第 8 期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B

提示:由已知,得 $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{2-(-3)}{1+2\times(-3)}=-1$.故选 B.

2.D

提示:因为 $\tan\alpha,\tan\beta$ 是方程 $x^2-5x-3=0$ 的两个实数根,所以 $\tan\alpha+\tan\beta=5$,$\tan\alpha\tan\beta=-3$.

所以 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{5}{1-(-3)}=\dfrac{5}{4}$.故选 D.

3.C

提示:因为 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$,$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$,

所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

所以 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\alpha\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{3}=\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$.故选 C.

4.C

提示:原式 $=\cos54°\cos24°+\sin24°\sin(180°-54°)$

$=\cos54°\cos24°+\sin24°\sin54°=\cos30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

故选 C.

5.C

提示:由已知,得 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$,所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{\sqrt{10}}{10}-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 因为 $0<\alpha$,$\beta<\dfrac{\pi}{2}$,所以 $0<\alpha+\beta<\pi$,所以 $\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{4}$.故选 C.

6.B

提示:由 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$,且 $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$,可得 $\sin^2\alpha=\cos^2\beta$,则 $\sin\alpha=\pm\cos\beta$,即 $\sin\alpha\pm\cos\beta=0$.所以"$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$"是"$\sin\alpha+\cos\beta=0$"的必要条件但不是充分条件.故选 B.

7.A

提示:由 $\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta=\dfrac{5}{9}$,得 $\sin\theta\cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

因为 θ 是第三象限角,所以 $\sin\theta<0$,$\cos\theta<0$,所以 $\sin\theta\cos\theta>0$,所以 $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.故选 A.

8.D

提示:令 $f(x)=0$,得 $a=\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$,即 $\dfrac{a}{2}=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$. 因为 $x\in[0,\pi]$, 所以 $x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right]$.所以函数 $f(x)$ 在 $x\in[0,\pi]$ 上有两个不同的零点, 等价于直线 $y=\dfrac{a}{2}$ 与 $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象在 $x\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right]$ 上有两个不同的交点.结合余弦函数在 $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right]$ 上的图象,可知 $-1<\dfrac{a}{2}\leqslant-\dfrac{1}{2}$,解得 $-2<a\leqslant-1$.故选 D.

二、多项选择题

9.AD

提示:由已知,得 $(3\sin\alpha-\cos\alpha)^2=5$,即 $9\sin^2\alpha-6\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha=5=5\sin^2\alpha+5\cos^2\alpha$, 整理可得 $2\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cdot\cos\alpha-2\cos^2\alpha=0$,解得 $\sin\alpha=2\cos\alpha$,或 $2\sin\alpha=-\cos\alpha$.所以 $\tan\alpha=2$,或 $\tan\alpha=-\dfrac{1}{2}$.故选 AD.

10.BD

提示:$\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\cos\alpha-\sin\dfrac{\pi}{3}\sin\alpha\right)=2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)$;$\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha=2\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\alpha-\cos\dfrac{\pi}{6}\sin\alpha\right)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)$.故选 BD.

11.BCD

提示:$\sin5\theta+\sin3\theta=\sin(4\theta+\theta)+\sin(4\theta-\theta)=2\sin4\theta\cos\theta$,故A 正确;$\cos3\theta-\cos5\theta=\cos(4\theta-\theta)-\cos(4\theta+\theta)=2\sin4\theta\sin\theta$,故 B 错误;$\sin3\theta-\sin5\theta=\sin(4\theta-\theta)-\sin(4\theta+\theta)=-2\cos4\theta\sin\theta$,故 C 错误;$\sin5\theta+\cos3\theta=\sin(4\theta+\theta)+\cos(4\theta-\theta)=\sin4\theta\cos\theta+\cos4\theta\sin\theta+\cos4\theta\cos\theta+\sin4\theta\sin\theta=(\cos4\theta+\sin4\theta)(\cos\theta+\sin\theta)=2\sin\left(4\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$,故 D 错误.故选 BCD.

12.BD

提示:$f(\theta)=\sin\left[a\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]+\cos\left(a\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin a\theta\cos\dfrac{a\pi}{4}+\cos a\theta\sin\dfrac{a\pi}{4}-\sin a\theta=\left(\cos\dfrac{a\pi}{4}-1\right)\sin a\theta+\sin\dfrac{a\pi}{4}\cos a\theta$,则其最大值为 $\sqrt{\left(\cos\dfrac{a\pi}{4}-1\right)^2+\left(\sin\dfrac{a\pi}{4}\right)^2}=\sqrt{2}$, 可得 $\cos\dfrac{a\pi}{4}=0$,所以 $\dfrac{a\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,解得 $a=2+4k$,$k\in\mathbf{Z}$.所以该函数的周期为 $\dfrac{2\pi}{|a|}=\dfrac{\pi}{|1+2k|}$,$k\in\mathbf{Z}$.结合选项可知选BD.

三、填空题

13.$\sin\alpha$

提示: 原式 $=\left(\dfrac{1}{\sin\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\cdot(1-\cos\alpha)=\dfrac{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha}=\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha}=\sin\alpha$.

14.$-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$

提示: 由已知式, 得 $1+\tan\alpha-\tan\beta-\tan\alpha\tan\beta=2$,即 $\tan\alpha-\tan\beta=1+\tan\alpha\tan\beta$.所以 $\tan(\beta-\alpha)=\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=-1$.

所以 $\beta-\alpha=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$.

15.$\dfrac{33}{65}$,$\dfrac{56}{33}$

提示:在 $\triangle ABC$ 中,A,$B\in(0,\pi)$,则 $\sin A>0$,$\sin B>0$.因为 $\cos A=\dfrac{3}{5}$,$\cos B=\dfrac{5}{13}$,所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\dfrac{4}{5}$,$\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\dfrac{12}{13}$.所以 $\cos C=\cos(\pi-A-B)=-\cos(A+B)=-\cos A\cos B+\sin A\sin B=-\dfrac{3}{5}\times\dfrac{5}{13}+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{12}{13}=\dfrac{33}{65}$.

若在 $\triangle ABC$ 中,$\sin A=\dfrac{4}{5}$,$\cos B=\dfrac{5}{13}$,则 $\cos A=\pm\dfrac{3}{5}$,$\sin B=\dfrac{12}{13}$.所以 $\tan A=\pm\dfrac{4}{3}$,$\tan B=\dfrac{12}{5}$.

