此时“挑战者获胜”,等价于“第一次答题挑战者胜,第二次答题守擂者败”,

因为守擂者和挑战者每次答对问题的概率都是 0.5,所以所求的概率 $P=0.5\times(1-0.5)=0.25$.

(2)不妨设 p 为挑战者获胜的概率,若挑战者获胜,此时 $p=0.5\times(0.5+0.5p)$,解得 $p=\frac{1}{3}$.

(3)设随机变量 X 为挑战者连续挑战 8 人时战胜的守擂者人数,P_1 为此时挑战者获胜的概率;

Y 为挑战者连续挑战 9 人时战胜的守擂者人数,P_2 为此时挑战者获胜的概率,

则 $P_1=P(X\geqslant6)=C_8^6\left(\frac{1}{3}\right)^6\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+C_8^7\left(\frac{1}{3}\right)^7\times\frac{2}{3}+C_8^8\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^8=\frac{129}{3^8}$,

$P_2=P(Y\geqslant7)=C_9^7\left(\frac{1}{3}\right)^7\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+C_9^8\left(\frac{1}{3}\right)^8\times\frac{2}{3}+C_9^9\left(\frac{1}{3}\right)^9=\frac{163}{3^9}$,

易知 $P_1>P_2$,故再增加 1 位守擂者时,该挑战者胜利的概率没有增加.

第 32 期

第 2~3 版综合测试(八)参考答案

一、单项选择题

1.B　提示:因为圆 C 与圆 O 外切,所以$\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=1+\sqrt{25-m}$,解得 $m=9$,故选 B.

2.B　提示:因为 $b=1-0.2-0.5=0.3$,由 $EX=4\times0.5+a\times0.2+9\times0.3=5.9$,解得 $a=6$,故选 B.

3.D　提示:依题意,此项任务不能完成的概率为$\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{6}$,则此项任务被甲、乙两人完成的概率为 $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$,故选 D.

4.B　提示:由题意得,$a\cdot b=(\lambda,2,3)\cdot(-1,2,-3)=-\lambda+4-9=0$,解得$\lambda=-5$,

所以$a+b=(-5,2,3)+(-1,2,-3)=(-6,4,0)$,所以$|a+b|=\sqrt{(-6)^2+4^2}=2\sqrt{13}$.故选B.

5.D　提示:由 $y=e^{1+at}$ 两边取自然对数得 $\ln y=1+at$,令 $u=\ln y$,则 $u=1+at$,

所以$\bar{u}=\frac{1}{3}\times(\ln y_1+\ln y_2+\ln y_3)=2$,$\bar{t}=\frac{1}{3}\times(1+2+3)=2$,因为回归直线必过样本点的中心,所以 $2=2a+1$,解得 $a=\frac{1}{2}$,

所以 $u=1+\frac{t}{2}$,则 $y=e^{1+\frac{1}{2}t}$,当 $t=7$ 时,$y=e^{4.5}$.故选 D.

6.A　提示:在$(x+2+m)^9=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+\cdots+a_9(x+1)^9$ 中,令 $x=-2$,得 $a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_8-a_9=m^9$,即$(a_0+a_2+\cdots+a_8)-(a_1+a_3+\cdots+a_9)=m^9$.令 $x=0$,得 $a_0+a_2+\cdots+a_8+a_1+a_3+\cdots+a_9=(2+m)^9$.因为$(a_0+a_2+\cdots+a_8)^2-(a_1+a_3+\cdots+a_9)^2=3^9$,所以$(a_0+a_2+\cdots+a_8+a_1+a_3+\cdots+a_9)[(a_0+a_2+\cdots+a_8)-(a_1+a_3+\cdots+a_9)]=3^9$,所以$(2+m)^9\cdot m^9=3^9$,整理得 $2m+m^2=3$,解得 $m=1$,或 $m=-3$.故选 A.

7.B　提示:设 $A(x,y)$,因为$|AB|^2+|AO|^2=16$,$B(4,0)$,所以$(x-4)^2+y^2+x^2+y^2=16$,即$(x-2)^2+y^2=4$,又点 A 在直线 l 上,所以直线 l 与圆$(x-2)^2+y^2=4$ 有公共点,所以圆心$(2,0)$到直线 l 的距离为$\frac{|6+m|}{5}\leqslant2$,解得$-16\leqslant m\leqslant4$,故选 B.

8.C　提示:根据 A,B,C 事件的互斥性可得,每一次试验中,事件 C 发生的概率为$\frac{1}{5}$,

设事件 A,B,C 发生的次数分别为随机变量 X,Y,Z,则 $X\sim B\left(n,\frac{2}{5}\right)$,$Y\sim B\left(n,\frac{2}{5}\right)$,$Z\sim B\left(n,\frac{1}{5}\right)$,

故事件 A,B,C 发生次数的方差分别为$\frac{6}{25}n$,$\frac{6}{25}n$,$\frac{4}{25}n$,即事件 A,B,C 发生次数的方差比为 3:3:2.故选C.

二、多项选择题

9.AC　提示:对于 A,点$(-2,1)$满足直线方程,且横纵截距均为 0,则 A 正确;对于 B,点$(-2,1)$满足直线方程,且横纵截距均为-1,则 B 错误;对于 C,点$(-2,1)$满足直线方程,且横截距为-3,纵截距为 3,则 C 正确;对于 D,点$(-2,1)$不满足直线方程,则 D 错误.故选 AC.

10.AC　提示:对于 A,根据题意,$\sigma^2=25$,所以 $\sigma=5$,故 A 正确;对于 B,$P(495<X\leqslant505)=P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)\approx0.6826$,故 B 错误;对于 C,因为 $P(490<X\leqslant505)=P(490<X\leqslant500)+P(500<X\leqslant505)=\frac{0.9544}{2}+\frac{0.6826}{2}=0.8185$,所以随机抽取 10 000 袋这种食品,袋装质量在区间$(490,505]$的约 8185 袋,故 C 正确;对于 D,$P(X\leqslant485)=P(X\leqslant\mu-3\sigma)=\frac{1-0.9974}{2}=0.0013$,但是根据概率的意义,袋装质量小于 485g 的有可能多于 13 袋,故 D 错误.故选 AC.

11.AD　提示:对于 A,设该班级每个小组有 n 名女生,因为抽取的 6 名学生中至少有 1 名男生的概率为$\frac{728}{729}$,所以抽取的 6 名学生中没有男生,即抽取的 6 名学生全是女生的概率为 $1-\frac{728}{729}=\frac{1}{729}$,所以$\left(\frac{n}{n+4}\right)^6=\frac{1}{729}$,解得 $n=2$,所以每个小组有 4 名男生、2 名女生,共 6 名学生,所以该班级共有 36 名学生,故 A 正确;对于 B,易知第 1 个小组的男生甲被抽去参加社区服务的概率为$\frac{1}{6}$,故 B 错误;

对于 C,每组男生被抽取的概率为$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$,女生被抽取的概率为$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,则抽取的6 名学生中男、女生人数相同的概率是 $C_6^3\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{160}{729}$,故C 错误;对于 D,设抽取的 6 名学生中女生人数为 X,则 $X\sim B\left(6,\frac{1}{3}\right)$,所以$DX=6\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$,故 D 正确.故选 AD.

12.ABD　提示:由题意,得$|F_1F_2|=2c=4$,则 $c=2$,设 $A(x_1,y_1)$,$B(-x_1,-y_1)$,$P(x_0,y_0)$,则$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$,$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$,两式作差,得$\frac{x_1^2-x_0^2}{y_1^2-y_0^2}=\frac{a^2}{b^2}$,因为 $k_{PA}\cdot k_{PB}=1$,即$\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{y_0+y_1}{x_0+x_1}=\frac{y_1^2-y_0^2}{x_1^2-x_0^2}=\frac{b^2}{a^2}=1$,所以 $a=b$,又 $a^2+b^2=c^2=4$,所以 $a=b=\sqrt{2}$,故 A 正确;离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$,故 B 正确;因为双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm x$,由题意,得$-1<k_{AB}<1$,所以直线 AB 倾斜角的取值范围为$\left[0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$,故 C 错误;若$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$,则$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$,$|PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2=16$,由双曲线的定义,得$||PF_1|-|PF_2||=2a=2\sqrt{2}$,两边平方,得$|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|=8$,即 $16-2|PF_1|\cdot|PF_2|=8$,所以$|PF_1|\cdot|PF_2|=4$,所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=2$,故 D 正确.故选 ABD.

