第 28 期

第 2~3 版综合测试(四)参考答案

一、单项选择题

1.A　提示:因为 $a=(1,2,3)$,$b=(-1,0,-2)$,所以 $a+b=(0,2,1)$,$(a+b)\cdot b=0\times(-1)+2\times0+1\times(-2)=-2$.故选 A.

2.B　提示:圆的圆心为线段的中点$(2,-1)$,半径为 $\frac{1}{2}\sqrt{(2-2)^2+(0+2)^2}=1$,所以要求的圆的方程为$(x-2)^2+(y+1)^2=1$.故选 B.

3.B　提示:展开式中含 x^3y^3 的项为$-x\cdot C_5^3x^2y^3+2y\cdot C_5^2x^3y^2=(-10+20)x^3y^3=10x^3y^3$,所以 x^3y^3 项的系数为 10.故选B.

4.C　提示:由甲不报考南京大学,可分为两类.第 1 类,甲单独报名一个学校,则有 $C_2^1C_3^2A_2^2=12$ 种不同的报名方法;第 2 类,甲和其中一名同学报名一个学校,则有 $C_3^1C_2^1A_2^2=12$ 种不同的报名方法.由分类加法计数原理,可得共有 12+12=24 种不同的报名方法.故选 C.

5.B　提示:因为运动员甲就近选择 A 餐厅或者 B 餐厅就餐,第一天随机地选择一餐厅用餐,所以他第一天去 A 餐厅或 B 餐厅的概率都为$\frac{1}{2}$,则运动员甲第二天去 A 餐厅用餐的概率为 $P=\frac{1}{2}\times0.7+\frac{1}{2}\times0.5=0.6$.故选 B.

6.C　提示:设椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<3)$的长半轴为 a,易知 a=3,设 F_1 关于$\angle F_1PF_2$ 平分线的对称点为 Q,

由椭圆对称性及角平分线性质可知 P,F_2,Q 三点共线且$|PQ|=|PF_1|$,

因为$\angle F_1PF_2=60°$,所以$\triangle PQF_1$ 是正三角形,设$|PF_1|=|QF_1|=|PQ|=m$,易知$|PF_1|+|PF_2|=2a=6$,$|QF_1|+|QF_2|=6$,又$|PQ|=|PF_2|+|QF_2|$,所以$|PQ|=12-|PF_1|-|QF_1|=12-2m$,所以 $m=12-2m$,所以 m=4,即$|PF_1|=4$,$|PF_2|=2$,

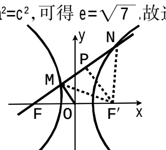
则 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin\angle F_1PF_2=\frac{1}{2}\times4\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.故选 C.

7.A　提示:由题意知$\bar{x}=\frac{3+4+5+6+7}{5}=5$,$\bar{y}=\frac{2.5+3+4+4.5+6}{5}=4$,将(5,4)代入 $y=\hat{b}x-0.25$,得 $4=5\hat{b}-0.25$,解得$\hat{b}=0.85$,所以当 x=10 时,$y=0.85\times10-0.25=8.25$.故选 A.

8.B　提示:设双曲线 C 的右焦点为 F',取 MN 的中点 P,连接 $F'P,F'M,F'N$,如图.由$\overrightarrow{FN}=3\overrightarrow{FM}$,可知$|MF|=|MP|=|NP|$.又 O 为 FF'的中点,所以 $OM\parallel PF'$,且$|OM|=\frac{1}{2}|PF'|$.因为 $OM\perp FN$,所以 $PF'\perp FN$.所以 PF'为线段 MN 的垂直平分线,所以$|NF'|=|MF'|$.设$|MF|=t$.

由双曲线的定义,知$|NF'|=3t-2a$,$|MF'|=2a+t$,所以 $3t-2a=2a+t$,解得 t=2a.在 $Rt\triangle MF'P$ 中,

$|PF'|=\sqrt{|MF'|^2-|MP|^2}=\sqrt{16a^2-4a^2}=2\sqrt{3}a$,所以$|OM|=\frac{1}{2}|PF'|=\sqrt{3}a$.在 $Rt\triangle MFO$ 中,$|MF|^2+|OM|^2=|OF|^2$,所以 $4a^2+3a^2=c^2$,可得 $e=\sqrt{7}$.故选 B.



(第 8 题图)

二、多项选择题

9.BD　提示:对于 A,过点 P(1,2)且在 x,y 轴截距相等的直线有两种情况,当截距为 0 时,直线的方程为 y=2x;当截距不为 0 时,设直线的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$,将 P 点坐标代入,得 a=3,此时直线的方程为 x+y-3=0,故 A 不正确;

对于 B,圆 $x^2+y^2=4$ 与圆 $x^2+y^2-8x-6y+16=0$ 的圆心分别为(0,0),(4,3),半径分别为 2,3,

则圆心距为$\sqrt{4^2+3^2}=5=2+3$,所以两圆外切,故 B 正确;

对于 C,直线 $x-\sqrt{3}y+1=0$ 的斜率 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以该直线的倾斜角为 30°,故 C 不正确;

对于 D,过点(5,4)且倾斜角为 90°的直线方程为 x-5=0,故 D 正确.故选 BD.

10.BC　提示:列联表如下.

	古文迷	非古文迷	总计
男生	20	20	40
女生	40	10	50
总计	60	30	90

在抽取的 90 名学生中古文迷有 60 人,可得该校某位学生为古文迷的概率的估计值为$\frac{60}{90}=\frac{2}{3}\neq0.6$,故 A 错误;在 9000 名学生中,男生有 4000 人,女生有 5000 人,而随机调查了 40 名男生和 50 名女生,因为 4000:5000=40:50,故 B 正确;易知$\chi^2=\frac{90\times(20\times10-20\times40)^2}{40\times50\times60\times30}=9>6.635$,所以有 99%的把握认为学生是否为"古文迷"与性别有关系,故 C 正确,D 错误.故选 BC.

11.ACD　提示:对于 A,每个球有 4 种放法,则 5 个球全部投入 4 个不同的盒子里共有 4^5 种放法,故 A 正确;

对于 B,将 5 个小球分为 4 组,放入 4 个盒子,有 $C_5^2A_4^4$ 种放法,故 B 错误;

对于 C,先在 5 个小球中选出 4 个,放入 4 个盒子的 1 个盒子,有 $C_5^4C_4^1$种放法,故 C 正确;

对于 D,将 5 个小球分为 4 组,放入 4 个盒子,有 $C_5^2A_4^4$ 种放法,故 D 正确.故选 ACD.

12.AC　提示:以 A 为原点,AB,AD,AP 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,

则 B(2,0,0),C(2,2,0),D(0,4,0),P(0,0,2),

$\overrightarrow{PC}=(2,2,-2)$,$\overrightarrow{PB}=(2,0,-2)$,$\overrightarrow{CD}=(-2,2,0)$,

所以 $\cos\langle\overrightarrow{PB},\overrightarrow{CD}\rangle=\frac{\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{CD}|}=\frac{-4+0+0}{2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$,

所以异面直线 PB,CD 所成的角是 60°,故 A 正确;

设平面 PCD 的法向量是 $m=(x,y,z)$,则 $m\cdot\overrightarrow{PC}=0$,$m\cdot\overrightarrow{CD}=0$,即$\begin{cases}2x+2y-2z=0,\\-2x+2y=0,\end{cases}$

取 x=1,则 y=1,z=2,得 m=(1,1,2),显然平面 PAB 的一个法向量是 n=(0,1,0),

则 $\cos\langle m,n\rangle=\frac{m\cdot n}{|m||n|}=\frac{1}{\sqrt{6}\times1}=\frac{\sqrt{6}}{6}$,所以平面 PCD 与平面 PAB 所成的锐二面角的余弦值是$\frac{\sqrt{6}}{6}$,故 B 错误;

设 PB 与平面 PCD 所成角为 θ,则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PB},m\rangle|=\frac{|\overrightarrow{PB}\cdot m|}{|\overrightarrow{PB}||m|}=\frac{|2-4|}{2\sqrt{2}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$,所以 PB 与平面 PCD 所成的角的正弦值是$\frac{\sqrt{3}}{6}$,故 C 正确;

因为 N 为 AD 中点,所以 N(0,2,0),设$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}$,其中 $\lambda\in[0,1]$,

则$\overrightarrow{BN}=(-2,2,0)$,$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PM}=(2\lambda-2,2\lambda,2-2\lambda)$,

设平面 BMN 的法向量为 $a=(x_1,y_1,z_1)$,

则$\begin{cases}\overrightarrow{BN}\cdot a=-2x_1+2y_1=0,\\\overrightarrow{BM}\cdot a=(2\lambda-2)x_1+2\lambda y_1+(2-2\lambda)z_1=0,\end{cases}$

取 $x_1=\lambda-1$,则 $y_1=\lambda-1$,$z_1=2\lambda-1$,所以 $a=(\lambda-1,\lambda-1,2\lambda-1)$,则点 P 到平面 BMN 距离 $d=\frac{|\overrightarrow{PB}\cdot a|}{|a|}=\frac{2\lambda}{\sqrt{6\lambda^2-8\lambda+3}}=\frac{2}{\sqrt{3\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2-8\cdot\frac{1}{\lambda}+6}}$,所以当$\frac{1}{\lambda}=\frac{4}{3}$时,d 取最大值$\sqrt{6}$,故 D 错误.故选 AC.