当 $\tan A=\dfrac{4}{3}$ 时,$\tan C=\tan(\pi-A-B)=-\tan(A+B)=-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\dfrac{\frac{4}{3}+\frac{12}{5}}{1-\frac{4}{3}\times\frac{12}{5}}=\dfrac{56}{33}$;

当 $\tan A=-\dfrac{4}{3}$ 时,同理,得 $\tan C=-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\dfrac{-\frac{4}{3}+\frac{12}{5}}{1+\frac{4}{3}\times\frac{12}{5}}=-\dfrac{16}{63}$,则 $\tan A<0$,$\tan C<0$,得 A,C 均为钝角,这在三角形中是不可能的,应舍去.综上,$\tan C=\dfrac{56}{33}$.

16.$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

提示:$f(x)=\sin x+2\cos x=\sqrt{5}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\sin x+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\cdot\cos x\right)=\sqrt{5}\sin(x+\varphi)$,其中 $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$,$\sin\varphi=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.结合题意,可知当 $f(x)$ 取得最大值时,$x_0+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,得 $x_0=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi-\varphi$,$k\in\mathbf{Z}$,所以 $\sin x_0=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi-\varphi\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

四、解答题

17.**解**:(1)因为 $\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$,

所以 $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}=\dfrac{\frac{4}{3}-1}{\frac{4}{3}+1}=\dfrac{1}{7}$.

(2)因为 $\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$,

所以原式 $=-2\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha=\dfrac{-2\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{-2\tan\alpha-\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{-2\times\frac{4}{3}-\frac{16}{9}}{\frac{16}{9}+1}=-\dfrac{8}{5}$.

18.**解**:(1)因为 β 为锐角,$\cos\beta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,

所以 $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

因为 α,β 为锐角,即 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$,$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$,所以 $-\dfrac{\pi}{2}<-\beta<0$,得 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$,又 $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$,

所以 $\cos(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha-\beta)}=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$.

所以 $\sin\alpha=\sin[(\alpha-\beta)+\beta]=\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\cdot\sin\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{10}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}+\dfrac{7\sqrt{2}}{10}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

(2)由(1)知 $\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$,又 α 为锐角,所以 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. 所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

由 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$,$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$,得 $0<\alpha+\beta<\pi$,所以 $\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{4}$.

19.**解**:(1)$f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos x+a$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}\cos x+\cos x+a$

$=\sqrt{3}\sin x+\cos x+a=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+a$,

由函数 $f(x)$ 的最大值为 1,得 $2+a=1$,所以 $a=-1$.

(2)由 $f(x)=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-1\geqslant\sqrt{3}-1$,得 $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant x+\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,

解得 $\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$. 所以满足要求的 x 的取值集合为 $\left\{x\left|\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$.

20.**解**:(1)因为 $\sin\theta,\cos\theta$ 是方程 $2x^2-(\sqrt{3}-1)x+m=0$ 的两个实数根,

由韦达定理,得 $\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2},\\ \sin\theta\cos\theta=\dfrac{m}{2},\end{cases}$

所以 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+m=\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$,

得 $m=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) $\dfrac{\sin\theta}{1-\frac{1}{\tan\theta}}+\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta}=\dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

(3)由(1)知 $m=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,则原方程为 $2x^2-(\sqrt{3}-1)x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$,解得 $x=-\dfrac{1}{2}$,或 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $\theta\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$,所以 $\sin\theta<0$,$\cos\theta>0$.

又 $\sin\theta,\cos\theta$ 是上述方程的两个实数根,

所以 $\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$,$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $\cos^2\theta=\dfrac{3}{4}$.

21.(1)**证明**:由 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}$,

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{3}$,

联立解得 $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{5}{12}$,$\cos\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{12}$.所以 $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}=-5$,即 $\tan\alpha=-5\tan\beta$.所以 $\tan\alpha+5\tan\beta=0$.

(2)**解**:由 $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$,得 $\tan\alpha-\tan\beta=\tan(\alpha-\beta)(1+\tan\alpha\tan\beta)$,

所以 $\dfrac{\tan(\alpha-\beta)-\tan\alpha+\tan\beta}{\tan^2\alpha\tan(\alpha-\beta)}$

$=\dfrac{\tan(\alpha-\beta)-\tan(\alpha-\beta)(1+\tan\alpha\tan\beta)}{\tan^2\alpha\tan(\alpha-\beta)}$

$=\dfrac{-\tan(\alpha-\beta)\tan\alpha\tan\beta}{\tan^2\alpha\tan(\alpha-\beta)}=-\dfrac{\tan\beta}{\tan\alpha}=\dfrac{1}{5}$.

22.**解**:(1)由 $\begin{cases}\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{3}{4},\\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\end{cases}$ 且 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$,得 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$,$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$.同理,由 $\tan C=2$,得 $0<C<\dfrac{\pi}{2}$,得 $\sin C=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,$\cos C=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.所以 $\sin(C-\theta)=\sin C\cos\theta-\cos C\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{4}{5}-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

因为 $\lambda=1$, 所以 $\sin A\sin B\sin(C-\theta)=\sin^2C$, 所以 $\sin A\sin B=\dfrac{\sin^2C}{\sin(C-\theta)}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.所以 $\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan B}=\dfrac{\cos A}{\sin A}+\dfrac{\cos B}{\sin B}=\dfrac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\sin A\sin B}=\dfrac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}=\dfrac{\sin C}{\sin A\sin B}=\dfrac{1}{2}$.

(2)由(1)得 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$,$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$,

则由 $\sin A\sin B\sin(C-\theta)=\lambda\sin^2C$,

得 $\sin A\sin B\left(\dfrac{4}{5}\sin C-\dfrac{3}{5}\cos C\right)=\lambda\sin^2C$,

即 $\dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{4}{5}\sin C-\dfrac{3}{5}\cos C\right)=\dfrac{\sin^2C}{\sin A\sin B}$.

所以 $\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan B}+\dfrac{2}{\tan C}=\dfrac{\sin C}{\sin A\sin B}+\dfrac{2\cos C}{\sin C}=\dfrac{\sin^2C}{\sin A\sin B\sin C}+\dfrac{2\cos C}{\sin C}=\dfrac{1}{\sin C}\times\dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{4}{5}\sin C-\dfrac{3}{5}\cos C\right)+\dfrac{2\cos C}{\sin C}=\dfrac{1}{\lambda}\times\dfrac{4}{5}-\dfrac{1}{\lambda}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{\cos C}{\sin C}+\dfrac{2\cos C}{\sin C}$.

