由 $OA=\sqrt{6}$，得 $A(0,\sqrt{6})$，则 $f(0)=2\sqrt{3}\cos\varphi=\sqrt{6}$，得 $\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，结合图象可得 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$.所以 $f(x)=2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)$.

(2)由(1)得 $g(x)=\sqrt{3}f(x)-3a=6\cos\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)-3a$.令 $g(x)=0$，得 $2\cos\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)=a$，则 $g(x)$在$(0,13]$上的零点个数，即 $y=2\cos\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)$的图象与直线 $y=a$ 在$(0,13]$上的交点个数.

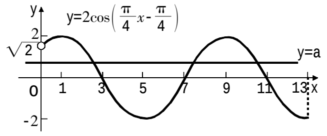
作出 $y=2\cos\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)$的图象与直线 $y=a$，如图所示，可知当 $a<-2$ 或 $a>2$ 时，两图象有 0 个交点；

当 $a=-2$ 或 $a=2$ 时，两图象有 2 个交点；

当 $-2<a\leqslant\sqrt{2}$ 时，两图象有 3 个交点；

当 $\sqrt{2}<a<2$ 时，两图象有 4 个交点.

所以，当 $a<-2$ 或 $a>2$ 时，$g(x)$在$(0,13]$上的零点个数为 0；当 $a=-2$ 或 $a=2$ 时，$g(x)$在$(0,13]$上的零点个数为 2；当 $-2<a\leqslant\sqrt{2}$ 时，$g(x)$在$(0,13]$上的零点个数为 3；当 $\sqrt{2}<a<2$ 时，$g(x)$在$(0,13]$上的零点个数为 4.



(第 21 题图)

22.**解**：(1)选①②：由①，得 $f(0)=2\sqrt{2}$，即 $2\cos\varphi+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，所以 $\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$.又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

由②，得 $\frac{1}{2}\omega+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $\omega=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.又 $0<\omega<2$，所以 $\omega=\frac{\pi}{2}$.所以 $f(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}$.

选①③：由①，得 $f(0)=2\sqrt{2}$，即 $2\cos\varphi+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$，所以 $\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$.又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

由③，得 $T=2\times2=4$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{2}$.

所以 $f(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}$.

选②③：由③，得 $T=2\times2=4$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{2}$.

由②，得 $\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.所以 $f(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}$.

(2)当 $a\in(-2,0)$时，$2a+\frac{3}{2}\in\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$.

若 $x\in\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$，则 $\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}\in(-\pi,\pi)$.

记 $m=\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}$，$m_1=\frac{\pi}{2}\left(2a+\frac{3}{2}\right)+\frac{\pi}{4}=\pi a+\pi\in(-\pi,\pi)$，$m_2=\frac{\pi}{2}a+\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.

因为 $f\left(2a+\frac{3}{2}\right)>f(a)$，$y=2\cos m+\sqrt{2}$ 在 $m\in(-\pi,\pi)$上关于 y 轴对称，

所以$|m_1|<|m_2|$，即$|\pi a+\pi|<\left|\frac{\pi}{2}a+\frac{\pi}{4}\right|$，得$(a+1)^2<\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{4}\right)^2$，解得$-\frac{3}{2}<a<-\frac{5}{6}$.

所以存在实数 a 满足要求，且实数 a 的取值范围是$\left(-\frac{3}{2},-\frac{5}{6}\right)$.

第4期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.D

提示：身高和温度没有方向，不是向量，故 A，B 错误；有向线段由起点、方向和长度三个要素确定，故 C 错误；根据有向线段的定义可知 D 正确.故选 D.

2.B

提示：因为点 O 是正$\triangle ABC$ 的中心，所以$|\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{BO}|=|\overrightarrow{OC}|$.故选 B.

3.B

提示：由$\overrightarrow{AB}=3\boldsymbol{e}$，$\overrightarrow{CD}=-3\boldsymbol{e}$，得$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，即 $AB=DC$，且 $AB/\!/DC$，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.又$|\overrightarrow{AD}|=3$，所以$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|$，所以四边形 $ABCD$ 是菱形.

故选 B.

4.D

提示：原式$=(6-4+4)\boldsymbol{a}+(-6+8)\boldsymbol{b}+(6-4-2)\boldsymbol{c}=6\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$.故选 D.

5.B

提示：对于非零向量 a，b，a$/\!/$b$\Leftrightarrow$a 与 b 方向相同或相反，$|a+b|=|a|+|b|\Leftrightarrow$a 与 b 方向相同，所以“a$/\!/$b”是“$|a+b|=|a|+|b|$”的必要不充分条件.故选 B.

6.A

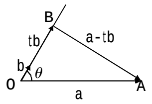
提示：原式$=2(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$.故选 A.

7.B

提示：由已知，得$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=3\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}=3\overrightarrow{AB}$，所以$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{AB}$共线，又$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{AB}$有公共点 A，所以 A,B,D 三点共线，故 B 正确；因为$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-4\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}$ 与$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 不共线，所以 A,B,C 三点不共线，故 A 错误；又 A,B,D 三点共线，则 A,C,D 不共线，B,C,D 不共线，故 C，D 错误.故选 B.

8.C

提示：如图所示，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=t\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}$.记 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，由垂线段最短，可知当$\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{OB}$时，$|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{b}|$最小，此时$|\overrightarrow{OB}|=1$，又$|\overrightarrow{OA}|=|\boldsymbol{a}|=2$，所以 $\cos\theta=\frac{OB}{OA}=\frac{1}{2}$.又 $0°\leqslant\theta\leqslant180°$，所以 $\theta=60°$.故选 C.



(第 8 题图)

二、多项选择题

9.ABD

提示：由已知，得 $\boldsymbol{b}=-6\boldsymbol{e}=-3\cdot2\boldsymbol{e}=-3\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相反，且 $3|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.故选 ABD.

10.BC

提示：$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OD}\neq\mathbf{0}$；$\overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PN}=\mathbf{0}$；$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\mathbf{0}$；$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}\neq\mathbf{0}$.故选 BC.

11.AD

提示：由$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向不相同，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta\in(0,\pi]$，故 C 错误；对于 A，当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线时，根据向量减法的三角形法则，可知$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向共线时，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，所以$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，故 A 正确；对于 B，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形为矩形，且$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$和$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$是这个矩形的两条对角线长，所以$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，故 B 错误；对于 D，当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向共线时，存在负数 λ 使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 成立，故 D 正确.故选 AD.

12.AC

提示：由$\overrightarrow{OC}=t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}$，

得$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=t(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$，即$\overrightarrow{BC}=t\overrightarrow{BA}$.

