时,PM 最小,$\tan\theta$ 最大, 此时 $PM=\frac{PA\cdot PC}{AC}=\frac{1\times\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\tan\theta=\frac{1}{PM}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,所以直线 MB 与平面 PAC 所成角的正切值的取值范围是$\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$.

2.(1) **证明:** 取 AB 中点 E 连接 EC, 根据题意,得 $EC\perp AB$,因为$\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$,所以 M 为线段 AB 上靠近 A 的三等分点,设$\overrightarrow{CN}=\lambda\overrightarrow{CA}$,则$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{BC}+\lambda\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}+\lambda(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})=\lambda\overrightarrow{BA}+(1-\lambda)\overrightarrow{BC}$,又$\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$,则 $\lambda=\frac{1}{3}$,所以 N 为线段 AC 上靠近 C 的三等分点, 所以$\frac{AM}{AE}=\frac{AN}{AC}=\frac{2}{3}$,所以 $MN/\!/EC$,又 $EC\perp AB$,所以 $MN\perp AB$,所以 $MN\perp BM$,$MN\perp A'M$,又 $BM\cap A'M=M$,所以 $MN\perp$平面 $A'BM$,又 $MN\subset$平面 $BCNM$,所以平面 $A'BM\perp$平面 $BCNM$.

(2)**解:** 因为等边$\triangle ABC$ 的边长为 3,结合(1)可知, $AM=1,BM=2,ME=\frac{1}{2},MN=\sqrt{3},EC=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

若选①,由(1)知 $A'M\perp MN$,又 $A'M\perp CN$,$CN\cap MN=N$,所以 $A'M\perp$平面 $BCNM$.

若选②,因为平面 $A'MN\perp$平面 $BCNM$,$A'M\perp MN$,$A'M\subset$平面 $A'MN$,平面 $A'MN\cap$平面 $BCNM=MN$,所以 $A'M\perp$平面 $BCNM$.

若选③,设 A'到平面 $BCNM$ 的距离为 h,则 $V_{A'-BCNM}=\frac{1}{3}S_{BCNM}\cdot h=\frac{1}{3}\times(S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AMN})\times h=\frac{1}{3}\times\left(3^2\times\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\right)\times h=\frac{7\sqrt{3}}{12}h=\frac{7\sqrt{3}}{12}$,所以 $h=1$,即 $h=A'M$,所以 $A'M\perp$平面 $BCNM$.

故以 M 为坐标原点,MB,MN,MA′所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,则 $A'(0,0,1)$,$C\left(\frac{1}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2},0\right)$,$B(2,0,0)$,$N(0,\sqrt{3},0)$,

所以$\overrightarrow{A'C}=\left(\frac{1}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2},-1\right)$,$\overrightarrow{A'B}=(2,0,-1)$,$\overrightarrow{A'N}=(0,\sqrt{3},-1)$,设平面 $A'BC$ 与平面 $A'CN$ 的法向量分别为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A'C}=\frac{1}{2}x_1+\frac{3\sqrt{3}}{2}y_1-z_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A'B}=2x_1-z_1=0,\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A'C}=\frac{1}{2}x_2+\frac{3\sqrt{3}}{2}y_2-z_2=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A'N}=\sqrt{3}y_2-z_2=0,\end{cases}$取 $x_1=\sqrt{3}$,$y_2=1$, 则 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},1,2\sqrt{3})$,$\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},1,\sqrt{3})$,设平面 $A'BC$ 和平面 $A'CN$ 的夹角为 θ, 则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{4}{4\times\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$, 故平面$A'BC$ 和平面$A'CN$的夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{7}}{7}$.

3.(1)**证明:** 若选①,连接 BD,作 $PA'\perp$平面 $ABCD$,垂足为 A', 因为 BP,DP 与平面 $ABCD$ 所成角相等,所以 $A'B=A'D$,所以 A'在 BD 的中垂线 AC 上.因为在平面 $PACQ$ 内,$PA'\perp AC$,$PA\perp AC$, 所以 A'和 A 重合,则 $PA\perp$平面 $ABCD$,又 $PA\subset$平面 $PACQ$,所以平面 $PACQ\perp$平面 $ABCD$.

若选②,设 P 到平面 ABD 的距离为 h,因为 $V_{P-ABD}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABD}\cdot h=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times h=\frac{\sqrt{3}}{3}$,则 $h=1$,又 $PA=1$,则 PA 为 P 到平面 ABD 的距离,即 $PA\perp$平面 ABD.又 $PA\subset$平面 $PACQ$,所以平面 $PACQ\perp$平面 $ABCD$.

若选③,因为 $PA=1,AB=2$,在$\triangle BPA$ 中,由余弦定理的推论, 得 $\cos\angle BPA=\frac{PB^2+1-4}{2PB}=\frac{\sqrt{5}}{5}$, 解得 $BP=\sqrt{5}$, 所以 $BP^2=AP^2+AB^2$, 所以 $PA\perp AB$, 又四边形 $PACQ$ 为矩形,则 $PA\perp AC$,又 $AC\cap AB=A$,$AC,AB\subset$平面 $ABCD$,所以 $PA\perp$平面 $ABCD$,又 $PA\subset$平面 $PACQ$,所以平面 $PACQ\perp$平面 $ABCD$.

(2)连接 BD,交 AC 于点 O,以 O 为原点,OB,OC 分别为 x 轴,y 轴,建立空间直角坐标系,则 $C(0,1,0)$,$Q(0,1,1)$,$B(\sqrt{3},0,0)$,$P(0,-1,1)$,$D(-\sqrt{3},0,0)$,所以 $\overrightarrow{BP}=(-\sqrt{3},-1,1)$,$\overrightarrow{BQ}=(-\sqrt{3},1,1)$,设平面 BPQ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$, 则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BP}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BQ}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-\sqrt{3}x-y+z=0,\\ -\sqrt{3}x+y+z=0,\end{cases}$取 $x=\sqrt{3}$,则 $y=0,z=3$,所以 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},0,3)$,又$\overrightarrow{CQ}=(0,0,1)$,所以点 C 到平面 BPQ 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{CQ}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3)$\overrightarrow{DQ}=(\sqrt{3},1,1)$,$\overrightarrow{DP}=(\sqrt{3},-1,1)$,设平面 DPQ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DQ}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\sqrt{3}a-b+c=0,\\ \sqrt{3}a+b+c=0,\end{cases}$令 $a=\sqrt{3}$,则 $b=0,c=-3$,所以 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},0,-3)$,又 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},0,3)$,所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{-6}{2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}$,由图可知,二面角 $B-PQ-D$ 是钝二面角,所以二面角 $B-PQ-D$ 的大小为$\frac{2\pi}{3}$.

4.**解:**(1)连接 A_1D,选择①$A_1B\perp B_1C$,②$BD\perp B_1C$,证明③$A_1B_1=A_1C_1$, 如下: 因为 $A_1B\perp B_1C$,$BD\perp B_1C$,$A_1B\cap BD=B$,所以 $B_1C\perp$平面 A_1BD,又 $A_1D\subset$平面 A_1BD,所以 $B_1C\perp A_1D$, 因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱, 所以 $CC_1\perp$平面 $A_1B_1C_1$,因为 $A_1D\subset$平面 $A_1B_1C_1$,所以 $A_1D\perp CC_1$, 又 $CC_1\cap B_1C=C$, 所以 $A_1D\perp$平面 CC_1B_1B, 因为 $B_1C_1\subset$平面 CC_1B_1B, 所以 $A_1D\perp B_1C_1$, 又 D 是 B_1C_1 的中点,所以 A_1D 垂直平分 B_1C_1,所以 $A_1B_1=A_1C_1$.

选择①$A_1B\perp B_1C$,③$A_1B_1=A_1C_1$,证明②$BD\perp B_1C$,如下: 因为 D 为 B_1C_1 的中点, 且 $A_1B_1=A_1C_1$, 所以 $A_1D\perp B_1C_1$,因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱,所以 $CC_1\perp$平面 $A_1B_1C_1$,因为 $A_1D\subset$平面 $A_1B_1C_1$,所以 $A_1D\perp CC_1$,因为 $CC_1\cap B_1C_1=C_1$,所以 $A_1D\perp$平面 CC_1B_1B,则 $A_1D\perp B_1C$,又 $B_1C\perp A_1B$,$A_1D\cap A_1B=A_1$, 所以 $B_1C\perp$平面 A_1BD,又 $BD\subset$平面 A_1BD,所以 $BD\perp B_1C$.

选择②$BD\perp B_1C$,③$A_1B_1=A_1C_1$,证明①$A_1B\perp B_1C$,如下: 因为 D 为 B_1C_1 的中点, 且 $A_1B_1=A_1C_1$, 所以 $A_1D\perp B_1C_1$,因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱,所以 $CC_1\perp$平面 $A_1B_1C_1$, 又 $A_1D\subset$平面 $A_1B_1C_1$, 所以 $A_1D\perp CC_1$,又 $CC_1\cap B_1C_1=C_1$, 所以 $A_1D\perp$平面 CC_1B_1B, 又 $B_1C\subset$平面 CC_1B_1B,所以 $B_1C\perp A_1D$,又 $B_1C\perp BD$,所以 $B_1C\perp$平面 A_1BD,又 $A_1B\subset$平面 A_1BD,所以 $B_1C\perp A_1B$.

(2)因为 $AB=AC=2,BC=2\sqrt{2}$,所以 $AB^2+AC^2=BC^2$,所以 $AB\perp AC$,所以 $A_1B_1\perp A_1C_1$,因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱,所以 $AA_1\perp$平面 $A_1B_1C_1$,所以 $AA_1\perp A_1B_1$,所以 AA_1,A_1B_1,A_1C_1 两两垂直, 以 A_1 为坐标原点,以 A_1B_1,A_1C_1,A_1A 所在直线为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,设 $AA_1=a$,则 $A_1(0,0,0)$,$A(0,0,a)$,$B_1(2,0,0)$,$B(2,0,a)$,$C_1(0,2,0)$,$C(0,2,a)$,$D(1,1,0)$,所以$\overrightarrow{BD}=(-1,1,-a)$,$\overrightarrow{B_1C}=(-2,2,a)$,因为 $BD\perp B_1C$,所以$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{B_1C}=4-a^2=0$,解得 $a=2$,所以 $A(0,0,2)$,$B(2,0,2)$,$C(0,2,2)$,$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$,$\overrightarrow{AD}=(1,1,-2)$,$\overrightarrow{B_1C}=(-2,2,2)$,设平面$ABD$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=2x=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=x+y-2z=0,\end{cases}$ 取 $z=1$,得平面ABD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,2,1)$, 设直线 B_1C 与平面 ABD所成角为 θ,所以 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{B_1C}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{B_1C}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{B_1C}|}=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

5.(1)**证明:** 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AA_1/\!/BB_1$,又 $BB_1\not\subset$平面 ACC_1A_1,$AA_1\subset$平面 ACC_1A_1,所以 $BB_1/\!/$平面 ACC_1A_1, 又平面 $B_1BDE\cap$平面 $ACC_1A_1=DE$,$BB_1\subset$平面 B_1BDE,所以 $BB_1/\!/DE$.