假设存在 λ,使得 $\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan B}+\dfrac{2}{\tan C}$ 为定值 k,

则由上式,

可得 $4\sin C-3\cos C+10\lambda\cos C=5\lambda k\sin C$ 恒成立,

则 $\begin{cases}4=5\lambda k,\\ 3=10\lambda,\end{cases}$ 解得 $k=\dfrac{8}{3}$,$\lambda=\dfrac{3}{10}$.

故存在 $\lambda=\dfrac{3}{10}$,使得 $\dfrac{1}{\tan A}+\dfrac{1}{\tan B}+\dfrac{2}{\tan C}$ 为定值,其定值为 $\dfrac{8}{3}$.

扫码免费下载
习题讲解 ppt

第 5 期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B

提示:因为 $A(1,2)$,$B(3,5)$,所以 $\overrightarrow{AB}=(2,3)$. 因为向量是可以平移的,所以 $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}=(2,3)$.故选 B.

2.A

提示:因为 $A(2,4)$,$B(-1,-5)$,$C(3,-2)$,所以 $\overrightarrow{AC}=(1,-6)$,$\overrightarrow{BA}=(3,9)$,$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}=(1,3)$.所以 $\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}=(2,-3)$.故选 A.

3.B

提示:因为 $\boldsymbol{a}=(1,2)$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3,2)$,所以 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=(-2,0)$.故选 B.

4.B

提示: 由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,3)$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-2,1)$, 得 $|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\times(-2)+3\times1=-1$.故选 B.

5.D

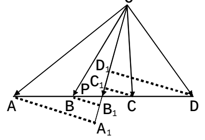
提示:由已知,得 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=(\lambda+1,1-\lambda)$,$\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=(\mu+1,1-\mu)$.由 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})$,得 $(\lambda+1)(\mu+1)+(1-\lambda)(1-\mu)=0$,整理得 $\lambda\mu=-1$.故选 D.

6.B

提示:根据向量共线的充要条件,可知集合 A 表示与 $\boldsymbol{y}$ 共线的向量;根据平面向量基本定理,可知集合 B 表示平面内的所有向量,故集合 A 是集合 B 的子集,即 $A\subseteq B$.故选 B.

7.D

提示:如图所示,过点 A,B,C,D 分别作线段 OP 或其延长线的垂线,垂足分别为 A_1,B_1,C_1,D_1,



(第 7 题图)

则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OA}|\cos\angle POA=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OA_1}|$,

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle POB=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OB_1}|$,

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OC}|\cos\angle POC=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OC_1}|$,

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OD}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OD}|\cos\angle POD=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OD_1}|$.

由题图可知,在 $|\overrightarrow{OA_1}|$,$|\overrightarrow{OB_1}|$,$|\overrightarrow{OC_1}|$,$|\overrightarrow{OD_1}|$ 中,$|\overrightarrow{OD_1}|$ 的值最小,所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OD}$ 的值最小.故选 D.

8.D

提示:由 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 互为相反向量,得 $\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,

所以 $|\boldsymbol{c}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,又 $|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{c}|=1$,代入可得 $|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3$. ①

由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot[-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})]=-|\boldsymbol{a}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$,

得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-5$. ②

联立①②,解得 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$.故选 D.

二、多项选择题

9.ABD

提示:对于 A,给定向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,由向量的减法运算可知总存在向量 $\boldsymbol{c}$,使 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,故 A 正确;对于 B,因为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 在同一平面内且两两不共线,所以 $\{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 可作为一组基,由平面向量基本定理可知总存在实数 λ 和 μ,使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c}$,故 B 正确;对于 C,当 $\boldsymbol{a}$ 分解到 $\boldsymbol{c}$ 方向的向量长度大于 μ 时,向量 $\boldsymbol{a}$ 无法按 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 方向分解,故 C 错误;对于 D,因为 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共线,所以 $4=|\boldsymbol{a}|^2=(\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c})^2=\lambda^2+\mu^2+2\lambda\mu\cos\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle<\lambda^2+\mu^2+2\lambda\mu$,即 $(\lambda+\mu)^2>4$,得 $\lambda+\mu>2$,故 D 正确.故选 ABD.

10.ACD

提示:因为 $|\boldsymbol{a}|=4$,$|\boldsymbol{b}|=2$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\geqslant3$,

所以向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影数量为 $|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}\geqslant\dfrac{3}{4}$.结合选项可知选 ACD.

11.ABD

提示:假设点 A,B,C 不能构成三角形,则只能三点共线.

因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2,-1)-(1,-3)=(1,2)$,

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(m+1,m-2)-(1,-3)=(m,m+1)$,

所以 $1\times(m+1)-2m=0$,解得 $m=1$.

所以若 A,B,C 三点能构成三角形,则 $m\neq1$.

故选 ABD.

12.AB

提示: 以 A 为坐标原点,AB 所在直线为 x 轴,AC 所在直线为 y 轴建立直角坐标系,则 $\overrightarrow{AE}=(3,1)$,$\overrightarrow{DG}=(-2,2)$,$\overrightarrow{CH}=(1,3)$,所以 $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DG}=(1,3)=\overrightarrow{CH}$,$|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$,$|\overrightarrow{CH}|=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$,故 A,B 正确;对于 C,$\overrightarrow{JB}=(1,-2)$,$\overrightarrow{DI}=(2,3)$,$\overrightarrow{JB}\cdot\overrightarrow{DI}=2-6=-4\neq0$,所以向量 $\overrightarrow{JB}$ 与 $\overrightarrow{DI}$ 不垂直,故 C 错误;对于 D,$|\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{HF}|=|\overrightarrow{CF}|=4$,故 D 错误.故选 AB.

三、填空题

13.$(1,0)$

提示:因为向量 $\boldsymbol{a}=(3,4)$,$\boldsymbol{b}=(1,2)$,

所以 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(3-2\times1,4-2\times2)=(1,0)$.

14.$-\dfrac{1}{2}$

提示:设点 $B(x,y)$.因为点 $A(-1,2)$,线段 AB 的中点坐标为 $(1,1)$,所以 $x=1\times2-(-1)=3$,$y=1\times2-2=0$,即 $B(3,0)$.所以 $\overrightarrow{AB}=(4,-2)$.因为 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\boldsymbol{a}=(1,\lambda)$ 共线,所以 $4\lambda+2=0$,解得 $\lambda=-\dfrac{1}{2}$.

15.$\sqrt{3}$

提示:因为 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$,

所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$. ①

同理, 因为 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$, 所以 $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,整理得 $\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. ②

由①②,得 $\boldsymbol{b}^2=3$,所以 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$.