当 $t=\frac{1}{2}$时，$\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$，

则点 C 为线段 AB 的中点，故 A 正确；

当点 C 为线段 AB 的三等分点时，$\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$或$\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$，则 $t=\frac{1}{3}$或 $t=\frac{2}{3}$，故 B 错误；

当 $t\in(0,1)$ 时，$\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{BA}$同向，则点 C 在线段 AB 上，故 C 正确；

当点 C 在线段 AB 的延长线上时，$\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{BA}$反向，

则 $t<0$，故 D 错误.故选 AC.

三、填空题

13.$\mathbf{0}$

提示：因为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$.

14.(1)$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{HC}$；(2)$\overrightarrow{HC}$，$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{GB}$；(3)$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{FB}$，$\overrightarrow{HA}$

提示：(1)与$\overrightarrow{GH}$相等的向量，是指与$\overrightarrow{GH}$长度相等，方向相同的向量，为$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{HC}$.

(2)与$\overrightarrow{GH}$共线且模相等的向量，是指与$\overrightarrow{GH}$方向相同或相反，且长度相等的向量，为$\overrightarrow{HC}$，$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{GB}$.

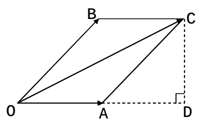
(3)与$\overrightarrow{EA}$方向相反且模相等的向量为$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{FB}$，$\overrightarrow{HA}$.

15.$\sqrt{5}$

提示：根据题意，得 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=\mathbf{0}$，所以 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=-\boldsymbol{F}_3$，

即$|\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2|=|\boldsymbol{F}_3|$.

如图所示，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{F}_1$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{F}_2$，以 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2$ 为邻边作平行四边形 $OACB$，连接 OC，则$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$.



(第 15 题图)

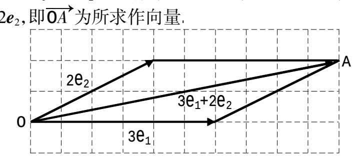
由已知，得 $OA=1$，$OB=\sqrt{2}$，$\angle AOB=45°$，过点 C 作 OA 延长线的垂线，垂足为 D，则 $AC=\sqrt{2}$，$\angle CAD=45°$，所以 $AD=CD=1$，所以 $OD=OA+AD=2$，所以 $OC=\sqrt{OD^2+CD^2}=\sqrt{5}$.所以$|\boldsymbol{F}_3|=\sqrt{5}$，即 $\boldsymbol{F}_3$ 的大小为$\sqrt{5}$ N.

16.内

提示：因为$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$，所以 $a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}=a\cdot\overrightarrow{OA}+b(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+c(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC})=(a+b+c)\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{AB}+c\cdot\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}$，得$\overrightarrow{AO}=\frac{bc}{a+b+c}\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{c}+\frac{\overrightarrow{AC}}{b}\right)$.因为$\frac{\overrightarrow{AB}}{c}$，$\frac{\overrightarrow{AC}}{b}$分别是$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$方向上的单位向量，所以向量$\frac{\overrightarrow{AB}}{c}+\frac{\overrightarrow{AC}}{b}$平分$\angle BAC$，即 AO 平分$\angle BAC$.同理 BO 平分$\angle ABC$.所以 O 为$\triangle ABC$ 的内心.

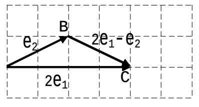
四、解答题

17.**解**：(1)先作出向量 $3\boldsymbol{e}_1$ 与 $2\boldsymbol{e}_2$，使其起点重合，然后以向量 $3\boldsymbol{e}_1$ 与 $2\boldsymbol{e}_2$ 为边作平行四边形，如下图所示，则$\overrightarrow{OA}=3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，即$\overrightarrow{OA}$为所求作向量.



(第 17 题图①)

(2)先作出向量 $2\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$，使其起点重合，然后连接向量 $2\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 的终点，如下图所示，则$\overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，即$\overrightarrow{BC}$为所求作向量.



(第 17 题图②)

18.**解**：(1)原式$=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DA}$.

(2)原式$=\overrightarrow{AC}+(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA})-\overrightarrow{DC}+(\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OB})$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB}$

$=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB}$

$=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\mathbf{0}$.

19.**解**：(1)由 $2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，得 $2(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+k\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$，即$(3+k)\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$，因为 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$，所以 $3+k=0$，得 $k=-3$.

(2)若 A,B,C 三点共线，则存在实数 λ，使$\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{AB}$，

即$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$，

即$(k-1)\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=\lambda(-\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})$，

整理得$(k-1+\lambda)\boldsymbol{a}=(4\lambda-2)\boldsymbol{b}$.

因为非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，

所以 $k-1+\lambda=0$，且 $4\lambda-2=0$，解得 $k=\frac{1}{2}$.

20.**解**：(1)由$\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OB}+(1-\lambda)\overrightarrow{OA}$，得$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$，即$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$.又 $\lambda\in\mathbf{R}$，$\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq1$，所以$\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AB}$共线.又$\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AB}$有公共点 A，所以 A,B,M 三点共线.所以点 M 在$\triangle OAB$ 的边 AB 所在的直线上.

(2)结合(1)知，当 $\lambda=2$ 时，$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$，即 B 为 AM 的中点，所以$|AM|=2|AB|$.

设点 O 到直线 AB 的距离为 d，

则$\frac{S_{\triangle OAM}}{S_{\triangle OAB}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot|AM|\cdot d}{\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d}=\frac{|AM|}{|AB|}=2$.

21.(1)**解**：由已知，得$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

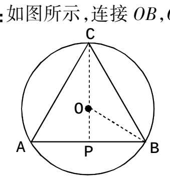
$=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

(2)**证明**：因为 P 为$\triangle ABC$ 内部一点，且$\overrightarrow{AP}=\frac{5}{12}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$，

所以$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{5}{12}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}=\frac{1}{12}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$，所以$\overrightarrow{MP}$与$\overrightarrow{MN}$共线.

又$\overrightarrow{MP}$与$\overrightarrow{MN}$有公共点 M，所以 M,P,N 三点共线，且 P 是 MN 的中点.

22.(1)**证明**：如图所示，连接 OB,OC,OP,CP.



(第 22 题图)

因为$\triangle ABC$ 的外心为点 O，P 为边 AB 的中点，所以 $OP\perp AB$，$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CP}$.

所以$\overrightarrow{CO}=\lambda(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=2\lambda\overrightarrow{CP}$.所以 C,O,P 三点共线.所以 $CP\perp AB$.