三、填空题

13.1　提示:由 $l_1/\!/l_2$,得$\frac{3}{6}=\frac{m}{3-m}\neq\frac{-2}{1}$,解得 $m=1$,经检验,符合题意.

14.6%　提示:设事件 A_1 为“甲厂中的配件”,则 $P(A_1)=0.4$,事件 A_2 为“乙厂中的配件”,则 $P(A_2)=0.6$,事件 B 为“该配件为次品”,则 $P(B|A_1)=0.09$,$P(B|A_2)=0.04$,所以 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=0.4\times0.09+0.6\times0.04=0.06=6\%$.

15.2;4　提示:抛物线的焦点为 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$,准线为 $x=-\frac{p}{2}$,设点 $M(x_0,y_0)$,则 $N\left(-\frac{p}{2},y_0\right)$,线段 FN 的中点为$\left(0,\frac{y_0}{2}\right)$,由抛物线定义知$|MN|=|MF|$,即点 M 在线段 FN 的垂直平分线上,因此$\begin{cases}-\sqrt{3}\cdot\frac{y_0}{2}+3=0,\\x_0-\sqrt{3}y_0+3=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x_0=3,\\y_0=2\sqrt{3},\end{cases}$而 $y_0^2=2px_0$,则有 $p=2$,$|MF|=x_0-\left(-\frac{p}{2}\right)=4$.

16.$\frac{3}{4}$　提示:由题意得,因为 $SA=SD$,P 为 AD 中点,所以 $SP\perp AD$,又 $SP\perp AB$,$AB\cap AD=A$,$AB\subset$平面 ABCD,$AD\subset$平面 ABCD,所以 $SP\perp$平面 ABCD,

以点 P 为原点,$\overrightarrow{PA}$,$\overrightarrow{PS}$ 的方向分别为 x 轴,z 轴的正方向,建立空间直角坐标系,

则 $P(0,0,0)$,$A(1,0,0)$,$B(1,1,0)$,$D(-1,0,0)$,$S(0,0,\sqrt{3})$,故$\overrightarrow{BA}=(0,-1,0)$,$\overrightarrow{AS}=(-1,0,\sqrt{3})$,设$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AS}=(-\lambda,0,\sqrt{3}\lambda)(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,所以$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}=(-\lambda,-1,\sqrt{3}\lambda)$,

又$\overrightarrow{SB}=(1,1,-\sqrt{3})$,$\overrightarrow{SD}=(-1,0,-\sqrt{3})$,设平面 SBD 的法向量为 $m=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{SB}=x+y-\sqrt{3}z=0,\\m\cdot\overrightarrow{SD}=-x-\sqrt{3}z=0,\end{cases}$令 $z=1$,则 $x=-\sqrt{3}$,$y=2\sqrt{3}$,所以 $m=(-\sqrt{3},2\sqrt{3},1)$,

设 BM 与平面 SBD 所成角为 α,所以 $\sin\alpha=|\cos\langle\overrightarrow{BM},m\rangle|=\frac{|\overrightarrow{BM}\cdot m|}{|\overrightarrow{BM}||m|}=\frac{|\sqrt{3}\lambda-2\sqrt{3}+\sqrt{3}\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1+3\lambda^2}\times\sqrt{3+12+1}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$,解得 $\lambda=\frac{3}{8}$,又 $AS=2$,所以 $AM=\frac{3}{4}$.

四、解答题

17.解:(1)因为抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$的准线 $x=-\frac{p}{2}$过 $M(-1,0)$,所以$-\frac{p}{2}=-1$,则 $p=2$,故抛物线方程为 $y^2=4x$.

(2)设切线方程为 $x=my-1$,与抛物线 C 的方程联立有 $y^2-4my+4=0$,

所以 $\Delta=(4m)^2-16=0$,故 $m=\pm1$,故直线 l 的方程为 $x-y+1=0$ 或 $x+y+1=0$.

18.解:(1)易知$\bar{t}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$,

所以 $\sum_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})^2=(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2=10$,

则 $r=\frac{\sum_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})(\omega_i-\bar{\omega})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(\omega_i-\bar{\omega})^2}}=\frac{27.2}{\sqrt{10\times76.9}}\approx\frac{27.2}{27.7}\approx0.98$.

(2)$\bar{x}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})=0$,$\bar{y}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(\omega_i-\bar{\omega})=0$,所以$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})(\omega_i-\bar{\omega})}{\sum_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})^2}=\frac{27.2}{10}=2.72$,

所以 y 关于 x 的经验回归方程为 $y=2.72x$,因为$\bar{\omega}=\frac{\sum_{i=1}^{5}\omega_i}{5}=\frac{60.8}{5}=12.16$,所以当 $t=7$ 时,$x=7-3=4$,此时 $\omega=y+\bar{\omega}=2.72\times4+12.16=23.04$,所以预测 2024 年移动物联网连接数为 23.04 亿户.

19.(1)证明:以 BC 为 x 轴,BA 为 y 轴,BB_1 为 z 轴,建立空间直角坐标系,则 $E(0,2-a,0)$,$F(a,0,0)$,$A_1(0,2,2)$,$C_1(2,0,2)$,所以$\overrightarrow{A_1F}=(a,-2,-2)$,$\overrightarrow{C_1E}=(-2,2-a,-2)$,所以$\overrightarrow{A_1F}\cdot\overrightarrow{C_1E}=(a,-2,-2)\cdot(-2,2-a,-2)=0$,故$\overrightarrow{A_1F}\perp\overrightarrow{C_1E}$,所以 $A_1F\perp C_1E$.

(2)解:当 $a=1$ 时,$E(0,1,0)$,$F(1,0,0)$,$A(0,2,0)$,$C_1(2,0,2)$,则$\overrightarrow{EF}=(1,-1,0)$,$\overrightarrow{FC_1}=(1,0,2)$,$\overrightarrow{AE}=(0,-1,0)$,

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面 C_1EF 的法向量,

则由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=x-y=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FC_1}=x+2z=0,\end{cases}$取 $x=2$,得 $\boldsymbol{n}=(2,2,-1)$,设点 A 到平面 C_1EF 的距离为 d,则 $d=\frac{|\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|-2|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{2}{3}$,

所以点 A 到平面 C_1EF 的距离为$\frac{2}{3}$.

20.解:(1)根据题意可得,ξ 的所有可能取值为24,25,26,27,28,29,30.

$P(\xi=24)=\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{100}$,$P(\xi=25)=\frac{1}{10}\times\frac{3}{10}\times2=\frac{3}{50}$,

$P(\xi=26)=\frac{1}{10}\times\frac{2}{5}\times2+\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{17}{100}$,

$P(\xi=27)=\frac{1}{10}\times\frac{1}{5}\times2+\frac{3}{10}\times\frac{2}{5}\times2=\frac{7}{25}$,

$P(\xi=28)=\frac{3}{10}\times\frac{1}{5}\times2+\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{7}{25}$,$P(\xi=29)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}\times2=\frac{4}{25}$,$P(\xi=30)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$.

所以 ξ 的分布列如下:

ξ	24	25	26	27	28	29	30
P	$\frac{1}{100}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{17}{100}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{25}$

$E\xi=24\times\frac{1}{100}+25\times\frac{3}{50}+26\times\frac{17}{100}+27\times\frac{7}{25}+28\times\frac{7}{25}+29\times\frac{4}{25}+30\times\frac{1}{25}=27.4$.

(2)当每两天生产配送 27 百份时,利润为$(24\times2-3\times6)\times\frac{1}{100}+(25\times2-2\times6)\times\frac{3}{50}+(26\times2-1\times6)\times\frac{17}{100}+27\times2\times\left(1-\frac{1}{100}-\frac{3}{50}-\frac{17}{100}\right)=51.44$(百元).