16.$\boldsymbol{b}-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}$;$\sqrt{7}$

提示:因为在平行四边形 $ABCD$ 中,$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EC}$,$\overrightarrow{DF}=2\overrightarrow{FC}$, 所以 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}$.所以 $\overrightarrow{BF}^2=\boldsymbol{b}^2-\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{9}\boldsymbol{a}^2$.又 $|\overrightarrow{AB}|=|\boldsymbol{a}|=3$,$|\overrightarrow{AD}|=|\boldsymbol{b}|=2$,且 $|\overrightarrow{BF}|=\sqrt{3}$,代入得 $3=4-\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+1$,解得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$.因为 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$,所以 $\overrightarrow{DE}^2=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{4}\boldsymbol{b}^2=9-3+1=7$,所以 $|\overrightarrow{DE}|=\sqrt{7}$.

四、解答题

17.(1)**证明**:根据题意,得 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量,假设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线,则 $\exists k\in\mathbf{R}$,使得 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$,即 $\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2=k(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)$,所以 $(1-k)\boldsymbol{e}_1+(3+2k)\boldsymbol{e}_2=\mathbf{0}$.因为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不平行,所以 $\begin{cases}1-k=0,\\ 3+2k=0,\end{cases}$ 该方程组无实数解. 所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线不成立, 即 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,所以 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$ 是平面向量的一组基.

(2)**解**:设 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=x(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)+y(\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)=(x+y)\boldsymbol{e}_1+(3y-2x)\boldsymbol{e}_2$,其中 $x,y\in\mathbf{R}$,

又 $\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$,由平面向量基本定理,得 $\begin{cases}x+y=3,\\ 3y-2x=-1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=2,\\ y=1.\end{cases}$ 所以 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

18.**解**:(1)由 $\boldsymbol{a}=(1,3)$,得 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.

(2)由 $\boldsymbol{a}=(1,3)$,$\boldsymbol{b}=(-2,1)$,

得 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(5,1)$,$\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}\right)$.

(3)向量 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 不平行.理由如下:

由(2)知,$\boldsymbol{m}=(5,1)$,$\boldsymbol{n}=\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}\right)$,

因为 $5\times\dfrac{5}{2}-1\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=14\neq0$,所以向量 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 不平行.

19.**解**:(1)由 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(4\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=-6$,

得 $8\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{b}^2=-6$,

又 $|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=2$,得 $8\times1^2-2\times1\times2\cos\theta-3\times2^2=-6$,

解得 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$.

因为 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$,所以 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

(2)由(1)及已知,得 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4\times1^2-4\times1\times2\times\dfrac{1}{2}+2^2=4$,所以 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$.

20.**解**:(1)由已知,得 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

(2)猜想 $AF\perp DE$,证明如下:

设正方形 $ABCD$ 的边长为 1.结合(1)可得 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DE}=\left(\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right)=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}^2-\dfrac{3}{4}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}^2=\dfrac{1}{2}\times1^2-\dfrac{3}{4}\times0-\dfrac{1}{2}\times1^2=0$.所以 $\overrightarrow{AF}\perp\overrightarrow{DE}$,即 $AF\perp DE$.

21.**解**:(1)由题意可得 $\overrightarrow{OA}=(6,0)$,$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}=(3,0)$,$\overrightarrow{CO}=(-1,-\sqrt{3})$,$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OM}=(2,-\sqrt{3})$,

故 $\cos\angle OCM=\dfrac{\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CM}}{|\overrightarrow{CO}|\cdot|\overrightarrow{CM}|}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$.

(2)设 $P(t,\sqrt{3})$,其中 $1\leqslant t\leqslant5$,则 $\overrightarrow{OA}-\lambda\overrightarrow{OP}=(6-\lambda t,-\sqrt{3}\lambda)$.又 $\overrightarrow{CM}=(2,-\sqrt{3})$,若 $(\overrightarrow{OA}-\lambda\overrightarrow{OP})\perp\overrightarrow{CM}$,则 $(\overrightarrow{OA}-\lambda\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{CM}=12-2\lambda t+3\lambda=0$,

可得 $(2t-3)\lambda=12$.

当 $t\neq\dfrac{3}{2}$ 时,λ 存在,此时,$\lambda=\dfrac{12}{2t-3}$,因为 $t\in\left[1,\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2},5\right]$,故 λ 的取值范围为 $(-\infty,-12]\cup\left[\dfrac{12}{7},+\infty\right)$.

22.(1)**证明**:由 $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{AB}=0$,

得 $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=0$,

即 $\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{OA}^2=0$,所以 $|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}|$.

同理,可得 $|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OB}|$.

所以 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$.

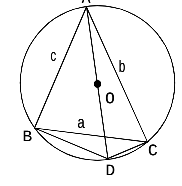
所以点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心.

(2)**解**:如图所示,延长 AO 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 D,连接 BD,CD,则 $\angle ABD=\angle ACD=90°$,根据题意,得 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AO}=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AO}=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle DAC-\dfrac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AB}|\cos\angle DAB=\dfrac{1}{2}(b^2-c^2)$.又 $b^2-2b+c^2=0$,

所以 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}(b^2-c^2)=\dfrac{1}{2}(b^2+b^2-2b)=b^2-b=\left(b-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$.

又 $c^2=-b^2+2b>0$,解得 $b\in(0,2)$,

所以 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AO}\in\left[-\dfrac{1}{4},2\right)$.



(第 22 题图)

第 6 期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C

提示：由余弦定理的推论，得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{9+16-4}{2\times3\times4}=\frac{7}{8}$.故选 C.

2.B

提示：由余弦定理，得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-2ac-2ac\cos B=7^2-2\times8-2\times8\cos\frac{\pi}{3}=25$，所以 $b=5$.故选 B.

3.B

提示：由正弦定理及 $B=\frac{\pi}{4}$，$AC=\sqrt{2}$，得 $\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{\pi}{4}}=2$，所以 $BC=2\sin A$.当 $BC=\sqrt{3}$ 时，$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$，充分性不成立；反之，当 $A=\frac{\pi}{3}$ 时，$BC=2\sin A=\sqrt{3}$，必要性成立.所以“$BC=\sqrt{3}$”是“$A=\frac{\pi}{3}$”的必要不充分条件.故选 B.

4.D

提示：由向量加法的平行四边形法则知，其中两向量的和向量应该与第三个向量的方向相反，结合选项可知选 D.

5.B

提示：根据题意，得 $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=1\times1\times\cos\pi+0+0+2\times2\times\cos0=3$.故选 B.

