$\frac{90+91}{2}=90.5$(分).

14.$\frac{\sqrt{3}}{6}$　提示:因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$,$AB,AD\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $PA\perp AB,PA\perp AD$,又 $AB\perp AD$,所以 AB,AD,AP 两两垂直.以 A 为坐标原点,以 AB,AD,AP 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,则 $B(1,0,0),P(0,0,1),C(1,1,0),D(0,2,0)$,$\overrightarrow{PB}=(1,0,-1)$,$\overrightarrow{PC}=(1,1,-1)$,$\overrightarrow{PD}=(0,2,-1)$,设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,由 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{PC}=x+y-z=0,\\ n\cdot\overrightarrow{PD}=2y-z=0,\end{cases}$ 取 $y=1$,则 $x=1,z=2$,可得平面 PCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,1,2)$.设 PB 与平面 PCD 所成的角为 θ,所以 $\sin\theta=|\cos\langle n,\overrightarrow{PB}\rangle|=\frac{|n\cdot\overrightarrow{PB}|}{|n||\overrightarrow{PB}|}=\frac{|1-2|}{\sqrt{6}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

15.3　提示:原不等式可化为 $\ln x_1-\ln x_2<\frac{3(x_1-x_2)}{x_1x_2}=\frac{3}{x_2}-\frac{3}{x_1}$,则 $\ln x_1+\frac{3}{x_1}<\ln x_2+\frac{3}{x_2}$,令 $f(x)=\ln x+\frac{3}{x}$,则对任意的 $x_1,x_2\in(m,+\infty)$,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)<f(x_2)$,所以 $f(x)$ 在 $(m,+\infty)$ 上单调递增,又 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}=\frac{x-3}{x^2}$,令 $f'(x)>0$,得 $x>3$,所以 $f(x)$ 在 $(3,+\infty)$ 上单调递增,所以 $m\geqslant3$,即 m 的最小值为 3.

16.$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　提示:由题意,得 $C(a,0)$,设 $A(x_1,y_1),B(-x_1,-y_1)$,$k_{AC}=k_1=\frac{y_1}{x_1-a}$,$k_{BC}=k_2=\frac{y_1}{x_1+a}$,因为 $\frac{x_1^2}{a^2}+y_1^2=1$,所以 $k_1\cdot k_2=\frac{y_1}{x_1-a}\cdot\frac{y_1}{x_1+a}=\frac{y_1^2}{x_1^2-a^2}=-\frac{1}{a^2}$,又 $k_1=\frac{y_1}{x_1-a}$,$k_1^2=\frac{y_1^2}{(x_1-a)^2}=\frac{a^2-x_1^2}{a^2(x_1-a)^2}=\frac{x_1+a}{a^2(a-x_1)}$ ①,$k_2^2=\frac{a-x_1}{a^2(a+x_1)}$ ②,由 $5|AC|^2\geqslant|BC|\cdot|CD|$,得 $5(1+k_1^2)(a-x_1)^2\geqslant(1+k_2^2)(a+x_1)(a-x_1)$ ③,将①②代入③式,消去 k_1,k_2,得 $(a^2-1)\cdot(a^2-5)x_1\geqslant(a^2-5)(a^2+1)a$,又 $a^2-1>0,0<x_1<a$,所以 $a^2-5\leqslant0$,即 $a^2\leqslant5$,所以 $e^2=\left(\frac{c}{a}\right)^2=1-\frac{1}{a^2}\leqslant1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$,则 $e\leqslant\frac{2\sqrt{5}}{5}$,即 e 的最大值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

选择题与填空题题组训练(7)

一、单项选择题

1.B　提示:由 $\frac{x}{2-x}\geqslant1$,即 $\frac{x-1}{2-x}\geqslant0$,解得 $1\leqslant x<2$,则 $S=[1,2)$,所以 $S\cap T=\{1\}$.故选 B.

2.C　提示:由不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $(-3,2)$ 得 $a<0$,且方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根分别为 $-3,2$,则 $-\frac{b}{a}=-1$,$\frac{c}{a}=-6$,所以 $b=a,c=-6a$,代入 $cx^2+bx+a>0$,得 $-6ax^2+ax+a>0$,又 $a<0$,则 $6x^2-x-1>0$,即 $(3x+1)(2x-1)>0$,解得 $x<-\frac{1}{3}$ 或 $x>\frac{1}{2}$.故选 C.

3.B　提示:由题意,得 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量的坐标为 $|a|\cos\theta\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|b|}=\frac{a\cdot b}{|b|}\cdot\frac{b}{|b|}=(1,1)$.故选 B.

4.C　提示:对于 A,根据面面垂直的性质定理,故 A 正确;对于 B,若 $l\perp\beta,\alpha/\!/\beta$,则 $l\perp\alpha$,又 $m\subset\alpha$,则 $l\perp m$,故 B 正确;对于 C,若 $l\subset\alpha,m\subset\alpha,m/\!/\beta,l/\!/\beta$,则 α 与 β 相交或平行,故 C 错误;对于 D,因为 $m\subset\beta$,$m/\!/\alpha$,所以存在直线 $m'\subset\alpha,m/\!/m'$,又 l,m 是异面直线,$l\subset\alpha$,所以 l 与 m' 相交,因为 $m'/\!/m,m\subset\beta,m'\not\subset\beta$,所以 $m'/\!/\beta$,又 $l\subset\alpha,l/\!/\beta$,所以 $\alpha/\!/\beta$,故 D 正确.故选C.

5.C　提示:因为 $(1+2x-x^2)^n$ 展开式中各项系数的和为 $2^n=64$,所以 $n=6$,所以 $(1+2x-x^2)^6$ 展开式中含 x^3 的项为 $C_6^3\cdot(2x)^3\cdot1^3+C_6^1\cdot(2x)\cdot C_5^1\cdot(-x^2)\cdot1^4=100x^3$,所以该展开式中的 x^3 项的系数为 100.故选 C.

6.D　提示:圆 $M:x^2+(y-4)^2=1$ 的圆心为 $M(0,4)$,半径为 $r=1$,圆心 M 到直线 $l:3x+4y-1=0$ 的距离 $d=\frac{|16-1|}{5}=3$,所以 $|MP|$ 的最小值是 3,又 $|MA|=r=1$,所以 $|AP|_{\min}=2\sqrt{2}$,所以 $\triangle AMP$ 的面积的最小值是 $S=\frac{1}{2}\times1\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$,则四边形 $MAPB$ 的面积的最小值是 $2S=2\sqrt{2}$.故选 D.

7.A　提示:设事件 B_1 为“取到的是含有四个次品的包”,事件 B_2 为“取到的是含有一个次品的包”,事件 A 为“采购员拒绝购买”,由题意,得 $P(B_1)=0.3,P(B_2)=0.7$,由古典概型,知 $P(A|B_1)=1-\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{5}{6}$,$P(A|B_2)=1-\frac{C_9^3}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$,则 $P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=\frac{3}{10}\times\frac{5}{6}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{10}=0.46$.故选A.

8.D　提示:因为定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=-f(-x)$,所以 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,又当 $x_1,x_2\in(-\infty,0]$ 且 $x_1\neq x_2$ 时,$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$ 成立,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减,所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数.因为存在 $x\in[0,1]$,使得 $f(1-ax-x^2)<f(2-a)$ 成立,所以存在 $x\in[0,1]$,使得 $1-ax-x^2>2-a$ 成立,所以存在 $x\in[0,1]$,使得 $x^2+ax+1-a<0$,即 $a(x-1)<-(x^2+1)$ 成立.当 $x=1$ 时,$0<-2$ 不成立;当 $x\in[0,1)$ 时,$x-1<0$,所以存在 $x\in[0,1)$,使得 $a>-\frac{x^2+1}{x-1}$ 成立,$-\frac{x^2+1}{x-1}=-\frac{(x-1)^2+2(x-1)+2}{x-1}=-\left[(x-1)+\frac{2}{x-1}+2\right]=(1-x)+\frac{2}{1-x}-2$,令 $t=1-x\in(0,1]$,由对勾函数的性质,知 $y=t+\frac{2}{t}-2$ 在 $(0,1]$ 上单调递减,所以 $y_{\min}=1$,所以 $a>1$.故选 D.

二、多项选择题

9.AB　提示:$z+i^{2023}=\frac{2-i}{2}=1-\frac{1}{2}i$,$i^{2023}=(i^4)^{505}\cdot i^3=-i$,则 $z=1+\frac{1}{2}i$.对于 A,$|z|=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$,故 A 正确;对于 B,$\bar{z}=1-\frac{1}{2}i$,其在复平面内对应的点为 $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$,在第四象限,故 B 正确;对于 C,$z$ 的虚部为 $\frac{1}{2}$,故 C 错误;对于 D,$z^2=\left(1+\frac{1}{2}i\right)^2=\frac{3}{4}+i$,故 D 错误.故选 AB.

10.BCD　提示:由 $a+b=2$,得 $\frac{3a}{b}+\frac{4}{ab}=\frac{3(2-b)}{b}+\frac{2(a+b)}{ab}=2\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)-3$,因为 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)(a+b)=\frac{1}{2}\left(5+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\right)\geqslant\frac{1}{2}\times(5+2\sqrt{4})=\frac{9}{2}$,当且仅当 $b=2a$,即 $a=\frac{2}{3},b=\frac{4}{3}$ 时,等号成立,所以 $\frac{3a}{b}+\frac{4}{ab}=2\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)-3\geqslant6$,故选BCD.

11.BC　提示:$f'(x)=\frac{2x-4x\ln x}{x^4}=\frac{2(1-2\ln x)}{x^3}$ $(x>0)$,令 $f'(x)=0$,得 $x=\sqrt{e}$,当 $x>\sqrt{e}$ 时,$f'(x)<0$,当 $0<x<\sqrt{e}$ 时,$f'(x)>0$,所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(\sqrt{e},+\infty)$,单调递增区间为 $(0,\sqrt{e})$,故 A 错误;$f(x)$ 在 $x=\sqrt{e}$ 处取得极大值 $f(\sqrt{e})=\frac{1}{e}$,故 B 正确;因为 $f\left(\frac{1}{e}\right)=-2e^2<0$,$f(\sqrt{e})=\frac{1}{e}$,所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},\sqrt{e}\right)$ 上有唯一零点,又当 $x>\sqrt{e}$ 时,$f(x)>0$,所以 $f(x)$ 在 $(\sqrt{e},+\infty)$ 上不存在零点,所以 $f(x)$ 只有一个零点,故 C 正确;因为 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(\sqrt{e},+\infty)$,$3>\sqrt{\pi}$,所以 $f(3)<f(\sqrt{\pi})$,故 D 错误.故选 BC.