(2)**解**：由(1)知 $CP\perp AB$.又 P 为边 AB 的中点，所以 $CA=CB$，所以$\angle PCA=\angle PCB$.

因为 $OB=OC$，所以$\angle PCB=\angle OBC$，所以$\angle POB=\angle PCB+\angle OBC=2\angle PCB=\angle ACB$.

所以 $\cos\angle ACB=\cos\angle POB=\frac{OP}{OB}=\frac{OP}{OC}$.

因为 $\lambda=\frac{5}{14}$，所以$\overrightarrow{CO}=\frac{5}{7}\overrightarrow{CP}=\frac{5}{7}(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OP})$，

得$\frac{2}{7}\overrightarrow{CO}=\frac{5}{7}\overrightarrow{OP}$，所以$\frac{OP}{OC}=\frac{2}{5}$.

所以 $\cos\angle ACB=\frac{2}{5}$.故$\angle ACB$ 的余弦值为$\frac{2}{5}$.

第 1 期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A **提示**：$120°=\frac{2\pi}{3}$，所以与 120° 角的终边相同的角的表达式为 $2k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.故选 A.

2.B **提示**：把快了 10 分钟的手表校准，需把分针按逆时针方向旋转$\frac{1}{6}\times360°=60°$，则分针转过的角的弧度数为$\frac{\pi}{3}$.故选 B.

3.B **提示**：因为$\frac{\pi}{2}<3<\pi$，所以 3 弧度的角是第二象限角.故选 B.

4.C **提示**：因为 α 为第一象限角，所以 $2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，得 $4k\pi<2\alpha<4k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$.所以 2α 是第一象限角或第二象限角或终边与 y 轴正半轴重合的角，此时，$\cos2\alpha$ 的正负不确定，$\sin2\alpha>0$.故选 C.

5.C **提示**：设角 β 的终边交单位圆于点 B，根据题意，$\beta=10°-110°=-100°$.又由三角函数的定义，知 $B(\cos\beta,\sin\beta)$，而 $\cos\beta=\cos(-100°)=\cos100°=\cos(90°+10°)=-\sin10°$，$\sin\beta=\sin(-100°)=-\sin100°=-\sin(90°+10°)=-\cos10°$，所以 $B(-\sin10°,-\cos10°)$.故选 C.

6.B **提示**：显然各选项中函数的定义域均为 $\mathbf{R}$.对于 A，$f(-x)=1+\cos(-x)=1+\cos x=f(x)$，故 $f(x)$是偶函数，A不符合；对于 B，$f(-x)=-x+\sin(-x)=-x-\sin x=-(x+\sin x)=-f(x)$，故 $f(x)$是奇函数，B 符合；对于 C，$f(-x)=-x+\cos(-x)=-x+\cos x\neq\pm f(x)$，故 $f(x)$既不是奇函数也不是偶函数，C 不符合；对于 D，$f(-x)=1+\sin(-x)=1-\sin x\neq\pm f(x)$，故 $f(x)$既不是奇函数也不是偶函数，D 不符合.故选 B.

7.C **提示**：因为正弦函数在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增，$0<\frac{2}{3}<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin\frac{2}{3}<\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{4}{5}$，即 $b<a$.因为余弦函数在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减，$0<\frac{1}{3}<\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos\frac{1}{3}>\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{4}{5}$，即 $c>a$.所以 $b<a<c$.故选 C.

8.C **提示**：因为角α的终边与角β的终边关于x轴对称，所以$\alpha+\beta=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.故有 $\sin\alpha=\sin(2k\pi-\beta)=-\sin\beta$，$\cos\alpha=\cos(2k\pi-\beta)=\cos\beta$.故选C.

二、多项选择题

9.BD **提示**：由 α 是第二象限角，得$\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以$-\pi-2k\pi<-\alpha<-\frac{\pi}{2}-2k\pi,k\in\mathbf{Z}$；$\frac{\pi}{4}+k\pi<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$；$2\pi+2k\pi<\frac{3\pi}{2}+\alpha<\frac{5\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$；$\pi+4k\pi<2\alpha<2\pi+4k\pi,k\in\mathbf{Z}$.所以$-\alpha$是第三象限角，A 错误；当 k 为偶数时，$\frac{\alpha}{2}$是第一象限角，当 k 为奇数时，$\frac{\alpha}{2}$是第三象限角，故 B 正确；$\frac{3\pi}{2}+\alpha$ 是第一象限角，故 C 错误；2α 是第三或第四象限角或在 y 轴负半轴上，故 D 正确.故选 BD.

10.BC **提示**：根据题意，得 $\sin\alpha=\frac{x}{\sqrt{\frac{5}{4}+x^2}}=\frac{2}{3}x$，解得 $x=0$，或 $x=\pm1$.故选 BC.

11.BC **提示**：对于 A，当 n 为奇数时，$\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 A 不符合要求；对于 B，$\cos\left(2n\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故B符合要求；对于C，$\sin\left[(2n+1)\pi-\frac{\pi}{3}\right]=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故C符合要求；对于D，$\cos\left(\frac{4n+1}{2}\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 D 不符合要求.故选 BC.

12.BD **提示**：由题意可知，经过 1s 后，$\angle AOB=\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}$，此时扇形 AOB 的面积为$\frac{1}{2}\times\frac{5\pi}{12}\times1^2=\frac{5\pi}{24}$，故 A 错误；经过 2s 后，$\angle AOB=\frac{\pi}{6}-2\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2\times\frac{\pi}{12}=\frac{2\pi}{3}$，此时劣弧$\overset{\frown}{AB}$的长为$\frac{2\pi}{3}\times1=\frac{2\pi}{3}$，故 B 正确；经过 6s 后，质点 B 转过的角度为$6\times\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$，此时质点 B 为角$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{3}$的终边与单位圆的交点，所以质点 B 的坐标为$\left(\cos\frac{2\pi}{3},\sin\frac{2\pi}{3}\right)$，即$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，故 C 错误；经过$\frac{22}{3}$s 后，质点 B 转过的角度为$\frac{22}{3}\times\frac{\pi}{12}=\frac{11\pi}{18}$，质点 A 转过的角度为$\frac{22}{3}\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{11\pi}{9}$，因为$\frac{11\pi}{18}-\left(-\frac{11\pi}{9}\right)+\frac{\pi}{6}=2\pi$，所以此时质点 A,B 在单位圆上第一次相遇，故 D 正确.故选 BD.

三、填空题

13.$\{\alpha|\alpha=2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\}$ **提示**：根据终边相同角的表示方法，可知终边落在 x 轴负半轴的角 α 的集合为$\{\alpha|\alpha=2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.