6.D

提示：由 $\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{OG}$，得 $\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{OG}$，化简得 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$，所以点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心.故选 D.

7.B

提示：由正弦定理及 $(a+c)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$，得 $(a+c)(a-c)=b(a-b)$，即 $a^2+b^2-c^2=ab$.所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$.又 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$.故选 B.

8.A

提示：根据题意，得 $AB\perp BC$，$AD=4\sqrt{3}$，$DC=2\sqrt{7}$，$\angle BAC=90°-49°=41°$，$\angle DAC=49°-19°=30°$，在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理，得 $DC^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cdot\cos30°$，即 $28=AC^2+48-12AC$，整理得 $(AC-2)(AC-10)=0$，因为 $\angle ADC>90°$，所以 $AC=10$.所以 $BC=AC\cdot\sin41°\approx10\times0.66=6.6$.故选 A.

二、多项选择题

9.BC

提示：根据题意，得 $AB\sin B<AC<AB\Rightarrow\frac{3}{2}<AC<\sqrt{3}$.

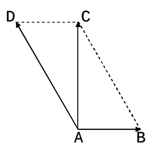
故选 BC.

10.BCD

提示：因为 $A=120°$，所以 $a>b$.又 a,b 是方程 $x^2-12x+35=0$ 的两个根，则 $a=7$，$b=5$，所以 $a-b=2$，故 A 错误，B 正确；根据余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $49=25+c^2-2\times5c\times\cos120°$，解得 $c=3$，或 $c=-8$（舍去），故 C 正确；$b+c-a=5+3-7=1$，故 D 正确.故选 BCD.

11.AC

提示：由题意，如图所示，$|\overrightarrow{AB}|=10$，$|\overrightarrow{AC}|=10\sqrt{3}$，且 $AC\perp AB$，作平行四边形 $ABCD$，则 $|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2}=20$，且 $\tan\angle DAC=\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{10}{10\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\angle DAC=30°$.所以船出发时行驶速度的大小为 20km/h，方向为北偏西 30°.故选 AC.



（第 11 题图）

12.BC

提示：在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $\cos\angle ACB=\frac{BC^2+AC^2-AB^2}{2BC\cdot AC}=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}=-\frac{1}{2}$，又 $\angle ACB\in(0,180°)$，所以 $\angle ACB=120°$，故 A 错误；若 CD 是中线，则 $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$，所以 $\overrightarrow{CD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})^2=\frac{1}{4}\times[25+2\times5\times3\times\cos120°+9]=\frac{19}{4}$，得 $CD=\frac{\sqrt{19}}{2}$，故 B 正确；若 CD 是角平分线，由 $S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ABC}$，得 $\frac{1}{2}\times5CD\sin60°+\frac{1}{2}\times3CD\sin60°=\frac{1}{2}\times5\times3\times\sin120°$，解得 $CD=\frac{15}{8}$，故 C 正确；若 D 是线段 AB 的三等分点，则 $\overrightarrow{CD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ 或 $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$，所以 $\overrightarrow{CD}^2=\frac{4}{9}\times25+\frac{4}{9}\times5\times3\times\cos120°+\frac{1}{9}\times9=\frac{79}{9}$，或 $\overrightarrow{CD}^2=\frac{1}{9}\times25+\frac{4}{9}\times5\times3\times\cos120°+\frac{4}{9}\times9=\frac{31}{9}$，所以 $CD=\frac{\sqrt{79}}{3}$ 或 $\frac{\sqrt{31}}{3}$，故 D 错误.故选 BC.

三、填空题

13.2

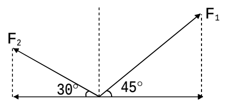
提示：由正弦定理及等比性质，得 $\frac{3a+b}{3\sin A+\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2$.

14.菱形

提示：由 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=0$，得 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，所以四边形 ABCD 是平行四边形.又 $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AC}=0$，即 $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，则 $\overrightarrow{DB}\perp\overrightarrow{AC}$，即对角线互相垂直，所以四边形 $ABCD$ 是菱形.

15.$\frac{\sqrt{6}}{2}$

提示：如图所示，因为物体处于平衡状态，所以水平方向的合力为 $\mathbf{0}$，所以 $|\boldsymbol{F}_1|\cdot\cos45°=|\boldsymbol{F}_2|\cos30°$，得 $\frac{|\boldsymbol{F}_1|}{|\boldsymbol{F}_2|}=\frac{\cos30°}{\cos45°}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.



（第 15 题图）

16.$\frac{\sqrt{73}}{3}$

提示：因为 $\angle ADC+\angle ADB=\pi$，所以 $\cos\angle ADC+\cos\angle ADB=0$，由余弦定理的推论，得 $\frac{AD^2+DC^2-AC^2}{2AD\cdot DC}+\frac{AD^2+DB^2-AB^2}{2AD\cdot DB}=0$.

又 $AB=3$，$AC=4$，$AD=\frac{2\sqrt{13}}{3}$，设 $BD=DE=EC=x$，代入上式，解得 $x=\frac{5}{3}$（负值舍去）.所以 $BC=5$.所以 $BA\perp AC$.所以 $\cos C=\frac{4}{5}$.

又 $CE=\frac{5}{3}$，在 $\triangle AEC$ 中，由余弦定理，得 $AE^2=AC^2+CE^2-2AC\cdot CE\cos C=4^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2-2\times4\times\frac{5}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{73}{9}$，所以 $AE=\frac{\sqrt{73}}{3}$.

四、解答题

17.**解**：(1)设 $D(x,y)$.因为 $A(-1,-2)$，$B(3,-1)$，$C(5,6)$，所以 $\overrightarrow{DC}=(5-x,6-y)$，$\overrightarrow{AB}=(4,1)$.

由平行四边形的性质，可得 $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$，即 $5-x=4$，且 $6-y=1$，解得 $x=1$，且 $y=5$.所以顶点 D 的坐标是 $(1,5)$.

(2)A,M,C 三点共线，证明如下：因为 $A(-1,-2)$，$C(5,6)$，$M(8,10)$，所以 $\overrightarrow{AC}=(6,8)$，$\overrightarrow{AM}=(9,12)=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

又 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AM}$ 有公共点 A，所以 A,M,C 三点共线.

18.**解**：(1)因为 $a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}$，$B=45°$，由正弦定理，得 $\frac{\sqrt{3}}{\sin A}=\frac{\sqrt{2}}{\sin45°}$，故 $\sin A=\frac{\sqrt{3}\sin45°}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $0°<A<180°$，所以 $A=60°$，或 $A=120°$.