(2)**解:** 选条件①②,连接 A_1C,取 AC 的中点 O,连接 A_1O,BO.在菱形 ACC_1A_1 中,$\angle A_1AC=60°$,所以$\triangle A_1AC$ 为等边三角形,又 O 为 AC 中点,所以 $A_1O\perp AC$,又平面 $ABC\perp$平面 ACC_1A_1, 平面 $ABC\cap$平面 $ACC_1A_1=AC$,$A_1O\subset$平面 ACC_1A_1,所以 $A_1O\perp$平面 ABC,又 $OB\subset$平面 ABC,所以 $A_1O\perp OB$,又 $AB=BC$,所以 $BO\perp AC$.以 O 为坐标原点,以 OB,OC,OA_1 分别为 x 轴、y 轴、z 轴,建立空间直角坐标系,则 $A(0,-2,0)$,$E(0,3,2\sqrt{3})$,$B(3,0,0)$,$D(0,1,0)$,所以$\overrightarrow{BD}=(-3,1,0)$,$\overrightarrow{DE}=(0,2,2\sqrt{3})$,设平面 B_1BDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-3x_1+y_1=0,\\ 2y_1+2\sqrt{3}z_1=0,\end{cases}$取 $z_1=-\sqrt{3}$,则平面 B_1BDE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,3,-\sqrt{3})$,又$\overrightarrow{AB}=(3,2,0)$, 设直线 AB 与平面 B_1BDE 所成角为 θ,所以 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AB},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{9}{13}$.

选条件②③,连接 A_1C,取 AC 中点 O,连接 A_1O,BO,在菱形 ACC_1A_1 中,$\angle A_1AC=60°$,所以$\triangle A_1AC$ 为等边三角形,又 O 为 AC 中点,故 $A_1O\perp AC$,且 $A_1O=2\sqrt{3}$,又 $OB=3$,$A_1B=\sqrt{21}$,所以 $A_1O^2+OB^2=A_1B^2$,所以 $A_1O\perp OB$,又 $AC\cap OB=O$,所以 $A_1O\perp$平面 ABC,以下同选①②.

选条件①③,取 AC 中点 O,连接 BO,A_1O,在$\triangle ABC$ 中,因为 $BA=BC$,所以 $BO\perp AC$,且 $AO=2,OB=3$,又平面 $ABC\perp$平面 ACC_1A_1,$BO\subset$平面 ABC, 平面 $ABC\cap$平面 $ACC_1A_1=AC$, 所以 $BO\perp$平面 ACC_1A_1, 因为 $OA_1\subset$平面 ACC_1A_1, 所以 $BO\perp OA_1$, 在 $\mathrm{Rt}\triangle BOA_1$ 中,$A_1B=\sqrt{21}$,$OB=3$,则 $A_1O=2\sqrt{3}$,又 $OA=2$,$AA_1=4$,所以 $AO_1^2+OA^2=AA_1^2$,所以 $A_1O\perp AO$,以下同选①②.

专题四 解析几何

1.**解:**(1)若选①,因为 $A(1,0)$和 $B(-1,2)$,所以 AB 的垂直平分线方程为 $y=x+1$,即 $x-y+1=0$,由$\begin{cases}x-y+1=0,\\ 2x+y+2=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-1,\\ y=0,\end{cases}$所以圆心 $C(-1,0)$,所以半径 $r=|AC|=2$,所以圆 C 的标准方程为$(x+1)^2+y^2=4$.

若选②, 设圆 C 的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,则$\begin{cases}3+\sqrt{3}E+F=0,\\ 1+D+F=0,\\ 1+4-D-2E+F=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}D=2,\\ E=0,\\ F=-3,\end{cases}$所以圆 C 的方程为 $x^2+y^2+2x-3=0$,即圆 C 的标准方程为$(x+1)^2+y^2=4$.

(2)由(1)知,圆 C 的圆心为 $C(-1,0)$,半径为 $r=2$,由已知,得 Q,R 在以 CP 为直径的圆上,又 $P(3,-4)$,则以 CP 为直径的圆的方程为 $(x+1)(x-3)+y(y+4)=0$,即 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$,两圆方程作差,得直线 QR 的方程为 $4x-4y=0$, 即 $x-y=0$, 圆心 C 到直线 QR 的距离为 $d=\frac{|-1-0|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以$|QR|=2\sqrt{4-\frac{1}{2}}=\sqrt{14}$.

2.(1)**解:** 因为椭圆 C 的离心率为$\frac{1}{2}$,焦点 $F(1,0)$,所以$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$,$c=1$,则 $a=2,b=\sqrt{3}$,所以椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)**证明:** 若选①$|AB|=\frac{15}{4}$作为已知,证明②直线l 的斜率 k 满足 $k^2=\frac{1}{4}$.设直线 $l:y=k(x-1)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,联立$\begin{cases}y=k(x-1),\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$得$(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$,$\Delta=(-8k^2)^2-4(4k^2+3)(4k^2-12)=144(k^2+1)>0$,$x_1+x_2=\frac{8k^2}{4k^2+3}$,$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{4k^2+3}$, 则 $|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{12\sqrt{k^2+1}}{4k^2+3}=\frac{12(k^2+1)}{4k^2+3}=\frac{15}{4}$,得 $k^2=\frac{1}{4}$.

若选②直线 l 的斜率 k 满足 $k^2=\frac{1}{4}$作为已知, 证明①$|AB|=\frac{15}{4}$.由 $k^2=\frac{1}{4}$,得 $k=\pm\frac{1}{2}$,则直线 $l:y=\pm\frac{1}{2}(x-1)$,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,联立$\begin{cases}y=\pm\frac{1}{2}(x-1),\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得 $4x^2-2x-11=0$,所以 $x_1+x_2=\frac{1}{2}$,$x_1x_2=-\frac{11}{4}$,所以$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{1+\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}+4\times\frac{11}{4}}=\frac{15}{4}$.

3.**解:**(1)设椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

若选①,则$\begin{cases}e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{1}{2},\\ \frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1,\end{cases}$解得 $a^2=4,b^2=3$,

所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

若选②,则$\begin{cases}e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{1}{2},\\ \frac{2b^2}{a}=3,\end{cases}$解得 $a^2=4,b^2=3$,

所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

若选③,则$\begin{cases}e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{1}{2},\\ 2a=4,\end{cases}$解得 $a=2,b^2=3$,

所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)由题意,得直线 l 的斜率存在且不为 0,设直线 l 的方程为 $y=kx+1$ $(k\neq0)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$, 联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=kx+1,\end{cases}$得$(3+4k^2)x^2+8kx-8=0$,所以 $x_1+x_2=\frac{-8k}{3+4k^2}$,$x_1x_2=\frac{-8}{3+4k^3}$,因为 $N(0,1)$,$M\left(-\frac{1}{k},0\right)$,所以$\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{1}{k}-x_1,-y_1\right)$,$\overrightarrow{NB}=(x_2,y_2-1)$,因为$|AM|=|BN|$,且 A,M,N,B 四点共线,所以$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NB}$,则$-\frac{1}{k}-x_1=x_2$,即 $x_1+x_2=-\frac{1}{k}$,得$\frac{-8k}{3+4k^2}=-\frac{1}{k}$,解得 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.所以直线 l 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+1$ 或 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+1$.

4.(1)**解:** 若选①,依题意,得$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\ \frac{a^2}{c}-c=3,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3},\\ c=1,\end{cases}$所以椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

若选②,圆 M 的圆心为 $M(6,0)$,半径为 4,由椭圆 C 与圆 M 外切,得切点必为$(2,0)$,故 $a=2$,圆 N 的圆心为 $N(0,2\sqrt{3})$,半径为$\sqrt{3}$,由椭圆 C 与圆 N 外切,得切点必为$(0,\sqrt{3})$,故 $b=\sqrt{3}$,所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)**证明:** 设 $A(x_1,y_1)$,$B(-x_1,-y_1)$,$D(x_2,y_2)$,$E(x_3,y_3)$,因为 $F(1,0)$,A,F,D 三点共线,$\overrightarrow{FA}=(x_1-1,y_1)$,$\overrightarrow{FD}=(x_2-1,y_2)$,所以 $y_2(x_1-1)=y_1(x_2-1)$,即 $y_1x_2-y_2x_1=y_1-y_2$,① 又点 A,D 在椭圆上,则$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$,即 $3=\frac{y_1^2}{1-\frac{x_1^2}{4}}$,代入$\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1$,化简得$y_1^2x_2^2-y_2^2x_1^2=4(y_1^2-y_2^2)$,结合①,得 $y_1x_2+y_2x_1=4(y_1+y_2)$,② 联立①②,得$\begin{cases}x_2=\frac{5x_1-8}{2x_1-5},\\ y_2=\frac{3y_1}{2x_1-5},\end{cases}$同理得$\begin{cases}x_3=\frac{5x_1+8}{2x_1+5},\\ y_3=\frac{3y_1}{2x_1+5},\end{cases}$所以直线 DE 方程为 $y-y_2=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}(x-x_2)$, 即 $y=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}x+\frac{y_2x_3-y_3x_2}{x_3-x_2}$,又$\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\frac{5y_1}{3x_1}$,$\frac{y_2x_3-y_3x_2}{x_3-x_2}=-\frac{8y_1}{3x_1}$,所以直线 DE 方程为 $y=\frac{y_1}{3x_1}(5x-8)$,故直线 DE 过定点$\left(\frac{8}{5},0\right)$.

5.**解:**(1)若选①,因为双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm x$,所以可设双曲线 C 的方程为 $x^2-y^2=\lambda$,将点 $P(2,-\sqrt{2})$代入,得 $2^2-(-\sqrt{2})^2=\lambda$,得 $\lambda=2$,所以双曲线 C 的标准方程为$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$.

若选②,因为 C 的离心率为$\sqrt{2}$,所以$\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{2}$,得 $a=b$,故可设 C 的方程为 $x^2-y^2=\lambda$,将点 $P(2,-\sqrt{2})$得 $2^2-(-\sqrt{2})^2=\lambda$,可得 $\lambda=2$,所以双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$.