14.$[0,1]$ **提示**：由 $\sin x\in[-1,1]$，得$|\sin x|\in[0,1]$，即 $f(x)=|\sin x|$的值域为$[0,1]$.

15.$41-14\pi$ **提示**：由诱导公式，可得 $\cos10=\sin\left(\frac{\pi}{2}+10\right)$，而区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$约等于区间$[-1.57,1.57]$，$\frac{\pi}{2}+10\approx11.57$，$\frac{\pi}{2}+10-2\pi\approx5.29$，$\frac{\pi}{2}+10-4\pi\approx-0.99\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，

所以 $f(\cos10)=f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+10-4\pi\right)\right)$

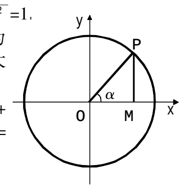
$=f\left(\sin\left(10-\frac{7\pi}{2}\right)\right)=4\left(10-\frac{7\pi}{2}\right)+1=41-14\pi$.

16.$(1,\sqrt{2}]$ **提示**：如图所示，设角 α 的终边与单位圆交于点 $P(x,y)$，$x>0$，$y>0$，

则 $\sin\alpha=y$，$\cos\alpha=x$，$OP=\sqrt{x^2+y^2}=1$.

过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M.在 Rt$\triangle OPM$ 中，由两边之和大于第三边，得 $\sin\alpha+\cos\alpha=x+y>1$.

又$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=(x+y)^2=x^2+y^2+2xy\leqslant2(x^2+y^2)=2$，当且仅当 $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，等号成立，



(第 16 题图)

所以 $0<\sin\alpha+\cos\alpha\leqslant\sqrt{2}$.

综上，$\sin\alpha+\cos\alpha$ 的取值范围是$(1,\sqrt{2}]$.

四、解答题

17.**解**：(1)角 α 的集合为$\{\alpha|k\cdot360°+90°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360°+120°$，或 $k\cdot360°+270°\leqslant\alpha\leqslant300°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}=\{k\cdot180°+90°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot180°+120°,k\in\mathbf{Z}\}$.

(2)角 α 的集合为$\{\alpha|k\cdot360°-60°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360°+60°,k\in\mathbf{Z}\}$.

18.**解**：(1)分别取 $k=0,1,2,3,4$，得 $\alpha=30°,120°,210°,300°,360°+30°$，故集合 M 中有 4 类终边不相同的角.

(2)由$-360°<\beta<360°$，得$-360°<30°+k\cdot90°<360°$，

解得$-\frac{13}{3}<k<\frac{11}{3}$.

又 $k\in\mathbf{Z}$，所以 $k=-4,-3,-2,-1,0,1,2,3$.

故满足条件的角 β 有$-330°,-240°,-150°,-60°,30°,120°,210°,300°$，共 8 个角.

(3)由(1)可知集合 M 中的第二象限角 γ 与 120°角的终边相同，故满足条件的集合为$\{\gamma|\gamma=120°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

19.**解**：(1)原式$=\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{-\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha(-\sin\alpha)}{-\sin\alpha}$

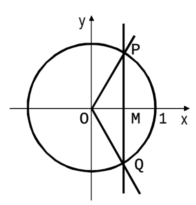
$=-\sin\alpha+\sin\alpha=0$.

(2)原式$=(-\sin60°)(-\cos30°)+\cos60°\sin30°$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1$.

20.**解**：要使 $f(x)$有意义，则需 $2\cos x-1\geqslant0$，得 $\cos x\geqslant\frac{1}{2}$.

如图所示，在平面直角坐标系中作直线 $x=\frac{1}{2}$，与单位圆交于点 P,Q，分别连接 OP,OQ 并延长，则在$[0,2\pi]$内以 OP,OQ 为终边的角分别为$\frac{\pi}{3}$，$-\frac{\pi}{3}$，



(第 20 题图)

所以$-\frac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

即 $f(x)$的定义域为$\left[-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{\pi}{3}+2k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.

因为$-1\leqslant\cos x\leqslant1$，所以$-3\leqslant2\cos x-1\leqslant1$.

又 $2\cos x-1\geqslant0$，所以 $0\leqslant2\cos x-1\leqslant1$.

所以 $0\leqslant\sqrt{2\cos x-1}\leqslant1$，即 $f(x)$的值域为$[0,1]$.

21.**解**：(1)因为$\angle ACB=\frac{\pi}{6}$，

所以$\angle AOB=2\angle ACB=\frac{\pi}{3}$.

又 $OA=OB$，所以$\triangle AOB$ 为等边三角形，

所以 $OA=AB=4$.所以劣弧$\overset{\frown}{AB}$ 的长为$\frac{\pi}{3}$OA$=\frac{4\pi}{3}$.

(2)设圆 O 的半径为 r，扇形 AOB 的弧长为 l，圆心角为 α.由扇形 AOB 的周长为 8，得 $2r+l=8$.

所以扇形面积 $S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{4}l\cdot2r\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{2r+l}{2}\right)^2=4$，

当且仅当 $2r=l$，即 $r=2$，$l=4$ 时，等号成立.

所以当扇形的面积取得最大值时，圆心角$\alpha=\frac{l}{r}=2$.

22.(1)**证明**：当$-\pi<x<0$ 时，$0<x+\pi<\pi$，所以 $f(x+\pi)=\cos(x+\pi)=-\cos x$，又因为函数 $y=f(x)$的最小正周期为 π，所以 $f(x+\pi)=f(x)$，所以 $f(x)=-\cos x$.

故 $f(x)=\begin{cases}-\cos x,-\pi<x<0,\\0,x=0,\\\cos x,0<x<\pi.\end{cases}$

对任意的 $x\in(-\pi,0)$，$-x\in(0,\pi)$，

所以 $f(-x)=\cos(-x)=\cos x=-f(x)$；

对任意的 $x\in(0,\pi)$，$-x\in(-\pi,0)$，

所以 $f(-x)=-\cos(-x)=-\cos x=-f(x)$；

当 $x=0$ 时，$f(0)=0$.

综上，对任意的 $x\in(-\pi,\pi)$，$f(-x)=-f(x)$.

所以函数 $y=f(x)$，$x\in(-\pi,\pi)$为奇函数.

(2)**解**：$f(x+\pi)=2f(x)$，即 $f(x)=2f(x-\pi)$.