当 $A=60°$ 时，$C=180°-60°-45°=75°$，

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos75°=(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2-2\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=2+\sqrt{3}\Rightarrow c=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$；

当 $A=120°$ 时，$C=180°-120°-45°=15°$，

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos15°=(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2-2\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=2-\sqrt{3}\Rightarrow c=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

(2)因为 $a=2$，$b=2\sqrt{2}$，$C=15°$，

所以 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos15°=2^2+(2\sqrt{2})^2-2\times2\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=8-4\sqrt{3}\Rightarrow c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2-2^2}{2\times2\sqrt{2}\times(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow A=30°$，$B=180°-30°-15°=135°$.

19.**解**：由 $a\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}b$ 及正弦定理，得 $\sin A\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B$，而 $\sin B\neq0$，所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又在锐角 $\triangle ABC$ 中，$A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(1)由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos\frac{\pi}{3}=7$，所以 $a=\sqrt{7}$.

(2)由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}=b^2+c^2-bc$，结合 $a^2=bc$，得 $b^2+c^2-2bc=0$，即 $(b-c)^2=0$，所以 $b=c$.

又 $A=\frac{\pi}{3}$，所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

20.**解**：(1)在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle BAC=2^2+1^2-2\times1\times2\times\cos120°=7$，所以 $BC=\sqrt{7}$.由正弦定理，得 $\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}$，所以 $\sin\angle ABC=\frac{AC\sin\angle BAC}{BC}=\frac{1\times\sin120°}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{14}$.

(2)在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，

得 $\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{4+7-1}{2\times2\times\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$，

所以在 $\text{Rt}\triangle DAB$ 中，$BD=\frac{AB}{\cos\angle ABC}=\frac{4\sqrt{7}}{5}$，

所以 $AD=\sqrt{BD^2-AB^2}=\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

又 $\angle CAD=120°-90°=30°$，所以 $\triangle ADC$ 的面积为 $\frac{1}{2}AD\cdot AC\sin\angle CAD=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{5}\times1\times\sin30°=\frac{\sqrt{3}}{10}$.

21.**解**：根据题意，经过 t 秒后，$P(-1+t,2+t)$，$Q(-2+3t,-1+2t)$，则 $\overrightarrow{PQ}=(-1+2t,-3+t)$.

(1)$|\overrightarrow{PQ}|^2=(-1+2t)^2+(-3+t)^2=5t^2-10t+10=5(t-1)^2+5\geqslant5$.

所以当 $t=1$ 时，$|\overrightarrow{PQ}|$ 取得最小值 $\sqrt{5}$.所以经过 1 秒后 $|PQ|$ 最小，最小值是 $\sqrt{5}$.

(2)因为 $P_0(-1,2)$，$Q_0(-2,-1)$，所以 $\overrightarrow{P_0Q_0}=(-1,-3)$.

由 $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{P_0Q_0}$，得 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{P_0Q_0}=-(-1+2t)-3(-3+t)=-5t+10=0$，解得 $t=2$.所以经过 2 秒后 $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{P_0Q_0}$.

22.**解**：(1)以 A 为原点，AB，AD 所在直线分别为 x 轴，y 轴，建立平面直角坐标系，则 $A(0,0)$，$D(0,6)$，$E(3,0)$，$F(6,2)$，所以 $\overrightarrow{DE}=(3,-6)$，$\overrightarrow{AF}=(6,2)$.因为 $\angle EMF$ 就是 $\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{AF}$ 的夹角，所以 $\cos\angle EMF=\frac{\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AF}}{|\overrightarrow{DE}||\overrightarrow{AF}|}=\frac{3\times6-6\times2}{\sqrt{3^2+(-6)^2}\times\sqrt{6^2+2^2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

故 $\angle EMF$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{10}$.

(2)设 $M(x,y)$，则 $\overrightarrow{DM}=(x,y-6)$，又 $\overrightarrow{DE}=(3,-6)$，因为 $\overrightarrow{DM}\,/\!/\,\overrightarrow{DE}$，所以 $3(y-6)+6x=0$，即 $2x+y-6=0$. ①

因为 $\overrightarrow{AM}=(x,y)$，$\overrightarrow{AF}=(6,2)$，$\overrightarrow{AM}\,/\!/\,\overrightarrow{AF}$，

所以 $2x-6y=0$，即 $x=3y$. ②

联立①②，解得 $x=\frac{18}{7}$，$y=\frac{6}{7}$，所以 $M\left(\frac{18}{7},\frac{6}{7}\right)$.

由题得 $\overrightarrow{EF}=(3,2)$.

假设存在点 P，使得 $EF\perp MP$，当点 P 在 AB 上时，设 $P(a,0)(0\leqslant a\leqslant6)$，则 $\overrightarrow{MP}=\left(a-\frac{18}{7},-\frac{6}{7}\right)$，

所以 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{MP}=3\left(a-\frac{18}{7}\right)-2\times\frac{6}{7}=0$，解得 $a=\frac{22}{7}$，

所以 $P\left(\frac{22}{7},0\right)$，$\overrightarrow{MP}=\left(\frac{4}{7},-\frac{6}{7}\right)$，

所以 $|\overrightarrow{MP}|=\sqrt{\left(\frac{4}{7}\right)^2+\left(-\frac{6}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{13}}{7}$；

当点 P 在 BC 上时，设 $P(6,b)(0<b\leqslant6)$，

则 $\overrightarrow{MP}=\left(\frac{24}{7},b-\frac{6}{7}\right)$，所以 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{MP}=3\times\frac{24}{7}+2\left(b-\frac{6}{7}\right)=0$，

解得 $b=-\frac{30}{7}$，舍去.

综上，存在点 P，使得 $EF\perp MP$，MP 的长度为 $\frac{2\sqrt{13}}{7}$.

第 7 期

第2~3版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.C

提示：质量、距离、体重都没有方向，不是向量；力既有方向又有大小，是向量.故选 C.

2.D

提示：因为点 C 是线段 AB 的中点，所以 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 是相反向量，$\overrightarrow{CA}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 是相等向量，$\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 是平行向量，$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\mathbf{0}$.故选 D.

3.A

提示：根据题意，得 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AQ}=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AQ})=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{QC}=\mathbf{0}$.故选 A.

4.A

提示：由 $\boldsymbol{a}=(2,-1)$，$\boldsymbol{b}=(-1,3)$，得 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,1)$.设向量 (x,y) 与 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 平行，则 $3y-x=0$.观察各选项，只有 A 满足，故选 A.