12.CD　提示:由 $f(x)+xf'(x)=\frac{1}{x}$,将 $x=1$ 代入得 $f(1)+f'(1)=1$,因为 $f(1)=1$,所以 $f'(1)=0$,故A 错误;令 $g(x)=xf(x)$,则 $g'(x)=f(x)+xf'(x)=\frac{1}{x}$,又 $(\ln x)'=\frac{1}{x}$,所以可设 $g(x)=\ln x+t,t\in\mathbf{R}$,又 $g(1)=f(1)=t=1$,所以 $g(x)=\ln x+1$,所以 $f(x)=\frac{\ln x+1}{x}$,则 $f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$,当 $x\in(0,1)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增;当 $x\in(1,+\infty)$,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取最大值 1,当 $x\to0$ 时,$f(x)\to-\infty$,当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)\to0$,作出 $f(x)$ 的大致图象(图略),由图象知,要使方程 $f(x)=a$ 有两个解,则需 $y=a$ 与 $y=f(x)$ 的图象有两个交点,所以 $0<a<1$,故 B 错误;由图可知,$f(x)\leqslant1$,故 C 正确;由图可知,当 $a=1$ 时,$y=a$ 与 $y=f(x)$ 的图象只有一个交点,所以方程 $f(x)=a$ 有且只有一个解,故 D 正确.故选 CD.

三、填空题

13.20　提示:由题意,得应抽取超过 45 岁的教职工人数为 $\frac{50}{800}\times320=20$.

14.1　提示:因为 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$,所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=1+1+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$,所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(a-b)^2}=\sqrt{1+1-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=1$.

15.$-\frac{7}{9}$　提示:因为 $\sin15^\circ\cos15^\circ\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sin\alpha=\frac{1}{6}$,所以 $\frac{1}{2}\sin30^\circ\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\alpha=\frac{1}{4}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sin\alpha=\frac{1}{6}$,即 $\frac{1}{2}\cos(\alpha+60^\circ)=\frac{1}{6}$,所以 $\cos(\alpha+60^\circ)=\frac{1}{3}$,所以 $\cos(2\alpha+120^\circ)=2\cos^2(\alpha+60^\circ)-1=-\frac{7}{9}$.

16.$\frac{\sqrt{10}}{5}$　提示:令椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的半焦距为 c,设 $|AF_2|=m$,则 $|AF_1|=2a-m$,由点 B 在 y 轴上,$\overrightarrow{F_2B}=-4\overrightarrow{F_2A}$,得 $|BF_1|=|BF_2|=4m$,则 $|AB|=5m$,又 $\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B}$,则 $|AF_1|^2+|BF_1|^2=|AB|^2$,即 $(2a-m)^2+(4m)^2=(5m)^2$,解得 $m=\frac{1}{2}a$.在 $\mathrm{Rt}\triangle BF_2O$ 中,$\cos\angle OF_2B=\frac{|OF_2|}{|BF_2|}=\frac{c}{4m}=\frac{c}{2a}$,则 $\cos\angle AF_2F_1=-\frac{c}{2a}$,在 $\triangle AF_1F_2$ 中,由余弦定理,得 $|AF_1|^2=|AF_2|^2+|F_1F_2|^2-2|AF_2||F_1F_2|\cos\angle AF_2F_1$,即 $\left(\frac{3}{2}a\right)^2=\left(\frac{1}{2}a\right)^2+(2c)^2-2\cdot\frac{1}{2}a\cdot2c\cdot\left(-\frac{c}{2a}\right)$,得 $5c^2=2a^2$,所以椭圆 C 的离心率 $e=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

选择题与填空题题组训练(8)

一、单项选择题

1.D　提示:集合 $A=\left\{x\in\mathbf{Z}\middle|\frac{x+2}{x-3}\leqslant0\right\}=\{x\in\mathbf{Z}|-2\leqslant x<3\}=\{-2,-1,0,1,2\}$,因为 $B=\{x|x\leqslant-1$ 或 $x>3\}$,所以 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|-1<x\leqslant3\}$,所以 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{0,1,2\}$.故选 D.

2.D　提示:由 $\frac{2z+i}{1-i}=3+i$,得 $z=\frac{(3+i)(1-i)-i}{2}=\frac{4-3i}{2}=2-\frac{3}{2}i$,故 $|z|=\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$.故选 D.

3.B　提示:因为 $x^2+1\geqslant1$,所以命题 p 是假命题,故 A 错误;命题“$\neg p:\exists x\in\mathbf{R},x^2+1\geqslant0$”是真命题,故 B 正确,C,D 错误.故选 B.

4.A　提示:由题意,得基本事件总数为 $3\times2=6$,数字不大于 2.78 的基本事件有 2.17,2.18,2.78,2.71,个数为 4,所以所求概率 $P=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.故选 A.

5.A　提示:因为 $f(x)$ 的定义域关于原点对称,且 $f(-x)=(-x+x^3)\cdot2^{|x|}=-f(x)$,所以 $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上是奇函数,排除 D;由 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{8}>0$,排除 B,C.故选 A.

6.B　提示:由题意,得 $\begin{cases}v(12)=a\cdot b^{12}=0.2,\\ v(24)=a\cdot b^{24}=0.4,\end{cases}$ 两式相除,得 $b^{12}=2$,则 $a=0.1$,由 $b^{12}=2$,得 $12\lg b=\lg2$,则 $\lg b=\frac{\lg2}{12}$,则 $v(t)=a\cdot b^t=0.1\cdot b^t$,令 $v(t)=1$,得 $b^t=10$,则 $t\lg b=1$,所以 $t=\frac{1}{\lg b}=\frac{12}{\lg2}\approx\frac{12}{0.3}=40$.故选 B.

7.D　提示:任取 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 且 $x_1<x_2$,即 $x_2-x_1>0$,因为 $f(x+y)=f(x)+f(y)+1$,所以 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1+x_1)-f(x_1)=f(x_2-x_1)+f(x_1)+1-f(x_1)=f(x_2-x_1)+1$,又当 $x>0$ 时,$f(x)+1>0$,所以当 $x_2-x_1>0$ 时,$f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-x_1)+1>0$,即 $f(x_2)>f(x_1)$,所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.又 $f(ax^2+2x)+f(x)<1\Leftrightarrow f(ax^2+2x)+f(x)+1<2$,且 $f(x+y)=f(x)+f(y)+1$,所以 $f(ax^2+3x)<2=f(1)$,又 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,所以 $ax^2+3x<1$,所以问题等价于当 $x\in[1,2]$ 时,$ax^2+3x<1$ 有解,即 $a<\frac{1-3x}{x^2}=\left(\frac{1}{x}\right)^2-\frac{3}{x}$ 在 $[1,2]$ 上有解,令 $t=\frac{1}{x}$,则 $t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$,设 $g(t)=t^2-3t=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$,则 $g(t)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上单调递减,所以 $g(t)_{\max}=g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{4}$,所以 $a<-\frac{5}{4}$.故选 D.

8.C　提示:由 $y=\log_a(x+1)+1$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减,得 $0<a<1$,因为函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,所以 $\begin{cases}\frac{3-4a}{2}\geqslant0,\\ 3a\geqslant\log_a1+1,\end{cases}$ 解得 $\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{3}{4}$,作出 $|f(x)|$ 的大致图象(图略),由图象知,$|f(x)|=2-x$ 在 $[0,+\infty)$ 上有且仅有一个解,故 $|f(x)|=2-x$ 在 $(-\infty,0)$ 上同样有且仅有一个解.①当 $3a>2$,即 $a>\frac{2}{3}$ 时,由 $x^2+(4a-3)x+3a=2-x$,得 $\Delta=(4a-2)^2-4(3a-2)=0$,解得 $a=\frac{3}{4}$ 或 $a=1$(舍去);②当 $1\leqslant3a\leqslant2$,即 $\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{2}{3}$ 时,由图象可知,符合题意.综上,a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\cup\left\{\frac{3}{4}\right\}$.故选 C.

二、多项选择题

9.BD　提示:对于 A,显然 AD 与 C_1E 是异面直线,故 A 错误;对于 B,取 B_1C_1 的中点 F,连接 DF,EF,易证平面 $DEF/\!/$ 平面 AA_1C_1C,又 $DE\subset$ 平面 DEF,所以 $DE/\!/$ 平面 AA_1C_1C,故 B 正确;对于 C,假设 $DE\perp A_1B_1$,则 DE 垂直平分 A_1B_1,设 $AA_1=\sqrt{2}$,则 $AB=2$,易得 $A_1E=\sqrt{5}$,$B_1E=\sqrt{3}$,则 $A_1E\neq B_1E$,这与 DE 垂直平分 A_1B_1 矛盾,故 C 错误;对于 D,易知 $\tan\angle A_1AD=\tan\angle ABA_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$,则 $\angle A_1AD=\angle ABA_1$,可证 $\triangle AA_1B\backsim\triangle A_1DA$,所以 $A_1B\perp AD$,又 $C_1D\perp$ 平面 AA_1B_1B,所以 $C_1D\perp A_1B$,又 $AD\cap C_1D=D$,$AD,C_1D\subset$ 平面 AC_1D,所以 $A_1B\perp$ 平面 AC_1D,故 D 正确.故选 BD.

10.ABC　提示:对于 A,因为 $\bar{x}=\frac{1}{5}\times(1+2+3+4+5)=3$,$\bar{y}=\frac{1}{5}\times(4.9+5.1+5.5+5.7+5.8)=5.4$,所以 $5.4=0.24\times3+\hat{a}$,解得 $\hat{a}=4.68$,故 A 正确;对于 B,因为 $5\times75\%=3.75$,所以借阅量 4.9,5.1,5.5,5.7,5.8 的上四分位数为 5.7,故 B 正确;对于 C,因为 $0.24>0$,所以 y 与 x 的线性相关系数 $r>0$,故 C 正确;对于 D,由 A 项可知线性回归方程为 $\hat{y}=0.24x+4.68$,当 $x=6$,则 $\hat{y}=0.24\times6+4.68=6.12$,所以七月的借阅量约为 6.12 百册,故 D 错误.故选 ABC.

11.CD　提示:因为函数 $f(x)=\ln(x^2-ax+1)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增,所以 $g(x)=x^2-ax+1$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增,且 $g(x)>0$ 在 $[2,+\infty)$ 上恒成立,则 $\begin{cases}\frac{a}{2}\leqslant2,\\ g(2)=5-2a>0,\end{cases}$ 解得 $a<\frac{5}{2}$,所以 a 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)$.故选 CD.

12.AB　提示:因为 $f(x)=\frac{1+\ln(x+1)}{x}(x>0)$,所以 $f(x)>\frac{k}{x+1}$ 恒成立等价于 $k<\frac{(x+1)[1+\ln(x+1)]}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.令 $h(x)=\frac{(x+1)[1+\ln(x+1)]}{x}(x>0)$,则 $k<h(x)_{\min}$,$h'(x)=\frac{x-\ln(x+1)-1}{x^2}$,令 $g(x)=x-\ln(x+1)-1(x>0)$,则 $g'(x)=\frac{x}{1+x}>0$,所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,又 $g(2)=1-\ln3<0$,$g(3)=2-2\ln2>0$,所以 $g(x)=0$ 存在唯一实根 a,且 $a\in(2,3)$,$g(a)=0$,即 $a=\ln(a+1)+1$,当 $x>a$ 时,$g(x)>0$,$h'(x)>0$,$h(x)$ 单调递增,当 $0<x<a$ 时,$g(x)<0$,$h'(x)<0$,$h(x)$ 单调递减,所以 $h(x)_{\min}=h(a)=\frac{(a+1)[1+\ln(a+1)]}{a}=a+1\in(3,4)$,所以 $k<a+1$,所以 $k\leqslant3$.故选 AB.