三、填空题

13.0.75　提示:因为该正态分布曲线关于直线 X=80 对称,所以 P(X<60)=P(X>100)=0.25,所以 $P(X\geqslant60)=1-0.25=0.75$.

14.-20　提示:$(x^2-2x+1)^3=(x-1)^6$,故展开式中,含 x^3 的项为 $C_6^3(-1)^3x^3=-20x^3$,所以 x^3 项的系数为-20.

15.$\frac{\pi}{4}$　提示:连接MO,ON,因为M是所在半圆弧的中点,所以$MO\perp AB$,将圆O沿直径AB折成直二面角,所以$MO\perp$平面ABN,所以$\angle MNO$为直线MN与平面ABN所成角,在$Rt\triangle MON$中,$\tan\angle MNO=\frac{OM}{ON}=1$,所以$\angle MNO=\frac{\pi}{4}$.

16.1　提示:过 P 作 PQ 垂直于准线 $x=-\frac{1}{2}$,PA 垂直于直线$3x-4y+\frac{7}{2}=0$,垂足分别为 Q,A,由抛物线定义可知$|PA|+|PQ|=|PA|+|PF|$,显然$|PA|+|PF|$的最小值为 F 到直线 $3x-4y+\frac{7}{2}=0$ 的距离,又 $F\left(\frac{1}{2},0\right)$,所以距离 $d=\frac{3\times\frac{1}{2}+\frac{7}{2}}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$.

四、解答题

17.解:(1)选①,因为 $C_n^2=C_n^6$,所以 n=8.

选②,因为只有第 5 项的二项式系数最大,所以二项展开式共有 9 项,则 n=8.

选③,因为所有项的二项式系数和为 256,所以 $2^n=256$,则 n=8.

(2)二项式$\left(ax-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$的展开式的通项为

$T_{r+1}=C_8^r(ax)^{8-r}\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^r=C_8^r\cdot a^{8-r}(-1)^rx^{8-\frac{4}{3}r}$,

令 $8-\frac{4}{3}r=0$,解得 r=6,所以展开式的常数项为 $C_8^6\cdot a^2=112$,得 $a^2=4$,又 a>0,所以 a=2.

令 x=1,可得展开式中所有项的系数和为$(a-1)^8=(2-1)^8=1$.

18.解:由题意可知,直线 l 的斜率存在,直线 l 经过点 P(1,2),则可设直线 l 的方程为 $y-2=k(x-1)$,

令 x=0,则 y=2-k,令 y=0,则 $x=1-\frac{2}{k}$,故 $A\left(1-\frac{2}{k},0\right)$,$B(0,2-k)$.

(1)因为 P(1,2)是线段 AB 的中点,所以$\frac{1}{2}(2-k)=2$,解得 k=-2,

故直线 l 的方程为 2x+y-4=0.

(2)由上可得,$A\left(1-\frac{2}{k},0\right)$,$B(0,2-k)$,因为 A,B 两点分别在 x,y 轴的正半轴上,所以 $1-\frac{2}{k}>0$,$2-k>0$,得 k<0,

所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{k}\right)(2-k)=\frac{1}{2}\left(4-\frac{4}{k}-k\right)\geqslant\frac{1}{2}\left[4+2\cdot\sqrt{\left(-\frac{4}{k}\right)\times(-k)}\right]=4$,

当且仅当$-\frac{4}{k}=-k$,即 k=-2 时,等号成立,此时直线 l 的方程为 2x+y-4=0.

19.解:(1)由表中数据可得,$\bar{x}=\frac{1}{5}\times(2+4+6+8+10)=6$,$\bar{y}=\frac{1}{5}\times(0.2+0.2+0.4+0.6+0.7)=0.42$,

则 $\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=16+4+0+4+16=40$,

所以$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{2.8}{40}=0.07$,$\hat{a}=0.42-6\times0.07=0$,故 y 关于 x 的线性回归方程为 y=0.07x.

(2)当 x=12 时,$y=0.07\times12=0.84$,又使用 4 年时,y=0.2,$\frac{0.84}{0.2}=4.2$,

由此预测该型号的汽车使用 12 年排放尾气中的 CO 浓度是使用 4 年的4.2倍.

20.解:(1)根据题意,得如下列联表.

	A 路线	B 路线	合计
男	30	90	120
女	120	60	180
总计	150	150	300

$\chi^2=\frac{300\times(30\times60-120\times90)^2}{120\times180\times150\times150}=50>6.635$,

所以在犯错误的概率不超过 1%的前提下,可以认为对 A,B 两条路线的选择与性别有关.

(2)A 路线的好评率为$\frac{100}{150}=\frac{2}{3}$,一般评率为$\frac{1}{3}$,B 路线的好评率为$\frac{75}{150}=\frac{1}{2}$,一般评率为$\frac{1}{2}$.

设 A 路线和 B 路线累计分数分别为 X,Y,则 X,Y 的可能取值都为 6,9,12,15,

则 $P(X=6)=C_3^0\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$,$P(X=9)=C_3^1\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{6}{27}$,$P(X=12)=C_3^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{12}{27}$,$P(X=15)=C_3^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$,所以 $EX=\frac{1}{27}\times6+\frac{6}{27}\times9+\frac{12}{27}\times12+\frac{8}{27}\times15=12$;

$P(Y=6)=C_3^0\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$,$P(Y=9)=C_3^1\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$,

$P(Y=12)=C_3^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$,

$P(Y=15)=C_3^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$,

所以 $EY=\frac{1}{8}\times6+\frac{3}{8}\times9+\frac{3}{8}\times12+\frac{1}{8}\times15=10.5$.

因为 EX>EY,所以这个人会选择 A 路线.

21.(1)证明:取 PC 的中点 F,连接 EF,BF.因为 AE 是等边$\triangle ADP$ 的中线,所以 $AE\perp PD$,

因为 E 为 PD 的中点,F 为 PC 的中点,所以 $EF\parallel CD$,且 $EF=\frac{1}{2}CD$.

因为 $AB\parallel CD$,$AB=\frac{1}{2}CD$,所以 $EF\parallel AB$,且 EF=AB.所以四边形 ABFE 是平行四边形,所以 $AE\parallel BF$.

因为 BC=BP,F 为 PC 的中点,所以 $BF\perp PC$,从而 $AE\perp PC$,又 $PC\cap PD=P$,且 $PC\subset$平面 PCD,$PD\subset$平面 PCD,所以 $AE\perp$平面 PCD.

(2)解:由(1)知 $AE\perp CD$,又 $AD\perp CD$,$AD\cap AE=A$,且 $AD,AE\subset$平面 ADP,

所以 $CD\perp$平面 ADP,从而 $EF\perp$平面 ADP.以 E 为坐标原点,$\overrightarrow{EP},\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EF}$的方向分别为 x 轴,y 轴,z 轴的正方向,建立空间直角坐标系,

则 $P(2\sqrt{2},0,0)$,$B(0,2\sqrt{6},2)$,$C(-2\sqrt{2},0,4)$,所以$\overrightarrow{PB}=(-2\sqrt{2},2\sqrt{6},2)$,$\overrightarrow{PC}=(-4\sqrt{2},0,4)$.

显然平面 PAD 的一个法向量为 $n=(0,0,1)$,设平面 PBC 的法向量为 $m=(x,y,z)$,

由$\overrightarrow{PB}\cdot m=0$,$\overrightarrow{PC}\cdot m=0$,得$\begin{cases}-2\sqrt{2}x+2\sqrt{6}y+2z=0,\\-4\sqrt{2}x+4z=0,\end{cases}$

令 x=1,则 y=0,$z=\sqrt{2}$,所以 $m=(1,0,\sqrt{2})$.

所以$|\cos\langle m,n\rangle|=\frac{|m\cdot n|}{|m|\cdot|n|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,所以平面 PBC 与平面 PAD 所成的锐二面角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

22.解:(1)由题意,得直线 $l:y=-x+\frac{p}{2}$,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

联立$\begin{cases}y=-x+\frac{p}{2},\\y^2=2px,\end{cases}$消去 y 并整理得 $x^2-3px+\frac{p^2}{4}=0$,

由韦达定理得 $x_1+x_2=3p$,此时$|AB|=x_1+x_2+p=4p=8$,解得 p=2,则抛物线 E 的方程为 $y^2=4x$.