(2)**证明:** 由(1)可知,F 的坐标为$(2,0)$,由双曲线的对称性,得点 Q 为$(2,\sqrt{2})$,设直线 l 的方程为 $y=k\cdot(x-2)$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,易知 $k\neq\pm1$,联立$\begin{cases}\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1,\\ y=k(x-2),\end{cases}$得$(k^2-1)x^2-4k^2x+4k^2+2=0$,所以 $x_1+x_2=\frac{4k^2}{k^2-1}$,$x_1x_2=\frac{4k^2+2}{k^2-1}$,所以直线 PM:$y=\frac{k(x_1-2)+\sqrt{2}}{x_1-2}(x-2)-\sqrt{2}$, 即 $y=\left(k+\frac{\sqrt{2}}{x_1-2}\right)x-2k-\frac{2\sqrt{2}}{x_1-2}-\sqrt{2}$,直线 QN:$y=\frac{k(x_2-2)-\sqrt{2}}{x_2-2}(x-2)+\sqrt{2}$,即 $y=\left(k-\frac{\sqrt{2}}{x_2-2}\right)x-2k+\frac{2\sqrt{2}}{x_2-2}+\sqrt{2}$,联立两直线方程,消去 y,得$\left(\frac{1}{x_1-2}+\frac{1}{x_2-2}\right)x=2\left(\frac{1}{x_1-2}+\frac{1}{x_2-2}+1\right)$,化简得$(x_1+x_2-4)x=2(x_1x_2-x_1-x_2)$, 则 $x=\frac{2(x_1x_2-x_1-x_2)}{x_1+x_2-4}=2\times\frac{\frac{4k^2+2}{k^2-1}-\frac{4k^2}{k^2-1}}{\frac{4k^2}{k^2-1}-4}=1$,所以点 A 的横坐标为 1,所以点 A 在定直线 $x=1$ 上.

扫码免费下载习题讲解 ppt

第 29 期

专题一 函数与导数

专项训练(1)

1.$y=2x+2$ **提示:** 由 $f(x)=xe^x+x+2$,得 $f'(x)=(x+1)e^x+1$,所以 $f'(0)=2$,又 $f(0)=2$,所以所求切线方程是 $y-2=2x$,即 $y=2x+2$.

2.$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$ **提示:** 因为 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,$f(-x)=\lg(|-x|+1)+2^{-x}+2^x=f(x)$,所以$f(x)$是偶函数,当 $x\geqslant0$ 时,$f(x)=\lg(x+1)+2^x+2^{-x}$,令 $g(x)=2^x+2^{-x}(x\geqslant0)$,任取 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$,且$x_1<x_2$,则 $g(x_1)-g(x_2)=2^{x_1}+2^{-x_1}-2^{x_2}-2^{-x_2}=(2^{x_1}-2^{x_2})\left(1-\frac{1}{2^{x_1}\cdot2^{x_2}}\right)$,由 $0\leqslant x_1<x_2$,得 $1\leqslant2^{x_1}<2^{x_2}$,则$2^{x_1}-2^{x_2}<0$,$1-\frac{1}{2^{x_1}\cdot2^{x_2}}>0$,所以 $g(x_1)-g(x_2)<0$,即 $g(x_1)<g(x_2)$,则 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,又 $y=\lg(x+1)$在$[0,+\infty)$上单调递增,所以 $f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,则 $f(x)$在$(-\infty,0]$上单调递减,所以 $f(x+1)<f(2x)\Leftrightarrow f(|x+1|)<f(|2x|)\Leftrightarrow|x+1|<|2x|$,则$(x+1)^2<(2x)^2$,解得 $x<-\frac{1}{3}$或 $x>1$.

3.$2\sqrt{2}e$ **提示:** 在同一坐标系中,作出函数 $y=f(x)$的大致图象及直线 $y=m$(图略),因为方程 $f(x)=m$ 存在四个不相等的实根 x_1,x_2,x_3,x_4,且 $x_1<x_2<x_3<x_4$,则 $y=f(x)$的图象与直线 $y=m$ 有四个交点,所以 $0<m<1$,$x_1+x_2=-2$,$\frac{1}{e}<x_3<e<x_4<e^2$,且 $1-\ln x_3=-(1-\ln x_4)$,则 $\ln x_3+\ln x_4=2$,即 $\ln x_3x_4=2$,得 $x_3x_4=e^2$,则 $x_4-(x_1+x_2)x_3=x_4+2x_3\geqslant2\sqrt{2x_3x_4}=2\sqrt{2}e$,当且仅当 $x_4=2x_3$,即 $x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}e$,$x_4=\sqrt{2}e$ 时,等号成立,所以 $x_4-(x_1+x_2)x_3$ 的最小值是 $2\sqrt{2}e$.

4.$(0,e)$ **提示:** 不等式 $e^{x^2}-\frac{1}{2}x^4-x^2-x^{mx}+mx\ln x+\frac{1}{2}\cdot(mx\ln x)^2>0(m>0)$在$(0,+\infty)$上恒成立$\Leftrightarrow e^{x^2}-\frac{1}{2}(x^2)^2-x^2>e^{mx\ln x}-\frac{1}{2}(mx\ln x)^2-mx\ln x$ 在$(0,+\infty)$上恒成立.构造函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x$,$x\in(0,+\infty)$,$f'(x)=e^x-x-1$,令 $g(x)=f'(x)$,则 $g'(x)=e^x-1>g'(0)=0$,所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,所以 $f'(x)=g(x)>g(0)=0$,所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,又原不等式等价于 $f(x^2)>f(mx\ln x)$,所以 $x^2>mx\ln x$,即$\frac{1}{m}>\frac{\ln x}{x}$在$(0,+\infty)$上恒成立.令 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$,$x\in(0,+\infty)$,则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,当 $x\in(0,e)$时,$h'(x)>0$,$h(x)$单调递增,当 $x\in(e,+\infty)$时,$h'(x)<0$, $h(x)$单调递减,所以 $h(x)_{max}=h(e)=\frac{1}{e}$,所以$\frac{1}{m}>\frac{1}{e}$,解得 $0<m<e$.

专项训练(2)

1.$-\frac{2}{3}$ **提示:** 设切点为(x_0,e^{-3x_0+a}),则 $e^{-3x_0+a}=-3x_0+\frac{1}{3}$,由 $f(x)=e^{-3x+a}$,得 $f'(x)=-3e^{-3x+a}$,所以 $-3e^{-3x_0+a}=-3$,得 $-3x_0+a=0$,则 $-3x_0+\frac{1}{3}=1$,解得 $x_0=-\frac{2}{9}$,则 $a=-\frac{2}{3}$.

2.1 **提示:** 因为 $f(x)=\log_4(4^x+m)-\frac{1}{2}x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,所以 $4^x+m>0$ 恒成立,则 $m\geqslant0$,又对任意实数 a,都满足 $f(a)\geqslant f(-a)$,所以对任意实数$-a$,都满足 $f(-a)\geqslant f(a)$,所以 $f(a)=f(-a)$,所以 $f(x)$为偶函数,则 $\log_4(4^{-x}+m)+\frac{1}{2}x=\log_4(4^x+m)-\frac{1}{2}x$,化简得$(4^x-1)(m-1)=0$,要使上式对任意实数 x 恒成立,则 $m-1=0$,得 $m=1$.

3.$\left[-\frac{5}{2},-2\right)$ **提示:** 作出函数 $f(x)$的大致图象(图略),令 $f(x)=t$,则$[f(x)]^2+af(x)+1=0$ 可化为 $t^2+at+1=0$,依题意,要使函数 $g(x)$恰好有 5 个零点,则方程 $t^2+at+1=0$ 在$(1,2]$内有一个实数根,且在$(0,1]\cup(2,+\infty)$内有一个实数根.设 $h(t)=t^2+at+1$,则$\begin{cases}\Delta=a^2-4>0,\\ h(0)=1>0,\\ h(1)=a+2\leqslant0,\\ h(2)=2a+5\geqslant0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\Delta=a^2-4>0,\\ h(1)=a+2>0,\\ h(2)=2a+5\leqslant0,\\ -\frac{a}{2}>1,\end{cases}$解得$-\frac{5}{2}\leqslant a<-2$.

4.$(0,2e]$ **提示:** 不等式 $x^a\geqslant2e^2f(x)+e^{2x}$ 对任意 $x>0$ 恒成立等价于$\frac{x^a}{e^{2x}}\geqslant2f(x)+1$,即 $e^{a\ln x-2x}\geqslant2f(x)+1$ 在$(0,+\infty)$上恒成立,所以 $e^{f(x)}-2f(x)-1\geqslant0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立.令 $t=f(x)$,设 $g(t)=e^t-2t-1$,则 $g'(t)=e^t-2$,令 $g'(t)=0$,得 $t=\ln2$,所以当 $t<\ln2$ 时,$g'(t)<0$,$g(t)$单调递减,当 $t>\ln2$ 时,$g'(t)>0$,$g(t)$单调递增,所以 $g(x)_{min}=g(\ln2)=1-2\ln2<0$,$g(0)=0$,$g(2)=e^2-5>0$,所以存在 $t_0\in(\ln2,2)$,使得 $g(t_0)=0$,所以若 $g(t)\geqslant0$,则 $t\leqslant0$ 或 $t\geqslant t_0$,即 $f(x)\leqslant0$ 或 $f(x)\geqslant t_0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立, 又 $f'(x)=\frac{a}{x}-2=\frac{a-2x}{x}(x>0)$,所以当 $x\in\left(0,\frac{a}{2}\right)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,当 $x\in\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,所以 $f(x)_{max}=f\left(\frac{a}{2}\right)=a\ln\frac{a}{2}-a$,所以 $a\ln\frac{a}{2}-a\leqslant0$,解得 $0<a\leqslant2e$,所以实数 a 的取值范围为$(0,2e]$.

专题二 立体几何、空间向量

专项训练(1)

1.$\frac{3\pi}{4}$ **提示:** 设圆锥的底面半径为 R,母线长为 l,由题意,得$\begin{cases}2\pi R=\frac{2\pi}{3}\cdot l,\\ \pi R^2+\pi Rl=\pi,\end{cases}$解得 $R=\frac{1}{2}$,$l=\frac{3}{2}$,所以该圆锥的侧面积为 $\pi Rl=\frac{3\pi}{4}$.

2.①③ **提示:** 连接 AD_1,易知 $AB\perp$平面 ADD_1A_1,则 $AB\perp A_1D$, 又 $A_1D\perp AD_1$,$AB\cap AD_1=A$,$AB,AD_1\subset$平面 AD_1B,所以 $A_1D\perp$平面 AD_1B,所以 $A_1D\perp D_1B$,故①正确,②错误;因为 M 是 A_1D 的中点,所以 M 是 AD_1 的中点,又 N 是 D_1B 的中点,所以 $MN/\!/AB$,又 $AB/\!/A_1B_1$, 则 $MN/\!/A_1B_1$, 又 $MN\not\subset$平面 $A_1B_1C_1D_1$,$A_1B_1\subset A_1B_1C_1D_1$, 所以 $MN/\!/$平面 $A_1B_1C_1D_1$,故③正确;假设 $MN\perp$平面 BDD_1B_1,则 $AB\perp$平面 BDD_1B_1,所以 $AB\perp BD$,这与$\angle ABD=45°$矛盾,故假设不成立,故④错误.