三、填空题

13.5　提示:由 $\boldsymbol{a}=(2,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,3)$,得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,4)$,所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=5$.

14.4　提示:由 $x+2y-2xy=0$,得 $x+2y=2xy$,所以 $\frac{1}{2y}+\frac{1}{x}=1$,所以 $x+2y=(x+2y)\left(\frac{1}{2y}+\frac{1}{x}\right)=2+\frac{x}{2y}+\frac{2y}{x}\geqslant2+2\sqrt{\frac{x}{2y}\cdot\frac{2y}{x}}=4$,当且仅当 $\frac{x}{2y}=\frac{2y}{x}$,即 $x=2y=2$ 时,等号成立,所以 $x+2y$ 的最小值为 4.

15.e+1　提示:由 $f(x)=(x+1)e^x+\ln x$ 经过点 $(1,a)$,得 $a=2e$,因为 $f'(x)=(x+2)e^x+\frac{1}{x}$,所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线的斜率为 $f'(1)=3e+1$,由题意,得 $b=3e+1$,所以 $b-a=e+1$.

16.$2\sqrt{3}$;$\frac{7}{6}$　提示:因为四边形的面积为 $2\sqrt{3}$,所以 $\frac{1}{2}\times2a\times2b=2\sqrt{3}$,得 $ab=\sqrt{3}$ ①,又 C 的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ ②,又 $a^2=b^2+c^2$ ③,联立①②③,解得 $a=\sqrt{3}$,$b=1$,$c=\sqrt{2}$,则 C 的长轴长为 $2a=2\sqrt{3}$.椭圆 $C:\frac{x^2}{3}+y^2=1$,联立 $\begin{cases}y=kx+2(k\neq0),\\ \frac{x^2}{3}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(1+3k^2)x^2+12kx+9=0$,设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$,则 $\Delta=144k^2-36(1+3k^2)=36(k^2-1)>0$,得 $k^2>1$,$x_1+x_2=\frac{-12k}{1+3k^2}$,$x_1+x_2=\frac{9}{1+3k^2}$,因为以 MN 为直径的圆过点 $E(-1,0)$,所以 $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EN}=0$,又 $\overrightarrow{EM}=(x_1+1,y_1)$,$\overrightarrow{EN}=(x_2+1,y_2)$,所以 $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EN}=(x_1+1)(x_2+1)+y_1y_2=(x_1+1)(x_2+1)+(kx_1+2)(kx_2+2)=(1+k^2)x_1x_2+(2k+1)\cdot(x_1+x_2)+5=0$,即 $(1+k^2)\cdot\frac{9}{1+3k^2}+(2k+1)\cdot\frac{-12k}{1+3k^2}+5=0$,解得 $k=\frac{7}{6}$,满足 $k^2>1$,所以 $k=\frac{7}{6}$.

扫码免费下载习题讲解 ppt

第 31 期

选择题与填空题题组训练(1)

一、单项选择题

1.D　提示:因为 $A=\{x|x^2+x-2\leqslant0\}=\{x|-2\leqslant x\leqslant1\}$,$B=\left\{x\middle|\frac{x-2}{x+1}\geqslant0\right\}=\{x|x<-1$ 或 $x\geqslant2\}$,所以 $A\cap B=\{x|-2\leqslant x<-1\}$.故选 D.

2.B　提示:因为 $z(1+2i)-1+i=0$,所以 $z=\frac{1-i}{1+2i}=\frac{(1-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$,所以 $\bar{z}=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$.故选 B.

3.D　提示:由题意,得 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=-\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$.故选 D.

4.D　提示:设圆锥的底面半径为 r,因为圆锥的底面圆周长为 $2\sqrt{2}\pi$,所以 $2\pi r=2\sqrt{2}\pi$,解得 $r=\sqrt{2}$,又圆锥的高为 $\sqrt{2}$,圆柱的母线长为 3,所以该几何体的体积 $V=V_{圆锥}+V_{圆柱}=\frac{1}{3}\pi(\sqrt{2})^2\times\sqrt{2}+\pi(\sqrt{2})^2\times3=\left(6+\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\pi$.故选 D.

5.C　提示:某家庭计划暑假从这 6 个古镇中挑选 2 个去旅游的所有可能情况有 $C_6^2=15$ 种,则至少选一个苏州古镇的概率 $P=1-\frac{C_3^2}{15}=\frac{4}{5}$.故选 C.

6.A　提示:由题意,得 $2\times\frac{\pi}{6}+\varphi+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,则 $\varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$,$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得 $-\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,所以 $f(x)$ 包含原点的一个单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$,又 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ $(a>0)$ 上单调递增,则 $a\leqslant\frac{\pi}{6}$,即 a 的最大值为 $\frac{\pi}{6}$.故选A.

7.C　提示:令 $f(x)=\sin x-x\cos x$,则 $f'(x)=x\sin x$,当 $0<x<1$ 时,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,则 $f(0.1)=\sin0.1-0.1\cos0.1>f(0)=0$,因为 $a=0.1\cos0.1$,$c=\sin0.1$,所以 $c>a$.令 $g(x)=\sin x+\ln(1-x)$,则 $g'(x)=\cos x+\frac{-1}{1-x}$,因为当 $0<x<1$ 时,$\frac{-1}{1-x}<-1$,$\cos x\in[-1,1]$,则 $g'(x)<0$,故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,$g(0.1)=\sin0.1+\ln\frac{9}{10}<g(0)=0$,因为 $b=\ln\frac{10}{9}$,$c=\sin0.1$,所以 $\sin0.1<-\ln\frac{9}{10}=\ln\frac{10}{9}$,即 $c<b$.综上,$a<c<b$,故选 C.

8.D　提示:过点 A 作 $AE\perp BC$,交 BC 的延长线于点 E,连接 DE,因为 $AB=BC=BD$,$\angle ABC=\angle DBC=120^\circ$,所以 $\triangle CBA\cong\triangle CBD$,所以 $DE\perp BC$,又平面 $ABC\perp$ 平面 BCD,平面 $ABC\cap$ 平面 $BCD=BC$,$AE\subset$ 平面 ABC,所以 $AE\perp$ 平面 BCD,又 $DE\subset$ 平面 BCD,$EC\subset$ 平面 BCD,所以 $AE\perp DE$,$AE\perp EC$,所以 ED,EC,EA 两两垂直.以 E 为坐标原点,ED,EC,EA 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,设 $AB=BC=BD=2$,则 $BE=1$,$AE=DE=\sqrt{3}$,则 $A(0,0,\sqrt{3})$,$D(\sqrt{3},0,0)$,$B(0,1,0)$,$E(0,0,0)$,所以 $\overrightarrow{AB}=(0,1,-\sqrt{3})$,$\overrightarrow{AD}=(\sqrt{3},0,-\sqrt{3})$.因为 $AE\perp$ 平面 CBD,所以平面 CBD 的一个法向量为 $\overrightarrow{EA}=(0,0,\sqrt{3})$.设平面 ABD 的法向量为 $n=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AB}=y-\sqrt{3}z=0\\ n\cdot\overrightarrow{AD}=\sqrt{3}x-\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 令 $z=1$,得 $x=1,y=\sqrt{3}$,则平面 ABD 的一个法向量为 $n=(1,\sqrt{3},1)$,所以 $|\cos\langle\overrightarrow{EA},n\rangle|=\frac{|\overrightarrow{EA}\cdot n|}{|\overrightarrow{EA}||n|}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以平面 ABD 和平面 CBD 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.故选 D.

二、多项选择题

9.BD　提示:因为 $PA\subset$ 平面 MOB,故 A 错误;易知 MO 是 $\triangle PAB$ 的中位线,所以 $MO/\!/PA$,又 $MO\not\subset$ 平面 PAC,$PA\subset$ 平面 PAC,所以 $MO/\!/$ 平面 PAC,故 B 正确;因为 AB 是圆 O 的直径,所以 $BC\perp AC$,又 $PA\perp$ 平面 ABC,$BC\subset$ 平面 ABC,所以 $PA\perp BC$,又 $PA\cap AC=A$,所以 $BC\perp$ 平面 PAC,又 $OC\cap BC=C$,则 OC 与平面 PAC 不垂直,故 C 错误;因为 $BC\perp$ 平面 PAC,$BC\subset$ 平面 PBC,所以平面 $PAC\perp$ 平面 PBC,故 D 正确.故选BD.

10.CD　提示:因为 $f(x)=-x^2\ln x,x>0$,所以 $f'(x)=-x(2\ln x+1)$,当 $0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,当 $x>\frac{1}{\sqrt{e}}$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,故 B 错误;所以当 $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ 时,$f(x)$ 取得极大值 $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\frac{1}{2e}$,故 C 正确;当 $0<x<1$ 时,$\ln x<0$,此时 $f(x)=-x^2\ln x>0$,故 A 错误;因为 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{\sqrt{e}},e\right)$ 内单调递减,且 $f(1)=0$,所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{\sqrt{e}},e\right)$ 内只有一个零点,故 D 正确.故选 CD.

11.AD　提示:对于 A,因为 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FB}$,所以 F 为 AB 的中点,根据抛物线的对称性知,直线 AB 与 x 轴垂直,则 $x_1=x_2=\frac{p}{2}$,所以 $|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+p=2p$,故 A 正确;对于 B,因为 $|AF|=2$,所以 $x_1+\frac{p}{2}=2$,即 $x_1=2-\frac{p}{2}$,又 $y_1=\sqrt{3}$,所以 $2px_1=y_1^2=3$,所以 $2p\times\left(2-\frac{p}{2}\right)=4p-p^2=3$,解得 $p=1$ 或 $p=3$,故 B 错误;对于 C,若 $x_1+x_2=2p$,则 $|AB|\leqslant|AF|+|BF|=x_1+x_2+p=3p$,当且仅当 A,F,B 三点共线时,等号成立,故 C 错误;对于 D,焦点为 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$,准线 l 的方程为 $x=-\frac{p}{2}$,过点 A,M 作准线 l 的垂线,垂足分别为点 N,O,由 $|AF|=|AN|$,得 $|AF|+|AM|=|AN|+|AM|\geqslant|NM|\geqslant|OM|$,当点 N,A,M 三点共线,且 N 与 O 重合时,$|AF|+|AM|$ 取得最小值,且最小值为 $p+\frac{p}{2}=\frac{3}{2}p$,故 D 正确.故选 AD.

12.ACD　提示:由题意,得 $f(-x)=-f(x)$,两边求导数,得 $-f'(-x)=-f'(x)$,即 $f'(-x)=f'(x)$,因为 $g(x)=f'(x)$,所以 $g(x)=g(-x)$,则 $g(x)$ 是偶函数,所以 $g'(x)=-g'(-x)$,所以 $g'(x)$ 为奇函数,又 $g'(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,所以 $g'(0)=0$,故 A 正确;函数 $g(2x-1)$ 的图象是将函数 $g(x)$ 图象向右平移一个单位长度,再将横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 得到的,因为 $g(x)$ 的图象关于 $x=0$ 对称,所以函数 $g(2x-1)$ 的图象关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称,故 B 错误;因为 $h(x)=f(x-4)+(x-4)+4$,由 $f(x)$ 为奇函数,$u(x)=f(x)+x$ 为奇函数,图象关于 $(0,0)$ 对称,$h(x)$ 可以看作将 $u(x)$ 向右平移 4 个单位长度,向上平移 4 个单位得到的,故 $h(x)$ 图象关于 $(4,4)$ 对称,故 C 正确;由 C 项知,当 $x_1+x_2=8$ 时,$h(x_1)+h(x_2)=8$,由等差数列的性质,得 $a_1+a_{11}=8$,所以 $h(a_1)+h(a_{11})=8$,同理可得,$h(a_2)+h(a_{10})=8$,$h(a_3)+h(a_9)=8$,$h(a_4)+h(a_8)=8$,$h(a_5)+h(a_7)=8$,$a_1+a_{11}=2a_6=8$,即 $a_6=4$,故 $h(a_6)=4$,所以 $h(a_1)+h(a_2)+\cdots+h(a_{11})=5\times8+4=44$,故 D 正确.故选 ACD.