由当 $0<x<\pi$ 时，$f(x)=\cos x$，得

当 $\pi<x<2\pi$ 时，$0<x-\pi<\pi$，

则 $f(x)=2f(x-\pi)=2\cos(x-\pi)=-2\cos x$；

当 $2\pi<x<3\pi$ 时，$\pi<x-\pi<2\pi$，

则 $f(x)=2f(x-\pi)=2[-2\cos(x-\pi)]=2^2\cos x$.

据此可得，当$(2n-1)\pi<x<2n\pi(n\in\mathbf{N}_+)$时，

$f(x)=-2^{2n-1}\cos x$；

当 $2n\pi<x<(2n+1)\pi(n\in\mathbf{N}_+)$时，$f(x)=2^{2n}\cos x$.

因为函数 $y=f(x)$在区间$(k\pi,k\pi+\pi)(k\in\mathbf{N}_+)$上为严格的单调函数，所以其值域为$(-2^k,2^k)$.所以函数 $y=f(x)$在区间$(0,2022\pi)$上的值域为$(-2^{2021},2^{2021})$，在区间$(2022\pi,2023\pi)$上的值域为$(-2^{2022},2^{2022})$.

由已知，函数 $y=f(x)-a$ 在区间$(0,2023\pi)$上恰有一个零点，等价于关于 x 的方程 $f(x)=a$ 在区间$(0,2023\pi)$上仅有一解，所以关于 x 的方程 $f(x)=a$ 在区间$(0,2022\pi)$上无解，而在区间$(2022\pi,2023\pi)$上仅有一解，又 $a>0$，所以 a 的取值范围是$[2^{2021},2^{2022})$.

第 2 期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B **提示**：因为$\frac{\pi}{2}<2<\pi$，结合正弦曲线，可知正弦函数 $y=\sin x(x\in[0,2))$的图象与直线 $y=1$ 只有 1 个交点.故选 B.

2.D **提示**：由 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$，结合余弦曲线，可知 $f(x)=\cos x$ 的最小值为 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$.故选 D.

3.C **提示**：根据“左加右减”的原则，得 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.故选 C.

4.D **提示**：将函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍，所得图象的函数解析式为 $y=\sin\left(2\times\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.故选 D.

5.C **提示**：由题意，得 $f(x)=2\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\right]=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.令 $2x-\frac{\pi}{6}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，当 $k=-1$ 时，$x=-\frac{5\pi}{12}$.故选C.

6.B **提示**：因为 $f(-x)=\cos(-x)-\cos^3(-x)=\cos x-\cos^3x=f(x)$，所以 $f(x)$是偶函数，图象关于 y 轴对称，排除 A，D；因为 $f(x)=\cos x-\cos^3x=\cos x(1-\cos^2x)$，而 $1-\cos^2x\geqslant0$，所以，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$f(x)\geqslant0$，当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$时，$f(x)\leqslant0$，排除 C，故选 B.

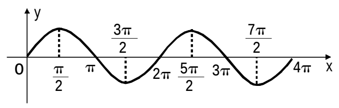
①

7.D　**提示**:不妨设 $\omega>0$.根据题意,可得 $\frac{\pi}{6}\omega+\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$,且 $\frac{2\pi}{3}\omega+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $\omega=2$,$\varphi=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

所以 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)=\sin\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)$.

所以 $f\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.故选 D.

8.D　**提示**:由给定区间可知,$a>0$.又区间$[a,2a]$与区间$[2a,3a]$相邻,且区间长度相同,作出 $y=\sin x$ 的部分图象如图所示.取 $a=\frac{\pi}{6}$,则 $2a=\frac{\pi}{3}$,$3a=\frac{\pi}{2}$,可知 $s_a>0,t_a>0$,故 A 可能;取 $a=\frac{5\pi}{12}$,则 $2a=\frac{5\pi}{6}$,$3a=\frac{5\pi}{4}$,可知 $s_a>0,t_a<0$,故 C 可能;取 $a=\frac{7\pi}{6}$,则 $2a=\frac{7\pi}{3}$,$3a=\frac{7\pi}{2}$,可知 $s_a<0,t_a<0$,故 B 可能.则不可能的是 $s_a<0,t_a>0$.故选 D.



(第 8 题图)

二、多项选择题

9.ABC　**提示**:对于 A,$f(x-\pi)=\cos(x-\pi)=-\cos x$,此函数在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,故 A 正确;对于 B,$f(x+\pi)=\cos(x+\pi)=-\cos x$,此函数在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,故 B 正确;对于 C,$f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x$,此函数在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,故 C 正确;对于 D,$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$,此函数在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减,故 D 错误.故选 ABC.

10.AC　**提示**:对于 A,平移后得到 $y=3\cos\left[2\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)+\frac{3\pi}{4}\right]=3\cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)$,故 A 正确;对于 B,平移后得到 $y=3\cos\left[2\left(x+\frac{5\pi}{8}\right)+\frac{3\pi}{4}\right]=3\cos(2x+2\pi)=3\cos 2x$,故 B 错误;对于 C,平移后得到 $y=3\cos\left[2\left(x+\frac{5\pi}{4}\right)+\frac{3\pi}{4}\right]=3\cos\left(2x+\frac{13\pi}{4}\right)=3\cos\left(2x+4\pi-\frac{3\pi}{4}\right)=3\cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)$,故 C 正确;对于 D,平移后得到 $y=3\cos\left[2\left(x-\frac{3\pi}{8}\right)+\frac{3\pi}{4}\right]=3\cos 2x$,故 D 错误.故选 AC.

11.BD　**提示**:将函数 $f(x)=\cos x$ 的图象向右平移 $\frac{3\pi}{4}$ 个单位长度,得到 $y=\cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$的图象,再把图象的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}(\omega>0)$倍,纵坐标不变,得到 $g(x)=\cos\left(\omega x-\frac{3\pi}{4}\right)$的图象.因为 $g(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$上没有零点,所以 $\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{T}{2}$,得 $T\geqslant 2\pi$,故排除 A.

当 $T=3\pi$ 时,$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2}{3}$,$g(x)=\cos\left(\frac{2}{3}x-\frac{3\pi}{4}\right)$,由 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$,得 $\frac{2}{3}x-\frac{3\pi}{4}\in\left(-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right)$,根据余弦曲线,可知此时 $g(x)$没有零点,故 B 符合题意;当 $T=9\pi$ 时,同理,得 $g(x)=\cos\left(\frac{2}{9}x-\frac{3\pi}{4}\right)$,$\frac{2}{9}x-\frac{3\pi}{4}\in\left(-\frac{23\pi}{36},-\frac{5\pi}{12}\right)$,此时 $g(x)$有 1 个零点,故 C 不符合题意;当 $T=27\pi$ 时,同理,得 $g(x)=\cos\left(\frac{2}{27}x-\frac{3\pi}{4}\right)$,$\frac{2}{27}x-\frac{3\pi}{4}\in\left(-\frac{77\pi}{108},-\frac{23\pi}{36}\right)$,此时 $g(x)$没有零点,故 D 符合题意.故选 BD.