3.$\frac{4}{3}$ **提示:** 以 D 为原点,DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴, 建立空间直角坐标系, 则 $B_1(2,2,2)$,$C_1(0,2,2)$,$E(1,2,0)$,$F(0,1,0)$,所以$\overrightarrow{C_1B_1}=(2,0,0)$,$\overrightarrow{C_1E}=(1,0,-2)$,$\overrightarrow{EF}=(-1,-1,0)$,设平面 C_1EF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$, 则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{C_1E}=x-2z=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EF}=-x-y=0,\end{cases}$取 $z=1$,则 $x=2,y=-2$,所以平面 C_1EF 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(2,-2,1)$,所以点 B_1 到平面 C_1EF 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{C_1B_1}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=\frac{4}{3}$.

4.$\frac{\sqrt{6}}{6}$ **提示:** 过 C 作 $CF/\!/BD$,由 $BD\perp$平面 ABC,得 $CF\perp$平面 ABC,则 $CF\perp CA$,$CF\perp CB$,又 $AC\perp BC$, 所以以 C 为原点,CA,CB,CF 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴, 建立空间直角坐标系, 则 $C(0,0,0)$,$A(2,0,0)$,$B(0,2,0)$,$E(2,0,1)$,$D(0,2,2)$,$M(1,1,0)$,易知平面 BCD 一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,0,0)$,又$\overrightarrow{CE}=(2,0,1)$,$\overrightarrow{CM}=(1,1,0)$,设平面 EMC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\\ \overrightarrow{CM}\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2x+z=0,\\ x+y=0,\end{cases}$取 $y=-1$,则 $x=1,z=-2$,所以平面 EMC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(1,-1,-2)$, 设平面 EMC 与平面 BCD 的夹角为 θ, 则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

专项训练(2)

1.$\frac{1}{3}$ **提示:** 连接 MQ,NQ,则平面 A_1MQN 即为过点 A_1,M,N 作的正方体的截面 α, 因为平面 $ABB_1A_1/\!/$平面 DCC_1D_1,且平面 $ABB_1A_1\cap\alpha=A_1M$,平面 $DCC_1D_1\cap\alpha=NQ$,所以 $A_1M/\!/NQ$,又 $NC_1/\!/A_1B_1$,则$\angle C_1NQ=\angle B_1A_1M$,又$\angle NC_1Q=\angle A_1B_1M=90°$,所以$\triangle NC_1Q\backsim\triangle A_1B_1M$,则$\frac{C_1Q}{B_1M}=\frac{NC_1}{A_1B_1}=\frac{1}{2}$, 又 $B_1M=\frac{1}{2}BB_1=\frac{1}{2}CC_1$,所以$\frac{C_1Q}{CC_1}=\frac{1}{4}$,则$\frac{C_1Q}{QC}=\frac{1}{3}$.

2.②④ **提示:** 由题意,知 B_1D_1 与 D_1C_1 不垂直,因为 $EF/\!/C_1D_1$,所以 B_1D_1 与 EF 不垂直,所以 B_1D_1 与平面 B_1EF 不垂直, 故①错误; 因为平面 D_1EF 即平面 CDD_1C_1,B_1 到平面 CDD_1C_1 的距离为 B_1C_1 的长度,是定值,$\triangle D_1EF$ 中,EF 的长度不变,D_1 到 EF 的距离为 DD_1 的长度,是定值,则 $S_{\triangle D_1EF}$ 为定值,又 $V_{D_1-B_1EF}=V_{B_1-D_1EF}$,所以三棱锥 D_1-B_1EF 的体积为定值,故②正确;平面 B_1EF 即平面 B_1A_1DC,又 A_1A 与平面 B_1A_1DC 相交,所以 A_1A 与平面 B_1EF 相交,故③错误;因为 $CD\perp$平面 A_1D_1DA,$CD\subset$平面 B_1A_1DC,所以平面 $A_1D_1DA\perp$平面 B_1A_1DC,即平面 $A_1ADD_1\perp$平面 B_1EF,故④正确.

3.$\frac{\sqrt{5}}{5}$ **提示:** 取 AD 的中点 M,连接 MB,MP,因为 $BA=BD=\sqrt{2}$,$PA=PD=\sqrt{5}$,$AD=2$, 所以 $AB\perp AD$,$BM\perp AD$,$PM\perp AD$,所以$\angle PMB$ 为二面角 $P-AD-B$ 的平面角,又二面角 $P-AD-B$ 为 $60°$,所以$\angle PMB=60°$,在 $\mathrm{Rt}\triangle ABM$ 中,得 $BM=1$,在 $\mathrm{Rt}\triangle APM$ 中,得 $PM=2$,在$\triangle PBM$ 中,由余弦定理,得$PB^2=PM^2+BM^2-2PM\cdot BM\cos\angle PMB=3$,故$PM^2=BM^2+PB^2$,所以 $PB\perp BM$,又 $BM\perp AD$,$PM\perp AD$,$PM\cap BM=M$,所以 $AD\perp$平面 PBM,则 $AD\perp PB$,又四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 则 $AD/\!/BC$, 所以 $PB\perp BC$,$BM\perp BC$,以 B 为坐标原点,以 BC,BM,BP 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,则 $B(0,0,0)$,$M(0,1,0)$,$A(-1,1,0)$,$P(0,0,\sqrt{3})$,易知$\overrightarrow{BM}=(0,1,0)$为平面 PBC 的一个法向量, 又$\overrightarrow{PA}=(-1,1,-\sqrt{3})$, 设 AP 与平面 PBC 所成的角为 θ,所以 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PA},\overrightarrow{BM}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{BM}|}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

4.$\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$ **提示:** 因为平面 $A_1DE\perp$平面 $BCDE$,$A_1D\perp DE$,$A_1D\subset$平面 A_1DE, 平面 $A_1DE\cap$平面 $BCDE=DE$,所以 $A_1D\perp$平面 $BCDE$,则 $A_1D\perp CD$,由 $CD\perp DE$,$A_1D\perp DE$,$A_1D\cap CD=D$,$A_1D,CD\subset$平面 A_1DC, 所以 $DE\perp$平面 A_1DC, 又 D,E 分别为 AC,AB 的中点,则 $DE/\!/BC$,所以 $BC\perp$平面 A_1DC,又 $A_1C\subset$平面 A_1DC,所以 $BC\perp A_1C$,因为 $A_1D=CD$,$A_1D=CD=2$,所以 $A_1C=\sqrt{A_1D^2+CD^2}=2\sqrt{2}$, 又 $BC=4$,$BC\perp A_1C$, 所以 $A_1B=\sqrt{BC^2+A_1C^2}=2\sqrt{6}$, 所以 $CF=BF=\sqrt{6}$, 因为 $A_1E=BE=2\sqrt{2}$,$A_1B=2\sqrt{6}$, 所以 $EF=\sqrt{BE^2-BF^2}=\sqrt{2}$, 又 $CE=2\sqrt{2}$,所以 $CF^2+EF^2=CE^2$,所以 $CF\perp EF$,所以$\triangle CFE$ 为直角三角形,又$\triangle CDE$ 是斜边为 CE 的直角三角形,取 CE 的中点 O, 连接 OD,OF, 则 $OC=OD=OE=OF=\sqrt{2}$, 所以 O 为四面体 FCDE 的外接球的球心,且半径 $R=\sqrt{2}$,所以四面体 $FCDE$ 外接球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$.

专题三 三角函数、平面向量、解三角形

专项训练(1)

1.$(-1,-\sqrt{3})$ **提示:** 由 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{3})$,得$|\boldsymbol{a}|=2$,则 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为$|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=(-1,-\sqrt{3})$.

2.4 或 5 **提示:** 由 $\cos B=\frac{3}{5}$,$B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,得 $\sin B=\frac{4}{5}$,因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ac\times\frac{4}{5}=4$,得 $ac=10$①,在$\triangle ABM$ 中,由余弦定理,得 $AM^2=AB^2+BM^2-2AB\cdot BM\cdot\cos B$,即$\frac{17}{4}=c^2+\frac{a^2}{4}-2c\cdot\frac{a}{2}\cdot\cos B=c^2+\frac{a^2}{4}-\frac{3}{5}ac$②,联立①②,得$\begin{cases}ac=10,\\ c^2+\frac{a^2}{4}=\frac{41}{4},\end{cases}$解得$\begin{cases}a=5,\\ c=2,\end{cases}$或$\begin{cases}a=4,\\ c=\frac{5}{2},\end{cases}$所以 $a=4$ 或5.

3.$\frac{1}{3}$ **提示:** 因为 $\cos2\beta=2\cos^2\beta-1=-\frac{7}{9}$,所以$\cos^2\beta=\frac{1}{9}$,又 $\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,所以 $\cos\beta=-\frac{1}{3}$,$\sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,所以 $\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$,因为 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{7}{9}>0$,所以 $\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,则 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$,所以 $\sin\alpha=\sin(\alpha+\beta-\beta)=\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\sin\beta=\frac{1}{3}$.

4.②③ **提示:** $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\cos2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2x-\frac{1}{2}\sin2x=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\cdot\cos2x+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\sin2x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cos2x+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\sin2x\right)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{5\pi}{12}\right)$.函数 $f(x)$的最大值为$\sqrt{2}$,故①不正确;$f(x)$的最小正周期 $T=\pi$,故②正确;当 $x\in\left(\frac{\pi}{24},\frac{13\pi}{24}\right)$时,$2x+\frac{5\pi}{12}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$,所以 $f(x)$在$\left(\frac{\pi}{24},\frac{13\pi}{24}\right)$上单调递减,故③正确;将函数 $y=\sqrt{2}\cos2x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{24}$个单位长度后, 得到 $y=\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x-\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\sin\left(-2x+\frac{5\pi}{12}\right)\neq f(x)$,故④错误.

专项训练(2)

1.$5\sqrt{2}$ **提示:** 因为向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$,$\boldsymbol{b}=(-3,t)$,$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3+2t=0$,解得 $t=\frac{3}{2}$,则 $\boldsymbol{b}=\left(-3,\frac{3}{2}\right)$,$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(-5,5)$,所以$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=5\sqrt{2}$.

2.18 **提示:** 由$\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$,得$\triangle ABC$ 是等腰三角形,则 $AB=AC$,又 $AB=\sqrt{10}$,所以$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{10}$,在$\triangle ABC$ 中,由余弦定理的推论,得 $\cos\angle BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{4}{5}$, 由点 P 是 BC 上的动点,设$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$,且 $\lambda+\mu=1$,所以$\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=(\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\lambda|\overrightarrow{AB}|^2+\mu|\overrightarrow{AC}|^2+(\lambda+\mu)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=10(\lambda+\mu)+(\lambda+\mu)|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC=18$.