三、填空题

13.-192　提示:该二项展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r(2\sqrt{x})^{6-r}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=C_6^r\cdot2^{6-r}\cdot(-1)^rx^{3-r}$,$r=0,1,\cdots,6$,令 $3-r=2$,得 $r=1$,则 x^2 的系数为 $C_6^1\times2^5\times(-1)^1=-192$.

14.$x=4$ 或 $3x+4y=0$　提示:当直线的斜率存在时,可设直线方程为 $y+3=k(x-4)$,即 $kx-y-4k-3=0$,圆心 $(1,3)$ 到直线的距离 $d=\frac{|k-3-4k-3|}{\sqrt{1+k^2}}=r=3$,解得 $k=-\frac{3}{4}$,此时直线方程为 $3x+4y=0$.当直线的斜率不存在时,直线方程为 $x=4$,符合题意.综上,所求直线方程为 $x=4$ 或 $3x+4y=0$.

15.$\left(0,\frac{5}{e^2}\right)$　提示:设过 $A(-1,t)$ 的直线与 $f(x)=\frac{x}{e^x}$ 相切于 $P\left(x_0,\frac{x_0}{e^{x_0}}\right)$,$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}$,$f'(x_0)=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}$,所以切线方程为 $y-\frac{x_0}{e^{x_0}}=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}(x-x_0)$,因为它过 $(-1,t)$,所以 $t-\frac{x_0}{e^{x_0}}=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}(-1-x_0)$,则 $t=\frac{x_0^2+x_0-1}{e^{x_0}}$.令 $g(x)=\frac{x^2+x-1}{e^x}$,问题转化为方程 $g(x)=t$ 有 3 个不等的实根,即 $y=t$ 与 $y=g(x)$ 的图象有3个不同的交点,$g'(x)=\frac{-(x-2)(x+1)}{e^x}$,令 $g'(x)=0$,得 $x=-1$ 或 $x=2$,且当 $x<-1$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减;当 $-1<x<2$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增;当 $x>2$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减,又 $x\to-\infty$ 时,$g(x)\to+\infty$;$x\to+\infty$ 时,$g(x)\to0$,且 $g(x)>0$;$g(-1)=-e$,$g(2)=\frac{5}{e^2}$,作出 $g(x)$ 的大致图象(图略),则 $0<t<\frac{5}{e^2}$,所以 t 的取值范围为 $\left(0,\frac{5}{e^2}\right)$.

16.120°,$\sqrt{3}-1$　提示:在 $\mathrm{Rt}\triangle OAF_1$ 中,$|OF_1|=c$,$|AF_1|=|F_1F_2|=2c$,则 $\angle AF_1O=60^\circ$,因为 $\odot F_1$ 关于 x 轴对称,所以 $\angle AF_1O=\angle BF_1O=60^\circ$,所以 $\angle AF_1B=120^\circ$.因为 AB,F_1F_2 互相垂直平分,所以四边形 AF_2BF_1 为菱形,所以 $PF_1/\!/BF_2$,又 $\overrightarrow{F_2P}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$,所以 $PF_2\perp BF_2$,所以 $\angle F_1PF_2=90^\circ$,因为 $|F_1F_2|=2c$,$\angle AF_1F_2=60^\circ$,所以 $|PF_1|=c$,$|PF_2|=\sqrt{3}c$,所以 $|PF_1|+|PF_2|=(1+\sqrt{3})c$,由椭圆定义,得 $|PF_1|+|PF_2|=2a$,所以 $(1+\sqrt{3})c=2a$,所以离心率 $e=\frac{2}{1+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$.

选择题与填空题题组训练(2)

一、单项选择题

1.B　提示:由题意,得 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant3,x\in\mathbf{Z}\}=\{-1,0,1,2,3\}$,因为 $B=\{x|x=2n,n\in\mathbf{Z}\}$,所以 $A\cap B=\{0,2\}$.故选 B.

2.B　提示:因为 $z=\frac{1+5i}{1+i}=\frac{(1+5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=3+2i$,所以 z 的虚部为 2.故选 B.

3.C　提示:由题意,得数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为公比的等比数列,记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,则 $S_7=\frac{a_1(1-2^7)}{1-2}=1016$,解得 $a_1=8$,所以 $a_n=8\times2^{n-1}=2^{n+2}$,所以 $\log_2(a_3a_5)=\log_2(2^5\times2^7)=\log_22^{12}=12$.故选 C.

4.C　提示:因为 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$,$\boldsymbol{b}=(2,1)$,所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-3,1)$,所以 $\cos\langle\boldsymbol{b},(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\rangle=\frac{b\cdot(a-b)}{|b|\cdot|a-b|}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,又 $\langle\boldsymbol{a},(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\rangle\in[0,\pi]$,则 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{3\pi}{4}$.故选 C.

5.C　提示:根据题意,分 2 种情况讨论,①4 位“回文数”中数字全部相同,有 9 种情况,即此时有 9 个 4 位“回文数”;②4 位“回文数”中有 2 个不同的数字,有 $A_9^2=72$ 种情况,即此时有 72 个 4 位“回文数”,所以一共有 9+72=81 个 4 位“回文数”.故选 C.

6.D　提示:因为 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{5}\right)=\frac{2}{5}$,所以 $\cos\left(2\alpha+\frac{2\pi}{5}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{5}\right)=\frac{17}{25}$,所以 $\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{10}\right)=\sin\left(2\alpha+\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(2\alpha+\frac{2\pi}{5}\right)=-\frac{17}{25}$.故选 D.

7.A　提示:由题意,得 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times2\times2\times PA=\frac{8}{3}$,则 $PA=2$,取 PC 的中点 O,连接 AC,BD,$AC\cap BD=E$,连接 OE,OA,则 E 为 AC 的中点,所以 $OE/\!/PA$,且 $OE=\frac{1}{2}PA=1$,因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$,所以 $OE\perp$ 平面 $ABCD$,又 $AC\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $OE\perp AC$,由四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形,得 $AC=2\sqrt{2}$,则 $PC=\sqrt{PA^2+AC^2}=2\sqrt{3}$,$OP=OC=\sqrt{3}$,又 $AE=CE=\sqrt{2}$,所以 $OA=\sqrt{AE^2+OE^2}=\sqrt{3}$,同理,得 $OB=OD=\sqrt{3}$,所以 $OA=OB=OC=OD=OP$,所以 O 为四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的球心,且半径为 $\sqrt{3}$,所以该四棱锥的外接球的表面积为 $4\pi\times(\sqrt{3})^2=12\pi$.故选 A.

8.B　提示:任取 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,且 $x_1>x_2$,则 $x_1-x_2>0$,所以 $f(x_1-x_2)>-2$,又 $f(x_1)=f[(x_1-x_2)+x_2]=f(x_1-x_2)+f(x_2)+2>f(x_2)$,所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数,由 $f(1)=2$,得 $f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)+2=6$,$f(3)=f(1+2)=f(1)+f(2)+2=10$.由 $f(x^2+x)+f(1-2x)>8$,得 $f(x^2+x)+f(1-2x)+2>10$,则 $f(x^2-x+1)>f(3)$,又函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数,所以 $x^2-x+1>3$,解得 $x<-1$ 或 $x>2$,所以原不等式的解集为 $\{x|x<-1$ 或 $x>2\}$.故选 B.

二、多项选择题

9.AB　提示:由题意,得 $g(x)=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=2\sin(2x+\pi)=-2\sin2x$,则 $g(x)$ 为奇函数,故 A 正确;由 $2x=\frac{\pi}{2}+m\pi,m\in\mathbf{Z}$,得 $x=\frac{\pi}{4}+\frac{m\pi}{2},m\in\mathbf{Z}$,当 $m=-1$ 时,$x=-\frac{\pi}{4}$,所以 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{4}$ 对称,故 B 正确;由 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,得 $2x\in[0,\pi]$,则 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上不单调,故 C 错误;令 $g(x)\leqslant0$,则 $2m\pi\leqslant2x\leqslant\pi+2m\pi$,$m\in\mathbf{Z}$,解得 $m\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+m\pi,m\in\mathbf{Z}$,故 D 错误.故选AB.

10.ACD　提示:对于 A,由抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 到准线的距离为 4,得 $p=4$,故 A 正确;对于 B,抛物线的方程为 $y^2=8x$,故 B 错误;对于 C,由题意,得 $\begin{cases}y_1^2=8x_1,\\ y_2^2=8x_2,\end{cases}$ 两式作差,得 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{8}{y_1+y_2}=2$,又 $F(2,0)$,所以直线 l 的方程为 $y=2(x-2)$,即 $y=2x-4$,故 C 正确;对于 D,联立 $\begin{cases}y=2x-4,\\ y^2=8x,\end{cases}$ 得 $x^2-6x+4=0$,则 $x_1+x_2=6$,所以 $|AB|=x_1+x_2+p=10$,故 D 正确.故选 ACD.

11.ABD　提示:连接 AC,交 BD 于点 F,连接 EF,则 F 为 AC 的中点,又 E 为 PC 的中点,所以 $EF/\!/PA$,又 $PA\not\subset$ 平面 BDE,$EF\subset$ 平面 BDE,所以 $PA/\!/$ 平面 BDE,故 A 正确;因为底面 $ABCD$ 是平行四边形,则 $AD/\!/BC$,又 $\angle ADB=90^\circ$,所以 $BC\perp DB$,又 $PD\perp$ 平面 $ABCD$,$BC\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $BC\perp PD$,又 $DB\cap PD=D$,所以 $BC\perp$ 平面 PDB,又 $BC\subset$ 平面 PCB,所以平面 $PCB\perp$ 平面 PDB,故 B 正确;因为 E 为 PC 的中点,所以 $V_{P-BDE}=\frac{1}{2}V_{P-BDC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle BDC}\cdot PD=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times2=\frac{2}{3}$,故 C 错误;由 A 项可知 $EF/\!/PA$,所以异面直线 PA 与 BE 所成的角为 $\angle FEB$(或其补角),由 $AD=BD=2$,$\angle ADB=90^\circ$,得 $AB=DC=2\sqrt{2}$,又 $PD\perp$ 平面ABCD,则 $PD\perp DC$,所以 $PC=\sqrt{PD^2+DC^2}=2\sqrt{3}$,所以 $EB=DE=\frac{1}{2}PC=\sqrt{3}$,则 $EF\perp BD$,又 $FB=\frac{1}{2}DB=1$,所以 $EF=\sqrt{EB^2-FB^2}=\sqrt{2}$,所以 $\cos\angle FEB=\frac{EF}{EB}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,故 D 正确.故选 ABD.