5.B

提示：因为 $\boldsymbol{a}=(3,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,2)$，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(5,3)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,-1)$.

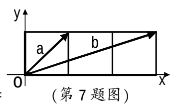
所以 $\cos\langle\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\rangle=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\frac{5\times1-3\times1}{\sqrt{5^2+3^2}\times\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{17}}{17}$.故选 B.

6.C

提示：由 $a\cos B-b\cos A=c$，得 $a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=c$，整理得 $a^2=b^2+c^2$.所以 $A=\frac{\pi}{2}$.又 $C=\frac{\pi}{5}$，所以 $B=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}=\frac{3\pi}{10}$.故选 C.

7.D

提示：建立如图所示平面直角坐标系，则 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(3,1)$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(4,2)$.所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.故选 D.



（第 7 题图）

8.D

提示：由题意，得 $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4\lambda}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{4\mu}\overrightarrow{AN}$.

因为 M,N,G 三点共线，所以 $\frac{1}{4\lambda}+\frac{1}{4\mu}=1$.所以 $\lambda+4\mu=(\lambda+4\mu)\left(\frac{1}{4\lambda}+\frac{1}{4\mu}\right)=\frac{5}{4}+\frac{\mu}{\lambda}+\frac{\lambda}{4\mu}\geqslant\frac{5}{4}+2\cdot\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{4\mu}}=\frac{9}{4}$，当且仅当 $\frac{\mu}{\lambda}=\frac{\lambda}{4\mu}$，即 $\lambda=\frac{3}{4}$，$\mu=\frac{3}{8}$ 时，等号成立.所以 $\lambda+4\mu$ 的最小值为 $\frac{9}{4}$.故选 D.

二、多项选择题

9.ABD

提示：因为 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$，所以 $AD\,/\!/\,BC$，且 $AD=2BC$，所以 $\triangle AED\backsim\triangle CEB$，得 $\frac{DE}{EB}=\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{BC}=2$，所以 $AE=2EC$，所以 $\overrightarrow{AE}-2\overrightarrow{EC}=\mathbf{0}$，故 A 正确；同理，得 $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$，故 B 正确，C 错误；$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，故 D 正确.故选 ABD.

10.BC

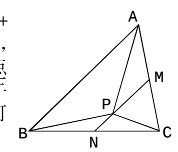
提示：由题意得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\sqrt{3}\times2\times\cos30°=6$.所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=(2\sqrt{3})^2+2\times6+2^2=28$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=(2\sqrt{3})^2-2\times6+2^2=4$，得 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2\sqrt{7}$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$.所以以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的对角线的长度分别为 $2\sqrt{7}$ 和 2.故选 BC.

11.AD

提示：因为 $\boldsymbol{a}=(-2,1)$，$\boldsymbol{b}=(k,-3)$，所以 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(-2-2k,7)$.又 $\boldsymbol{c}=(1,2)$，$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$，所以 $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=-2-2k+7\times2=0$，解得 $k=6$.所以 $\boldsymbol{b}=(6,-3)$，$|\boldsymbol{b}|=3\sqrt{5}$.所以与 $\boldsymbol{b}$ 共线的单位向量为 $\pm\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\pm\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.故选 AD.

12.ACD

提示：对于 A，取 AC,BC 的中点 M,N，连接 PM,PN，由 $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，得 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=-2(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$，所以 $\overrightarrow{PM}=-2\overrightarrow{PN}$，所以 P,M,N 三点共线，且 P 是 MN 上靠近点 N 的三等分点，$MN=\frac{1}{2}AB$，如图所示，可知 $\frac{S_{\triangle PAC}}{S_{\triangle PAB}}=\frac{2S_{\triangle PMC}}{S_{\triangle PAB}}=\frac{2PM}{AB}=\frac{2\times\frac{2}{3}MN}{AB}=2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$，故 A 正确；对于 B，由 $a>b$，得 $A>B$，所以满足条件的三角形只有一个，故 B 错误；对于 C，由 $\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}|}=-\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AC}|}$，得 $|\overrightarrow{BC}|\cos(\pi-B)+|\overrightarrow{BC}|\cos C=0$，所以 $\cos C=\cos B$，又 $B,C\in(0,\pi)$，所以 $B=C$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，故 C 正确；对于 D，因为点 P 是 $\triangle ABC$ 的重心，所以 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，即 $\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}$，代入 $2a\cdot\overrightarrow{PA}+b\cdot\overrightarrow{PB}+\frac{2\sqrt{3}}{3}c\cdot\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$ 中并整理，得 $(b-2a)\overrightarrow{PB}+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}c-2a\right)\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$，所以 $\begin{cases}b-2a=0,\\ \frac{2\sqrt{3}}{3}c-2a=0,\end{cases}$ 解得 $b=2a$，$c=\sqrt{3}a$，所以 $a^2+c^2=a^2+3a^2=4a^2=b^2$，所以 $B=\frac{\pi}{2}$，即 $\triangle ABC$ 为直角三角形，故 D 正确.故选 ACD.



（第 12 题图）

三、填空题

13.8

提示：由已知，得 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times3^2+3\times4\times\cos\frac{\pi}{3}=24$，故 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影数量为 $\frac{(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{24}{3}=8$.

14.[6,14]

提示：由公式 $||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 及等号成立的条件可知，当船速与水速方向相同时，船的实际航行的速度最大，为 10+4=14(km/h)；当船速与水速方向相反时，船的实际航行的速度最小，为 10-4=6(km/h).故船的实际航行的速度的取值范围为[6,14].

15.2

提示：在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理，得 $\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{AB}{\sin C}$，所以 $\sin C=\frac{AB\sin\angle BAC}{BC}=\frac{2\sin60°}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.所以 $C=45°$ 或 135°.又 $\angle BAC=60°$，所以 $C=45°$.所以 $B=180°-45°-60°=75°$.因为 AD 为 $\angle BAC$ 的平分线，且 $\angle BAC=60°$，所以 $\angle BAD=30°$，所以 $\angle ADB=75°$.所以 $B=\angle ADB$.所以 $AD=AB=2$.

16.$\frac{1}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$；$\frac{13}{24}$

提示：根据题意，得 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$，所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\left(\frac{1}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}\right)=\frac{1}{12}(2\boldsymbol{a}^2+5\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}^2)$.