(2)由(1)知,$x_1x_2=1$,$y_1y_2=(-x_1+1)(-x_2+1)=x_1x_2-(x_1+x_2)+1=-4$,不妨设直线 l'的方程为 x=my+1,$C(x_3,y_3)$,$D(x_4,y_4)$,

联立$\begin{cases}x=my+1,\\y^2=4x,\end{cases}$消去 x 并整理得 $y^2-4my-4=0$,

由韦达定理得 $y_3+y_4=4m$,$y_3y_4=-4$,

此时直线 AC:$y-y_3=\frac{4}{y_1+y_3}(x-x_3)$,即 $y=\frac{4x+y_1y_3}{y_1+y_3}$,同理得直线 BD:$y=\frac{4x+y_2y_4}{y_2+y_4}$,

若直线 AC 与 BD 的交点在一条直线上,

此时$\frac{4x+y_1y_3}{y_1+y_3}=\frac{4x+y_2y_4}{y_2+y_4}$,

即 $4(y_1-y_2+y_3-y_4)x=y_1y_2(y_3-y_4)+y_3y_4(y_1-y_2)=-4(y_1-y_2+y_3-y_4)$,

解得 x=-1,故直线 AC 与直线 BD 的交点都在直线 x=-1上.

扫码免费下载
习题讲解 ppt

第 25 期

第 2~3 版综合测试(一)参考答案

一、单项选择题

1.B　提示:由题意知,直线 l 的斜率为 $k=\sqrt{3}$,所以直线 l 的倾斜角为 60°.故选 B.

2.C　提示:每个水闸有打开或关闭两种情况,五个水闸的打开或关闭不同结果有 2^5 种.

若水闸 A 打开,水闸 B,C 至少打开 1 个,水闸 D,E 至少打开 1 个,则下游有水,

水闸 B,C 至少打开 1 个有(2^2-1)种,水闸 D,E 至少打开 1 个有(2^2-1)种,

由分步乘法计数原理,得下游有水的不同结果有 $1\times(2^2-1)\times(2^2-1)=9$ 种.

所以所求五个水闸打开或关闭的情况有 $2^5-9=23$ 种.故选 C.

3.A　提示:因为 $a=(\cos\alpha,-1,\sin\alpha)$,$b=(\sin\alpha,-1,\cos\alpha)$,则 $a+b=(\cos\alpha+\sin\alpha,-2,\sin\alpha+\cos\alpha)$,$a-b=(\cos\alpha-\sin\alpha,0,\sin\alpha-\cos\alpha)$,则 $(a+b)\cdot(a-b)=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)=0$,故向量 a+b 与 a-b 的夹角为 90°.故选A.

4.A　提示:"从该校学生中任意调查一名学生他是近视"记为事件 A,则 P(A)=0.3,"从该校学生中任意调查一名学生他每天玩手机超过 2h"记为事件 B,由题意知,P(AB)=0.24,所以从该校近视的学生中任意调查一名学生,则他每天玩手机超过 2h 的概率为 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.24}{0.3}=\frac{4}{5}$.故选 A.

5.A　提示:设正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的棱长为 2,取 AC 的中点 D,连接 DG,DB,分别以 DB,DC,DG 所在的直线为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,则 $B_1(\sqrt{3},0,2)$,G(0,0,2),$E\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$,F(0,-1,1),

$\overrightarrow{EF}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},1\right)$,$\overrightarrow{GF}=(0,-1,-1)$,$\overrightarrow{B_1G}=(-\sqrt{3},0,0)$,设平面 B_1GF 的法向量为 $n=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\overrightarrow{B_1G}\cdot n=-\sqrt{3}x=0,\\\overrightarrow{GF}\cdot n=-y-z=0,\end{cases}$取 y=1,则 z=-1,x=0,故 n=(0,1,-1),设 EF 与平面 B_1GF 所成角为 θ,

则 $\sin\theta=\left|\frac{n\cdot\overrightarrow{EF}}{|n|\cdot|\overrightarrow{EF}|}\right|=\left|\frac{-\frac{1}{2}-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\right|=\frac{3}{4}$,所以 EF 与平面 B_1GF 所成角的正弦值为$\frac{3}{4}$.故选 A.

6.D　提示:令 $t=\frac{1}{x}$,由题意知,$\bar{t}=\frac{1}{4}\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=\frac{15}{32}$,$\bar{y}=\frac{1}{4}\times(115+49+32+5)=\frac{201}{4}$,代入回归方程 $y=\hat{a}+120t$,得$\frac{201}{4}=\hat{a}+120\times\frac{15}{32}$,解得$\hat{a}=-6$.故选 D.

7.D　提示:设事件 A 为"甲在规定的时间内到达",事件 B 为"乙在规定的时间内到达",

则 P(A)=0.5,P(B)=0.9,且 A,B 相互独立,

由题意知,X 的可能取值为 0,1,2,则 $P(X=0)=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=(1-0.5)\times(1-0.9)=0.05$,

$P(X=1)=P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})=P(\overline{A})P(B)+P(A)P(\overline{B})=(1-0.5)\times0.9+0.5\times(1-0.9)=0.5$,

$P(X=2)=P(AB)=P(A)P(B)=0.5\times0.9=0.45$,

所以 $EX=0\times0.05+1\times0.5+2\times0.45=1.4$,$DX=0.05\times(0-1.4)^2+0.5\times(1-1.4)^2+0.45\times(2-1.4)^2=0.34$.故选 D.

8.A　提示:不妨设$|PQ|=3k$,$|PF_2|=4k(k>0)$,因为 P 在以 F_1F_2 为直径的圆上,所以 $PF_1\perp PF_2$,即 $PQ\perp PF_2$,所以$|QF_2|=5k$,因为 Q 在 C 的左支上,

所以$|QF_2|+|PF_2|-|PQ|=(|QF_2|-|QF_1|)+(|PF_2|-|PF_1|)$,

即 $5k+4k-3k=4a$,解得 2a=3k,则$|PF_1|=|PF_2|-2a=4k-3k=k$,因为 $PF_1\perp PF_2$,所以$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2$,即 $4c^2=17k^2$,故 $2c=\sqrt{17}k$,故 C 的离心率 $e=\frac{2c}{2a}=\frac{\sqrt{17}}{3}$.故选 A.

二、多项选择题

9.ABD　提示:由题意知,$P(A)=\frac{2}{5}$,故 A 正确;$P(\overline{A})=\frac{3}{5}$,$P(B|A)=\frac{3}{5}$,故 B 正确;$P(B|\overline{A})=\frac{2}{5}$,$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{12}{25}$,故 C 错误;$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}}{\frac{12}{25}}=\frac{1}{2}$,故 D 正确.故选 ABD.

10.ABD　提示:由题意知,随机变量 X 的可能取值为 0,1,2,3,4.

对于 A,游客至多游览一个景点,即游览 0 个或 1 个景点,即 X=0 或 1,$P(X=0)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{24}$,$P(X=1)=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^3+\left(1-\frac{2}{3}\right)\times C_3^1\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{24}$,所以游客至多游览 1 个景点的概率为$\frac{1}{24}+\frac{5}{24}=\frac{1}{4}$,故 A 正确;

对于 B,$P(X=2)=\frac{2}{3}\times C_3^1\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{2}{3}\right)\times C_3^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$,故 B 正确;

对于 C,$P(X=4)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{12}$,故 C 错误;

对于 D,$P(X=3)=1-\frac{1}{4}-\frac{3}{8}-\frac{1}{12}=\frac{7}{24}$,所以 $EX=0\times\frac{1}{24}+1\times\frac{5}{24}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{7}{24}+4\times\frac{1}{12}=\frac{13}{6}$,故 D 正确.故选 ABD.

11.ACD　提示:对于 A,设圆心为 C(-2,b),圆的半径为 r,则$\frac{|-2+\sqrt{3}b-2|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=\sqrt{(-2+1)^2+(b-\sqrt{3})^2}$,解得 b=0,所以 $r=\sqrt{(-2+1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$,故圆 C 的方程为$(x+2)^2+y^2=4$,故 A 正确;

对于 B,当 AE 过圆心 C 时,AE 长度最长为圆的直径 4,故 B 错误;

对于 C,线段 AE,BF 的中点分别为 M,N,所以 $CM\perp AE$,$CN\perp BF$,又 $AE\perp BF$,所以四边形 MDNC 为矩形,所以 MN 与 CD 互相平分,即 MN 过 CD 中点$\left(-\frac{3}{2},0\right)$,故 C 正确;

对于 D,由直角三角形斜边上中线的性质知,存在 $G\left(-\frac{3}{2},0\right)$,使$|NG|=\frac{1}{2}|CD|=\frac{1}{2}$,为定值,故 D 正确.故选 ACD.