当每两天生产配送 28 百份时,利润为$(24\times2-4\times6)\times\frac{1}{100}+(25\times2-3\times6)\times\frac{3}{50}+(26\times2-2\times6)\times\frac{17}{100}+(27\times2-1\times6)\times\frac{7}{25}+28\times2\times\left(\frac{7}{25}+\frac{4}{25}+\frac{1}{25}\right)=49.28$(百元).

由于 51.44>49.28,所以选择每两天生产配送 27 百份.

21.解:(1)由题意完成列联表如下:

	不优秀	优秀	总计
A 校	20	80	100
B 校	40	60	100
总计	60	140	200

所以$\chi^2=\frac{200\times(20\times60-40\times80)^2}{60\times140\times100\times100}\approx9.524>6.635$,

所以有 99%的把握认为复习方法与评定结果有关.

(2)按分层随机抽样的方法从成绩在$[0,90)$和$[90,110)$内的学生中随机抽取 10 人,

则成绩在$[0,90)$内的人数为 $10\times\frac{6}{20}=3$,成绩在$[90,100)$内的人数为 7,故 X 的所有可能取值为 0,1,2,3,

$P(X=0)=\frac{C_3^0C_7^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{24}$,$P(X=1)=\frac{C_3^1C_7^2}{C_{10}^3}=\frac{21}{40}$,$P(X=2)=\frac{C_3^2C_7^1}{C_{10}^3}=\frac{7}{40}$,$P(X=3)=\frac{C_3^3C_7^0}{C_{10}^3}=\frac{1}{120}$.

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$

$EX=0\times\frac{7}{24}+1\times\frac{21}{40}+2\times\frac{7}{40}+3\times\frac{1}{120}=\frac{9}{10}$.

22.(1)解:因为 $AF\perp AB$,所以$|AF|=2$,$|BF|=4$,$|AB|=2\sqrt{3}$.设双曲线 C 的焦距为 $2c$,由双曲线的对称性,知$|AB|=2c=2\sqrt{3}$,得$c=\sqrt{3}$.设双曲线 C 的右焦点为 F',则$|BF|-|AF|=|BF|-|BF'|=2a=2$,得 $a=1$,

则 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{2}$,故双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

(2)证明:由已知得 $M(1,0)$,设直线 MP 与 MQ 的斜率分别为 k_1,k_2,

①当直线 PQ 不垂直于 x 轴时,设直线 PQ 的斜率为 k,PQ 的方程为 $y=kx+m$,$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,

由$\begin{cases}y=kx+m,\\x^2-\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$得$(k^2-2)x^2+2kmx+m^2+2=0$,

则 $x_1+x_2=\frac{-2km}{k^2-2}$,$x_1x_2=\frac{m^2+2}{k^2-2}$,

那么 $k_1k_2=\frac{y_1y_2}{(x_1-1)(x_2-1)}=\frac{(kx_1+m)(kx_2+m)}{(x_1-1)(x_2-1)}$

$=\frac{k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}=\frac{\frac{k^2(m^2+2)}{k^2-2}-\frac{2k^2m^2}{k^2-2}+m^2}{\frac{m^2+2}{k^2-2}+\frac{2km}{k^2-2}+1}$

$=\frac{2(k+m)(k-m)}{(k+m)^2}=\frac{2(k-m)}{k+m}=-\frac{2}{3}$,得 $m=2k$,符合题意.

所以直线 PQ 的方程为 $y=k(x+2)$,恒过定点$(-2,0)$.

②当直线 PQ 垂直于 x 轴时,设 $P(t,h)$,因为 P 是 C 上的点,所以 $h^2=2t^2-2$,

则 $k_1k_2=\frac{-h^2}{(t-1)^2}=\frac{2-2t^2}{(t-1)^2}=\frac{2(1+t)}{1-t}=-\frac{2}{3}$,解得 $t=-2$,故直线 PQ 过点$(-2,0)$.

综上,直线 PQ 恒过定点$(-2,0)$.

扫码免费下载习题讲解 ppt

第 29 期

第 2~3 版综合测试(五)参考答案

一、单项选择题

1.D　提示:因为直线 l 的一个方向向量为$\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,所以直线 l 的斜率 $k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以直线 l 的倾斜角为 150°.故选 D.

2.A　提示:事件 E 为“第一枚硬币正面朝上”,事件 F 为“第二枚硬币反面朝上”,可知两事件互不影响,即 E 与 F 相互独立,故 A 正确;因为事件 E 与事件 F 能同时发生,所以不为互斥事件,故 B 错误;显然事件 E 和事件 F 不相等,故 C 错误;因为 $P(E)=\frac{1}{2}$,$P(F)=\frac{1}{2}$,所以 $P(E\cup F)=1-P(\bar{E})P(\bar{F})=1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$,故 D 错误.故选 A.

3.B　提示:由 $P(A)=0.5$,$P(B|A)=0.3$,得 $P(AB)=P(B|A)\cdot P(A)=0.15$,所以 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.15}{0.4}=0.375$,故选 B.

4.B　提示:因为 $P(\xi<-1)=0.5$,所以由正态曲线的对称性可知 $\mu=-1$,又 $\sigma=1$,所以 $\mu-\sigma=-2$,$\mu+\sigma=0$,$\mu-2\sigma=-3$,$\mu+2\sigma=1$,

所以 $P(0<\xi\leqslant1)=\frac{1}{2}[P(-3<\xi\leqslant1)-P(-2<\xi\leqslant0)]\approx\frac{0.9544-0.6826}{2}=0.1359$,故选 B.

5.C　提示:对于①②③,两两相邻,依次用不同颜色涂,共有 4×3×2=24 种涂色方法;对于④,与②③相邻,但与①相隔,此时可用剩下的一种颜色或者与①同色,共 2 种涂色方法,则由分步乘法计数原理,得共有 24×2=48 种不同的涂色方法.故选 C.

6.C　提示:先安排甲、乙以外的 4 个人,然后插空安排甲、乙两人,所以不同的传递方案共有 $A_4^4A_5^2=480$ 种.故选 C.

7.D　提示:依题意,抛物线 C 的方程为 $y^2=12x$,显然直线 l 不垂直于 y 轴,设其方程为 $x=ky+3$,由$\begin{cases}x=ky+3,\\y^2=12x,\end{cases}$消去 x,得 $y^2-12ky-36=0$.设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=12k$,$y_1y_2=-36$,而直线 l 的斜率为正,且$\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{FB}$,即$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$,有 $y_1>0$,$y_2<0$,即有 $y_1=-3y_2$,则 $y_2^2=12$,解得 $y_2=-2\sqrt{3}$,因此 $12k=-2y_2=4\sqrt{3}$,解得 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以直线 l 的方程为 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}y+3$,即$\sqrt{3}x-y-3\sqrt{3}=0$,故选 D.

8.A　提示:以 A 为坐标原点,AD,AB,AP 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,由二面角 $Q-PD-A$ 的大小为 30°,可知 Q 的轨迹是过点 D 的一条直线,又 Q 是四边形 $ABCD$ 内部一点(包括边界),则 Q 的轨迹是过点 D 的一条线段,设 Q 的轨迹与 y 轴的交点坐标为 $G(0,b,0)(b>0)$,由题意可知 $A(0,0,0)$,$D(2,0,0)$,$P(0,0,1)$,所以$\overrightarrow{DP}=(-2,0,1)$,$\overrightarrow{DG}=(-2,b,0)$,$\overrightarrow{AD}=(2,0,0)$,易知平面 APD 的一个法向量为 $n_1=(0,1,0)$,设平面 PDG 的法向量为 $n_2=(x_2,y_2,z_2)$,则$\begin{cases}n_2\cdot\overrightarrow{DP}=0,\\n_2\cdot\overrightarrow{DG}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-2x_2+z_2=0,\\-2x_2+by_2=0,\end{cases}$令 $z_2=2$,得 $x_2=1$,$y_2=\frac{2}{b}$,所以 $n_2=\left(1,\frac{2}{b},2\right)$是平面 PDG 的一个法向量,则二面角 $G-PD-A$ 的余弦值为$|\cos\langle n_1,n_2\rangle|=\frac{|n_1\cdot n_2|}{|n_1|\cdot|n_2|}=\frac{\frac{2}{b}}{\sqrt{5+\frac{4}{b^2}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,解得 $b=\frac{2\sqrt{15}}{15}$或 $b=-\frac{2\sqrt{15}}{15}$(舍去),因为 Q 在 DG 上运动,$0<S_{\triangle ADQ}\leqslant S_{\triangle ADG}$,又 $S_{\triangle ADG}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot b=b=\frac{2\sqrt{15}}{15}$,所以$\triangle ADQ$ 面积的取值范围为$\left(0,\frac{2\sqrt{15}}{15}\right]$,故选 A.