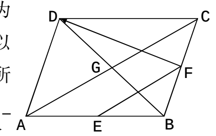
设 $AB=m$，$AC=n$，则在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A=m^2+n^2-mn=1$，所以 $m^2+n^2=1+mn\geqslant2mn$，得 $mn\leqslant1$，当且仅当 $m=n=1$ 时，等号成立.所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{1}{12}(2\boldsymbol{a}^2+5\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}^2)=\frac{1}{12}\left(2m^2+\frac{5}{2}mn+2n^2\right)=\frac{1}{12}\left(\frac{9}{2}mn+2\right)\leqslant\frac{1}{12}\times\left(\frac{9}{2}\times1+2\right)=\frac{13}{24}$.所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$ 的最大值为 $\frac{13}{24}$.

四、解答题

17.**解**：(1)四边形 $ABCD$ 是菱形.理由如下：

因为 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AD}|$，所以 $AB=AD$.又四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以四边形 $ABCD$ 是菱形.

(2)因为在平行四边形 $ABCD$ 中，G 为 AC 与 BD 的交点，所以 $GC=\frac{1}{2}AC$.因为 EF 是 $\triangle ABC$ 的中位线，所以 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.所以 $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{EF}$.所以 $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}-(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF})=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FD}$.作出向量 $\overrightarrow{FD}$ 如图所示.



（第 17 题图）

18.**解**：(1)由已知，得 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA}=(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-2(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=-5\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，所以 $x=0$，$y=-5$.

(2)若 A,B,C 三点共线，则存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$，即 $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$.

又 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OB}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，代入上式并整理，得 $(x-1)\boldsymbol{a}+(y-2)\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}-3\lambda\boldsymbol{b}$，

所以 $x-1=\lambda$，且 $y-2=-3\lambda$，解得 $x=1+\lambda$，$y=2-3\lambda$.

所以 $xy=(1+\lambda)(2-3\lambda)=-3\lambda^2-\lambda+2=-3\left(\lambda+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{25}{12}$.所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{12}$.

19.**解**：选择条件①：

(1)由 $b^2+\sqrt{2}ac=a^2+c^2$，得 $a^2+c^2-b^2=\sqrt{2}ac$，所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{2}ac}{2ac}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$.

(2)由正弦定理，得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，又 $A=\frac{\pi}{3}$，$b=\sqrt{2}$，$B=\frac{\pi}{4}$，所以 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\sqrt{3}$.

由 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得 $3=2+c^2-2\sqrt{2}c\cdot\frac{1}{2}$，解得 $c=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$（舍去），或 $c=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}$.

选择条件②：

(1)由正弦定理，得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以 $a\sin B=b\sin A$.

又 $a\cos B=b\sin A$，所以 $\sin B=\cos B$，得 $\tan B=1$.

又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$.

(2)同条件①中(2).

20.**解**：(1)设 $AB=h$，由题意，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$AC=\frac{h}{\sin45°}=\sqrt{2}h$；在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中，$AD=\frac{h}{\sin30°}=2h$.

在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理，得 $AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cdot\cos\angle ACD$，即 $(2h)^2=(\sqrt{2}h)^2+4^2-2\sqrt{2}h\times4\cos60°$，解得 $h=\sqrt{10}-\sqrt{2}$，或 $h=-\sqrt{10}-\sqrt{2}$（舍去）.所以塔高 $AB=\sqrt{10}-\sqrt{2}$.

(2)在 $\triangle CBD$ 中，由正弦定理，得 $\frac{CB}{\sin\angle BDC}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}$，所以 $CB=\frac{CD\sin\angle BDC}{\sin\angle CBD}=\frac{m\sin\beta}{\sin(\pi-\alpha-\beta)}=\frac{m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

所以在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$AB=CB\tan\angle ACB=\frac{m\sin\beta\tan\theta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

所以塔高 $AB=\frac{m\sin\beta\tan\theta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

21.(1)**解**：设 $\overrightarrow{BP}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}$，则 $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BC}=x\overrightarrow{BA}+(y-1)\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BA}=(x-1)\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}$.

由已知，得 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，

因为 $\overrightarrow{BA}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 不共线，$\overrightarrow{CP}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线，$\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{AE}$ 共线，所以 $\begin{cases}\frac{x}{\frac{2}{3}}=\frac{y-1}{-1},\\ \frac{x-1}{-1}=\frac{y}{\frac{1}{3}},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{4}{7},\\ y=\frac{1}{7},\end{cases}$ 所以 $\overrightarrow{BP}=\frac{4}{7}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{7}\overrightarrow{BC}$.

(2)**证明**：设正 $\triangle ABC$ 的边长为 a，结合(1)可得 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CD}=\left(\frac{4}{7}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{7}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right)=\frac{8}{21}\overrightarrow{BA}^2-\frac{10}{21}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}-\frac{1}{7}\overrightarrow{BC}^2=\frac{8}{21}a^2-\frac{10}{21}a^2\cos\frac{\pi}{3}-\frac{1}{7}a^2=0$.所以 $\overrightarrow{BP}\perp\overrightarrow{CD}$，即 $BP\perp CD$.

22.**解**：(1)由题意，因为 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(3,1)$，所以 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$.因为 $\theta=\frac{\pi}{3}$，$|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$，所以 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{2}$.所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)\cdot(3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=3\boldsymbol{e}_1^2+4\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_2^2=3+4\times\frac{1}{2}+1=6$，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)^2}=\sqrt{\boldsymbol{e}_1^2+2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_2^2}=\sqrt{3}$.所以 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影数量为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$.

(2)因为 $\boldsymbol{c}=(2,-1)=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，$|\boldsymbol{c}|\leqslant\sqrt{2}$，所以 $\boldsymbol{c}^2=(2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)^2=4\boldsymbol{e}_1^2-4\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_2^2=5-4\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\leqslant2$，得 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2\geqslant\frac{3}{4}$.

因为 $\boldsymbol{a}=(1,1)=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=(3,1)=3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)\cdot(3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=4+4\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2$，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)^2}=\sqrt{2+2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{(3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)^2}=\sqrt{10+6\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2}$.所以 $\cos^2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\left(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\right)^2=\frac{(4+4\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2)^2}{(2+2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2)(10+6\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2)}=\frac{4+4\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2}{5+3\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2}$.令 $t=\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2$，则 $t\geqslant\frac{3}{4}$，$\cos^2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{4+4t}{5+3t}$.又 $y=\frac{4+4t}{5+3t}=\frac{4}{3}-\frac{8}{3(5+3t)}$ 在 $\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$ 上单调递增，所以 $\cos^2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{4+4t}{5+3t}\in\left[\frac{28}{29},\frac{4}{3}\right)$.所以 $\cos^2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 的最小值为 $\frac{28}{29}$.