12.ABD　提示:对于 A,由题意知,F(1,0).由抛物线的性质,可知$|AB|=x_1+x_2+2\geqslant2p=4$,所以 $x_1+x_2\geqslant2$,故 A 正确;

对于 B,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{(y_1y_2)^2}{16}+y_1y_2$,

设直线 l 的方程为 x=my+1,代入 $y^2=4x$,得 $y^2-4my-4=0$,所以 $y_1y_2=-4$,所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-3<0$,所以$\triangle AOB$ 是钝角三角形,故 B正确;

对于 C,D,由$|AA_1|=|AF|$,得$\angle AA_1F=\angle AFA_1$,又 $AA_1\parallel OF$,所以$\angle AA_1F=\angle OFA_1=\angle AFA_1$,所以直线 FA_1 平分$\angle AFO$,同理可得 FB_1 平分$\angle BFO$,所以 $A_1F\perp B_1F$,即$\angle A_1FB_1=90°$,

所以圆 M 经过点 F,故 C 错误,D 正确.故选 ABD.

三、填空题

13.$\frac{1}{5}$　提示:因为$\xi\sim N(3,\sigma^2)$,所以$\mu=3$,因为 $P(\xi\geqslant2)=\frac{4}{5}$,所以 $P(\xi\geqslant4)=P(\xi<2)=1-P(\xi\geqslant2)=\frac{1}{5}$.

14.15　提示:因为$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^6$展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r\cdot(\sqrt{x})^{6-r}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^r=C_6^r\cdot x^{3-\frac{3r}{2}}$,令 $3-\frac{3r}{2}=0$,则 r=2,此时 $T_3=C_6^2x^0=15$,所以该二项展开式的常数项为 15.

15.$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　提示:记 AC 与 BD 的交点为 O,由正方形性质可知 $AC\perp BD$,所以在翻折后的图中,$OD\perp OA$,$OD\perp OC$,所以$\angle AOC=\frac{\pi}{2}$,即 $OA\perp OC$,以 OC,OD,OA 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,易知OA=OB=OC=OD=1,则 A(0,0,1),B(0,-1,0),C(1,0,0),D(0,1,0),

则$\overrightarrow{AB}=(0,-1,-1)$,$\overrightarrow{AC}=(1,0,-1)$,$\overrightarrow{BD}=(0,2,0)$,设$n=(x,y,z)$为平面 ABC 的法向量,则$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot n=-y-z=0,\\\overrightarrow{AC}\cdot n=x-z=0,\end{cases}$取 x=1,得 n=(1,-1,1),所以点 D 到平面 ABC 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{BD}\cdot n|}{|n|}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

16.24　提示:由抛物线的方程得 F(1,0),由题意设直线 l_1 的方程为 $y=k_1(x-1)$,直线 l_2 的方程为 $y=k_2(x-1)$,则 $k_1^2+k_2^2=1$,联立$\begin{cases}y=k_1(x-1),\\y^2=4x,\end{cases}$整理得,$k_1^2x^2-(2k_1^2+4)x+k_1^2=0$,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\frac{2k_1^2+4}{k_1^2}=2+\frac{4}{k_1^2}$,同理可得 $x_D+x_E=2+\frac{4}{k_2^2}$,由抛物线的性质可得$|AB|=x_1+x_2+p=4+\frac{4}{k_1^2}$,$|DE|=x_D+x_E+p=4+\frac{4}{k_2^2}$,所以$|AB|+|DE|=8+\frac{4}{k_1^2}+\frac{4}{k_2^2}=8+\frac{4}{k_1^2k_2^2}\geqslant8+\frac{4}{\left(\frac{k_1^2+k_2^2}{2}\right)^2}=8+16=24$,当且仅当 $k_1^2=k_2^2=\frac{1}{2}$时取等号,此时$|AB|+|DE|$的最小值为 24.

四、解答题

17.解:(1)因为直线 l 与直线 $3x-y+2=0$ 平行,所以直线 l 的斜率 k=3,则$-\frac{a}{2}=3$,解得 a=-6,

故直线 l 的方程为$-6x+2y-7=0$,即 $6x-2y+7=0$.

(2)由题意知,圆 C 的圆心坐标为(1,2),半径为 3,因为$|AB|=4\sqrt{2}$,所以圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{|a-3|}{\sqrt{a^2+4}}=\sqrt{9-8}=1$,解得 $a=\frac{5}{6}$,故直线 l 的方程为$\frac{5}{6}x+2y-7=0$,即 5x+12y-42=0.

18.解:(1)$\bar{x}=\frac{2+3+5+6+8+12}{6}=6$,$\bar{y}=\frac{30+34+40+45+50+60}{6}=\frac{259}{6}$,$\sum_{i=1}^{6}x_i^2=2^2+3^2+5^2+6^2+8^2+12^2=282$,

所以$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{6}x_iy_i-6\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum_{i=1}^{6}x_i^2-6\bar{x}^2}=\frac{1752-6\times6\times\frac{259}{6}}{282-6\times6^2}=\frac{198}{66}=3$,

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=\frac{259}{6}-3\times6=\frac{151}{6}$,所以 y 关于 x 的线性回归方程为 $y=3x+\frac{151}{6}$.

(2)令 $3x+\frac{151}{6}=100$,解得 $x=\frac{449}{18}\approx25$(万元).

故当宣传费用至少为 25 万元时,销售额能突破 100 万元.

19.解:(1)在 100 名学生中随机抽取 1 名,则抽到不喜欢自主探究性学习男学生的概率为$\frac{1}{10}$,即$\frac{m}{100}=\frac{1}{10}$,解得 m=10,n=30-10=20,用分层随机抽样方法按是否喜欢自主探究性学习在女学生中抽取 5 人,5 名女学生中,不喜欢自主探究性学习有 $5\times\frac{20}{50}=2$ 人,喜欢自主探究性学习有 $5\times\frac{30}{50}=3$ 人,再从这 5 人中随机选取 1 人发言,则抽到喜欢自主探究性学习的学生的概率 $P=\frac{3}{5}$.

(2)由题意可得,2×2 列联表如下:

	男	女	合计
不喜欢自主探究性学习	10	20	30
喜欢自主探究性学习	40	30	70
合计	50	50	100

因为$\chi^2=\frac{100\times(10\times30-20\times40)^2}{30\times70\times50\times50}\approx4.762>3.841$,

所以有 95%的把握认为性别与自主探究性学习被喜欢程度有关.

20.解:(1)设事件 A 为"分别从上述 200 名男生和 300 名女生中各随机抽取 1 名,抽到的 2 名学生都获一等奖",则 $P(A)=\frac{C_{10}^1C_{25}^1}{C_{200}^1C_{300}^1}=\frac{1}{240}$.

(2)随机变量 X 的所有可能取值为 0,1,2.记事件 B 为"从 200 名男生中随机抽取 1 名,该学生获奖",事件 C 为"从 300 名女生中随机抽取 1 名,该学生获奖",由题设知,事件 B,C 相互独立,且 $P(B)=\frac{10+15+15}{200}=\frac{1}{5}$,$P(C)=\frac{25+25+40}{300}=\frac{3}{10}$,

所以 $P(X=0)=P(\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{B})P(\overline{C})=\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\left(1-\frac{3}{10}\right)=\frac{28}{50}$,$P(X=1)=P(B\overline{C}\cup\overline{B}C)=P(B)P(\overline{C})+P(\overline{B})P(C)=\frac{1}{5}\times\left(1-\frac{3}{10}\right)+\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\frac{3}{10}=\frac{19}{50}$,

$P(X=2)=P(BC)=P(B)P(C)=\frac{1}{5}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{50}$,

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{28}{50}$	$\frac{19}{50}$	$\frac{3}{50}$

故 X 的数学期望 $EX=0\times\frac{28}{50}+1\times\frac{19}{50}+2\times\frac{3}{50}=\frac{1}{2}$.

(3)$p_0>\frac{p_1+p_2}{2}$,理由:由频率估计概率得 $p_0=\frac{40+90}{500}=\frac{13}{50}=\frac{26}{100}$,

由(2)知 $p_1=\frac{1}{5}$,$p_2=\frac{3}{10}$,故$\frac{p_1+p_2}{2}=\frac{\frac{1}{5}+\frac{3}{10}}{2}=\frac{1}{4}=\frac{25}{100}$,则 $p_0>\frac{p_1+p_2}{2}$.

21.解:(1)由直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 4,可得 $V_{A_1-ABC}=\frac{1}{3}V_{A_1B_1C_1-ABC}=\frac{4}{3}$,设A到平面$A_1BC$的距离为d,由 $V_{A_1-ABC}=V_{A-A_1BC}$,得$\frac{1}{3}S_{\triangle A_1BC}\cdot d=\frac{4}{3}$,所以$\frac{1}{3}\times2\sqrt{2}\cdot d=\frac{4}{3}$,

解得 $d=\sqrt{2}$.所以 A 到平面 A_1BC 的距离为 $\sqrt{2}$.