12.BC　**提示**:若两个函数图象的对称轴相同,则两函数的周期必然相同,所以 $\omega=2$,故 A 错误;$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,由 $2x+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$,则直线 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$ 是 $g(x)$图象的对称轴,所以 $2\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+\theta=m\pi,m\in\mathbf{Z}$,得 $\theta=(m-k)\pi-\frac{\pi}{3},m,k\in\mathbf{Z}$,当 $m-k=1$ 时,$\theta=\frac{2\pi}{3}$,故 B 正确;由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,得 $k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$,即函数 $f(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$,故 C 正确;由 $2x+\frac{\pi}{6}=k\pi$,得 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$,即函数 $f(x)$的所有零点的集合为$\left\{x\,\middle|\,x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12},k\in\mathbf{Z}\right\}$,故 D 错误.故选 BC.

三、填空题

13.$\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$　**提示**:令 $2x+\frac{\pi}{3}=2\pi$,解得 $x=\frac{5\pi}{6}$,故最后一个关键点是$\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$.

14.$\left(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{3}\right],k\in\mathbf{Z}$　**提示**:要使函数 y 有意义,

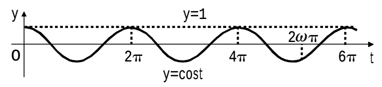
则$\begin{cases}\sin x>0, & ①\\ \cos x-\frac{1}{2}\geqslant 0. & ②\end{cases}$

由①,得 $2k\pi<x<2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$;由②,得 $2k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$,所以 $2k\pi<x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$.

故函数 y 的定义域为$\left(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{3}\right],k\in\mathbf{Z}$.

15.2π,大于　**提示**:因为 $y=2022\sin 2x$ 的最小正周期是 $\frac{2\pi}{2}=\pi$,$y=\sin x$ 的最小正周期是 2π,所以函数 $y=2022\sin 2x+\sin x$ 的最小正周期是 2π.因为函数 $y=2022\sin 2x+\sin x$,所以 $y_{max}\geqslant 2022\sin\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)+\sin\frac{\pi}{4}=2022+\frac{\sqrt{2}}{2}>2022+\frac{1}{2}=\frac{4045}{2}$,所以函数的最大值大于 $\frac{4045}{2}$.

16.$[2,3)$　**提示**:由 $x\in[0,2\pi]$,得 $\omega x\in[0,2\omega\pi]$.因为 $f(x)$在区间$[0,2\pi]$有且仅有 3 个零点,所以 $\cos\omega x=1$ 在区间$[0,2\pi]$有且仅有 3 个实数根,令 $t=\omega x$,则 $\cos t=1$ 在区间$[0,2\omega\pi]$有且仅有 3 个实数根.即 $y=\cos t$ 的图象与直线 $y=1$ 在$[0,2\omega\pi]$上有且仅有 3 个交点.结合余弦函数 $y=\cos t$ 的图象(如图),可得 $4\pi\leqslant 2\omega\pi<6\pi$,所以 $2\leqslant\omega<3$.故 ω 的取值范围是$[2,3)$.



(第 16 题图)

四、解答题

17.**解**:(1)由 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$.所以函数 $f(x)$图象的对称中心为$\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},0\right)$,$k\in\mathbf{Z}$.

(2)由 $2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $-\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.故函数 $f(x)$的单调递减区间为$\left[-\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.

18.**解**:(1)步骤 1,把 $y=\sin x$ 图象上所有点向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度,得到函数 $y=\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$的图象;

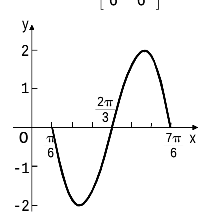
步骤 2,把 $y=\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$(纵坐标不变),得到函数 $y=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$的图象;

步骤 3,把 $y=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$图象上所有点的纵坐标变为原来的 2 倍(横坐标不变),得到函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$的图象.

(2)由 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$,得 $2x+\frac{2\pi}{3}\in[\pi,3\pi]$,列表如下:

$2x+\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π
x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$
$f(x)$	0	-2	0	2	0

描点,连线,得 $f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$上的简图如图所示.



(第 18 题图)

19.**解**:(1)由题图可知,$A=1$,$T=2\times\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$,所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$.又 $f(x)$的图象过点$\left(\frac{\pi}{6},1\right)$,所以 $\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=1$,得 $\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

(2)将 $y=f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$图象上所有点先向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,得到 $y=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象,再将所得图象的纵坐标变为原来的 2 倍,得到 $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象,所以 $g(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时,$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$,则 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$,所以 $g(x)\in[-1,2]$,即 $y=g(x)$的值域为$[-1,2]$.

20.**解**:(1)若选择条件①,则 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,解得 $\omega=2$;

若选择条件②,则 $1+\frac{\sqrt{3}}{2}+m+\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}+m\right)=0$,

解得 $m=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

若选择条件③,则 $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+m=2$,解得 $m=2$.

根据题中要求,只能选择①②或①③作为已知条件.

若选择①②,则 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$,

此时 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$;

若选择①③,则 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+2$,

此时 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5+\sqrt{3}}{2}$.

(2)根据(1)中所求,不论选择①②还是①③,$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+m$,又其单调性与 $h(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$相同,故函数 $f(x)$在区间$[0,a]$上单调递增,可转化为 $h(x)$在$[0,a]$上单调递增.又当 $x\in[0,a]$时,$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},2a-\frac{\pi}{3}\right]$,要满足题意,只需 $-\frac{\pi}{3}<2a-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}$,可得 $0<a\leqslant\frac{5\pi}{12}$,故实数 a 的最大值为 $\frac{5\pi}{12}$.

21.**解**:(1)根据表中数据,得 $A=5$,

且$\begin{cases}\frac{\pi}{3}\omega+\varphi=\frac{\pi}{2},\\ \frac{5\pi}{6}\omega+\varphi=\frac{3\pi}{2},\end{cases}$ 解得$\begin{cases}\omega=2,\\ \varphi=-\frac{\pi}{6},\end{cases}$

所以 $f(x)=5\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

补充完整的表格如下表所示.

$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{12}$
$A\sin(\omega x+\varphi)$	0	5	0	-5	0

(2)$g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1=5\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]+1=5\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$.令 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$,所以函数 $g(x)$图象的对称轴为 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$.