二、多项选择题

9.BCD　提示:对于 A,取 $x=1$,得所有项的系数和为$(-1)^8=1$,故 A 错误;

对于 B,展开式的二项式系数和为 $2^8=256$,故 B 正确;

对于 C,由 $T_{k+1}=C_8^k(x^2)^{8-k}(-2x^{-1})^k=(-2)^kC_8^kx^{16-3k}(k=0,1,2,\cdots,8)$,当 $k=4$ 时,可知第 5 项为 $1120x^4$,故 C 正确;对于 D,由 C 的结论,可知 $16-3k\neq0$ 恒成立,故 D 正确.故选 BCD.

10.AB　提示:对于 A,C,圆 C_1 的标准方程为$(x-5)^2+(y-5)^2=50$,圆心为$(5,5)$,半径为 $r_1=5\sqrt{2}$,圆 C_2 的标准方程为$(x-3)^2+(y+1)^2=50$,圆心为$(3,-1)$,半径为 $r_2=5\sqrt{2}$,所以两圆心的距离 $d=\sqrt{(5-3)^2+[5-(-1)]^2}=2\sqrt{10}$,所以 $0<d<r_1+r_2$,所以两圆相交,故 A 正确,C 错误;

对于 B,D,设两圆公共弦长为 L,则$\left(\frac{L}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2=50$,所以 $L=4\sqrt{10}$,故 B 正确,因为两圆半径相等,所以公切线长等于圆心距 d,故 D 错误.故选 AB.

11.BCD　提示:对于 A,易知 $OF/\!/PD$,$PD\cap PA=P$,所以 OF 不会平行于 AP,故 A 错误;

对于 B,以 O 为坐标原点,OA 为 x 轴,OB 为 y 轴,OP 为 z 轴,建立空间直角坐标系,则 $B(0,\sqrt{2},0)$,$A(\sqrt{2},0,0)$,$P(0,0,\sqrt{2})$,$E\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$D(0,-\sqrt{2},0)$,$\overrightarrow{BE}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$\overrightarrow{PD}=(0,-\sqrt{2},-\sqrt{2})$,所以直线 BE 与 PD 夹角的余弦值为$|\cos\langle\overrightarrow{BE},\overrightarrow{PD}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{PD}|}{|\overrightarrow{BE}|\cdot|\overrightarrow{PD}|}=\frac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$,故 B 正确;

对于 C,由题意得 $EF/\!/AB/\!/CD$.因为 $EF\subset$平面 OEF,$CD\not\subset$平面 OEF,所以 $CD/\!/$平面 OEF,同理可得 $PD/\!/$平面 OEF,又因为 $CD,PD\subset$平面 PDC,$CD\cap PD=D$,所以平面 $OEF/\!/$平面 PDC,故 C 正确;

对于D,由B选项知,$C(-\sqrt{2},0,0)$,$\overrightarrow{PB}=(0,\sqrt{2},-\sqrt{2})$,$\overrightarrow{PC}=(-\sqrt{2},0,-\sqrt{2})$,$\overrightarrow{PD}=(0,-\sqrt{2},-\sqrt{2})$,设平面 PBC 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=\sqrt{2}y-\sqrt{2}z=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=-\sqrt{2}x-\sqrt{2}z=0,\end{cases}$取 $x=1$,得 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$,设直线 PD 与平面 PBC 所成角为 θ,则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PD},n\rangle|=\frac{|\overrightarrow{PD}\cdot n|}{|\overrightarrow{PD}|\cdot|n|}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,所以直线与平面 PBC 所成角的余弦值为 $\cos\theta=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,故 D 正确.故选 BCD.

12.ACD　提示:对于 A,ξ 的可能取值为 0,1,2,3,$P(\xi=0)=\frac{C_4^3}{C_8^3}=\frac{1}{14}$,$P(\xi=1)=\frac{C_4^1C_4^2}{C_8^3}=\frac{3}{7}$,$P(\xi=2)=\frac{C_4^2C_4^1}{C_8^3}=\frac{3}{7}$,$P(\xi=3)=\frac{C_4^3}{C_8^3}=\frac{1}{14}$,则 $E\xi=0\times\frac{1}{14}+1\times\frac{3}{7}+2\times\frac{3}{7}+3\times\frac{1}{14}=\frac{3}{2}$,故 A 正确;

对于 B,η 的可能取值为 0,1,2,3,取球一次取到黑球的概率为$\frac{3}{8}$,因取球一次有取到黑球和没取到黑球两个结果,因此,$\eta\sim B\left(3,\frac{3}{8}\right)$,$E\eta=\frac{9}{8}$,故 B 错误;

对于 C,X 的可能取值为 1,2,3,$P(X=1)=\frac{C_4^3+C_3^3}{C_8^3}=\frac{5}{56}$,$P(X=3)=\frac{C_4^1\cdot C_3^1}{C_8^3}=\frac{3}{14}$,$P(X=2)=1-P(X=1)-P(X=3)=\frac{39}{56}$,则 $EX=1\times\frac{5}{56}+2\times\frac{39}{56}+3\times\frac{3}{14}=\frac{17}{8}$,故 C 正确;

对于 D,Y 的可能取值为 0,1,2,3.因为 Y=0 对应的事件为:红或白红,所以 $P(Y=0)=\frac{4}{8}+\frac{1}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{4}{7}$.因为 Y=1 对应的事件为:黑红或黑白红或白黑红,所以 $P(Y=1)=\frac{3}{8}\times\frac{4}{7}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{7}\times\frac{4}{6}+\frac{1}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{7}$.因为 Y=2 对应的事件为:黑黑红或黑黑白红或白黑黑红或黑白黑红,所以 $P(Y=2)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{4}{6}+\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{35}$,所以 $P(Y=3)=1-P(Y=0)-P(Y=1)-P(Y=2)=1-\frac{4}{7}-\frac{2}{7}-\frac{4}{35}=\frac{1}{35}$,则 $EY=0\times\frac{4}{7}+1\times\frac{2}{7}+2\times\frac{4}{35}+3\times\frac{1}{35}=\frac{3}{5}$,故 D 正确.故选 ACD.

三、填空题

13.210　提示:$\left(x-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^{10}$展开式的通项为 $T_{r+1}=C_{10}^r\cdot x^{10-r}\cdot\left(-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^r=(-1)^rC_{10}^rx^{10-\frac{5r}{2}}$,因为 $r\in N$,$r\leqslant10$,由 $10-\frac{5r}{2}=0$,得 $r=4$,所以常数项为 $T_5=(-1)^4C_{10}^4=210$.

14.15　提示:以 E 为坐标原点,EC,EB 所在直线分别为 x 轴,y 轴,建立空间直角坐标系,则 $E(0,0,0)$,$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)$,$A_1\left(0,-\frac{1}{2},2\right)$,设 $F\left(0,\frac{1}{2},\lambda\right)$.由 $A_1C\perp EF$,知$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{EF}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},-2\right)\cdot\left(0,\frac{1}{2},\lambda\right)=\frac{1}{4}-2\lambda=0$,解得$\lambda=\frac{1}{8}$,故$\frac{B_1F}{FB}=\frac{2-\frac{1}{8}}{\frac{1}{8}}=15$.

15.$\frac{13}{27}$　提示:根据题意,第 4 次由甲射击分为 4 种情况:甲连续射击 3 次且都击中;第 1 次甲射击击中,但第 2 次没有击中,第 3 次由乙射击没有击中;第 1 次甲射击没有击中,且乙射击第 2 次击中,但第 3 次没有击中;第 1 次甲没有击中,且乙射击第 2 次没有击中,第 3 次甲射击击中,所以所求的概率为 $P=\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{13}{27}$.