12.ACD　提示:对于 A,由 $a,b>0$,$a+2b=ab$,即 $b(a-2)=a$,则 $a-2>0$,得 $a>2$,由 $a+2b=ab$,得 $a(b-1)=2b$,则 $b-1>0$,得 $b>1$,故 A 正确;对于 B,因为 $a,b>0$,$a+2b=ab$,则 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$,所以 $a+b=(a+b)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)=3+\frac{a}{b}+\frac{2b}{a}\geqslant3+2\sqrt{2}$,当且仅当 $\frac{a}{b}=\frac{2b}{a}$,即 $a=2+\sqrt{2}$,$b=\sqrt{2}+1$ 时,等号成立,故 B 错误;对于 C,$a+2b=ab\geqslant2\sqrt{2ab}$,因为 $a,b>0$,解得 $ab\geqslant8$,当且仅当 $a=2b$,即 $a=4,b=2$ 时,等号成立,故 C 正确;对于 D,由 A 项知,$b=\frac{a}{a-2}$,$a>2$,则 $(a-2)^2+(b-1)^2=(a-2)^2+\left(\frac{a}{a-2}-1\right)^2=(a-2)^2+\frac{4}{(a-2)^2}\geqslant2\sqrt{4}=4$,当且仅当 $(a-2)^2=\frac{4}{(a-2)^2}$,即 $a=2+\sqrt{2}$,$b=\sqrt{2}+1$ 时,等号成立,故 D 正确.故选 ACD.

三、填空题

13.0.39　提示:因为 $X\sim N(5,\sigma^2)$,所以正态曲线的对称轴是直线 $\mu=5$,又 $P(X<0)=0.11$,所以 $P(5\leqslant X\leqslant10)=$

$P(0\leqslant X\leqslant 5)=0.5-P(X<0)=0.5-0.11=0.39$.

14.$3x+y+2=0$ 提示：由 $f(x)=x^2+2f'\left(\frac{1}{2}\right)x+\ln x$，得 $f'(x)=2x+2f'\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{x}$，$f'\left(\frac{1}{2}\right)=1+2f'\left(\frac{1}{2}\right)+2$，则 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=-3$，所以 $f(x)=x^2-6x+\ln x$，所以 $f(1)=-5$，$f'(x)=2x+\frac{1}{x}-6$，$f'(1)=-3$，所以切线方程为 $y+5=-3(x-1)$，即 $3x+y+2=0$.

15.$[2-\sqrt{3},3)$ 提示：由圆 $C:x^2-2x+y^2-4y+3=0$，即 $(x-1)^2+(y-2)^2=2$，得圆心为 $C(1,2)$，半径为 $r=\sqrt{2}$，由直线 $l:kx-y+k=0$，即 $y=k(x+1)$，得直线 l 过定点 $A(-1,0)$，当直线 l 与圆 C 在第一象限相切于点 M 时，直线 l 的斜率最小，当直线过 $B(0,3)$ 时直线 l 的斜率最大，由 $\frac{|k-2+k|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}$，解得 $k=2\pm\sqrt{3}$，则 $k_{AM}=2-\sqrt{3}$，$k_{AB}=3$，所以 k 的取值范围是 $[2-\sqrt{3},3)$.

16.$y=2x-1$ 提示：由题意，得 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，由 $A(2,3)$，得 $AF_2\perp x$ 轴，设 $\angle F_1AF_2$ 的角平分线交 x 轴于 $T(m,0)(m<2)$，则 $\tan\angle TAF_2=\frac{2-m}{3}$，由 $\angle F_1AF_2=2\angle TAF_2$，所以 $\tan\angle F_1AF_2=\tan 2\angle TAF_2=\frac{2\tan\angle TAF_2}{1-\tan^2\angle TAF_2}=\frac{12-6m}{9-(2-m)^2}$，又 $\tan\angle F_1AF_2=\frac{|F_1F_2|}{|AF_2|}=\frac{4}{3}$，所以 $\frac{12-6m}{9-(2-m)^2}=\frac{4}{3}$，即 $2m^2-17m+8=0$，解得 $m=\frac{1}{2}$ 或 $m=8$（舍去），则 $T\left(\frac{1}{2},0\right)$，所以直线 l 的斜率为 $\frac{3}{2-\frac{1}{2}}=2$，所以直线 l 的方程为 $y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)$，即 $y=2x-1$.

选择题与填空题题组训练(3)

一、单项选择题

1.C 提示：因为 $B=\{x|x-1>0\}=\{x|x>1\}$，所以 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|x\leqslant 1\}$，又 $A=\{x|x^2-2x<0\}=\{x|0<x<2\}$，所以 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=(0,1]$.故选C.

2.D 提示：由 $z=\frac{1+i}{1+2i}$，得 $|z|=\frac{|1+i|}{|1+2i|}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.故选D.

3.C 提示：由 $a>0,b>0,a+b\geqslant 4$，可知当 $a=3,b=1$ 时，$ab\geqslant 4$ 不成立，故充分性不成立；由 $a>0,b>0,ab\geqslant 4$，得 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}\geqslant 4$，当且仅当 $a=b=2$ 时，等号成立，故必要性成立.所以"$a+b\geqslant 4$"是"$ab\geqslant 4$"的必要不充分条件.故选C.

4.B 提示：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由题意，得 $\frac{x_1+x_2}{2}=4$，由抛物线的定义，得 $|AB|=x_1+x_2+p=9$.故选B.

5.D 提示：因为 $-\pi<\alpha<0$，所以 $-\frac{3\pi}{4}<\alpha+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$，又 $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=-\frac{3}{5}$，所以 $-\frac{3\pi}{4}<\alpha+\frac{\pi}{4}<-\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{4}{5}$，则 $\cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$.故选D.

6.B 提示：取 B_1C_1 的中点 D，BB_1 的中点 E，连接 MD,DE,ME，则 $MD\mathbin{/\!/}A_1B_1\mathbin{/\!/}AB$，$DE\mathbin{/\!/}BC_1$，又 $MD\not\subset$ 平面 ABC_1，$AB\subset$ 平面 ABC_1，所以 $MD\mathbin{/\!/}$ 平面 ABC_1，同理可得 $DE\mathbin{/\!/}$ 平面 ABC_1，又 $MD\cap DE=D$，$MD,DE\subset$ 平面 MDE，所以平面 $MDE\mathbin{/\!/}$ 平面 ABC_1，又 $MN\mathbin{/\!/}$ 平面 ABC_1，平面 $ABC_1\cap$ 平面 $BCC_1B_1=BC_1$，所以点 N 的轨迹为线段 DE，又 $DE=\frac{1}{2}BC_1=2$，则 $BC_1=4$.故选B.

7.C 提示：4名专家派到3个乡镇，每个乡镇至少派遣1名，不同的派法共有 $C_4^2A_3^3=36$ 种，甲镇恰好派遣2名专家，不同的派法共有 $C_4^2A_2^2=12$ 种，4名技术员派到3个乡镇，每个乡镇至少派遣1名，不同的派法共有 $C_4^2A_3^3=36$ 种，甲镇恰好派遣1名技术员，不同的派法共有 $C_4^1C_3^2A_2^2=24$ 种，所以甲镇恰好派遣2名专家和1名技术员的概率是 $\frac{12\times 24}{36\times 36}=\frac{2}{9}$.故选C.

8.B 提示：由 $g(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{a}{x^2}-\frac{1}{x}$，$x\in(1,e^2)$，得 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}-\frac{2a}{x^3}=\frac{2x-x\ln x-2a}{x^3}$，设 $h(x)=2x-x\ln x-2a$，$x\in(1,e^2)$，则 $h'(x)=1-\ln x$，令 $h'(x)=0$，得 $x=e$，当 $x\in(1,e)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，当 $x\in(e,e^2)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，且 $h(1)=2-2a$，$h(e^2)=-2a$，$h(e)=e-2a$，因为 $g(x)$ 在区间 $(1,e^2)$ 上存在极值，所以 $g'(x)$ 有变号零点，即 $h(x)$ 有变号零点，所以 $-2a<0$ 且 $e-2a>0$，解得 $0<a<\frac{e}{2}$，所以实数 a 的取值范围为 $\left(0,\frac{e}{2}\right)$.故选B.

二、多项选择题

9.ABD 提示：因为 $S_{2023}=S_{2024}$，所以 $a_{2022}+a_{2023}+a_{2024}=3a_{2023}=0$，则 $a_{2023}=0$，故B正确；由 $a_1<0$，$a_{2023}=a_1+2022d=0$，得 $d>0$.故A正确；因为 $a_1<0$，$d>0$，$a_{2023}=0$，所以 $a_n<0(1\leqslant n\leqslant 2022,n\in\mathbf{N}_+)$，$S_{2022}=S_{2023}$，它们均是 S_n 的最小值，故D正确；由 $a_6<0$，得 $S_6-S_5=a_6<0$，故C错误.故选ABD.

10.ABD 提示：对于A，易证 $B_1D\perp$ 平面 ACD_1，$B_1D\subset$ 平面 PB_1D，所以平面 $PB_1D\perp$ 平面 ACD_1，故A正确；对于B，易证平面 $BA_1C_1\mathbin{/\!/}$ 平面 ACD_1，$A_1P\subset$ 平面 BA_1C_1，所以 $A_1P\mathbin{/\!/}$ 平面 ACD_1，故B正确；对于C，由 $AD_1\mathbin{/\!/}BC_1$，得 A_1P 与 AD_1 所成的角，即 A_1P 与 BC_1 所成的角，易知 $A_1B=BC_1=A_1C_1$，则 $\triangle A_1BC_1$ 是等边三角形，所以当 P 与线段 BC_1 的两端点重合时，A_1P 与 AD_1 所成角取最小值 $\frac{\pi}{3}$，当 P 与线段 BC_1 的中点重合时，A_1P 与 AD_1 所成角取最大值 $\frac{\pi}{2}$，所以 A_1P 与 AD_1 所成的角的范围是 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$，故C错误；对于D，易证 $BC_1\mathbin{/\!/}$ 平面 ACD_1，所以 BC_1 上任意一点到平面 ACD_1 的距离均相等，则点P到平面 ACD_1 的距离为定值，又 $V_{D_1-APC}=V_{P-AD_1C}$，$S_{\triangle AD_1C}$ 为定值，所以三棱锥 D_1-APC 的体积不变，故D正确.故选ABD.

11.ABC 提示：对于A，因为正实数 x,y 满足 $2x+y=1$，所以 $xy=\frac{1}{2}\cdot 2xy\leqslant\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2x+y}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$，当且仅当 $2x=y$，即 $x=\frac{1}{4}$，$y=\frac{1}{2}$ 时，取等号，故A正确；对于B，$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)(2x+y)=5+\frac{2y}{x}+\frac{2x}{y}\geqslant 5+2\sqrt{4}=9$，当且仅当 $\frac{2y}{x}=\frac{2x}{y}$，即 $x=y=\frac{1}{3}$ 时，取等号，故B正确；对于C，$4x^2+y^2\geqslant\frac{(2x+y)^2}{2}=\frac{1}{2}$，当且仅当 $2x=y$，即 $x=\frac{1}{4}$，$y=\frac{1}{2}$ 时，取等号，故C正确；对于D，由A项，得 $xy\leqslant\frac{1}{8}$，则 $(\sqrt{2x}+\sqrt{y})^2=2x+y+2\sqrt{2xy}\leqslant 1+1=2$，当且仅当 $2x=y$，即 $x=\frac{1}{4}$，$y=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，故 $\sqrt{2x}+\sqrt{y}$ 的最大值为 $\sqrt{2}$，故D错误.故选ABC.