(3)$h(x)=f\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=5\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=5\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,

解得 $k\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$;

令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,

解得 $k\pi+\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{11\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$,

故函数 $h(x)$的单调递增区间为$\left[k\pi-\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{5\pi}{12}\right]$,$k\in\mathbf{Z}$,单调递减区间为$\left[k\pi+\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{11\pi}{12}\right],k\in\mathbf{Z}$.

22.**解**:(1)当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$时,$x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$,

则 $f(x)_{min}=1$,$f(x)_{max}=2$.

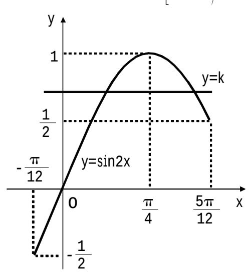
因为$|f(x)-m|\leqslant 3$,即 $f(x)-3\leqslant m\leqslant f(x)+3$,

所以$[f(x)-3]_{max}\leqslant m\leqslant[f(x)+3]_{min}$,即 $-1\leqslant m\leqslant 4$.所以实数 m 的最大值是 4.

(2)依题意,$g(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)=2\sin\left[\pi-\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)\right]=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$,

则 $h(x)=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=2\sin 2x$,$\frac{1}{2}h(x)=\sin 2x$.

方程 $\frac{1}{2}h(x)-k=0$,即 $\sin 2x=k$ 在 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$上有2个不同实数解,等价于函数 $y=\sin 2x$ 在$\left[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$上的图象与直线 $y=k$ 有 2 个公共点.当 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$时,$2x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$,在平面直角坐标系中画出 $y=\sin 2x$ 在$\left[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$上的图象及直线 $y=k$,如图所示,由图象,得 $\frac{1}{2}\leqslant k<1$,即实数 k 的取值范围是$\left[\frac{1}{2},1\right)$.



(第 22 题图)

第 3 期

第3~4版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.B　**提示**:由题设知,在$[0,360°)$内,$\alpha=120°-30°=90°$,则与 α 终边相同的角的集合为$\{\beta|\beta=k\cdot 360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$.故选 B.

2.A　**提示**:因为 $72°=72\times\frac{\pi}{180}\text{rad}=\frac{2\pi}{5}\text{rad}$,半径为2cm,所以 72°的圆心角所对的弧长是 $\frac{2\pi}{5}\times 2=\frac{4\pi}{5}$cm.故选 A.

3.A　**提示**:由已知,得 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$,所以 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha=-\frac{3}{5}$.故选 A.

4.B　**提示**:对于 A,$f(2)=\sin\pi=0$,故直线 $x=2$ 不是 $f(x)$的对称轴,故 A 不符合题意;对于 B,$f(2)=\cos\pi=-1$,故直线 $x=2$ 是 $f(x)$的一条对称轴,又 $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$,故 B 符合题意;对于 C,$T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$,故 C 不符合题意;同理,D 也不符合题意.故选 B.

5.A　**提示**:令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}<2\pi x-\frac{\pi}{5}<2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,解得 $f(x)$的单调递增区间为$\left(k-\frac{3}{20},k+\frac{7}{20}\right),k\in\mathbf{Z}$;令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}<2\pi x-\frac{\pi}{5}<2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,解得 $f(x)$的单调递减区间为$\left(k+\frac{7}{20},k+\frac{17}{20}\right),k\in\mathbf{Z}$.结合选项,可知选 A.

6.C　**提示**:当 $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$时,$y=\cos x\tan x=\sin x\geqslant 0$,排除 B,D;当 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ 时,$y=-\cos x\tan x=-\sin x<0$,排除 A.故选 C.

7.D　**提示**:将函数 $f(x)$的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后,得到 $g(x)=\sin\left[\omega\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\sin\left(\omega x+\frac{\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)$,因为 $g(x)$为偶函数,所以 $\frac{\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $\omega=6k+2,k\in\mathbf{Z}$.同理,得 $-\frac{\omega\pi}{12}+\frac{\pi}{6}=n\pi,n\in\mathbf{Z}$,解得 $\omega=-12n+2$,$n\in\mathbf{Z}$.取 $k=2,n=-1$,得 $\omega=14$.故选 D.

8.B　**提示**:根据题意,得$\begin{cases}A+B=8500,\\ -A+B=500,\end{cases}$解得 $A=4000$,$B=4500$.又 $T=2\times(8-2)=12$,所以 $\omega=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$.

所以 $f(x)=4000\cos\left(\frac{\pi}{6}x+\varphi\right)+4500$.

因为 $f(8)$是最大值,所以 $\frac{\pi}{6}\times 8+\varphi=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

得 $\varphi=-\frac{4\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,又$|\varphi|<\pi$,所以 $\varphi=\frac{2\pi}{3}$.

所以 $f(x)=4000\cos\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{2\pi}{3}\right)+4500$.

令 $f(x)\geqslant 6500$,得 $\cos\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{2\pi}{3}\right)\geqslant\frac{1}{2}$,

所以 $-\frac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant\frac{\pi}{6}x+\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $-6+12k\leqslant x\leqslant -2+12k,k\in\mathbf{Z}$.

又 $1\leqslant x\leqslant 12,x\in\mathbf{N}$,所以 $x=6,7,8,9,10$,即该超市冰激凌的销售数量不少于 6500 的月份共有 5 个月.故选 B.

二、多项选择题

9.BD　**提示**:由 $\sin\alpha\cos\alpha<0$,知 $\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 异号,所以 α 为第二象限角或第四象限角.故选 BD.

10.AC　**提示**:因为 $\tan\frac{3\pi}{5}<0$,$\tan\frac{\pi}{5}>0$,所以 $\tan\frac{3\pi}{5}<\tan\frac{\pi}{5}$,故 A 正确;因为 $y=\tan x$ 在 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递增,且 $\frac{\pi}{2}<2<3<\pi$,所以 $\tan 2<\tan 3$,故 B 错误;因为 $\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\cos\left(-\frac{23\pi}{5}\right)=\cos\frac{3\pi}{5}<0$,所以 $\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right)>\cos\left(-\frac{23\pi}{5}\right)$,故 C 正确;因为 $y=\sin x$ 在 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,且 $-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{10}<-\frac{\pi}{18}<\frac{\pi}{2}$,所以 $\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)<\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)$,故 D 错误.故选 AC.

11.ABC　**提示**:由已知,得 $T=\frac{2\pi}{\omega}$,$f(T)=\sin\left(\omega\cdot\frac{2\pi}{\omega}+\varphi\right)=\sin\varphi=\frac{1}{2}$,又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.所以 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$.当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时,$\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{6}\right]$,因为 $f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增,所以 $\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}$,解得 $\omega\leqslant\frac{2}{3}$.所以 $0<\omega\leqslant\frac{2}{3}$.结合选项可知选 ABC.