16.2;$\left(\frac{3\sqrt{3}}{4},+\infty\right)$　提示:设双曲线 C 的右焦点为 $F_2(2,0)$,则$|PF_1|=\sqrt{\left(-\frac{5}{4}+2\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{3}{2}$,$|PF_2|=\sqrt{\left(-\frac{5}{4}-2\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{7}{2}$.因点 P 在双曲线 C 上,则由双曲线定义得 $2a=|PF_2|-|PF_1|=2$,即 $a=1$.又 $c=2$,所以双曲线的离心率为 $e=\frac{c}{a}=2$.因为直线 PF_1 的斜率 $k_{PF_1}=\sqrt{3}$,而$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$,于是得直线 PF_1 与双曲线 C 在第一、三象限的渐近线平行,则这条渐近线与直线 PF_1:$\sqrt{3}x-y+2\sqrt{3}=0$ 的距离 $d=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=\sqrt{3}$,显然双曲线右支上的点 Q 到直线 PF_1 距离 $h>d=\sqrt{3}$,于是得 $S_{\triangle PQF_1}=\frac{1}{2}\cdot|PF_1|\cdot h>\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$,所以$\triangle PQF_1$ 面积的取值范围是$\left(\frac{3\sqrt{3}}{4},+\infty\right)$.

四、解答题

17.解:(1)因为直线 l 经过两点 $P(1,0)$,$Q(0,-1)$,所以直线 l 的方程为 $y+1=\frac{0-(-1)}{1-0}(x-0)$,即 $y=x-1$.

(2)设圆心 C 到直线 l 的距离为 d,因为圆心 $C(1,1)$,半径 $r=2$,所以 $d=\frac{|1-1-1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以弦长$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{14}$.

18.解:(1)由题意得$\frac{x}{100}=0.45$,解得 $x=45$,$y=100-35-45-10=10$.

补充完整的列联表,如下:

	非常喜欢	喜欢	合计
A	35	10	45
B	45	10	55
合计	80	20	100

由列联表,得$\chi^2=\frac{100\times(35\times10-45\times10)^2}{45\times55\times80\times20}\approx0.25$,因为 0.25<2.706,所以没有 90%的把握认为观众对节目的喜爱程度与地区有关.

(2)从 A 地区随机抽取 1 人,抽到的观众的喜爱程度为“非常喜欢”的概率为$\frac{35}{45}=\frac{7}{9}$.

随机变量 X 的所有可能取值为 0,1,2,随机变量 X 服从二项分布 $X\sim B\left(2,\frac{7}{9}\right)$,

则 $P(X=0)=C_2^0\cdot\left(1-\frac{7}{9}\right)^2=\frac{4}{81}$,$P(X=1)=C_2^1\cdot\frac{2}{9}\times\frac{7}{9}=\frac{28}{81}$,$P(X=2)=C_2^2\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^2=\frac{49}{81}$,

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{4}{81}$	$\frac{28}{81}$	$\frac{49}{81}$

所以 $EX=np=2\times\frac{7}{9}=\frac{14}{9}$.

19.(1)证明:以 A 为坐标原点,AD,AB,AP 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,则 $A(0,0,0)$,$B(0,2,0)$,$C(2,2,0)$,$D(1,0,0)$,$P(0,0,2)$,$M(0,1,1)$,则$\overrightarrow{AM}=(0,1,1)$,$\overrightarrow{PD}=(1,0,-2)$,$\overrightarrow{CD}=(-1,-2,0)$,设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}=x-2z=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=-x-2y=0,\end{cases}$令 $z=1$,则 $x=2$,$y=-1$,则平面 PCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-1,1)$,所以 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0-1+1=0$,所以 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AM}$,因为 $AM\not\subset$平面 PCD,所以 $AM/\!/$平面 PCD.

(2)解:由(1)得 $N\left(\frac{3}{2},1,0\right)$,$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{3}{2},0,-1\right)$.设直线 MN 与平面 PCD 所成角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{MN},n\rangle|=\frac{|\overrightarrow{MN}\cdot n|}{|n|\cdot|\overrightarrow{MN}|}$

$=\frac{|3-1|}{\sqrt{4+1+1}\times\sqrt{\frac{9}{4}+0+1}}=\frac{2\sqrt{78}}{39}$,

所以直线 MN 与平面 PCD 所成角的正弦值为$\frac{2\sqrt{78}}{39}$.

20.解:(1)$\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$,$\bar{y}=\frac{5+6+7+8+10}{5}=7.2$,

所以 $r=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{12}{2\sqrt{37}}\approx\frac{6}{6.08}\approx0.99$.

因为 y 与 x 的相关系数近似为 0.99,说明 y 与 x 的线性相关程度相当高,可以用一元线性回归模型拟合 y 与 x 的关系.

(2)$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{12}{10}=1.2$,所以$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=7.2-1.2\times3=3.6$,所以线性回归方程为 $y=1.2x+3.6$.易知 2024 年的年份代号为 7,

当 $x=7$ 时,$y=1.2\times7+3.6=12$,所以 2024 年该地区投入改造农村厕所的费用约为 120 万元.

21.(1)证明:因为 $AB=2$,$BC=1$,$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$,

由余弦定理,得 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\frac{\pi}{3}}=\sqrt{4+1-2\times2\times1\times\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$,

所以 $AB^2=AC^2+BC^2$,所以 $CA\perp CB$,以 C 点为坐标原点,CB,CA 所在直线分别为 x 轴,y 轴,经过 C 点平行于AP 的直线为 z 轴,建立空间直角坐标系,则 $C(0,0,0)$,$A(0,\sqrt{3},0)$,$B(1,0,0)$,$P(0,\sqrt{3},\sqrt{6})$,$E\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$,$D\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$,$F\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$,所以$\overrightarrow{AE}=\left(0,-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$,$\overrightarrow{CP}=(0,\sqrt{3},\sqrt{6})$,$\overrightarrow{CB}=(1,0,0)$,因为

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CP}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}\times\sqrt{6}=0$，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，

所以 $AE\perp CP$，$AE\perp CB$，又因为 $CP\cap CB=C$，所以 $AE\perp$ 平面 PBC.

(2)解：$\overrightarrow{AD}=\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，$\overrightarrow{DF}=\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$，$\overrightarrow{BD}=\left(-1,\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，

设平面 ADF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{DF}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-\frac{\sqrt{3}}{3}y+\frac{2\sqrt{6}}{3}z=0,\\ \frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{6}y-\frac{\sqrt{6}}{6}z=0,\end{cases}$ 令 $z=\sqrt{2}$，

则 $x=2\sqrt{3}$，$y=4$，可得 $\boldsymbol{n}=(2\sqrt{3},4,\sqrt{2})$，

设平面 BDF 的法向量为 $m=(a,b,c)$，由 $\begin{cases}\overrightarrow{DF}\cdot m=0,\\ \overrightarrow{BD}\cdot m=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{6}b-\frac{\sqrt{6}}{6}c=0,\\ -a+\frac{2\sqrt{3}}{3}b+\frac{2\sqrt{6}}{3}c=0,\end{cases}$ 令 $c=1$，得 $a=0$，$b=-\sqrt{2}$，

则 $m=(0,-\sqrt{2},1)$，所以 $|\cos\langle m,n\rangle|=\frac{|m\cdot n|}{|m|\cdot|n|}=\frac{|-4\sqrt{2}+\sqrt{2}|}{\sqrt{3}\times\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

所以平面 ADF 与平面 BDF 所成的锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

22.解：(1)因为椭圆 E 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $a^2=2c^2$，所以 $b^2=a^2-c^2=\frac{1}{2}a^2$.

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ y=x+\sqrt{3},\end{cases}$ 得 $x^2+2(x+\sqrt{3})^2=2b^2$，

化简得，$3x^2+4\sqrt{3}x+6-2b^2=0$，

因为直线 $x-y+\sqrt{3}=0$ 与该椭圆仅有一个公共点，所以 $\Delta=(4\sqrt{3})^2-4\times3\times(6-2b^2)=0$，解得 $b^2=1$.