(2)连接 AB_1 交 A_1B 于点 E,因为 $AA_1=AB$,所以四边形 ABB_1A_1 为正方形,所以 $AB_1\perp A_1B$,又因为平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1,平面 $A_1BC\cap$ 平面 $ABB_1A_1=A_1B$,所以 $AB_1\perp$ 平面 A_1BC,所以 $AB_1\perp BC$,由直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$,知 $BB_1\perp$ 平面 ABC,所以 $BB_1\perp BC$,又 $AB_1\cap BB_1=B_1$,所以 $BC\perp$ 平面 ABB_1A_1,所以 $BC\perp AB$,以 B 为坐标原点,BC,BA,BB_1 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,

因为 $AA_1=AB$,所以 $BC\times\sqrt{2}AB\times\frac{1}{2}=2\sqrt{2}$,又 $\frac{1}{2}AB\times BC\times AA_1=4$,解得 $AB=BC=AA_1=2$,则 $B(0,0,0)$,$A(0,2,0)$,$C(2,0,0)$,$A_1(0,2,2)$,$D(1,1,1)$,则 $\overrightarrow{BA}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{BD}=(1,1,1)$,$\overrightarrow{BC}=(2,0,0)$,设平面 ABD 的法向量为 $n=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{BA}=2y=0,\\ n\cdot\overrightarrow{BD}=x+y+z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$,则 $n=(1,0,-1)$,设平面 BCD 的法向量为 $m=(a,b,c)$,则 $\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{BC}=2a=0,\\ m\cdot\overrightarrow{BD}=a+b+c=0,\end{cases}$ 令 $b=1$,则 $m=(0,1,-1)$,所以 $\cos\langle n,m\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$,所以二面角 A-BD-C 的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

22.**解**:(1)设椭圆 C 的左焦点 $F(-c,0)$,$c>0$,

由 $S_{\triangle OPQ}=\frac{\sqrt{6}}{2}S_{\triangle OFQ}$,得 $\frac{1}{2}ab=\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{1}{2}cb$,所以 $a=\frac{\sqrt{6}}{2}c$,

又 $|PQ|=2$,所以 $a^2+b^2=4$ 且 $b^2+c^2=a^2$,所以 $a^2=3,b^2=1$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$,椭圆 C 的"准圆"方程为 $x^2+y^2=4$.

(2)设直线 ED 的方程为 $y=kx+n(k,n\in R)$,且与椭圆 C 的交点 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases}y=kx+n,\\ \frac{x^2}{3}+y^2=1,\end{cases}$ 整理得 $(1+3k^2)x^2+6knx+3n^2-3=0$,

则 $x_1+x_2=\frac{-6kn}{1+3k^2}$,$x_1x_2=\frac{3n^2-3}{1+3k^2}$,所以 $y_1y_2=(kx_1+n)(kx_2+n)=k^2x_1x_2+kn(x_1+x_2)+n^2=\frac{n^2-3k^2}{1+3k^2}$,

由 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$,得 $x_1x_2+y_1y_2=0$,所以 $\frac{3n^2-3}{1+3k^2}+\frac{n^2-3k^2}{1+3k^2}=\frac{4n^2-3k^2-3}{1+3k^2}=0$,所以 $n^2=\frac{3}{4}(k^2+1)$,

所以原点 O 到弦 ED 的距离 $d=\frac{|n|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{\frac{n^2}{k^2+1}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $|ED|=2\sqrt{4-\frac{3}{4}}=\sqrt{13}$,

所以弦 ED 的长为定值.

第 26 期

第 2~3 版综合测试(二)参考答案

一、单项选择题

1.A　**提示**:根据题意,得 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,由正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,可得 $\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{BC}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.故选 A.

2.D　**提示**:直线 l 的一个方向向量为 $(2,-1)$,则直线 l 的斜率为 $\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$,因为直线 l 过点 $A(1,0)$,所以 $y-0=-\frac{1}{2}(x-1)$,即 $x+2y-1=0$.故选 D.

3.C　**提示**:$\left(x-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r\cdot x^{6-r}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^r=(-2)^r\cdot C_6^r\cdot x^{6-\frac{3r}{2}}$,令 $6-\frac{3}{2}r=0$,解得 $r=4$,即该展开式的常数项为 $(-2)^4\cdot C_6^4=240$.故选 C.

4.A　**提示**:圆 $x^2+y^2-4y+3=0$ 的标准方程为 $x^2+(y-2)^2=1$,所以圆心坐标为 $(0,2)$,半径为 $r=1$,

圆心到直线 $3x-4y-2=0$ 的距离为 $d=\frac{|2\times(-4)-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$,

所以圆上的点到该直线的距离的取值范围是 $[d-r,d+r]$,即 $[1,3]$.故选 A.

5.B　**提示**:因为 $X\sim N(20,25)$,故 $\mu=20$,$\sigma=5$,因为小明的游戏时间最多 15 分钟,

故需求 $P(X\leqslant15)=P(X\leqslant20-5)=\frac{1-P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)}{2}\approx0.1587$.故选 B.

6.C　**提示**:由题意,得 $\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{200[(80-m)(50-m)-(20+m)(50+m)]^2}{100\times100\times130\times70}=\frac{8(15-m)^2}{91}\geqslant3.841$,所以 $(15-m)^2\geqslant43.69$,又 $5\leqslant m\leqslant15$,$m\in N$,所以 $15-m\geqslant7$,解得 $m\leqslant8$,

故在被调查的 100 名女生中喜欢观看体育比赛直播的人数的最大值为 58.故选 C.

7.D　**提示**:由题意可知,X 的可能取值为 96,100,则 $P(X=96)=1-\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$,所以 $P(X=100)=\frac{1}{4}$,因此,$EX=96\times\frac{3}{4}+100\times\frac{1}{4}=97$.故选 D.

8.B　**提示**:双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,渐近线的方程为 $y_1=\frac{b}{a}x$,$y_2=-\frac{b}{a}x$,不妨设双曲线 E 的渐近线的平行线方程为 $y_1'=\frac{b}{a}x+m(m\neq0)$,$y_2'=-\frac{b}{a}x+n(n\neq0)$,与 x 轴的交点为 $A\left(\frac{-ma}{b},0\right)$,$B\left(\frac{na}{b},0\right)$,与 y 轴交点为 $C(0,m)$,$D(0,n)$,所以 $(|OA|+|OB|)\cdot(|OC|+|OD|)=\left(\left|\frac{ma}{b}\right|+\left|\frac{na}{b}\right|\right)\cdot(|m|+|n|)=(|m|+|n|)\cdot\frac{a}{b}\cdot(|m|+|n|)=(m^2+2|m||n|+n^2)\cdot\frac{a}{b}\geqslant4|m||n|\cdot\frac{a}{b}$,当且仅当 $|m|=|n|$ 时取等号,$12|OC||OD|=12|m|\cdot|n|$,因为 $(|OA|+|OB|)\cdot(|OC|+|OD|)\geqslant12|OC|\cdot|OD|$ 恒成立,所以 $4|m||n|\cdot\frac{a}{b}\geqslant12|m||n|$,所以 $\frac{b}{a}\leqslant\frac{1}{3}$,所以 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\leqslant\sqrt{1+\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{10}}{3}$,又 $e>1$,所以 $1<e\leqslant\frac{\sqrt{10}}{3}$,故选 B.

二、多项选择题

9.BC　**提示**:四个不同的小球放入三个分别标有 1,2,3 号的盒子中,且没有空盒子,则三个盒子中有 1 个放 2 个球,剩下的 2 个盒子中各放 1 个,有 2 种解法:

(1)分两步进行分析:①先将四个不同的小球分成 3 组,有 C_4^2 种分组方法;

②将分好的 3 组全排列,对应放到 3 个盒子中,有 A_3^3 种放法.则不允许有空盒子的放法种数为 $C_4^2A_3^3=36$.

(2)分两步进行分析:①在 4 个小球中任选 2 个,在 3 个盒子中任选 1 个,将选出的 2 个小球放入选出的小盒中,有 $C_3^1C_4^2$ 种情况;②将剩下的 2 个小球全排列,放入剩下的 2 个小盒中,有 A_2^2 种放法.

则不允许有空盒子的放法种数为 $C_3^1C_4^2A_2^2=36$.故选BC.

10.ACD　**提示**:对于 A,若随机变量 X 服从正态分布 $X(3,\sigma^2)$,且 $P(X\leqslant4)=0.7$,

则 $P(3<X\leqslant4)=P(X\leqslant4)-0.5=0.2$,故 A 正确;对于 B,已知一组数据 10,11,11,12,13,14,16,18,20,22,该组数据共有 10 个数,因为 $10\times60\%=6$,所以第 60 百分位数为 $\frac{14+16}{2}=15$,故 B 错误;对于 C,若线性相关系数 $|r|$ 越接近 1,则两个变量的线性相关性越强,故 C 正确;

对于 D,已知线性回归方程为 $y=0.3x-m$,因为样本点的中心为 $(m,2.8)$,所以 $2.8=0.3m-m$,解得 $m=-4$,故 D 正确.故选 ACD.

