

$2M_n=1\times2^1+3\times2^2+\cdots+(2n-3)\cdot2^{n-1}+(2n-1)\cdot2^n$， ②

①-②得，$-M_n=1+2\times2^1+2\times2^2+\cdots+2\times2^{n-1}-(2n-1)\cdot2^n=1+\frac{4(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n-1)\cdot2^n=(3-2n)\cdot2^n-3$，所以$M_n=(2n-3)\cdot2^n+3$.

20.解：(1)连接BD交AC于点O，因为四边形ABCD为菱形，所以$AC\perp BD$，

以O为原点，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$正方向为x轴，y轴，作z轴$/\!/DD_1$，建立空间直角坐标系，

因为AB=BC=2，$\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，所以$AC=\sqrt{4+4-8\cos\frac{2\pi}{3}}=2\sqrt{3}$，BD=2，所以$B(0,1,0)$，$D(0,-1,0)$，$C_1(-\sqrt{3},0,3)$，$G(0,-1,2)$，所以$\overrightarrow{DB}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BC_1}=(-\sqrt{3},-1,3)$，$\overrightarrow{BG}=(0,-2,2)$，设平面$BC_1G$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=-\sqrt{3}x-y+3z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BG}=-2y+2z=0,\end{cases}$令$x=2$，则$\boldsymbol{n}=(2,\sqrt{3},\sqrt{3})$，所以点$D$到平面$BC_1G$的距离$d=\frac{|\overrightarrow{DB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{30}}{5}$.

(2)由直四棱柱的结构特征知，平面$ADD_1A_1/\!/$平面BCC_1B_1，因为平面$AGC_1\cap$平面$BCC_1B_1=C_1E$，平面$AGC_1\cap$平面$ADD_1A_1=AG$，所以$AG/\!/C_1E$，同理$C_1G/\!/AE$，所以四边形AGC_1E为平行四边形，所以$AG=C_1E$，又$AD=B_1C_1$，$\angle ADG=\angle C_1B_1E=\frac{\pi}{2}$，所以$\triangle ADG\cong\triangle C_1B_1E$，

所以$B_1E=DG=2$，所以$BE=1$，所以$E(0,1,1)$，又$A(\sqrt{3},0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(-\sqrt{3},0,0)$，所以$\overrightarrow{AE}=(-\sqrt{3},1,1)$，$\overrightarrow{CE}=(\sqrt{3},1,1)$，$\overrightarrow{BE}=(0,0,1)$，

设平面AEC的法向量为$\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AE}=-\sqrt{3}x_1+y_1+z_1=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CE}=\sqrt{3}x_1+y_1+z_1=0,\end{cases}$令$y_1=1$，则$\boldsymbol{n}_1=(0,1,-1)$，

设平面BEC的法向量为$\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BE}=z_2=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{CE}=\sqrt{3}x_2+y_2+z_2=0,\end{cases}$令$x_2=1$，则$\boldsymbol{n}_2=(1,-\sqrt{3},0)$，

所以平面AEC与平面BEC夹角的余弦值为$|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\times2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

21.(1)解：当点P为椭圆上或下顶点时，$\triangle PAB$的面积最大，即$\frac{1}{2}\cdot2ab=2$，所以$ab=2$，又$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$a^2=b^2+c^2$，故$a=2$，$b=1$，所以椭圆$E$的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)证明：设直线MN的方程为$x=ty+1$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则$H(4,y_1)$，联立直线MN的方程和椭圆E的方程，得$(t^2+4)y^2+2ty-3=0$，$y_1+y_2=-\frac{2t}{t^2+4}$，$y_1y_2=-\frac{3}{t^2+4}$，直线$HN$的方程为$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{4-x_2}(x-4)$，令$y=0$，得$x=4-\frac{4y_1-y_1x_2}{y_1-y_2}=4-\frac{4y_1-y_1(ty_2+1)}{y_1-y_2}=4-\frac{3y_1-ty_1y_2}{y_1-y_2}$，又$y_1+y_2=-\frac{2t}{t^2+4}$，$y_1y_2=-\frac{3}{t^2+4}$，故$ty_1y_2=\frac{3}{2}(y_1+y_2)$，所以$x=4-\frac{3y_1-\frac{3}{2}(y_1+y_2)}{y_1-y_2}=\frac{5}{2}$，即直线$HN$与$x$轴的交点为定点$\left(\frac{5}{2},0\right)$.

22.解：(1)由样本频率分布直方图得，进入面试环节的频率为$(0.006+0.008+0.016)\times10=0.3$，

则样本中共有30人进入面试环节，70人没有进入面试环节.

从该样本中随机抽取2名学生的笔试成绩，基本事件总数为C_{100}^2，

设“抽取的2名学生中恰有1名学生进入面试环节”为事件A，则事件A包含的基本事件的个数为$C_{70}^1C_{30}^1$，因为每个基本事件出现的可能性都相等，所以$P(A)=\frac{C_{70}^1C_{30}^1}{C_{100}^2}=\frac{14}{33}$，即抽取的2名学生中恰有1名学生进入面试环节的概率为$\frac{14}{33}$.

(2)由样本频率分布直方图得，样本平均数的估计值为$\mu=10\times(35\times0.006+45\times0.012+55\times0.018+65\times0.034+75\times0.016+85\times0.008+95\times0.006)=64$，则所有报考某试点高校的学生的成绩X近似服从正态分布$N(64,15^2)$.

因为$\mu+2\sigma=94$，所以$P(X>94)\approx\frac{1-0.9544}{2}=0.0228$，

故这10 000名报考参赛学生中成绩超过94分的学生数估计为$0.0228\times10\,000=228$.