所以 $a^2=2$，椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)设 l_1 与椭圆 E 的交点分别为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，l_2 与椭圆 E 的交点为 C,D，

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1,\\ y=kx+2,\end{cases}$ 消去 y 得 $(1+2k^2)x^2+8kx+6=0$.

$\Delta=64k^2-4\times6\times(1+2k^2)=8(2k^2-3)>0$，解得 $k^2>\frac{3}{2}$，

$x_1+x_2=\frac{-8k}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{6}{1+2k^2}$，

所以 $|AB|=\sqrt{(1+k^2)\left[\left(\frac{-8k}{1+2k^2}\right)^2-4\cdot\frac{6}{1+2k^2}\right]}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{(1+k^2)\cdot\frac{2k^2-3}{(1+2k^2)^2}}$.

由椭圆的对称性及 l_1 与 l_2 关于原点对称，知四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

设 l_1 与 l_2 间的距离为 $d=\frac{4}{\sqrt{1+k^2}}$，

所以四边形面积 $S=|AB|\cdot d=8\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2k^2-3}}{1+2k^2}=4\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{4(2k^2-3)}}{1+2k^2}$，

而 $\frac{\sqrt{4(2k^2-3)}}{1+2k^2}\leqslant\frac{\frac{4+(2k^2-3)}{2}}{1+2k^2}=\frac{1}{2}$，当且仅当 $k^2=\frac{7}{2}$ 时，等号成立，

所以 $S\leqslant2\sqrt{2}$，当 $k^2=\frac{7}{2}>\frac{3}{2}$ 时，S 取最大值 $2\sqrt{2}$.

第 30 期

第 2~3 版综合测试(六)参考答案

一、单项选择题

1.B　提示：直线 $y=mx-2$，即 $mx-y-2=0$，因为直线 $y=mx-2$ 与直线 $x+ny=0$ 平行，所以 $mn-(-1)=0$，即 $mn+1=0$，故选 B.

2.B　提示：从 2,4 中选一个数字，有 C_2^1 种方法；从 1,3,5 中选两个数字，有 C_3^2 种方法，组成无重复数字的三位数，有 $C_2^1C_3^2A_3^3=36$ 个.故选 B.

3.A　提示：因为随机变量 X 服从正态分布 $N(2,7)$，$P(X>1)=0.8$，所以 $P(X\leqslant1)=1-0.8=0.2$，所以 $P(X\geqslant3)=P(X\leqslant1)=0.2$.故选 A.

4.B　提示：由题意可知，$2^n=64$，解得 $n=6$，则 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$ 展开式的通项为 $C_6^rx^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r=C_6^rx^{6-2r}$，

令 $6-2r=0$，得 $r=3$，所以常数项为 $C_6^3=20$.故选 B.

5.D　提示：因为 $\overrightarrow{OG}=2\overrightarrow{GG_1}=2(\overrightarrow{OG_1}-\overrightarrow{OG})$，

所以 $\overrightarrow{OG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OG_1}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG_1})=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}\right)=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA})=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{9}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right)-\frac{4}{9}\overrightarrow{OA}=\frac{2}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{9}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{OC}$，由空间向量基本定理，得 $(x,y,z)=\left(\frac{2}{9},\frac{2}{9},\frac{2}{9}\right)$，故选 D.

6.C　提示：因为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，所以 $\left(\frac{p}{2}\right)^2+(\sqrt{3})^2=4$，解得 $p=2$.故选 C.

7.A　提示：由题意知，首先求出摸一次中奖的概率，从 8 个球中摸出 3 个，共有 $C_8^3=56$ 种结果，

3 个球号码之积能被 10 整除，则其中一个必为 5，另外两个号码从 1,2,3,4,6,7,8 中抽取，且 2 个号码的乘积必须为偶数，即抽取的另外两个号码为：一奇一偶或两偶，则 $C_3^1C_4^1+C_4^2=18$，即共有 18 种结果，使得 3 个球号码之积能被 10 整除，

所以摸一次中奖的概率是 $\frac{18}{56}=\frac{9}{28}$，又 2 个人摸奖，相当于发生 2 次试验，且每一次发生的概率都是 $\frac{9}{28}$，

所以有 2 人参加摸奖，恰好有 2 人获奖的概率是 $C_2^2\times\left(\frac{9}{28}\right)^2=\frac{81}{784}$.故选 A.

8.D　提示：若在椭圆 C_1 上存在点 P，使得由点 P 所作的圆 C_2 的两条切线互相垂直，设切点为 A，B，则只需当点 P 为椭圆 C_1 的左顶点或右顶点时，满足 $\angle APB\leqslant90°$，

即 $\alpha=\angle APO\leqslant45°$(O 为坐标原点)，$\sin\alpha=\frac{\frac{2b}{\sqrt{5}}}{a}\leqslant\sin45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $8b^2\leqslant5a^2$，因为 $a^2=b^2+c^2$，所以 $3a^2\leqslant8c^2$，又 $0<e<1$，所以 $\frac{\sqrt{6}}{4}\leqslant e<1$，即 $e\in\left[\frac{\sqrt{6}}{4},1\right)$.故选 D.

二、多项选择题

9.AC　提示：因为 $a=(-1,\lambda,-2)$，$b=(2,-1,1)$，a 与 b 的夹角为 $120°$，所以 $\cos120°=\frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}=\frac{-2-\lambda-2}{\sqrt{5+\lambda^2}\cdot\sqrt{6}}=-\frac{1}{2}$，解得 $\lambda=-1$ 或 $\lambda=17$.故选 AC.

10.ACD　提示：对于 A，因为 $M\sim N(250,\sigma^2)$，所以 $P(M>249)=P(M<251)=0.75$，故 A 正确；

对于 B，因为 $P(M<251)=0.75$，所以 $P(249<M<250)=P(250<M<251)=0.75-0.5=0.25$，

所以 $P(251<M<253)=0.7-0.25\times2=0.2$，故 B 错误；

对于 C，因为 $P(249<M<253)=0.7$，所以 $P(M>253)=0.75-0.7=0.05$，

若从该阿胶产品中随机选取 1000 盒，则质量大于253g 的盒数 $X\sim B(1000,0.05)$，

所以 $DX=1000\times0.05\times(1-0.05)=47.5$，故 C 正确；

对于 D，$P(251<M<253)=0.2$，若从该阿胶产品中随机选取 1000 盒，

则质量在 251g~253g 内的盒数 $Y\sim B(1000,0.2)$，所以 $EY=1000\times0.2=200$，故 D 正确.

故选 ACD.

11.BD　提示：对于 A，抛物线 $y^2=-4\sqrt{7}x$ 的准线方程为 $x=\sqrt{7}$，故 A 错误；对于 B，依题意，$a^2+3=7$，解得 $a=2$，故双曲线的实轴长为 4，故 B 正确；对于 C，由选项 B 知，双曲线方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$，其渐近线方程为 $\sqrt{3}x\pm2y=0$，故 C 错误；对于 D，由双曲线的定义知，$||PF_1|-|PF_2||=4$，即 $\left|\frac{9}{2}-|PF_2|\right|=4$，解得 $|PF_2|=\frac{1}{2}<\sqrt{7}-2$(舍去)，或 $|PF_2|=\frac{17}{2}$，故 D 正确.故选 BD.

12.ABD　提示：对于 A，从中任取 3 球，恰有 1 个白球的概率是 $\frac{C_2^1C_4^2}{C_6^3}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$，故 A 正确；

对于 B，从中有放回地取球 6 次，每次任取 1 球，则取到白球的个数 X 服从二项分布 $B\left(6,\frac{1}{3}\right)$，

故恰好有 2 个白球的概率为 $C_6^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{243}$，故 B 正确；

对于 C，从中不放回地取球 2 次，每次任取 1 球，若第一次取到红球，则第二次取时有 3 个红球，2 个白球，所以取到红球的概率为 $\frac{3}{5}$，故 C 错误；

对于 D，从中有放回地取球 3 次，每次任取 1 球，则取到红球的个数 Y 服从二项分布 $B\left(3,\frac{2}{3}\right)$，至少有一次取到红球的概率为 $1-C_3^0\times\left(\frac{2}{3}\right)^0\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{26}{27}$，故 D 正确.故选 ABD.