11.BCD　**提示**:对于 A,直线 EC_1 与直线 AD 都在平面 B_1ADC_1 中,故 A 错误;对于 B,连接 A_1C_1,BC_1,取 A_1C_1 的中点 F,则 $EF//BC_1$,因为 $BC_1\perp$ 平面 A_1CD,所以 $EF\perp$ 平面 A_1CD,故 B 正确;对于 C,取 B_1C 的中点 M,可证 $BM\perp$ 平面 A_1CD,所以 $\angle BA_1M$ 即为直线 BA_1 与平面 A_1CD 所成角,因为 $BM=\frac{1}{2}BA_1$,$\angle BMA_1=\frac{\pi}{2}$,所以 $\angle BA_1M=\frac{\pi}{6}$,故 C 正确;

对于 D,因为 $BM\perp$ 平面 A_1CD,所以点 B 到平面 A_1CD 的距离 $d=|BM|=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故 D 正确.故选 BCD.

12.AC　**提示**:设 $\sqrt{2}x+2y=t_1$ 为直线 l,则 $x=-\sqrt{2}y+\frac{t_1}{\sqrt{2}}$,联立 $\begin{cases}x=-\sqrt{2}y+\frac{t_1}{\sqrt{2}},\\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 整理得,$2t_1y=\frac{t_1^2}{2}-4$.若 $t_1=0$,则 l 为双曲线 C 的渐近线,与双曲线 C 无交点,不符合题意,故 $t_1\neq0$,则 $y=\frac{t_1}{4}-\frac{2}{t_1}$,$x=-\sqrt{2}y+\frac{t_1}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{t_1}+\frac{\sqrt{2}}{4}t_1$,故 $A\left(\frac{2\sqrt{2}}{t_1}+\frac{\sqrt{2}}{4}t_1,\frac{t_1}{4}-\frac{2}{t_1}\right)$,因为双曲线 C:$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$,所以 $a^2=4$,$b^2=2$,$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{6}$,故 $F(\sqrt{6},0)$,所以 $|AF|^2=\left(\frac{2\sqrt{2}}{t_1}+\frac{\sqrt{2}}{4}t_1-\sqrt{6}\right)^2+\left(\frac{t_1}{4}-\frac{2}{t_1}\right)^2=\frac{12}{t_1^2}-\frac{8\sqrt{3}}{t_1}+7-\sqrt{3}t_1+\frac{3}{16}t_1^2$,①

同理可得,$|BF|^2=\frac{12}{t_2^2}-\frac{8\sqrt{3}}{t_2}+7-\sqrt{3}t_2+\frac{3}{16}t_2^2$,②

将选项 A,B,C,D 依次代入①②两式验证可得,A,C 正确,B,D 错误.故选 AC.

三、填空题

13.$-\sqrt{2}$　**提示**:因为向量 $\boldsymbol{a}=(1,\lambda,1)$,$\boldsymbol{b}=(2,-1,-2)$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$,

所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{-\lambda}{\sqrt{2+\lambda^2}\cdot\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$,

则 $\lambda<0$,解得 $\lambda=-\sqrt{2}$.

14.84　**提示**:将五声音阶全排列,可排成不同的音序种数是 $A_5^5=120$,宫、角、羽三音阶全相邻,可排成不同的音序种数是 $A_3^3A_3^3=6\times6=36$,则把这五个音阶全用上,排成一个五个音阶的音序,且要求宫、角、羽三音阶不全相邻,可排成不同的音序种数是 $120-36=84$.

15.$\frac{\sqrt{5}}{3}$　**提示**:设椭圆 C 的左焦点为 F_1,因为圆 C':$\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2=\frac{b^2}{16}$ 与 AF 相切于点 B,所以 $|C'B|=\frac{b}{4}$,$C'\left(\frac{c}{2},0\right)$,所以 $\frac{|C'F|}{|F_1F|}=\frac{1}{4}$.因为 $\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{BF}$,所以 $\frac{|\overrightarrow{BF}|}{|\overrightarrow{AF}|}=\frac{1}{4}$,所以 $C'B//AF_1$,$|AF_1|=4|C'B|=b$,$\angle F_1AF=\angle C'BF=\frac{\pi}{2}$,由椭圆定义得 $|AF|=2a-b$,在 $Rt\triangle AF_1F$ 中,$|AF|^2+|AF_1|^2=|F_1F|^2$,所以 $(2a-b)^2+b^2=(2c)^2$,整理得 $3b=2a$,所以椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

16.0.32　**提示**:甲队的主客场安排依次为"主主客客主客主",甲队主场取胜的概率为 0.8,客场取胜的概率为 0.5,且各场比赛结果相互独立,甲队以 4:1 获胜包含的情况有:

①前 5 场比赛中,第一场负,另外 4 场全胜,其概率为 $p_1=0.2\times0.8\times0.5\times0.5\times0.8=0.032$;

②前 5 场比赛中,第二场负,另外 4 场全胜,其概率为 $p_2=0.8\times0.2\times0.5\times0.5\times0.8=0.032$;

③前 5 场比赛中,第三场负,另外 4 场全胜,其概率为 $p_3=0.8\times0.8\times0.5\times0.5\times0.8=0.128$;

④前 5 场比赛中,第四场负,另外 4 场全胜,其概率为 $p_4=0.8\times0.8\times0.5\times0.5\times0.8=0.128$.

则甲队以 4:1 获胜的概率为 $p=0.032+0.032+0.128+0.128=0.32$.

四、解答题

17.**解**:(1)变量 y 与 x 的相关系数是 $r\approx\frac{28.3}{15.6\times1.9}\approx0.95$,变量 z 与 x 的相关系数是 $r'\approx\frac{35.4}{15.6\times2.3}\approx0.99$,可以看出 TC 指标值与 BMI 值、CLU 指标值与 BMI 值都是高度正相关.

(2)设 y 与 x 的线性回归方程是 $y=\hat{b}x+\hat{a}$,根据所给的数据,计算 $\hat{b}\approx\frac{28.3}{244}\approx0.12$,$\hat{a}\approx6-0.12\times33=2.04$,所以 y 与 x 的回归方程是 $y=0.12x+2.04$,由 $0.12x+2.04\geqslant5.2$,得 $x\geqslant\frac{3.16}{0.12}$,而 $\frac{3.16}{0.12}\approx26.33$.

所以据此模型分析当 BMI 值达到 26.33 时,需要注意监控总胆固醇偏高情况的出现.

18.(1)**解**:由题意知,$\frac{1}{2}+\frac{p}{2}=|n|$,$n^2=2p\times\frac{1}{2}$,解得 $p=1$,故抛物线的方程为 $y^2=2x$.

(2)**证明**:设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,直线 l 的方程为 $x=my+t$,联立 $\begin{cases}y^2=2x,\\ x=my+t,\end{cases}$ 整理得,$y^2-2my-2t=0$,则 $y_1y_2=-2t$,$x_1x_2=\frac{1}{4}(y_1y_2)^2=t^2$,因为 $OA\perp OB$,所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=t^2-2t=0$,解得 $t=2$ 或 $t=0$(舍去),故直线 l 方程为 $x=my+2$,直线 l 与 x 轴的交点 $(2,0)$ 为定点.

19.(1)**证明**:在 $\triangle ABD$ 中,因为 E,F 分别是 AB,AD 的中点,所以 $EF//DB$,$EF=\frac{1}{2}BD$,又因为 $EF\not\subset$ 平面 PBD,$BD\subset$ 平面 PBD,所以 $EF//$ 平面 PBD,因为 $EF\subset$ 平面 α,$\alpha\cap$ 平面 $PBD=MN$,所以 $EF//MN$,所以 $MN//BD$.

(2)**解**:由 $EF=2MN$,可得 $\frac{MN}{BD}=\frac{1}{4}$,$\overrightarrow{PM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{PB}$.连接AC 交 BD 于 O,以 O 为坐标原点,$\overrightarrow{OE}$ 为 x 轴方向,$\overrightarrow{OP}$ 为 z 轴方向,建立空间直角坐标系,因为 $PA=\sqrt{6}$,$AB=2$,所以 $PO=2$,则 $A(1,-1,0)$,$E(1,0,0)$,$F(0,-1,0)$,$B(1,1,0)$,$P(0,0,2)$,$\overrightarrow{AP}=(-1,1,2)$,$\overrightarrow{EF}=(-1,-1,0)$,$\overrightarrow{PB}=(1,1,-2)$,$\overrightarrow{EB}=(0,1,0)$,$\overrightarrow{MB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{PB}=\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4},-\frac{3}{2}\right)$,$\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{MB}=\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{2}\right)$.设平面 α 的法向量为 $n=(x,y,z)$,由 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{EF}=-x-y=0,\\ n\cdot\overrightarrow{EM}=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{3}{2}z=0,\end{cases}$ 令 $x=3$,则 $n=(3,-3,2)$,设直线 PA 与平面 α 所成角为 θ,则 $\sin\theta=|\cos\langle n,\overrightarrow{AP}\rangle|=\frac{2}{\sqrt{6}\times\sqrt{22}}=\frac{\sqrt{33}}{33}$,故直线 PA 与平面 α 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{33}}{33}$.