3.$\sqrt{3}$ **提示:** 由题意及余弦定理的推论,得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-c^2}{4a}=\frac{a}{2}-\frac{c}{4}$,则 $a^2+c^2-ac=b^2$,所以 $\cos B=\frac{1}{2}$,又 $B\in(0,\pi)$,所以 $B=\frac{\pi}{3}$,由余弦定理,得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\geqslant2ac-2ac\cdot\frac{1}{2}=ac$,所以 $ac\leqslant4$,当且仅当 $a=c=2$ 时,取等号,所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B\leqslant\frac{1}{2}\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$,即$\triangle ABC$ 的面积的最大值为$\sqrt{3}$.

4.$\left[-4,\frac{9}{4}\right]$ **提示:** 由图可知 $A=2$,$\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,所以 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,则 $\omega=2$,由 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=2$,得$\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$,所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.设 $g(x)=f(x)+2\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$, 则 $g(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+2\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+2\left[1-2\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right]=-4\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+2$,令 $t=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,则 $t\in[-1,1]$,设 $h(t)=-4t^2+2t+2=-4\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{4}$,因为 $t\in[-1,1]$,所以 $h(t)\in\left[-4,\frac{9}{4}\right]$,则 $g(x)\in\left[-4,\frac{9}{4}\right]$,因为方程 $f(x)+2\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=a$,即 $g(x)=a$ 有实数解,等价于函数 $y=g(x)$的图象与直线 $y=a$ 有交点,所以实数 a 的取值范围为$\left[-4,\frac{9}{4}\right]$.

专题四 数列和不等式

专项训练(1)

1.81 **提示:** 设数列$\{a_n\}$的公差为 d,因为 $a_2+a_4=$

14,所以 $2a_3=14$,则 $a_3=7$,又 $a_1=3$,所以 $d=\frac{1}{2}(a_3-a_1)=2$,所以 $a_{40}=a_1+39d=81$.

2.17　**提示:** 由 $m+2n=1$,得 $m=1-2n$,所以 $\frac{4}{m}+\frac{5-m}{2n}=\frac{4}{m}+\frac{4+2n}{2n}=\frac{4}{m}+\frac{2}{n}+1=\left(\frac{4}{m}+\frac{2}{n}\right)(m+2n)+1=\frac{8n}{m}+\frac{2m}{n}+9\geqslant 2\sqrt{\frac{8n}{m}\cdot\frac{2m}{n}}+9=17$,当且仅当 $\frac{8n}{m}=\frac{2m}{n}$,即 $m=\frac{1}{2},n=\frac{1}{4}$ 时,等号成立,所以 $\frac{4}{m}+\frac{5-m}{2n}$ 的最小值为 17.

3.2,3　**提示:** 由题意,得公比 $q>0$,因为 $a_3=18,S_3=26$,所以 $\begin{cases}a_1q^2=18,\\ \frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=26,\end{cases}$ 得 $4q^2-9q-9=0$,解得 $q=3$(舍去负值),则 $a_1=2$.

4. $\left(-\infty,\frac{18}{5}\right)$　**提示:** 因为 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}(n\in\mathbf{N}_+)$,所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,设其公差为 d,由方程 $x^2-18x+65=0$,解得 $x=5$ 或 $x=13$,又 $a_7>a_3$,所以 $a_3=5,a_7=13$,又 $a_7-a_3=4d$,所以 $d=2$,所以 $a_n=5+2(n-3)=2n-1$,由 $2^na_n\cdot(4-\lambda)>(a_n-1)^2$,得 $2^n(2n-1)(4-\lambda)>(2n-2)^2$,所以 $4-\lambda>\frac{(n-1)^2}{2^{n-2}(2n-1)}$ 对任意 $n\in\mathbf{N}_+$ 恒成立.设 $b_n=\frac{(n-1)^2}{2^{n-2}(2n-1)}$,则 $b_{n+1}-b_n=\frac{-2n^3+5n^2-2}{(4n^2-1)\cdot 2^{n-1}}$,由 $(4n^2-1)\cdot 2^{n-1}>0$ 对任意 $n\in\mathbf{N}_+$ 恒成立,所以只考虑 $-2n^3+5n^2-2$ 的符号.设 $f(n)=-2n^3+5n^2-2(n\in\mathbf{N}_+)$,$f'(n)=-6n^2+10n=-2n(3n-5)$,由 $f'(n)>0$,得 $1\leqslant n<\frac{5}{3}$,则 $f(n)$ 单调递增,由 $f'(n)<0$,得 $n>\frac{5}{3}$,则 $f(n)$ 单调递减,又 $f(1)=1,f(2)=2,f(3)=-11$,所以当 $n\geqslant 3$ 时,$f(n)\leqslant f(3)<0$,当 $n=1$ 或 $n=2$ 时,$f(n)>0$,即 $b_{n+1}-b_n>0$,所以 $b_1<b_2<b_3$,当 $n\geqslant 3$ 时,$f(n)<0$,即 $b_{n+1}-b_n<0$,则当 $n\geqslant 3$ 时,$\{b_n\}$ 单调递减,又 $b_1=0,b_2=\frac{1}{3},b_3=\frac{2}{5}$,所以 $b_n\leqslant b_3=\frac{2}{5}$,所以 $4-\lambda>\frac{2}{5}$,解得 $\lambda<\frac{18}{5}$,所以 λ 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{18}{5}\right)$.

专项训练(2)

1.5　**提示:** 由 $\frac{1}{3},S_3+1,S_9$ 成等比数列,得 $(S_3+1)^2=\frac{1}{3}S_9$,所以 $(3a_2+1)^2=\frac{1}{3}\times\frac{9}{2}(a_1+a_9)$,则 $(3a_2+1)^2=3a_5$,可得 $\frac{S_6}{S_3}=\frac{\frac{6(a_1+a_6)}{2}}{\frac{3(a_1+a_3)}{2}}=\frac{2(a_1+a_6)}{a_1+a_3}=\frac{a_2+a_5}{a_2}=1+\frac{a_5}{a_2}=1+\frac{(3a_2+1)^2}{3a_2}=3a_2+\frac{1}{3a_2}+3\geqslant 2\sqrt{3a_2\cdot\frac{1}{3a_2}}+3=5$,当且仅当 $3a_2=\frac{1}{3a_2}$,即 $a_2=\frac{1}{3}$ 时,取等号,所以 $\frac{S_6}{S_3}$ 的最小值为 5.

2.(-1,4)　**提示:** 因为 $x+y=3$,所以 $x+1+y=4$,所以 $\frac{4}{x+1}+\frac{16}{y}=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{x+1}+\frac{16}{y}\right)(x+1+y)=\frac{y}{x+1}+\frac{4(x+1)}{y}+5\geqslant 2\sqrt{4}+5=9$,当且仅当 $\frac{y}{x+1}=\frac{4(x+1)}{y}$,即 $x=\frac{1}{3},y=\frac{8}{3}$ 时,等号成立,所以 $\left(\frac{4}{x+1}+\frac{16}{y}\right)_{\min}=9$,因为不等式 $\frac{4}{x+1}+\frac{16}{y}>m^2-3m+5$ 恒成立,所以 $m^2-3m+5<9$,即 $m^2-3m-4<0$,解得 $-1<m<4$,故实数 m 的取值范围为 $(-1,4)$.

3. $\frac{1}{2n-1}$　**提示:** 由 $a_n=\frac{a_{n-1}}{2a_{n-1}+1}(n\geqslant 2)$,两边取倒数,得 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_{n-1}}+2$,即 $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=2(n\geqslant 2)$,又 $a_1=1$,所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 1,公差为 2 的等差数列,所以 $\frac{1}{a_n}=1+2(n-1)=2n-1$,所以 $a_n=\frac{1}{2n-1}$.

4.8　**提示:** 因为 $\frac{2a_n}{3n+1}=\frac{a_{n-1}}{3n-2}(n\in\mathbf{N}_+)$,所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{3n+1}{2(3n-2)}(n\geqslant 2)$,所以 $\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{7}{2\times 4}\times\frac{10}{2\times 7}\times\frac{13}{2\times 10}\times\cdots\times\frac{3n+1}{2(3n-2)}=\frac{3n+1}{2^{n+1}}$,即 $\frac{a_n}{a_1}=\frac{3n+1}{2^{n+1}}$,又 $a_1=2$,所以 $a_n=\frac{3n+1}{2^n}$,所以 $S_n=\frac{4}{2^1}+\frac{7}{2^2}+\frac{10}{2^3}+\cdots+\frac{3n+1}{2^n}$,$\frac{1}{2}S_n=\frac{4}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\frac{10}{2^4}+\cdots+\frac{3n-2}{2^n}+\frac{3n+1}{2^{n+1}}$,两式作差,得 $\frac{1}{2}S_n=\frac{4}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{3}{2^n}-\frac{3n+1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{3n+1}{2^{n+1}}=\frac{7}{2}-(3n+7)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$,所以 $S_n=7-(3n+7)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$,因为 $S_n>\frac{217}{32}$,所以 $7-(3n+7)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n>\frac{217}{32}$,即 $(3n+7)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{7}{32}$.因为 $(3n+7)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n-(3n+10)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{3n+4}{2^{n+1}}>0$,所以数列 $\left\{(3n+7)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ 单调递减.又当 $n=7$ 时,$(3n+7)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{7}{32}$,当 $n=8$ 时,$(3n+7)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{31}{256}<\frac{7}{32}$,所以 $n\geqslant 8$,所以满足 $S_n>\frac{217}{32}$ 的最小正整数 n 的值为 8.

专题五　直线和圆、圆锥曲线

专项训练(1)

1. $2x+3y-10=0$　**提示:** 由 $\begin{cases}x+y-3=0,\\2x-y+6=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1,\\y=4,\end{cases}$ 则两直线的交点坐标为 $(-1,4)$,设所求直线方程是 $2x+3y+m=0$,将点 $(-1,4)$ 代入,得 $-2+12+m=0$,解得 $m=-10$.所以所求直线方程为 $2x+3y-10=0$.

2. $4\sqrt{5}$　**提示:** 因为直线 $l:mx-y-3m+1=0$,即 $(x-3)m-y+1=0$,令 $\begin{cases}x-3=0,\\-y+1=0,\end{cases}$ 解得 $x=3,y=1$,所以点 $P(3,1)$,因为圆 $C:(x-1)^2+(y-2)^2=25$,所以圆心为 $C(1,2)$,半径 $r=5$,因为 $|CP|=\sqrt{5}<5$,所以点 P 在圆 C 内,所以当直线 CP 与直线 AB 垂直时,$|AB|$ 取得最小值,此时 $|AB|_{\min}=2\sqrt{r^2-|CP|^2}=4\sqrt{5}$.

3. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　**提示:** 由 $(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF_2})\cdot\overrightarrow{PQ}=0$,$\overrightarrow{PF_2}=2\overrightarrow{F_2Q}$,得 $(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF_2})\cdot\frac{3}{2}\overrightarrow{PF_2}=0$,则 $(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF_2})\cdot(\overrightarrow{OF_2}-\overrightarrow{OP})=0$,即 $|\overrightarrow{OF_2}|^2=|\overrightarrow{OP}|^2$,所以 $|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OF_2}|=|\overrightarrow{OF_1}|=c$,所以 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$.设 $|F_2Q|=x$,则 $|PF_2|=2x$,所以 $|PF_1|=2a-2x$,$|QF_1|=2a-x$,在 $\mathrm{Rt}\triangle F_1PQ$ 中,由 $|PF_1|^2+|PQ|^2=|QF_1|^2$,得 $(2a-2x)^2+(3x)^2=(2a-x)^2$,解得 $x=\frac{a}{3}$,所以 $|PF_2|=\frac{2a}{3}$,$|PF_1|=\frac{4a}{3}$,在 $\mathrm{Rt}\triangle PF_1F_2$ 中,由 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$,得 $\left(\frac{2a}{3}\right)^2+\left(\frac{4a}{3}\right)^2=(2c)^2$,则 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{5}{9}$,所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

4. $8\sqrt{2},\frac{2}{3}$　**提示:** 设 $P(x,y)$,因为 $|PF_1|=\sqrt{2}|PF_2|$,$F_1(-2,0),F_2(2,0)$,所以 $\sqrt{(x+2)^2+y^2}=\sqrt{2}\sqrt{(x-2)^2+y^2}$,化简得 $(x-6)^2+y^2=32$,所以点 $P(x,y)$ 在圆 $(x-6)^2+y^2=32$ 上,则 $P(x,y)$ 到 x 轴的最大距离为 $4\sqrt{2}$,所以 $\triangle PF_1F_2$ 的面积最大值为 $\frac{1}{2}\times|F_1F_2|\times 4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$.由题意,得渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 与圆 $(x-6)^2+y^2=32$ 有交点,所以 $\frac{6b}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant 4\sqrt{2}$,即 $8a^2\geqslant b^2$,又 $a^2+b^2=c^2=4$,所以 $8a^2\geqslant 4-a^2$,则 $a^2\geqslant\frac{4}{9}$,解得 $a\geqslant\frac{2}{3}$,即实数 a 的最小值为 $\frac{2}{3}$.

专项训练(2)

1.2 或 $\frac{9}{2}$　**提示:** 因为 $A(-2,0),B(4,a)$ 两点到直线 $l:3x-4y+1=0$ 的距离相等,所以 $\frac{|-2\times 3-4\times 0+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|3\times 4-4a+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$,即 $|13-4a|=5$,解得 $a=2$ 或 $a=\frac{9}{2}$.

2. $2\sqrt{2}+3$　**提示:** 由题意,得圆 $C:(x-1)^2+(y-2)^2=9$,所以圆 C 的圆心为 $C(1,2)$,半径为 $r=3$,所以圆心 C 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{|1-2+5|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$,所以 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2$,所以 M 到弦 AB 的距离的最大值为 $d+r=2\sqrt{2}+3$,所以 $\triangle MAB$ 面积的最大值是 $\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot(d+r)=2\sqrt{2}+3$.

3. $\frac{25}{9}$　**提示:** 不妨令 R 为过 P 点垂直于准线的垂足,由 $\angle PQR=\angle PQF$,得 QP 为 $\angle FQR$ 的角平分线,又 $PR\perp QR$,且 $|PR|=|PF|$,根据角平分线的性质知,$PF\perp QF$,设 $P\left(\frac{m^2}{4},m\right)$ 且 $m>0$,则直线 PQ 的方程为 $y-m=\frac{3}{4}\left(x-\frac{m^2}{4}\right)$,令 $x=-1$,得 $y_Q=\frac{16m-3m^2-12}{16}$,则 $Q\left(-1,\frac{16m-3m^2-12}{16}\right)$,又 $F(1,0)$,由 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=0$,得 $\left(\frac{m^2}{4}-1,m\right)\cdot\left(-2,\frac{16m-3m^2-12}{16}\right)=2-\frac{m^2}{2}+\frac{16m^2-3m^3-12m}{16}=0$,即 $3m^3-8m^2+12m-32=(m^2+4)(3m-8)=0$,解得 $m=\frac{8}{3}$,所以 $|PF|=|PR|=\frac{m^2}{4}+1=\frac{25}{9}$.

4. $\left(0,\frac{\sqrt{7}}{3}\right]$　**提示:** 设椭圆的左焦点为 E,由椭圆的定义,得 $|BE|+|BF|=2a$,因为点 A,B 关于原点对称,所以四边形 $EBFA$ 为平行四边形,又 $|FA|=2|BF|$,$|BE|=|FA|$,所以 $|BF|=\frac{2}{3}a$,$|BE|=\frac{4}{3}a$,在 $\triangle EBF$ 中,由余弦定理的推论,得 $\cos\angle EBF=\frac{|BE|^2+|BF|^2-|EF|^2}{2|BE||BF|}=\frac{\frac{16}{9}a^2+\frac{4}{9}a^2-4c^2}{2\cdot\frac{4}{3}a\cdot\frac{2}{3}a}=\frac{5}{4}-\frac{9}{4}e^2$,所以 $\cos\angle BFA=-\cos\angle EBF=\frac{9}{4}e^2-\frac{5}{4}$,又 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}\leqslant\frac{4}{9}a^2$,所以 $|\overrightarrow{FA}|\cdot|\overrightarrow{FB}|\cdot\cos\angle BFA=\frac{4}{3}a\cdot\frac{2}{3}a\left(\frac{9}{4}e^2-\frac{5}{4}\right)\leqslant\frac{4}{9}a^2$,化简得 $e^2\leqslant\frac{7}{9}$,又 $0<e<1$,所以 $0<e\leqslant\frac{\sqrt{7}}{3}$,即离心率的取值范围是 $\left(0,\frac{\sqrt{7}}{3}\right]$.

专题六　统计与概率

专项训练(1)

1.20　**提示:** 由题意,得 A,B,C 三个部门的总人数为 $40+60+80=180$,则部门 A 抽检的人数为 $40\times\frac{90}{180}=20$.

2.8.6　**提示:** 由题意,得 $\bar{x}=\frac{2+4+5+6+8}{5}=5$,$\bar{y}=\frac{3+4.5+8.5+7.5+9}{5}=6.5$,因为 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=1.05x+\hat{a}$,所以将 $(5,6.5)$ 代入,得 $6.5=1.05\times 5+\hat{a}$,解得 $\hat{a}=1.25$,所以 $\hat{y}=1.05x+1.25$,当 $x=7$ 时,$\hat{y}=1.05\times 7+1.25=8.6$.

3. $\frac{2}{3}$　**提示:** 因为甲、乙、丙三人每人有 3 种选择,所以三人共有 $3^3=27$ 种选择,其中恰有两人参加同一项活动共有 $C_3^2C_3^1C_2^1=18$ 种选择,所以三人中恰有两人参加同一项活动的概率为 $P=\frac{18}{27}=\frac{2}{3}$.

4.1,1　**提示:** 由题意,得 $P(\xi=2)=\frac{C_3^2}{C_{m+n+3}^2}=\frac{3}{C_{m+n+3}^2}=\frac{1}{5}$,得 $C_{m+n+3}^2=15$①,因为取出的两个球为一红一黄的概率为 $\frac{2}{5}$,所以 $\frac{C_3^1C_m^1}{C_{m+n+3}^2}=\frac{3m}{C_{m+n+3}^2}=\frac{2}{5}$②,联立①②,解得 $m=2,n=1$,所以 $m-n=1$.易知 ξ 的所有可能的取值为 $0,1,2$,则 $P(\xi=0)=\frac{C_3^0C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}$,$P(\xi=1)=\frac{C_3^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{3}{5}$,$P(\xi=2)=\frac{1}{5}$,所以 $E(\xi)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1$.

专项训练(2)

1.92　**提示:** 由频率分布直方图的性质,可得 $(0.002+0.004+0.014+0.020+0.035+a)\times 10=1$,解得 $a=0.025$,因为 $0.02+0.04+0.14+0.2+0.35=0.75$,所以 80% 分位数落在区间 $[90,100]$ 内,设 80% 分位数约为 x 分,则 $0.75+(x-90)\times 0.025=0.8$,解得 $x=92$,所以 80% 分位数约为 92 分.

2.50　**提示:** 由题意可分为两类:①若乙只完成 E 工作,即甲、丙二人完成 A,B,C,D 四项工作,则一共有 $\left(C_4^1C_3^3+\frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}\right)A_2^2=14$ 种安排方式;②若乙不止完成 E 工作,即甲、乙、丙三人完成 A,B,C,D 四项工作,则一共有 $\frac{C_4^2C_2^1C_1^1}{A_2^2}\times A_3^3=36$ 种安排方式.综上,共有 $14+36=50$ 种安排方式.

3. $\frac{15}{4}$　**提示:** 因为二项式 $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2x}\right)^n$ 的展开式中只有第 4 项二项式系数最大,所以二项式 $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2x}\right)^n$ 的展开式有 7 项,则 $n=6$,所以 $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2x}\right)^6$ 的通项为 $T_{r+1}=C_6^r(\sqrt{x})^{6-r}\left(-\frac{1}{2x}\right)^r=C_6^r\left(-\frac{1}{2}\right)^r x^{3-\frac{3r}{2}}$,$r=0,1,2,\cdots,6$,令 $3-\frac{3r}{2}=0$,解得 $r=2$,所以展开式中的常数项为 $C_6^2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{4}$.

4. $\frac{3}{7},\frac{2}{3}$　**提示:** (1)由题意,得 $P(M)=\frac{C_4^2+C_3^2}{C_7^2}=\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$.

(2)由题意,得 $P(MN)=\frac{C_4^2}{C_7^2}\cdot\frac{C_3^1}{C_5^1}+\frac{C_3^2}{C_7^2}\cdot\frac{C_4^1}{C_5^1}=\frac{6}{21}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{21}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{7}$,由(1)得,$P(M)=\frac{3}{7}$,所以 $P(N|M)=\frac{P(MN)}{P(M)}=\frac{2}{3}$.

第 30 期

专题一　数　列

1.**解:**(1)若选①,因为 $n(2a_{n+1}-a_n)=a_n$,所以 $2na_{n+1}=(n+1)a_n$,则 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n}{n}$,又 $a_1=2$,则 $\frac{a_1}{1}=2$,所以数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是首项为 2,公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列,所以 $\frac{a_n}{n}=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,所以 $a_n=\frac{n}{2^{n-2}}$.

若选②,因为 $2a_{n+1}-a_n=2^{2-n}$,所以 $2^{n+1}a_{n+1}-2^na_n=4$,又 $a_1=2$,所以数列 $\{2^na_n\}$ 是首项为 $2a_1=4$,公差为 4 的等差数列,所以 $2^na_n=4+4(n-1)=4n$,所以 $a_n=\frac{n}{2^{n-2}}$.