三、填空题

13.1.6　提示：因为 $\bar{x}=\frac{1}{5}\times(9+9.5+10+10.5+11)=10$，

$\bar{y}=\frac{1}{5}\times(11+10+8+6+5)=8$，

所以 $8=10\hat{b}+40$，解得 $\hat{b}=-3.2$.所以当 $x=12$ 时，$y=-3.2\times12+40=1.6$.

14.2　提示：由 $\left(a+\frac{a}{x^2}\right)(1+x)^5=\left(a+\frac{a}{x^2}\right)(1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5)$ 的展开式中 x^2 的系数为 $10a+5a=30$，得 $a=2$.

15.$\frac{\sqrt{10}}{10}$　提示：因为 AB 是底面圆直径，所以 $AO\perp BO$，又 OP 是圆柱母线，则 $OP\perp$ 平面 OAB，以 OA，OB，OP 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，

设 $OA=1$，则 $AB=OP=\sqrt{2}$，所以 $OB=\sqrt{(\sqrt{2})^2-1^2}=1$，又 $AC\parallel OB$，所以 $\angle OAC=90°$，而 $\angle ACB=90°$，所以四边形OACB 是正方形，所以 $P(0,0,\sqrt{2})$，$A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(1,1,0)$，$\overrightarrow{PC}=(1,1,-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{AP}=(-1,0,\sqrt{2})$，设平面 PAB 的法向量为 $n=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AB}=-x+y=0,\\ n\cdot\overrightarrow{AP}=-x+\sqrt{2}z=0,\end{cases}$ 取 $z=1$，得 $x=y=\sqrt{2}$，则 $n=(\sqrt{2},\sqrt{2},1)$，设直线 PC 与平面 PAB 所成角为 θ，所以 $\sin\theta=|\cos\langle n,\overrightarrow{PC}\rangle|=\frac{|n\cdot\overrightarrow{PC}|}{|n||\overrightarrow{PC}|}=\frac{|\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{2}|}{\sqrt{5}\times2}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

16.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　提示：因为 $|PA|=2\sqrt{2}|PB|$，

所以 $\sin\angle PBA=2\sqrt{2}\sin\angle PAB$，又 $\angle PBA-\angle PAB=\frac{\pi}{4}$，

所以 $\sin\angle PBA=2\sqrt{2}\sin\left(\angle PBA-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\angle PBA-2\cos\angle PBA$，即 $\sin\angle PBA=2\cos\angle PBA$，所以 $\tan\angle PBA=2$，$\tan\angle PAB=\tan\left(\angle PBA-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2-1}{1+2}=\frac{1}{3}$，设 $P(m,n)$，则 $\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}=1$，$n^2=\frac{b^2(a^2-m^2)}{a^2}$，由题可知 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，$k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{n}{m+a}\cdot\frac{n}{m-a}=\frac{n^2}{m^2-a^2}=-\frac{b^2}{a^2}$，所以 $-\frac{b^2}{a^2}=-2\times\frac{1}{3}$，即 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{2}{3}$，所以椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

四、解答题

17.解：(1)因为圆心 C 既在直线 $y=2x-4$ 上，也在直线 $y=x-1$ 上，所以由 $\begin{cases}y=2x-4,\\ y=x-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\ y=2,\end{cases}$ 即圆心 C 的坐标为 $(3,2)$，又圆 C 的半径为 1，所以圆 C 的方程为 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$.

(2)当切线斜率不存在时，切线方程为 $x=2$，满足题意；

当切线斜率存在时，设过 A 点的切线方程为 $y-4=k(x-2)$，即 $kx-y-2k+4=0$，则圆心 C 到切线的距离 $d=\frac{|3k-2-2k+4|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得 $k=-\frac{3}{4}$，此时切线方程为 $3x+4y-22=0$.

综上，所求切线的方程为 $x=2$ 或 $3x+4y-22=0$.

18.解：(1)因为该二项展开式有 6 项，故 $n=5$，所以展开式中所有二项式系数的和为 $2^5=32$.

(2)$(2x+1)^5$ 展开式的通项为 $T_{k+1}=C_5^k(2x)^{5-k}$，

令 $5-k=2$，得 $k=3$，故展开式中含 x^2 的项为 $C_5^3(2x)^2=40x^2$.

19.解：(1)记该同学会做的题目数为 X，由题意知，$X=1,2,3$，

$P(X=1)=\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$，$P(X=2)=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$，

$P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$，

所以该同学会做的题目数 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

(2)由(1)知，该同学能及格的概率为 $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$.

20.(1)证明：由条件可知 $BE=2\sqrt{2}$，$BF=\sqrt{13}$，$EF=\sqrt{5}$，所以 $BF^2=BE^2+EF^2$，所以 $EF\perp BE$.又 $BE=B_1E=2\sqrt{2}$，$BB_1=4$，所以 $B_1E^2+BE^2=BB_1^2$，所以 $BE\perp B_1E$，

又因为 $B_1E\cap EF=E$，所以 $BE\perp$ 平面 B_1EF.

(2)解：以 AC 的中点 O 为坐标原点，OA 所在直线为 x 轴，OB 所在直线为 y 轴，建立空间直角坐标系 Oxyz，

则 $A(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$E(-1,0,2)$，$F(1,0,3)$，所以 $\overrightarrow{BF}=(1,-\sqrt{3},3)$，$\overrightarrow{BE}=(-1,-\sqrt{3},2)$，$\overrightarrow{AB}=(-1,\sqrt{3},0)$，

设平面 BEF 的法向量为 $n=(x,y,z)$，

因为 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{BF}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x-\sqrt{3}y+3z=0,\\ x+\sqrt{3}y-2z=0,\end{cases}$ 取 $y=5\sqrt{3}$，得 $n=(-3,5\sqrt{3},6)$.

设平面 ABF 的法向量为 $m=(a,b,c)$，则 $\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ m\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-a+\sqrt{3}b=0,\\ a-\sqrt{3}b+3c=0,\end{cases}$ 取 $b=1$，则 $m=(\sqrt{3},1,0)$，$\cos|\langle m,n\rangle|=\frac{|m\cdot n|}{|m||n|}=\frac{-3\sqrt{3}+5\sqrt{3}}{2\sqrt{30}\times2}=\frac{\sqrt{10}}{20}$，所以平面 BEF 与平面 ABF 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{20}$.

21.解：(1)补全 2×2 列联表如下所示：

	优秀员工	非优秀员工	总计
男性	30	170	200
女性	20	180	200
总计	50	350	400

$\chi^2=\frac{400\times(30\times180-20\times170)^2}{200\times200\times50\times350}\approx2.286<2.706$，

故没有 90%以上的把握认为“评定类型”与“性别”有关.

(2)由题意知，从已选取的 400 人中随机抽取 1人，属于“非优秀员工”的频率为 $\frac{7}{8}$，所以抽取 1 人属于“非优秀员工”的概率为 $\frac{7}{8}$，

X 的所有可能取值为 0,1,2,3，

$P(X=0)=\left(\frac{1}{8}\right)^3=\frac{1}{512}$，$P(X=1)=C_3^1\times\left(\frac{1}{8}\right)^2\times\frac{7}{8}=\frac{21}{512}$，

$P(X=2)=C_3^2\times\frac{1}{8}\times\left(\frac{7}{8}\right)^2=\frac{147}{512}$，

$P(X=3)=\left(\frac{7}{8}\right)^3=\frac{343}{512}$，

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{512}$	$\frac{21}{512}$	$\frac{147}{512}$	$\frac{343}{512}$

所以 $EX=0\times\frac{1}{512}+1\times\frac{21}{512}+2\times\frac{147}{512}+3\times\frac{343}{512}=\frac{21}{8}$.

22.解：(1)设椭圆 C 的半焦距为 c，因为椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.又 $b^2+c^2=a^2$，所以 $b^2=\frac{1}{2}a^2$.