20.**解**:(1)根据表中的数据,

经计算得到 $\chi^2=\frac{120\times(40\times10-20\times50)^2}{60\times60\times90\times30}=\frac{40}{9}\approx4.444>3.841$,

根据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验,能认为购车顾客的性别与其购买的车辆颜色有关联.

(2)由题意知,购买白色车辆的 90 名顾客中抽取男生 $9\times\frac{50}{90}=5$ 人,女生 4 人,购买红色车辆的 30 名顾客中抽取男生 1 人,女生 2 人,则抽取的 12 人中,是男生且购买白色车辆的有 5 人.

设事件 A 为"第一次抽到的嘉宾是男生且购买白色车辆",事件 B 为"第二次抽到的嘉宾是男生且购买白色车辆".

$P(A)=\frac{5}{12}$,$P(B|A)=\frac{4}{11}$,$P(\bar{A})=\frac{7}{12}$,$P(B|\bar{A})=\frac{5}{11}$,

由全概率公式 $P(B)=P(A)\cdot P(B|A)+P(\bar{A})\cdot P(B|\bar{A})$,

得 $P(B)=\frac{5}{12}\times\frac{4}{11}+\frac{7}{12}\times\frac{5}{11}=\frac{5}{12}$,所以第二次抽到的嘉宾是男生且购买白色车辆的概率为 $\frac{5}{12}$.

21.**解**:(1)由题意知,ξ 的可能取值为 0,1,2,

$P(\xi=0)=\frac{C_{40}^2}{C_{60}^2}=\frac{26}{59}$,$P(\xi=1)=\frac{C_{20}^1C_{40}^1}{C_{60}^2}=\frac{80}{177}$,$P(\xi=2)=\frac{C_{20}^2}{C_{60}^2}=\frac{19}{177}$,

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{26}{59}$	$\frac{80}{177}$	$\frac{19}{177}$

故 $E\xi=0\times\frac{26}{59}+1\times\frac{80}{177}+2\times\frac{19}{177}=\frac{2}{3}$.

(2)由题意,易知 X 服从二项分布 $X\sim B\left(1,\frac{4}{5}\right)$,$DX=1\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{25}$;$Y$ 服从二项分布 $Y\sim B\left(1,\frac{2}{3}\right)$,$DY=1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$,故 $DX<DY$.

22.**解**:(1)由题意可得,抛物线 C_1 的焦点为 $(1,0)$,所以椭圆 C_2 的半焦距 $c=1$,

又因为椭圆 C_2 的离心率为 $\frac{1}{2}$,所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$,即 $a=2$.

因为 $a^2=b^2+c^2$,所以 $b^2=a^2-c^2=3$,所以椭圆 C_2 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)由(1)知 $F_1(-1,0)$,设 $Q(x_1,y_1)$,$R(x_2,y_2)$,因为 $\angle PF_1Q$ 与 $\angle PF_1R$ 互补,所以 $k_{QF_1}+k_{RF_1}=0$,

所以 $\frac{y_1}{x_1+1}+\frac{y_2}{x_2+1}=0$,化简得 $x_1y_2+y_2+x_2y_1+y_1=0$.①

设直线 PQ 的方程为 $x=my+n(m\neq0)$,联立直线 PQ 与椭圆 C_2 的方程 $\begin{cases}x=my+n,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$

化简得 $(3m^2+4)y^2+6mny+3n^2-12=0$,

则 $\Delta=36m^2n^2-4(3m^2+4)(3n^2-12)>0$,可得 $n^2<3m^2+4$,②

由韦达定理,可得 $y_1+y_2=-\frac{6mn}{3m^2+4}$,$y_1y_2=\frac{3n^2-12}{3m^2+4}$,③

将 $x_1=my_1+n$,$x_2=my_2+n$ 代入①,可得 $2my_1y_2+(n+1)\cdot(y_1+y_2)=0$,④

再将③代入④,可得 $\frac{6m(n^2-4)}{3m^2+4}=\frac{6mn(n+1)}{3m^2+4}$,解得 $n=-4$,

所以直线 PQ 的方程为 $x=my-4$,

所以直线 l 经过定点 $(-4,0)$.

第 27 期

第 2~3 版综合测试(三)参考答案

一、单项选择题

1.D　**提示**:因为 $r_1>r_2$,但不清楚 r_1 和 r_2 的正负情况,所以不能推出第一组变量比第二组变量相关程度强.

若第一组变量比第二组变量相关程度强,

此时 $|r_1|>|r_2|$,则 $r_1>r_2>0$ 或 $r_1<r_2<0$,所以"$r_1>r_2$"是"第一组变量比第二组变量线性相关程度强"的既不充分也不必要条件.故选 D.

2.B　**提示**:因为向量 $a=(1,-1,-2)$,$b=(1,-3,-3)$,所以 $a+b=(2,-4,-5)$,$a-b=(0,2,1)$,$a\cdot b=1\times1+(-1)\times(-3)+(-2)\times(-3)=1+3+6=10$,$|a|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$.故选 B.

3.B　**提示**:每位同学都有 3 种选法,故 6 位同学共有 3^6 种选法.故选 B.

4.C　**提示**:直线 $ax-y+2a=0$ 可化为 $a(x+2)-y=0$,故直线恒过定点 $(-2,0)$,因为 $(-2)^2+0^2=4<9$,所以点 $(-2,0)$ 在圆 $x^2+y^2=9$ 内,所以该直线与圆相交.故选 C.

5.C　**提示**:x^2 的系数为 $1\times C_8^6\times(-1)^2+a\times C_8^1\times(-1)+1\times C_8^8=21$,解得 $a=1$.故选 C.

6.D　**提示**:由题意知,$|AF_2|=|F_1F_2|=2c$,由双曲线的定义,得 $|AF_1|=2a+2c$,设 $\angle AF_1F_2=\theta(0<\theta<90°)$,则 $\tan\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}$,得 $\cos\theta=\frac{2}{3}$,由余弦定理,得 $|AF_2|^2=|AF_1|^2+|F_1F_2|^2-2|AF_1|\cdot|F_1F_2|\cos\theta$,

则有 $4c^2=(2a+2c)^2+4c^2-2(2a+2c)\times2c\times\frac{2}{3}$,化简得 $3a^2+2ac-c^2=0$,即 $(3a-c)(a+c)=0$,

因为 $a+c\neq0$,所以 $3a-c=0$,所以 $e=\frac{c}{a}=3$.故选 D.

7.C　**提示**:由题意知,4 人去 4 个景点,总事件数为 $4^4=256$,事件 B 的情况数为 $3^3=27$,则事件 B 发生的概率为 $P(B)=\frac{27}{256}$,事件 A 与事件 B 的交事件 AB 为"甲去了九嶷山,另外三人去了另外三个不同的景点",事件 AB 的情况数为 $A_3^3=6$,则事件 AB 发生的概率为 $P(AB)=\frac{6}{256}$,即 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{2}{9}$.故选 C.

8.A　**提示**:由题意知,$\frac{C_3^2C_n^1}{C_{n+3}^3}=\frac{9}{20}$,解得 $n=3$,则 X 的可能取值为 0,1,2,3,

$P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}$,$P(X=1)=\frac{C_3^1C_3^2}{C_6^3}=\frac{9}{20}$,$P(X=2)=\frac{C_3^2C_3^1}{C_6^3}=\frac{9}{20}$,$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}$,

所以 $EX=0\times\frac{1}{20}+1\times\frac{9}{20}+2\times\frac{9}{20}+3\times\frac{1}{20}=\frac{3}{2}$.故选A.

二、多项选择题

9.ABC　**提示**:对于 A,若选 1 男 3 女,有 $C_4^1C_3^3=4$ 种选法,故 A 正确;

对于 B,若选 2 男 2 女,有 $C_4^2C_3^2=18$ 种选法,故 B 正确;

对于 C,若选 3 男 1 女,有 $C_4^3C_3^1=12$ 种选法,故 C 正确;

对于 D,满足题意的选法共有 4+18+12=34 种,故 D 错误.故选 ABC.

10.BD　**提示**:对于 A,$\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,2,1)$,可知不存在实数$\lambda$,使得 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 不共线,故 A 错误;

对于 B,因为 $\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$,所以 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5}$,所以 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5},0\right)$,故 B 正确;

对于 C,因为 $\overrightarrow{BC}=(-3,1,1)$,所以 $\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{-5}{\sqrt{5}\times\sqrt{11}}=-\frac{\sqrt{55}}{11}$,故 C 错误;

对于 D,设平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2x+y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-3x+y+z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$,得 $y=-2$,$z=5$,所以 $\boldsymbol{n}=(1,-2,5)$,即平面 ABC 的一个法向量为 $(1,-2,5)$,故 D 正确.故选 BD.