12.ACD 提示：因为 F_1 关于 $\angle F_1PF_2$ 的平分线的对称点 Q 恰好在 C 上，所以 P,F_2,Q 三点共线，且 $|PF_1|=|PQ|$，又 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$，所以 $|PF_1|=|F_1Q|=|PQ|$.设 $|PF_1|=|F_1Q|=|PQ|=m$，$|PF_2|=n$，根据双曲线的定义，得 $|PF_1|-|PF_2|=m-n=2a$，$|QF_1|-|QF_2|=m-(m-n)=2a$，则 $m=4a,n=2a$，即 $|PF_2|=|QF_2|=2a$，所以 $PQ\perp F_1F_2$，在 $\mathrm{Rt}\triangle F_1PF_2$ 中，由勾股定理，得 $16c^2=4a^2+12$，解得 $a=2$，所以双曲线 C 的实轴长为2，故A正确；由 $a=1,c=\sqrt{3}$，得双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{3}$，故B错误；$S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2=2\sqrt{3}$，故C正确；由 $PQ\perp F_1F_2$，得 $P(\sqrt{3},2)$，又 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$，则 $\angle F_1PF_2$ 的平分线的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$，所以 $\angle F_1PF_2$ 的平分线所在直线的方程为 $y-2=\sqrt{3}(x-\sqrt{3})$，即 $\sqrt{3}x-y-1=0$，故D正确.故选ACD.

三、填空题

13.270 提示：令 $x=1$，得 $(3+2a)^5=32$，解得 $a=-\frac{1}{2}$，所以二项式 $\left(3x^2-\frac{1}{x^3}\right)^5$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^r(3x^2)^{5-r}\left(-\frac{1}{x^3}\right)^r=(-1)^r3^{5-r}C_5^rx^{10-5r}$，令 $10-5r=0$，解得 $r=2$，所以展开式中的常数项为 $(-1)^23^3C_5^2=270$.

14.$(x+1)^2+(y-3)^2=5$ 提示：圆 $M:x^2+y^2-6x-2y+5=0$，即 $(x-3)^2+(y-1)^2=5$，该圆的圆心为 $M(3,1)$，所以圆 C 的圆心在过点 $M(3,1)$ 和点 $B(1,2)$ 的直线 $y-2=-\frac{1}{2}\cdot(x-1)$ 上，即 $x+2y-5=0$，同时也在点 $A(1,4)$ 和点 $B(1,2)$ 的垂直平分线 $y=3$ 上，则联立 $\begin{cases}x+2y-5=0,\\y=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1,\\y=3,\end{cases}$ 则圆 C 的圆心为 $C(-1,3)$，半径 $R=|CA|=\sqrt{5}$，所以圆 C 的方程为 $(x+1)^2+(y-3)^2=5$.

15.$\left(0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{5}{6}\right]$ 提示：由题意，得 $f(0)=\cos\varphi=\frac{1}{2}$，又 $0<\varphi<\pi$，则 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，因为 $f(x)$ 在 $(\pi,2\pi)$ 上没有最值，所以 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}\geqslant\pi$，解得 $0<\omega\leqslant 1$.先考虑 $f(x)$ 在 $(\pi,2\pi)$ 上存在最值，由 $x\in(\pi,2\pi)$，得 $\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left(\omega\pi+\frac{\pi}{3},2\omega\pi+\frac{\pi}{3}\right)$，则 $\omega\pi+\frac{\pi}{3}<k\pi<2\omega\pi+\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\frac{k}{2}-\frac{1}{6}<\omega<k-\frac{1}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $0<\omega\leqslant 1$，所以 $\begin{cases}\frac{k}{2}-\frac{1}{6}\leqslant 1,\\k-\frac{1}{3}>0,\end{cases}$ 解得 $\frac{1}{3}<k\leqslant\frac{7}{3}$，又 $k\in\mathbf{Z}$，则 $k=1$，或 $k=2$，所以 $\omega\in\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{6},1\right]$，因为 $f(x)$ 在区间 $(\pi,2\pi)$ 上没有最值，所以 $\omega\in\left(0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{5}{6}\right]$.

16.$[4\ln 2-6,+\infty)$ 提示：因为 $f(x)=ax^2-2x+2\ln x(x>0)$，所以 $f'(x)=\frac{2ax^2-2x+2}{x}$，令 $f'(x)=0$，即 $ax^2-x+1=0$ 有两个正根，分别为 x_1,x_2，则 $\begin{cases}\Delta=1-4a>0,\\x_1+x_2=\frac{1}{a}>0,\end{cases}$ 解得 $0<a<\frac{1}{4}$，又 $ax_1^2-x_1+1=0$，$ax_2^2-x_2+1=0$，$x_1+x_2=\frac{1}{a}$，$x_1x_2=\frac{1}{a}$，则 $\lambda>f(x_1)+f(x_2)=ax_1^2-2x_1+2\ln x_1+ax_2^2-2x_2+2\ln x_2=x_1-1-2x_1+2\ln x_1+x_2-1-2x_2+2\ln x_2=-(x_1+x_2)+2\ln x_1x_2-2=-\frac{1}{a}+2\ln\frac{1}{a}-2$，令 $g(x)=-x+2\ln x-2(x>4)$，则 $g'(x)=\frac{2}{x}-1\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$，所以 $g(x)$ 在 $(4,+\infty)$ 上单调递减，所以 $\lambda\geqslant g(4)=4\ln 2-6$.

选择题与填空题题组训练(4)

一、单项选择题

1.D 提示：由集合 $A=\{x|-1<x<2\}$，$B=\{x|\log_2(x-1)<1\}=\{x|1<x<3\}$，得 $A\cap B=\{x|1<x<2\}$.故选D.

2.A 提示："$\forall x\in[1,2]$，$2x+\frac{a}{x}\geqslant 0$"为真命题，则 $a\geqslant -2x^2$ 在 $x\in[1,2]$ 上恒成立，因为 $y=-2x^2$ 在 $[1,2]$ 上单调递减，所以 $y_{\max}=-2$，则 $a\geqslant -2$，所以"$a\geqslant -2$"的一个充分不必要条件是 $a\geqslant -1$.故选A.

3.A 提示：因为 $f(x)=\ln|x|\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=-\ln|x|\sin 2x$，其定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，且 $f(-x)=-\ln|x|\cdot\sin(-2x)=\ln|x|\cdot\sin 2x=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，排除B，D.当 $0<x<1$ 时，$\ln|x|<0$，$\sin 2x>0$，所以 $f(x)>0$，排除C.故选A.

4.D 提示：由题意，得 $a_6>0$，$a_8^2-a_7-a_9=3$，则 $a_8^2-2a_8-3=0$，解得 $a_8=3$ 或 $a_8=-1$（舍去），则 $S_{15}=\frac{15(a_1+a_{15})}{2}=\frac{15\times 2a_8}{2}=15a_8=14a_8=42$.故选D.

5.B 提示：因为甲不能第一个出场，乙不能第三个出场，所以分2种情况讨论.①当甲第三个出场时，乙，丙，丁，戊全排列，共有 $A_4^4=24$ 种不同的出场顺序；②当甲不是第一、三个出场时，有 $C_3^1C_3^1A_3^3=54$ 种不同的出场顺序，所以不同的出场顺序一共有 $54+24=78$ 种.故选B.

6.D 提示：由图象可知，$A=\frac{2-0}{2}=1$，$B=\frac{2+0}{2}=1$，$T=2\times\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\pi$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$，当 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时，$2\times\varphi=2\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $0<|\varphi|<\pi$，所以 $\varphi=\frac{5\pi}{6}$，所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)+1$.对于①，$f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x+\frac{7\pi}{6}\right)+1=-\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$，不是偶函数，故①错误；对于②，$f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+1=0$，为 $f(x)$ 的最小值，则 $f(x)\geqslant f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$，故②正确；对于③，假设 $f(x)+f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=2$，则 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{12},1\right)$ 中心对称，又 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sin\pi+1=1$，故③正确；对于④，$f'(x)=2\cos\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)$，$f'\left(\frac{\pi}{12}\right)=2\cos\pi=-2$，故④正确.故选D.

7.B 提示：设双曲线C的左焦点为 F_1，连接 PF_1，$F(c,0)$ 到渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 的距离为 $|FT|=\frac{\left|\frac{bc}{a}\right|}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}=b$，因为 $\overrightarrow{FP}=2\overrightarrow{FT}$，所以点 T 为 PF 的中点，且 $|\overrightarrow{FP}|=2|\overrightarrow{FT}|=2b$，$|\overrightarrow{OT}|=\sqrt{|\overrightarrow{OF}|^2-|\overrightarrow{FT}|^2}=\sqrt{c^2-b^2}=a$，又 O 为 FF_1 的中点，所以 OT 为 $\triangle PFF_1$ 中的中位线，则 $|PF_1|=2|OT|=2a$，由双曲线的定义，得 $|PF|-|PF_1|=2b-2a=2a$，则 $b=2a$，所以双曲线的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{5}$.故选B.

8.A 提示：作出函数 $f(x)$ 的大致图象（图略），令 $f(x)=t$，则 $F(x)=g(f(x))-m$ 恰有三个不同的零点，只需 $g(t)=m$，即 $-t^2+2t-m=0$ 有两个实数根 t_1,t_2，且 $t_1\in(0,1]$，$t_2\in(1,+\infty)$，则 $t_1+t_2=2$，故结合 $f(x)$ 图象可知，$e^{3x_1}=3x_2=t_1$，$3x_3=t_2$，则 $x_1=\ln 3x_2$，$x_1+x_2=3x_2-3x_1$，所以 $3x_1-x_2+3x_3=\ln 3x_2-x_2+2-3x_2=\ln 3x_2-4x_2+2$，$0<x_2\leqslant\frac{1}{3}$.令 $h(x)=\ln 3x-4x+2$，$x\in\left(0,\frac{1}{3}\right]$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-4$，令 $h'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{4}$，所以 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right]$ 上单调递减，故 $h(x)_{\max}=h\left(\frac{1}{4}\right)=\ln\frac{3}{4}+1$，即 $3x_1-x_2+3x_3$ 的最大值为 $\ln\frac{3}{4}+1$.故选A.

二、多项选择题

9.BCD 提示：对于A，复数不能比较大小，故A错误；对于B，$i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$，故B正确；对于C，$z=(2+3i)^2=-5+12i$，则复平面内 z 对应的点位于第二象限，故C正确；对于D，复数 z 满足 $|z-1+i|=|z+2|$，根据复数的几何意义，得复数 z 对应的点到点 $(1,-1)$ 和点 $(-2,0)$ 的距离相等，则轨迹是点 $(1,-1)$ 和点 $(-2,0)$ 的连线的垂直平分线，故D正确.故选BCD.