若选③,因为 $\frac{a_1}{2}+a_2+2a_3+\cdots+2^{n-2}a_n=\frac{n(n+1)}{2}$,所以当 $n\geqslant 2$ 时,$\frac{a_1}{2}+a_2+2a_3+\cdots+2^{n-3}a_{n-1}=\frac{n(n-1)}{2}$,两式作差,得 $2^{n-2}a_n=n$,则 $a_n=\frac{n}{2^{n-2}}(n\geqslant 2)$,当 $n=1$ 时,$a_1=2$,满足上式,所以 $a_n=\frac{n}{2^{n-2}}$.

(2)由(1)得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{2n}\leqslant 1$,所以 $\{a_n\}$ 不是递增数列,因为 $a_1=a_2=2,a_3=\frac{3}{2},a_4=1,a_n\leqslant 1(n\geqslant 5)$,所以当 $n=3$ 或 $n=4$ 时,T_n 取得最大值,最大值为 $T_3=T_4=2\times 2\times\frac{3}{2}=6$.

2.**解:**(1)因为 $b_n(a_{n+1}-a_n)=b_{n+1}$,$a_1=1,a_2=3$,令 $n=1$,所以 $2b_1=b_2$,又数列 $\{b_n\}$ 为等比数列,则公比为 2,所以 $b_{n+1}=2b_n$,所以 $a_{n+1}-a_n=2$,所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项,2 为公差的等差数列,所以 $a_n=1+2(n-1)=2n-1$.

(2)由(1)知数列数列 $\{b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列.

若选①,则 $2(b_1+2b_1)=b_1+2b_1+4b_1-2$,解得 $b_1=2$,所以 $b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$.

若选②,则 $4a_3=b_2+b_4$,所以 $2b_1+8b_1=20$,解得 $b_1=2$,所以 $b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$.

若选③,则 $\frac{b_1(1-2^6)}{1-2}=126$,解得 $b_1=2$,故 $b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$.

所以 $c_n=\begin{cases}2n-1,n\text{ 为奇数},\\2^n,n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 所以数列 $\{c_n\}$ 的奇数项是以 1 为首项,4 为公差的等差数列,偶数项是以 4 为首项,4 为公比的等比数列,所以 $T_{2n}=(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_{2n})=n+\frac{n(n-1)}{2}\times 4+\frac{4(1-4^n)}{1-4}=2n^2-n+\frac{4(4^n-1)}{3}$.

3.**解:**(1)若选①,可得 $a_2=3,a_1=1$,$a_{n+2}-2a_{n+1}=S_{n+1}-S_n-2a_n=a_{n+1}-2a_n$,设 $D_n=a_{n+1}-2a_n$,则 $D_{n+1}=a_{n+2}-2a_{n+1}$,所以 $D_{n+1}=D_n=\cdots=D_1=a_2-2a_1=1$,所以 $a_{n+1}=2a_n+1$,则 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$,所以 $\{a_n+1\}$ 是首项和公比均为 2 的等比数列,则 $a_n+1=2^n$,所以 $a_n=2^n-1$.

若选②,由 $(1+a_n)(1+a_{n+1})=2^{n+1}(a_{n+1}-a_n)$,得 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\cdot(1+a_n)(1+a_{n+1})=(1+a_{n+1})-(1+a_n)$,又 $a_1=1$,所以 $\frac{1}{1+a_n}-\frac{1}{1+a_{n+1}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$,则 $\frac{1}{1+a_n}=\frac{1}{1+a_1}-\left(\frac{1}{1+a_1}-\frac{1}{1+a_2}\right)-\left(\frac{1}{1+a_2}-\frac{1}{1+a_3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{1+a_{n-1}}-\frac{1}{1+a_n}\right)=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}$,所以 $a_n+1=2^n$,则 $a_n=2^n-1$.

(2)由(1)知,$b_n=n(a_n+1)=n\cdot 2^n$,则 $T_n=1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n$,$2T_n=1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+3\cdot 2^4+\cdots+(n-1)\cdot$

$2^n+n\cdot 2^{n+1}$,两式作差,得 $-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n\cdot 2^{n+1}=(1-n)\cdot 2^{n+1}-2$,则 $T_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$,所以 $(n-1)^2\leqslant m(T_n-n-1)=m(n-1)(2^{n+1}-1)$,因为 $n\geqslant 2$,所以 $m\geqslant\frac{n-1}{2^{n+1}-1}$ 对 $n\geqslant 2$ 恒成立.设 $c_n=\frac{n-1}{2^{n+1}-1}$,对 $c_{n+1}-c_n=\frac{n}{2^{n+2}-1}-\frac{n-1}{2^{n+1}-1}=\frac{(2-n)\cdot 2^{n+1}-1}{(2^{n+2}-1)(2^{n+1}-1)}<0$,所以 $\{c_n\}$ 为递减数列,所以 $c_n\leqslant c_2=\frac{1}{7}$,所以 $m\geqslant\frac{1}{7}$,即 m 的取值范围是 $\left[\frac{1}{7},+\infty\right)$.

4.**解:**(1)因为 $S_n+S_{n+1}=2a_{n+1}-3$,所以 $S_{n-1}+S_n=2a_n-3(n\geqslant 2)$,两式作差,得 $S_{n+1}-S_{n-1}=2a_{n+1}-2a_n$,则 $a_{n+1}+a_n=2a_{n+1}-2a_n$,即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=3(n\geqslant 2)$,当 $n=1$ 时,$S_1+S_2=2a_2-3$,即 $a_1+a_1=a_2-3$,则 $a_2=9$,所以 $\frac{a_2}{a_1}=3$,所以数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为首项,3 为公比的等比数列,所以 $a_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$.

(2)若选①,$b_n=a_n\log_3a_n=n\cdot 3^n$,所以 $T_n=1\times 3+2\times 3^2+3\times 3^3+\cdots+n\cdot 3^n$,所以 $3T_n=1\times 3^2+2\times 3^3+\cdots+(n-1)\cdot 3^n+n\cdot 3^{n+1}$,两式作差,得 $-2T_n=3+3^2+3^3+\cdots+3^n-n\cdot 3^{n+1}=\frac{3(1-3^n)}{1-3}-n\cdot 3^{n+1}=\frac{1}{2}\times 3^{n+1}-\frac{3}{2}-n\cdot 3^{n+1}$,所以 $T_n=\frac{(2n-1)\cdot 3^{n+1}+3}{4}$.

若选②,$b_n=\frac{1}{\log_3a_n\cdot\log_3a_{n+2}}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$,所以 $T_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$.

若选③,$b_n=a_n-\log_3a_n=3^n-n$,所以 $T_n=(3-1)+(3^2-2)+(3^3-3)+\cdots+(3^n-n)=(3+3^2+3^3+\cdots+3^n)-(1+2+3+\cdots+n)=\frac{3(1-3^n)}{1-3}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{3^{n+1}-n^2-n-3}{2}$.

5.**解:**(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d\neq 0)$.

若选①,因为 $S_3=6,a_2,a_4,a_8$ 成等比数列,所以 $\begin{cases}3a_1+3d=6,\\(a_1+3d)^2=(a_1+d)(a_1+7d),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=1,\\d=1,\end{cases}$ 所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=1+n-1=n$.

若选②,因为 $S_3=6,S_4=5a_2$,所以 $\begin{cases}3a_1+3d=6,\\4a_1+6d=5(a_1+d),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=1,\\d=1,\end{cases}$ 所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=1+n-1=n$.

若选③,由 $S_3=6$,即 $3a_2=6$,得 $a_2=2$,又 $(n+1)a_n=na_{n+1}$,则 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}$,所以数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是常数列,又 $\frac{a_2}{2}=1$,则 $\frac{a_n}{n}=1$,所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n$.

(2)**证明:** 因为 $b_n=\frac{1}{a_n\cdot a_{n+2}}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$,所以 $K_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}<\frac{3}{4}$.

6.**解:**(1)若选①②,因为 $a_{n+1}-a_n=2$,所以数列 $\{a_n\}$ 是公差为 $d=2$ 的等差数列,又 $a_5=5$,所以 $a_n=a_5+(n-5)d$,则 $a_n=2n-5$.

若选②③,因为 $a_{n+1}-a_n=2$,所以数列 $\{a_n\}$ 是公差为 $d=2$ 的等差数列,又 $S_2=-4$,即 $a_1+a_2=-4$,得 $2a_1+2=-4$,所以 $a_1=-3$,所以 $a_n=-3+2(n-1)$,即 $a_n=2n-5$.

若选①③,则无法确定数列 $\{a_n\}$.

(2)因为 $b_n=\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{1}{(2n-5)(2n-3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-5}-\frac{1}{2n-3}\right)$,所以 $T_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{-3}-\frac{1}{-1}\right)+\left(\frac{1}{-1}-\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-5}-\frac{1}{2n-3}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{-3}-\frac{1}{2n-3}\right)=\frac{n}{-6n+9}$.

专题二　三角函数、解三角形

1.**解:**(1)若选①,$f(x)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\cos 2\omega x+\sin 2\omega x\cos\frac{\pi}{6}-\cos 2\omega x\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\omega x+\frac{1}{4}\cos 2\omega x=\frac{1}{2}\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$,因为函数 $f(x)$ 的图象相邻两个对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$,所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$,则 $\omega=1$,所以 $f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $-\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.

若选②,$f(x)=\cos\omega x\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{4}=\cos\omega x\left(\sin\omega x\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\cos\omega x\sin\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\omega x+\frac{1}{4}\cos 2\omega x=\frac{1}{2}\cdot\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$,因为函数 $f(x)$ 的图象相邻两个对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$,所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$,则 $\omega=1$,所以 $f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $-\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.

(2)因为 $f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,且 $f(\theta)=\frac{3}{10}$,所以 $f(\theta)=\frac{1}{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{10}$,则 $\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$,又 $0<\theta<\frac{\pi}{6}$,所以 $\frac{\pi}{6}<2\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$,所以 $\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$,所以 $\cos 2\theta=\cos\left[\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}+\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$.

2.**解:**(1)若选①,由正弦定理,得 $\sqrt{2}\sin C=\sin A\sin C+\sin C\cos A$,因为 $0<C<\pi$,所以 $\sin C\neq 0$,则 $\sqrt{2}=\sin A+\cos A=\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$,则 $\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=1$,又 $0<A<\pi$,则 $A+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$,所以 $A=\frac{\pi}{4}$.

若选②,则 $\sin(\pi-A)=\sqrt{2}-\cos A$,所以 $\sin A+\cos A=\sqrt{2}$,即 $\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$,则 $\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=1$,又 $0<A<\pi$,则 $A+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$,所以 $A=\frac{\pi}{4}$.

若选③,则 $\sqrt{2}\sin A=2\sin A\cos A$,又 $0<A<\pi$,所以 $\sin A\neq 0$,则 $\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $A=\frac{\pi}{4}$.