11.BD　**提示**:对于 A,当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时,$\sin\theta=\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$,此时方程为 $x^2+y^2=\sqrt{2}$,曲线 C 为圆心在原点,半径的平方为 $\sqrt{2}$ 的圆,故 A 错误;

对于 B,当 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 时,$\sin\theta>0>\cos\theta$,曲线 C 为焦点在 x 轴上的双曲线,故 B 正确;

对于 C,当 C 表示焦点在 x 轴上的椭圆时,需 $0<\sin\theta<\cos\theta$,此时 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$,故 C 错误;

对于 D,当 C 表示两条直线时,需 $\sin\theta=0$ 或 $\cos\theta=0$,又 $\theta\in(0,\pi)$,所以 $\theta=\frac{\pi}{2}$,故 D 正确.故选 BD.

12.AC　**提示**:令 $x=1$,得展开式中各项系数的和为 4^n,又二项式系数的和为 2^n,

故 $4^n-2^n=992$,解得 $n=5$,故原式为 $(x^{\frac{2}{3}}+3x^2)^5$,

所以展开式中二项式系数之和为 $2^5=32$,偶数项的二项式系数之和为 16,故 A 正确;

展开式中二项式系数最大的项是第三、四项,故 B 错误;通项 $T_{k+1}=3^kC_5^kx^{\frac{10+4k}{3}}$,$k=0,1,2,3,4,5$,显然 $10+4k=0$ 无自然数解,故展开式无常数项,故 C 正确;通项中,当 $k=2,5$ 时,指数为整数,故有理项为第三项、第六项,故 D 错误.故选 AC.

三、填空题

13.57　**提示**:由表中数据,得 $\bar{x}=\frac{2+3+5+6}{4}=4$,$\bar{y}=\frac{28+31+41+48}{4}=37$,

因为回归方程为 $y=5x+\hat{a}$,所以 $37=5\times4+\hat{a}$,解得 $\hat{a}=17$,

故此模型预报广告费用为 8 万元时销售额为 $5\times8+17=57$(万元).

14.$2x-y-3=0$　**提示**:圆 C:$x^2+y^2-8x=0$ 的圆心 $C(4,0)$,根据圆的性质,可知 $MN\perp CP$,

因为 $k_{CP}=\frac{1-0}{2-4}=-\frac{1}{2}$,所以 $k_{MN}=2$,所以 MN 所在的直线方程为 $y-1=2(x-2)$,即 $2x-y-3=0$.

15.120　**提示**:由 $X\sim N(90,\sigma^2)$,得正态分布曲线的对称轴为 $x=90$,

因为 $P(X<60)=0.1$,所以 $P(X>120)=0.1$,则数学成绩为优秀的人数是 $1200\times0.1=120$.

16.$\frac{3}{5}$　**提示**:设在 200m 比赛中站上领奖台为事件 A,在 100m 比赛中站上领奖台为事件 B,

则 $P(\bar{A})=\frac{3}{10}$,$P(\bar{B})=\frac{1}{2}$,$P(\bar{A}\bar{B})=\frac{1}{10}$,$P(B)=1-P(\bar{B})=\frac{1}{2}$,所以 $P(\bar{A}+\bar{B})=P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A}\bar{B})=\frac{3}{10}+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}=\frac{7}{10}$,所以 $P(AB)=1-P(\bar{A}+\bar{B})=\frac{3}{10}$,所以若该运动员在 100m 比赛中站上领奖台,则他在 200m 比赛中也站上领奖台的概率是 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{5}$.

四、解答题

17.**解**:(1)因为 $B(3,-2)$,$C(-3,0)$,

所以 $k_{BC}=\frac{-2-0}{3-(-3)}=-\frac{1}{3}$,

所以直线 BC 的方程为 $y=-\frac{1}{3}(x+3)$,即 $x+3y+3=0$.

(2)因为 $A(3,8)$,$B(3,-2)$,$C(-3,0)$,所以 BC 的中点为 $D(0,-1)$,

所以 $k_{AD}=\frac{8-(-1)}{3-0}=3$,所以 BC 边上的中线 AD 所在直线的方程为 $y+1=3x$,即 $3x-y-1=0$.

18.**解**:(1)由已知可得 a_2 为展开式中含 x^2 项的系数,由通项 $T_{k+1}=C_6^k1^{6-k}(2x)^k=C_6^k\times2^kx^k$,

得 $a_2=T_3=C_6^2\times2^2=15\times4=60$.

(2)令 $x=0$,则 $a_0=1$.

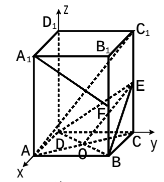
令 $x=1$,则 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=729$,　①

所以 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=729-1=728$.

(3)令 $x=-1$,则 $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6=1$,　②

由①+②,得 $2(a_0+a_2+a_4+a_6)=729+1=730$,所以 $a_0+a_2+a_4+a_6=365$.

19.(1)**证明**:连接 AC 与 BD 交于点 O,连接 OE,如图,



(第 19 题图)

因为四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正四棱柱,所以四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 O 为 AC 的中点,又因为 E 为 CC_1 的中点,所以 $AC_1//O$E,又 $AC_1\not\subset$ 平面 BDE,OE$\subset$ 平面 BDE,所以 $AC_1//$ 平面 BDE.

(2)**解**:以 D 为坐标原点,DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,则 $A_1(1,0,2)$,$F(1,1,1)$,$B(1,1,0)$,$D(0,0,0)$,E$(0,1,1)$,

所以 $\overrightarrow{A_1F}=(0,1,-1)$,$\overrightarrow{BD}=(-1,-1,0)$,$\overrightarrow{BE}=(-1,0,1)$,

设平面 BDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x-y=0,\\ -x+z=0,\end{cases}$

令 $x=1$,得 $y=-1$,$z=1$,则 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$,

设直线 A_1F 与平面 BDE 所成的角为 θ,

则直线 A_1F 与平面 BDE 所成角的正弦值为 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{A_1F},n\rangle|=\frac{|\overrightarrow{A_1F}\cdot n|}{|\overrightarrow{A_1F}||n|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

20.**解**:(1)根据表格数据知,随月份变化,用户的人数在快速增长,所以 $y=ax^2+b$ 更适合描述变量 x 和 y 的变化规律,

易知 $\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i^2}{5}=11$,$\frac{\sum_{i=1}^{5}y_i}{5}\approx13.57$,

所以 $a=\frac{1120.24-5\times11\times13.57}{979-5\times11^2}\approx1$,而 $b=13.57-11\times1=2.57$,则 y 关于 x 的经验回归方程为 $y=x^2+2.57$.

(2)易知 $\chi^2=\frac{300\times(100\times75-50\times75)^2}{150\times150\times175\times125}\approx8.571$,因为 $8.571>6.635$,所以有 99% 的把握认为该地区对适应人工智能带来的职业结构变化的自信程度与年龄有关.

21.**解**:(1)设事件 A 为"抽取的 3 名同学中恰有 2 名同学来自高一",则 $P(A)=\frac{C_7^2C_8^1}{C_{15}^3}=\frac{24}{65}$.

(2)设张同学、王同学答对的题数分别为 Y,Z,

张同学在考试中合格的概率为

$P(Y\geqslant2)=P(Y=2)+P(Y=3)=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}+C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}$,

王同学在考试中合格的概率为

$P(Z\geqslant2)=P(Z=2)+P(Z=3)=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}+C_3^3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{20}{27}$,

由题意得,X 的可能取值为 0,1,2,则 $P(X=0)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{20}{27}\right)=\frac{7}{54}$,$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{20}{27}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{20}{27}=\frac{1}{2}$,$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{20}{27}=\frac{10}{27}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{7}{54}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{10}{27}$

故 $EX=0\times\frac{7}{54}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{10}{27}=\frac{67}{54}$.

22.**解**:(1)设椭圆 E 的半焦距为 c,由题意知,$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$b=1$,结合 $a^2=b^2+c^2$,解得 $a=\sqrt{2}$,所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)由题意知,直线 PQ 的方程为 $y=k(x-1)+1$ $(k\neq0$,且 $k\neq2)$,代入 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$,得

$(1+2k^2)x^2-4k(k-1)x+2k(k-2)=0$,

设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,

则 $x_1+x_2=\frac{4k(k-1)}{1+2k^2}$,$x_1x_2=\frac{2k(k-2)}{1+2k^2}$,所以 $k_{AP}+k_{AQ}=\frac{y_1+1}{x_1}+\frac{y_2+1}{x_2}=\frac{kx_1+2-k}{x_1}+\frac{kx_2+2-k}{x_2}=2k+(2-k)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)=2k+(2-k)\cdot\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=2k+(2-k)\cdot\frac{4k(k-1)}{2k(k-2)}=2k-2(k-1)=2$,

所以直线 AP 与 AQ 的斜率之和为定值 2.