10.AD 提示：对于A，因为 $AC\mathbin{/\!/}A_1C_1$，$AC\not\subset$ 平面 A_1BC_1，$A_1C_1\subset$ 平面 A_1BC_1，所以 $AC\mathbin{/\!/}$ 平面 A_1BC_1，故A正确；对于B，由 $AD\mathbin{/\!/}A_1D_1$，得 AD 与 A_1C_1 所成角，即 A_1D_1 与 A_1C_1 的夹角，为 $45°$，故B错误；对于C，由 $AD_1\mathbin{/\!/}BC_1$，得 A_1C_1 与 AD_1 所成角，即 A_1C_1 与 BC_1 的夹角，为 $60°$，故C错误；对于D，因为 $A_1C_1\perp B_1D_1$，$A_1C_1\perp BB_1$，且 $B_1D_1\cap BB_1=B_1$，所以 $A_1C_1\perp$ 平面 BB_1D_1D，又 $A_1C_1\subset$ 平面 A_1BC_1，所以平面 $A_1BC_1\perp$ 平面 BB_1D_1D，故D正确.故选AD.

11.BD 提示：由题意，得 $P(A_1)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$，$P(A_2)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$，$P(A_3)=\frac{3}{10}$，$P(B|A_1)=\frac{5}{11}$，$P(B|A_2)=\frac{4}{11}$，$P(B|A_3)=\frac{4}{11}$，故B正确；对于A，由全概率公式，得 $P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)+P(A_3B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}+\frac{1}{5}\times\frac{4}{11}+\frac{3}{10}\times\frac{4}{11}=\frac{9}{22}$，故A错误；对于C，$P(A_1B)=P(A_1)P(B|A_1)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}=\frac{5}{22}$，所以 $P(A_1)P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{9}{22}=\frac{9}{44}\neq P(A_1B)$，则事件B与事件 A_1 不相互独立，故C错误；对于D，由题意可知，A_1,A_2,A_3 两两互斥，故D正确.故选BD.

12.BD 提示：由题意，当 n 是奇数时，$a_{n+2}-a_n=1$，即数列 $\{a_n\}$ 中的偶数项构成以 $a_2=2$ 为首项，1为公差的等差数列，所以 $a_{10}=2+(9-1)\times 1=10$.当 n 是偶数时，$a_{n+2}=a_n+1$；当 n 是奇数时，$a_{n+2}+a_n=1$，两式相减，得 $a_{n+4}-a_n=2$，即数列 $\{a_n\}$ 中的奇数项从 a_1 开始，每隔一项的两项相等，即数列 $\{a_n\}$ 的奇数项呈周期变化，所以 $a_{37}=a_{4\times 9+1}=a_1=-2$.对于数列 $\{a_n\}$ 的前31项，奇数项满足 $a_1+a_3=1$，$a_5+a_7=1$，…，$a_{29}+a_{31}=a_{4\times 7+1}+a_{31}=3$，偶数项构成以 $a_2=2$ 为首项，1为公差的等差数列，所以 $S_{31}=1+7\times 1+3+15\times 2+\frac{15\times(15-1)}{2}\times 1=146$.故选BD.

三、填空题

13.$-\frac{7}{25}$ 提示：因为 $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{3}{5}$，则 $\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2\alpha\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-1=-\frac{7}{25}$，所以 $\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{2\pi}{3}-2\alpha\right)\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2\alpha\right)=-\frac{7}{25}$.

14.$\frac{\pi}{4}$ 提示：设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，由 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，得 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，又 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=2$，所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，所以 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，所以 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

15.12 提示：由题意，得 $A=\frac{100-12}{2}=44$，$T=\frac{2\pi}{\omega}=18$，$\omega\times 0+\varphi=-\frac{\pi}{2}$，$h=\frac{100+12}{2}=56$，则 $\omega=\frac{\pi}{9}$，$\varphi=-\frac{\pi}{2}$，所以 $f(t)=44\sin\left(\frac{\pi}{9}t-\frac{\pi}{2}\right)+56$.令 $44\sin\left(\frac{\pi}{9}t-\frac{\pi}{2}\right)+56>34$，则 $\sin\left(\frac{\pi}{9}t-\frac{\pi}{2}\right)>-\frac{1}{2}$，即 $\cos\frac{\pi}{9}t<\frac{1}{2}$，由 $T=18$，得 $t\in[0,18]$，$\frac{\pi}{9}t\in[0,2\pi]$，则 $\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{9}t<\frac{5\pi}{3}$，解得 $3<t<15$.所以在运行的一圈里最佳观赏时长为 $15-3=12$（分钟）.

16.$(1,5)$ 提示：构造函数 $g(x)=\frac{f(x)}{e^{2x}}$，则 $f(x)=e^{2x}g(x)$，由已知，得 $f(x)+e^4f(-x)=0$，所以 $e^{2x}g(x)+e^4\cdot e^{-2x}g(-x)=0$，所以 $g(x)+g(-x)=0$，所以 $g(x)$ 是 $(-3,3)$ 上的奇函数，因为 $g'(x)=\frac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}$，由已知，得当 $x\in[0,3)$ 时，$f'(x)>2f(x)$，所以 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $[0,3)$ 上单调递增，又 $g(x)$ 是 $(-3,3)$ 上的奇函数，所以 $g(x)$ 在 $(-3,3)$ 上单调递增，又 $f(1)=e^2$，得 $g(1)=1$，由 $e^2f(2-x)<e^4$，且 $f(2-x)=e^{2(2-x)}g(2-x)$，则 $e^2e^{2(2-x)}g(2-x)<e^4$，即 $g(2-x)<1=g(1)$，因为 $g(x)$ 在 $(-3,3)$ 上单调递增，所以 $\begin{cases}-3<2-x<3,\\2-x<1,\end{cases}$ 解得 $1<x<5$，所以所求不等式的解集是 $(1,5)$.

第32期

选择题与填空题题组训练(5)

一、单项选择题

1.D 提示：因为 $z=\frac{2-i}{1-i}=\frac{(2-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{3+i}{2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$，所以 $\bar{z}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$，所以复数 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点为 $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$，位于第四象限.故选D.

2.C 提示：因为 $A=\{x\in\mathbf{Z}|-3\leqslant x<4\}=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$，$B=\{x|\log_2(x+2)<2\}=\{x|-2<x<2\}$，所以 $A\cap B=\{-1,0,1\}$，所以 $A\cap B$ 的子集个数为 $2^3=8$.故选C.

3.C 提示：因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=(-x)^2\cdot\sin(-x)+(-x)^3=-x^2\sin x-x^3=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，其图象关于原点对称，排除B；又 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)>0$，排除A；又当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，排除D.故选C.

4.D 提示：圆台的母线长为 $4-2=2$，设上底面圆的半径为 r，下底面圆的半径为 R，由题意可得，$\pi r\times 2=2\pi r$，$\pi R\times 4=2\pi R$，解得 $r=1$，$R=2$，所以圆台的高为 $h=\sqrt{2^2-(2-1)^2}=\sqrt{3}$，所以圆台的体积为 $V_{\text{圆台}}=\frac{1}{3}\times[\pi\times 1^2+\pi\times 2^2+\sqrt{\pi\times 1^2\times\pi\times 2^2}]\times\sqrt{3}=\frac{7\sqrt{3}\pi}{3}$.故选D.

5.C 提示：当 $l_1\mathbin{/\!/}l_2$ 时，$a(a-2)=3$，且 $a^2\neq 1$，解得 $a=3$.故"$l_1\mathbin{/\!/}l_2$"是"$a=3$"的充要条件.故选C.

6.B 提示：对于A，当 $a=-1$，$b=1$ 时，满足 $a<b$，但 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，故A错误；对于B，因为 $0<a<1$，所以 $a^3-a=a(a^2-1)<0$，则 $a^3<a$，故B正确；对于C，因为 $b>a>0$，所以 $a+b>0$，$a+1>0$，$a-b<0$，所以 $\frac{b+1}{a+1}-\frac{b}{a}=\frac{a-b}{a(a+1)}>0$，则 $\frac{b+1}{a+1}>\frac{b}{a}$，故C错误；对于D，令 $c=-1$，$b=0$，$a=1$，满足 $c<b<a$ 且 $ac<0$，但 $cb^2=ab^2$，故D错误.故选B.

7.D 提示：因为抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为 $(2,0)$，所以双曲线的右焦点为 $F(2,0)$，则 $c=2$，所以 $a^2+b^2=4$，又抛物线的准线方程为 $x=-2$，抛物线准线与一条渐近线交点为 $A(m,-2\sqrt{3})$，所以 $m=-2$，则 $A(-2,-2\sqrt{3})$，代入渐近线方程 $y=\frac{b}{a}x$，得 $-2\sqrt{3}=-\frac{2b}{a}$，则 $b=\sqrt{3}a$，所以 $a^2+b^2=4a^2=4$，所以 $a^2=1$，$b^2=3$，所以该双曲线的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.故选D.

8.C 提示：易知 $f(x)$ 为奇函数，因为 $f'(x)=3x^2+2-2\cos x=3x^2+2(1-\cos x)\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，由 $f(\ln x-1)+f(ax)\leqslant 0$，得 $f(\ln x-1)\leqslant -f(ax)=f(-ax)$，则 $\ln x-1\leqslant -ax$，所以问题等价于 $-a\geqslant\frac{\ln x-1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.令 $h(x)=\frac{\ln x-1}{x}$，得 $h'(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$，令 $h'(x)=0$，得 $x=e^2$，当 $0<x<e^2$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，当 $x>e^2$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，故 $h(x)_{\max}=h(e^2)=\frac{1}{e^2}$，所以 $-a\geqslant\frac{1}{e^2}$，即 $a\leqslant -\frac{1}{e^2}$.故选C.

二、多项选择题

9.AD 提示：若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $-6-t=0$，即 $t=-6$，故A正确；若 $\boldsymbol{a}\mathbin{/\!/}\boldsymbol{b}$，则 $2t-3=0$，即 $t=\frac{3}{2}$，故B错误；若 $t=-6$，则 $\boldsymbol{b}=(-3,-6)$，$5\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=(1,-23)\neq\boldsymbol{c}$，故C错误；若 $t=-6$，则 $\boldsymbol{b}=(-3,-6)$，$2\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}=(6,2)=\boldsymbol{c}$，故D正确.故选AD.

10.ACD 提示：由题意，得成绩在区间 $[90,100]$ 内的学生人数为 $400\times 0.040\times 10=160$，故A正确；由 $(0.005+0.010+0.015+x+0.040)\times 10=1$，解得 $x=0.030$，故B错误；设中位数为 a 分，则 $(0.005+0.010+0.015)\times 10+0.030(a-80)=0.5$，解得 $a\approx 86.7$，故C正确；设样本数据的80%分位数为 b 分，则 $(0.005+0.010+0.015+0.030)\times 10+(b-90)\times 0.040=0.8$，解得 $b=95$，故D正确.故选ACD.