(2)因为 $S=6,b=2\sqrt{2}$,所以 $6=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times c\times\frac{\sqrt{2}}{2}$,解得 $c=6$,由余弦定理,得 $a^2=(2\sqrt{2})^2+6^2-2\times 2\sqrt{2}\times 6\times\frac{\sqrt{2}}{2}=20$,则 $a=2\sqrt{5}$.

3.**解:**(1)因为 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}$,$f\left(\frac{T}{2}\right)=-1$,所以 $2\sin\left(\omega\times\frac{\pi}{\omega}+\varphi\right)=-1$,所以 $-2\sin\varphi=-1$,所以 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$.因为 $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

(2)由(1)得 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$.

若选①,则 $f(x)_{\max}=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$,所以 $\omega\times\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得 $\omega=3k+\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z}$.因为 $\omega>0$,所以 $k\in\mathbf{N}$.假设函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增,令 $2m\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\omega x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2m\pi+\frac{\pi}{2},m\in\mathbf{Z}$,解得 $\frac{2m\pi}{\omega}-\frac{2\pi}{3\omega}\leqslant x\leqslant\frac{2m\pi}{\omega}+\frac{\pi}{3\omega},m\in\mathbf{Z}$,所以 $\begin{cases}\frac{2m\pi}{\omega}-\frac{2\pi}{3\omega}\leqslant-\frac{\pi}{2},\\\frac{2m\pi}{\omega}+\frac{\pi}{3\omega}\geqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}m\in\mathbf{Z}$,解得 $\begin{cases}\omega\leqslant-4m+\frac{4}{3},\\\omega\leqslant 4m+\frac{2}{3},\end{cases}m\in\mathbf{Z}$,因为 $\omega>0$,所以 $0<\omega\leqslant\frac{2}{3}$,所以 $\omega=\frac{1}{2}$,所以 $f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$.同理,当函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减,此时 ω 无解.综上,$f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$.因为 $f(x)+\sqrt{3}=0$,所以 $\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}=2n\pi-\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}=2n\pi+\frac{4\pi}{3},n\in\mathbf{Z}$,解得 $x=4n\pi-\pi$ 或 $x=4n\pi+\frac{7\pi}{3},n\in\mathbf{Z}$,又 $x\in[0,10\pi]$,所以 $x=\frac{7\pi}{3},3\pi,\frac{19\pi}{3},7\pi$.

若选②,则函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$ 对称,所以 $\omega\times\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{6}=k_1\pi$,且 $k_1\in\mathbf{Z}$,解得 $\omega=\frac{1}{2}-3k_1$,又 $\omega>0$,所以 $k_1\leqslant 0$,且 $k_1\in\mathbf{Z}$.假设函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增,令 $2m\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\omega x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2m\pi+\frac{\pi}{2}$,解得 $\frac{2m\pi}{\omega}-\frac{2\pi}{3\omega}\leqslant x\leqslant\frac{2m\pi}{\omega}+\frac{\pi}{3\omega},m\in\mathbf{Z}$.所以 $\begin{cases}\frac{2m\pi}{\omega}-\frac{2\pi}{3\omega}\leqslant-\frac{\pi}{2},\\\frac{2m\pi}{\omega}+\frac{\pi}{3\omega}\geqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}$ $m\in\mathbf{Z}$,解得 $\begin{cases}\omega\leqslant-4m+\frac{4}{3},\\\omega\leqslant 4m+\frac{2}{3},\end{cases}m\in\mathbf{Z}$,因为 $\omega>0$,所以 $0<\omega\leqslant\frac{2}{3}$,又 $\omega=\frac{1}{2}-3k_1>0,k_1\leqslant 0$,且 $k_1\in\mathbf{Z}$,所以 $\omega=\frac{1}{2}$.所以 $f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$.同理当函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减,此时 ω 无解.综上,$f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$.下同①.

4.**解:**(1)因为 $(b-a)(\sin B+\sin A)=c(\sqrt{3}\sin B-\sin C)$,所以由正弦定理,得 $(b-a)(b+a)=c(\sqrt{3}b-c)$,即 $b^2-a^2=\sqrt{3}bc-c^2$,由余弦定理的推论,得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,又 $A\in(0,\pi)$,所以 $A=\frac{\pi}{6}$.

(2)若选择①②,因为 $B=\frac{\pi}{4},A=\frac{\pi}{6}$,所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,由正弦定理,得 $\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{c}{b}$,即 $\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$,又 $c=2\sqrt{3}b$,则 $\frac{c}{b}=2\sqrt{3}$,两式矛盾,故不存在符合条件的 $\triangle ABC$.

若选择①③,由余弦定理的推论,得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,又 $c=2\sqrt{3}b,A=\frac{\pi}{6},a=2$,所以 $\cos A=\frac{13b^2-4}{4\sqrt{3}b^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,解得 $b=\frac{2}{\sqrt{7}}$,所以 $c=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$,所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{7}}\times\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\times\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{7}$.

若选择②③,因为 $B=\frac{\pi}{4},a=2,A=\frac{\pi}{6}$,由正弦定理,得 $\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}$,即 $\frac{b}{2}=\sqrt{2}$,则 $b=2\sqrt{2}$,又 $B=\frac{\pi}{4},A=\frac{\pi}{6}$,所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\sqrt{3}+1$.

5.**解:**(1)选①,由 $2S=\sqrt{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$,得 $2\times\frac{1}{2}\times bc\sin A=\sqrt{3}bc\cos A$,所以 $\tan A=\sqrt{3}$,因为 $0<A<\frac{\pi}{2}$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

若选②,由 $2\cos^2\frac{B+C}{2}=1+\cos 2A$,得 $\cos(B+C)=\cos 2A$,所以 $\cos(\pi-A)=2\cos^2A-1$,所以 $2\cos^2A+\cos A-1=0$,解得 $\cos A=\frac{1}{2}$ 或 $\cos A=-1$(舍去),又 $0<A<\frac{\pi}{2}$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

若选③,由 $c=\sqrt{3}a\sin C-c\cos A$ 及正弦定理,得 $\sin C=\sqrt{3}\sin A\sin C-\sin C\cos A$,因为 $\sin C\neq 0$,所以 $1=\sqrt{3}\sin A-\cos A=2\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)$,则 $\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$,又 $0<A<\frac{\pi}{2}$,所以 $-\frac{\pi}{6}<A-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$,所以 $A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$,则 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)得,$A=\frac{\pi}{3}$,又 $a=\sqrt{3}$,所以由正弦定理,得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2$,所以 $b=2\sin B,c=2\sin C$,所以 $a+b+c=\sqrt{3}+2\sin B+2\sin C=\sqrt{3}+2\sin B+2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)=2\sqrt{3}\cdot\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}$,又在锐角 $\triangle ABC$ 中,$0<B<\frac{\pi}{2}$,$0<C=\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2}$,解得 $\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$,所以 $\frac{\pi}{3}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$,$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$,所以 $a+b+c=2\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\in(3+\sqrt{3},3\sqrt{3}]$,所以 $\triangle ABC$ 周长的取值范围为 $(3+\sqrt{3},3\sqrt{3}]$.

6.**解:**(1)$f(x)=2\sin\omega x\cos\varphi+2\sin\varphi-4\sin^2\frac{\omega x}{2}\sin\varphi=2\sin\omega x\cos\varphi+2\sin\varphi-2(1-\cos\omega x)\sin\varphi=2\sin\omega x\cos\varphi+2\sin\varphi-2\sin\varphi+2\cos\omega x\sin\varphi=2\sin(\omega x+\varphi)$,因为 $f(x)$ 图象的一条对称轴与相邻对称中心的横坐标相差 $\frac{\pi}{4}$,所以 $\frac{T}{4}=\frac{\pi}{4}$,则 $T=\pi$,即 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,得 $\omega=2$,所以 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$.

若选①,则平移后的函数为 $y=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\varphi\right]=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)$,因为此函数关于 y 轴对称,所以 $\frac{2\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $\varphi=k\pi-\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$,又 $|\varphi|<\pi$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$ 或 $\varphi=\frac{5\pi}{6}$.因为 $f(0)<0$,所以 $f(0)=2\sin\varphi<0$,即 $\sin\varphi<0$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$,所以 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

若选②,则 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=0$,得 $\frac{\pi}{6}+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $\varphi=k\pi-\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$,因为 $|\varphi|<\pi$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$,或 $\varphi=\frac{5\pi}{6}$.因为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)>0$,所以 $2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)>0$,当 $\varphi=\frac{5\pi}{6}$ 时,$2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=2\sin\frac{7\pi}{6}=-1<0$,不符合,当 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$ 时,$2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=2\sin\frac{\pi}{6}=1>0$,符合,所以 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

(2)由题意,得 $g(x)=2\sin\left(2tx-\frac{\pi}{6}\right)$,因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$,所以 $2tx-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{2t\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right]$,因为函数 $y=g(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上恰有 3 个零点,所以 $2\pi\leqslant\frac{2t\pi}{3}-\frac{\pi}{6}<3\pi$,解得 $\frac{13}{4}\leqslant t<\frac{19}{4}$,所以实数 t 的取值范围是 $\left[\frac{13}{4},\frac{19}{4}\right)$.

专题三　立体几何

1.(1)**证明:** 若选①,$V_{P-ABC}=V_{B-APC}$,因为 $\triangle APC$ 的面积为定值,所以当 B 到平面 APC 距离最大时,V_{B-APC} 最大,即当 $BP\perp$ 平面 APC 时,V_{B-APC} 有最大值.因为 $BP\subset$ 平面 PMB,所以平面 $PAC\perp$ 平面 PMB.

若选②,因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle CAB=2\times 2\times\cos\angle CAB=3$,所以 $\cos\angle CAB=\frac{3}{4}$,在 $\triangle ABC$ 中,$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle CAB=2$,所以 $BC=\sqrt{2}$.因为在 $\triangle BPC$ 中,$PB^2+PC^2=BC^2$,所以 $PB\perp PC$,又 $PB\perp PA$,$PA\cap PC=P$,$PA,PC\subset$ 平面 PAC,所以 $PB\perp$ 平面 PAC,又 $PB\subset$ 平面 PMB,所以平面 $PAC\perp$ 平面 PMB.

(2)**解:** 因为 $BP\perp$ 平面 PAC,所以 $\angle BMP$ 就是直线 MB 与平面 PAC 所成的角,记 $\angle BMP=\theta$,则 $\tan\theta=\frac{BP}{PM}$,又 $BP=CP=1,AP=\sqrt{3}$,则 $\tan\theta=\frac{1}{PM}$.当 $PM=PA=\sqrt{3}$ 时,PM 最大,$\tan\theta$ 最小,此时 $\tan\theta=\frac{1}{PM}=\frac{\sqrt{3}}{3}$;当 $PM\perp AC$