12.AD　**提示**:由题意,得 $g(x)=3\tan\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=3\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.当 $x=\frac{5\pi}{12}$时,$g(x)$不存在,所以函数 $y=g(x)$的图象关于$\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$对称,故 A 正确,C 错误;若 $g(x_1)=g(x_2)$,$x_1\neq x_2$,则$|x_1-x_2|$的最小值为一个周期,即 $\frac{\pi}{2}$,故 B 错误;当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$时,$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$,此时函数 $g(x)$单调递增,故 D 正确.故选 AD.

三、填空题

13.一或三　**提示**:因为 α 是第二象限角,所以 $\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $\frac{\pi}{4}+k\pi<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

当 k 是偶数时,$\frac{\alpha}{2}$的终边在第一象限;当 k 是奇数时,$\frac{\alpha}{2}$的终边在第三象限.故 $\frac{\alpha}{2}$的终边落在第一或三象限.

14.$(-\pi,0]$　**提示**:根据余弦函数的性质可得 $y=\cos x$ 在区间$[-\pi,0]$上单调递增,又 $y=\cos x$ 在区间$[-\pi,a]$上单调递增,所以 $-\pi<a\leqslant 0$.故 a 的取值范围为$(-\pi,0]$.

15.$\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$;$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$　**提示**:由 $y=\tan x+\frac{1}{\tan x}$,得 $\tan x\neq 0$,则 $x\neq k\pi$,且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,即 $x\neq\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.故函数 y 的定义域为$\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

当 $\tan x>0$ 时,$y=\tan x+\frac{1}{\tan x}\geqslant 2$,当且仅当 $\tan x=1$ 时,等号成立;

当 $\tan x<0$ 时,因为 $-y=-\tan x-\frac{1}{\tan x}\geqslant 2$,所以 $y\leqslant -2$,当且仅当 $\tan x=-1$ 时,等号成立.

所以该函数的值域为$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

16.$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　**提示**:由题意,设 $A\left(x_1,\frac{1}{2}\right)$,$B\left(x_2,\frac{1}{2}\right)$,

因为$|AB|=\frac{\pi}{6}$,所以 $x_2-x_1=\frac{\pi}{6}$.

由 $\sin x=\frac{1}{2}$,得 $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ 或 $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

故由题图可得 $\omega x_2+\varphi-(\omega x_1+\varphi)=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$,

解得 $\omega=4$.

又 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{8\pi}{3}+\varphi\right)=0$,所以 $\frac{8\pi}{3}+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

得 $\varphi=-\frac{8\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

所以 $f(x)=\sin\left(4x-\frac{8\pi}{3}+k\pi\right)=\sin\left(4x-\frac{2\pi}{3}+k\pi\right)=\pm\sin\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)$.又 $f(0)<0$,所以 $f(x)=\sin\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)$.

所以 $f(\pi)=\sin\left(4\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

四、解答题

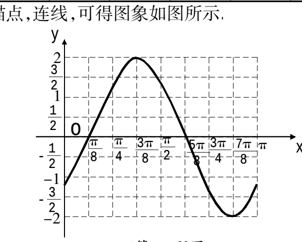
17.**解**:(1)设扇形所在圆的半径为 r.由扇形的面积公式,得 $\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}r=\frac{\pi}{6}$,解得 $r=2$.所以 $\alpha=\frac{l}{r}=\frac{\pi}{12}$.

(2)原式$=\frac{-\sin 2\alpha\sin 2\alpha}{-\sin 2\alpha\cos 2\alpha}=\tan 2\alpha=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

18.**解**:(1)表格如下:

$2x-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$
$f(x)$	0	2	0	-2	0

描点,连线,可得图象如图所示.



(第 18 题图)

(2)由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $-\frac{\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{8}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,所以函数 $f(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{3\pi}{8}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.

(3)因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$,所以 $2x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$,可得 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$,所以 $f(x)\in[-2,\sqrt{2}]$.

19.**解**:根据题意,得 $f(x)=2\cos\left[\omega\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=2\cos\left(\omega x+\frac{\omega\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)$.设 $f(x)$的最小正周期为 T.

(1)由 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,得 $\omega=2$,所以 $f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

令 $2x+\frac{\pi}{6}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$.

所以 $f(x)$图象的对称轴方程为 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$,与 y 轴距离最近的对称轴的方程为 $x=-\frac{\pi}{12}$.

(2)由 $f(x)$图象相邻两个对称中心之间的距离大于 $\frac{2\pi}{7}$,得 $\frac{T}{2}>\frac{2\pi}{7}$,即 $\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{\omega}>\frac{2\pi}{7}$,

结合 $\omega>0$,解得 $0<\omega<\frac{7}{2}$,又 $\omega\in\mathbf{N}_+$且 $\omega>2$,所以 $\omega=3$.

所以 $f(x)=2\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$.

当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{9}\right]$时,$3x+\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$,

所以 $\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$,所以 $f(x)\in[-1,2]$,即 $f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{9}\right]$上的值域为$[-1,2]$.

20.**解**:(1)因为函数 $y=f(x)$的图象与 x 轴相邻两个交点的距离为 $\frac{\pi}{2}$,所以 $T=\frac{\pi}{2}$,即 $\frac{\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}$,得 $\omega=2$.

所以 $f(x)=\tan(2x+\varphi)$.因为 $y=f(x)$的图象关于点 $M\left(-\frac{\pi}{8},0\right)$对称,所以 $2\times\left(-\frac{\pi}{8}\right)+\varphi=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,得 $\varphi=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,则 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.所以 $f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

(2)由 $-\frac{\pi}{2}+k\pi<2x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $-\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}<x<\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.所以 $f(x)$的单调递增区间为$\left(-\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right),k\in\mathbf{Z}$,无单调递减区间.

(3)由(1)知,$f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.由 $-1\leqslant\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{3}$,得 $-\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.所以原不等式的解集为$\left\{x\,\middle|\,-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

21.**解**:(1)由 $BC=4$,$\angle OBC=\frac{2\pi}{3}$,可得 $m=BC\sin(\pi-\angle OBC)=2\sqrt{3}$,$\frac{1}{4}T=BC\cos(\pi-\angle OBC)=2$,所以 $T=8$.又 $T=\frac{2\pi}{\omega}$,所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{4}$.所以 $f(x)=2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{4}x+\varphi\right)$.