11.ACD 提示：由题意，得 $2\times\frac{\pi}{8}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $\varphi=\frac{\pi}{4}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，则 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.对于A，$f\left(\frac{3\pi}{8}\right)=0$，故A正确；对于B，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$，则 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上只有一个零点，故B错误；对于C，当 $x\in\left[\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{4}\right]$，则 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，故C正确；对于D，因为 $g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\pi-2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=f(x)$，所以 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称，故D正确.故选ACD.

12.ACD 提示：由 $a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}$，得 $a_n>0$，且 $a_n\neq 1$，则 $a_{n+1}-a_n=2-a_n-\frac{1}{a_n}<2-2\sqrt{\frac{1}{a_n}\cdot a_n}=0$，即 $a_{n+1}<a_n$，所以 $\{a_n\}$ 是递减数列，故A正确；由 $a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}$，得 $a_{n+1}-1=1-\frac{1}{a_n}$，则 $\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{a_n}{a_n-1}=\frac{1}{a_n-1}+1$，又 $a_1=2$，则 $\frac{1}{a_1-1}=1$，所以 $\left\{\frac{1}{a_n-1}\right\}$ 是首项和公差均为1的等差数列，故B错误；由B项，得 $\frac{1}{a_n-1}=n$，则 $a_n=1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}$，$na_n=n+1$，所以 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+10a_{10}=2+3+4+5+\cdots+11=\frac{10\times(2+11)}{2}=65$，故C正确；当 $n\geqslant 2$ 时，$a_1a_2\cdots a_{n-1}(a_n-1)=2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n-1}\times\frac{1}{n}=1$，故D正确.故选ACD.

三、填空题

13.0 提示：$(x+1)^8$ 的展开式通项为 $T_{r+1}=C_8^rx^{8-r}$，则 $T_8=C_8^7x=8x$，$T_6=C_8^5x^3=56x^3$，所以 $a_1=8$，$a_3=56$，则 a_1 的系数为 $7\times 8-56=0$.

14.312 提示：根据题意，门卡标有的偶数数字包含2，4，6，奇数数字包含1，3，5，7，若两位游客都没有拿到偶数数字门卡，有 $A_4^2=24$ 种分配方案；若两位游客中一人拿到偶数数字门卡，三人拿到奇数数字门卡，有 $C_3^1C_4^1A_3^3=288$ 种分配方案.所以一共有 $24+288=312$ 种分配方案.

15.$\frac{40\sqrt{10}\pi}{3}$ 提示：因为 F 是上底面的一个动点，且 $O_1F=\sqrt{6}$，所以点 F 的轨迹是上底面上以 O_1 为圆心，$\sqrt{6}$ 为半径的圆.在 $\triangle ACE$ 中，$AC=3\sqrt{2}$，$CE=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{22}$，$AE=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$，得 $AC^2+CE^2=AE^2$，所以 $\triangle ACE$ 为直角三角形，其外心为 AE 与 OO_1 的交点，设为 Q，所以 $OQ=\frac{1}{2}BE=1$，$QE=\sqrt{10}$，则 $O_1Q=2$，$QF=\sqrt{O_1Q^2+O_1F^2}=\sqrt{10}$，所以 $QF=QE=QC=QA=\sqrt{10}$，所以 Q 为四面体 $ACEF$ 的外接球的球心，球的半径为 $\sqrt{10}$，所以四面体 $ACEF$ 的外接球的体积 $V=\frac{4\pi}{3}\times(\sqrt{10})^3=\frac{40\sqrt{10}\pi}{3}$.

16.$\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\sqrt{3}-1$ 提示：连接 PF_2，因为 l 是圆 F_2 的切线，所以 $PF_1\perp PF_2$，在 $\mathrm{Rt}\triangle PF_1F_2$ 中，$|PF_2|=|OF_1|=|OF_2|=c$，所以 $|PF_2|=\frac{1}{2}|F_1F_2|$，所以 $\angle PF_1F_2=\frac{\pi}{6}$，所以直线 l 的斜率 $k=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.又 $|F_1F_2|=2c$，则 $|PF_1|=\sqrt{|F_1F_2|^2-|PF_2|^2}=\sqrt{3}c$，由椭圆的定义，得 $2a=|PF_1|+|PF_2|=(\sqrt{3}+1)c$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$.

选择题与填空题题组训练(6)

一、单项选择题

1.B 提示：由 $A=\{0,1,-1\}$，$B=\{x|x^2-x=0\}=\{0,1\}$，得 $A\cap B=\{0,1\}$，则 $A\cap B$ 的真子集个数为 $2^2-1=3$.故选B.

2.D 提示：该命题的否定为 $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-2x+1\geqslant 0$.故选D.

3.B 提示：因为 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量，$\boldsymbol{c}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}$，所以 $\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\times\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=\frac{1}{3}|\boldsymbol{a}|^2$，又 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\frac{1}{3}|\boldsymbol{a}|^2}{|\boldsymbol{a}|^2}=\frac{1}{3}$.故选B.

4.C 提示：因为 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，所以 $\sin\left(2\alpha+\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{7}{25}$.故选C.

5.D 提示：设3个挂件分别是 A,B,C，则不同的分组为 (AA,BB,CC)，(AB,AC,BC)，(AB,AB,CC)，(AC,AC,BB)，(AA,BC,BC)，再分给3位同学共有 $A_3^3+C_3^1+C_3^1+C_3^1=21$ 种情况，恰好有一位同学得到同类吉祥物挂件的有 $C_3^1+C_3^1+C_3^1=9$ 种情况，所以恰好有一位同学得到同类吉祥物挂件的概率为 $\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$.故选D.

6.B 提示：令 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，因为 $f(x)-f'(x)>0$，所以 $g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}<0$，则 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，由 $f(0)=1$，得 $g(0)=1$，不等式 $f(x)>e^x$ 可化为 $g(x)>1=g(0)$，所以 $x<0$，所以不等式 $f(x)>e^x$ 的解集为 $\{x|x<0\}$.故选B.

7.A 提示：因为函数 $f(x)=\begin{cases}-\ln x,0<x\leqslant 1,\\\frac{1}{x},x>1,\end{cases}$ 且 $0<a<b$，$f(a)=f(b)$，所以 $-\ln a=\frac{1}{b}$，由 $0<-\ln a<1$，得 $\frac{1}{e}<a<1$，所以 $af(b)+bf(a)=a\cdot\frac{1}{b}+b(-\ln a)=-a\ln a+1$.令 $g(x)=-x\ln x+1\left(\frac{1}{e}<x<1\right)$，则 $g'(x)=-\ln x-1$，令 $g'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{e}$，当 $\frac{1}{e}<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，所以 $g(x)\in\left(1,\frac{1}{e}+1\right)$.故选A.

8.A 提示：由 $a_{n+1}-\frac{1}{n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n$，得 $a_{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}a_n$，所以 $\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，所以 $\frac{a_n}{n}=\left(\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n-1}}{n-1}\right)+\left(\frac{a_{n-1}}{n-1}-\frac{a_{n-2}}{n-2}\right)+\cdots+\left(\frac{a_2}{2}-a_1\right)+a_1=\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{2}\right)+1=2-\frac{1}{n}<2$，所以不等式 $\frac{a_{n+1}}{n+1}<-2t^2-(a+1)t+a^2-a+2\geqslant 2$，$t\in[1,2]$ 恒成立，即 $2t^2+(a+1)t-a^2+a\leqslant 0$ 在 $t\in[1,2]$ 上恒成立.

设函数 $f(t)=2t^2+(a+1)t-a^2+a$，$t\in[1,2]$，所以 $\begin{cases}f(1)\leqslant 0,\\f(2)\leqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2+(a+1)-a^2+a\leqslant 0,\\8+2(a+1)-a^2+a\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $a\leqslant -2$ 或 $a\geqslant 5$.结合选项知，实数 a 可能为 -4.故选A.

二、多项选择题

9.BD 提示：因为 $0<|\sin x|\leqslant 1$，而对勾函数 $y=t+\frac{4}{t}$ 在 $(0,1]$ 上单调递减，当 $t=|\sin x|=1$ 时，该函数取得最小值5，故A错误；令 $t=e^x>0$，则 $y=t+\frac{4}{t}\geqslant 2\sqrt{4}=4$，当且仅当 $t=2$，即 $x=\ln 2$ 时，取等号，故B正确；$y=2^x+4>4$，此式C错误；$y=x^2+2+5=(x+1)^2+4\geqslant 4$，故D正确.故选BD.

10.AD 提示：对于A，连接 BD,A_1D，则 M 为 BD 的中点，由 M,N 分别为 BD,A_1B 的中点，得 $MN\mathbin{/\!/}A_1D$，又 $MN\not\subset$ 平面 ADD_1A_1，$A_1D\subset$ 平面 ADD_1A_1，所以 $MN\mathbin{/\!/}$ 平面 ADD_1A_1，故A正确；对于B，连接 B_1C,B_1D_1，则 $B_1C=CD_1=B_1D_1$，所以 $\angle B_1CD_1=60°$，因为 $B_1C\mathbin{/\!/}A_1D$，所以 A_1D 与 CD_1 所成角为 $60°$，所以 MN 与 CD_1 不垂直，故B错误；对于C，$MN\mathbin{/\!/}A_1D$，则 MN 与平面 ACD_1 不平行，故C错误；对于D，因为 $MN\mathbin{/\!/}A_1D$，$CC_1\mathbin{/\!/}D_1D$，所以 MN 与 CC_1 所成的角为 $\angle A_1DD_1=45°$，故D正确；因为 $AB\perp$ 平面 ADD_1A_1，所以 $AB\perp A_1D$，又 $MN\mathbin{/\!/}A_1D$，所以 $AB\perp MN$，故D正确.故选AD.

11.AB 提示：$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-2\sqrt{3}\sin x\cos x=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.对于A，函数 $f(x)$ 的最大值为2，故A正确；对于B，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2$，故B正确；对于C，由 $x\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$，得 $2x-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，则 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递增，故C错误；对于D，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{\pi}{6}=1$，故D错误.故选AB.

12.BD 提示：作出函数 $f(x)$ 的大致图象（图略），由图可知，$0<m<1$，$x_1<0<x_2<1<x_3<2<x_4<4$.不妨取 $m=\frac{1}{2}$，则 $-(2^{x_1}-1)=\frac{1}{2}$，解得 $x_1=-1$，则 $x_1+x_2>0$，故A错误；由 x_1,x_2 是方程 $x+\frac{4}{x}-4=m$ 的两个不相等的实根，即 x_1,x_2 是方程 $x^2-(m+4)x+4=0$ 的两个不相等的实根，所以 $x_1x_2=4$，故B正确；$f(3)=\frac{1}{3}$，所以当直线 $y=m$ 向下平移时，存在 $f(3)>m$，故C错误；$f(x_3)+f(x_2)+x_2=2x_2+\frac{4}{x_2}-4\geqslant 2\sqrt{2x_2\cdot\frac{4}{x_2}}-4=4\sqrt{2}-4$，当且仅当 $2x_2=\frac{4}{x_2}$，即 $x_2=\sqrt{2}$ 时，等号成立，故D正确.故选BD.

三、填空题

13.90.5 提示：把成绩按从小到大的顺序排列为56，70，72，78，79，80，81，81，83，85，88，90，91，94，98，因为 $15\times 80\%=12$，所以这15人成绩的第80百分位是