将点 $(\sqrt{2},1)$ 代入椭圆 C 的方程，得 $\frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{4}{a^2}=1$，所以 $a^2=4$，$b^2=2$，所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)假设存在满足要求的点 Q，当直线 l 的斜率不为

0 时，设直线 $l:x=ny+4$，由 $\begin{cases}x=ny+4,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 整理得 $(n^2+2)y^2+8ny+12=0$.则 $\Delta=64n^2-48(n^2+2)=16n^2-96>0$，解得 $n>\sqrt{6}$ 或 $n<-\sqrt{6}$.

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$Q(s,t)$，由韦达定理可得，$y_1+y_2=\frac{-8n}{n^2+2}$，$y_1y_2=\frac{12}{n^2+2}$，则直线 $MQ:y-t=\frac{y_1-t}{x_1-s}(x-s)$，

令 $x=4$，得 $y=\frac{(tn+4-s)y_1}{ny_1+4-s}$，所以 $A\left(4,\frac{(tn+4-s)y_1}{ny_1+4-s}\right)$.

同理得 $B\left(4,\frac{(tn+4-s)y_2}{ny_2+4-s}\right)$.由点 A，B 关于 x 轴对称得 $\frac{(tn+4-s)y_1}{ny_1+4-s}+\frac{(tn+4-s)y_2}{ny_2+4-s}=0$，

整理得 $(tn+4-s)[(4-s)(y_1+y_2)+2ny_1y_2]=0$.

易知点 Q 不在 l 上，所以 $tn+4-s\neq0$，所以 $(4-s)(y_1+y_2)+2ny_1y_2=0$，

所以 $(4-s)\cdot\frac{-8n}{n^2+2}+2n\cdot\frac{12}{n^2+2}=0$，

整理得 $n(s-1)=0$.

显然 $n\neq0$，所以 $s=1$，

将 $Q(1,t)$ 代入椭圆方程，得 $\frac{1}{4}+\frac{t^2}{2}=1$，解得 $t=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$，

所以点 Q 的坐标为 $\left(1,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 或 $\left(1,-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

当直线 l 的斜率为 0 时，令 $M(-2,0)$，$N(2,0)$，$Q\left(1,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，此时直线 $MQ:y=\frac{\sqrt{6}}{6}(x+2)$，令 $x=4$，得 $y=\sqrt{6}$，所以 $A(4,\sqrt{6})$；

直线 $NQ:y=-\frac{\sqrt{6}}{2}(x-2)$，令 $x=4$，得 $y=-\sqrt{6}$，所以 $B(4,-\sqrt{6})$，显然点 A，B 关于 x 轴对称，满足题意.

同理，令 $M(-2,0)$，$N(2,0)$，$Q\left(1,-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 时，也满足题意.

综上，存在满足题意的点 Q，且点 Q 的坐标为 $\left(1,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 或 $\left(1,-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

第 31 期

第 2~3 版综合测试(七)参考答案

一、单项选择题

1.C　提示：向量 $a=(-3,2,4)$，$b=(1,-2,2)$，所以 $a-b=(-4,4,2)$，则 $|a-b|=\sqrt{(-4)^2+4^2+2^2}=6$.故选 C.

2.D　提示：因为变量 x,y 之间的线性回归方程为 $y=2x+k$，且当 $x=10$ 时，y 的预报值 $y=20+k=23$，

所以 $k=3$，即 $y=2x+3$，因为 $\bar{x}=\frac{12+m+13}{3}=\frac{25+m}{3}$，$\bar{y}=\frac{27+25+n}{3}=\frac{52+n}{3}$，所以 $\frac{52+n}{3}=2\times\frac{25+m}{3}+3$，所以 $2m-n=-7$.故选D.

3.C　提示：展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^rx^{5-r}\left(\frac{2}{x^2}\right)^r=C_5^r\cdot2^r\cdot x^{5-3r}$，令 $5-3r=-1$，解得 $r=2$，则 x^{-1} 的系数为 $C_5^2\cdot2^2=40$，故选C.

4.C　提示：由题意知，$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，则直线 AB 的方程为 $y=\sqrt{3}\left(x-\frac{p}{2}\right)$，即 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}y+\frac{p}{2}$，代入抛物线方程可得 $y^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}py-p^2=0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}p$，$y_1y_2=-p^2$，由 $|MN|=4\sqrt{3}$，得 $|y_1-y_2|=4\sqrt{3}$，即 $\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{\frac{4}{3}p^2+4p^2}=4\sqrt{3}$，解得 $p=3$，所以抛物线 C 的准线方程为 $x=-\frac{3}{2}$.故选 C.

5.B　提示：依题意，甲、乙随机选择一条线路去研学的试验有 $3^2=9$ 个样本点，

事件A含有的样本点个数是 $2\times2+1=5$，则 $P(A)=\frac{5}{9}$；事件AB含有的样本点个数为 $2\times2=4$，则 $P(AB)=\frac{4}{9}$，所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{4}{5}$.故选B.

6.A　提示：以 A 为坐标原点，以 AB,AD,AA_1 所在直线分别为x轴，y轴，z轴，建立空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$E(1,0,0)$，$D(0,2,0)$，设 $F(0,m,n)$，$m\in[0,2]$，$n\in[0,2]$，因为 $\overrightarrow{FE}=(1,-m,-n)$，$\overrightarrow{FD}=(0,2-m,-n)$，所以 $\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FD}=m^2-2m+n^2=-\frac{3}{4}$，因为 $S_{\triangle ADE}$ 为定值，所以要想三棱锥 $F-AED$ 的体积最大，则 F 到底面 ADE 的距离最大，其中 $n^2=-\frac{3}{4}-m^2+2m=-(m-1)^2+\frac{1}{4}$，所以当 $m=1$ 时，n^2 取得最大值为 $\frac{1}{4}$，因为 $n\in[0,2]$，所以 n 的最大值为 $\frac{1}{2}$，所以 $F\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{EF}=\left(-1,1,\frac{1}{2}\right)$，又平面 ABB_1A_1 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(0,1,0)$，

当三棱锥 $F-AED$ 的体积最大时，设 EF 与平面 ABB_1A_1 所成角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{EF},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{EF}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{1+1+\frac{1}{4}}}=\frac{2}{3}$.故选 A.

7.C　提示：设 $|PF_2|=3x(x>0)$，$|QF_1|=2x$，双曲线 C 的焦距为 $2c$，

由双曲线的定义可知 $|QF_2|=2a+2x$，$|PQ|=2a+x$.在 $Rt\triangle PQF_2$ 中，有 $|QF_2|^2=|PQ|^2+|PF_2|^2$，可得 $(2a+2x)^2=(2a+x)^2+9x^2$，解得 $x=\frac{2}{3}a$，可得 $|PF_2|=2a$，$|PF_1|=4a$.

在 $Rt\triangle PF_1F_2$ 中，有 $|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2$，得 $4a^2+16a^2=4c^2$，解得 $c=\sqrt{5}a$，可得双曲线 C 的离心率 $e=\sqrt{5}$.故选 C.

8.D　提示：由题中表格中的数据可知，男女抽取的比例不相等，所以不是分层随机抽样，故A错误；

由题中表格中的数据可知，$\frac{25}{45}<\frac{45}{55}$，所以女性顾客购买新能源车的意向较弱，故B错误；

由题中表格中的数据可知，

$\chi^2=\frac{100\times(45\times20-25\times10)^2}{70\times30\times55\times45}\approx8.1289>6.635$，

所以有99%的把握认为是否愿意购买新能源车与性别有关，故C错误，D正确.故选D.

二、多项选择题

9.ABC　提示：令 $x=0$，则 $a_0=-1$，故A正确；$(3x-1)^9$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=(-1)^rC_9^r3^{9-r}x^{9-r}$，当 $9-r=1$，即 $r=8$ 时，$a_1=C_9^8\cdot3^1=27$，故B正确；当 $9-r=2$，即 $r=7$ 时，$a_2=-C_9^73^2=-324$，故C正确；令 $x=1$，则 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9=2^9=512$，所以 $a_1+a_2+\cdots+a_9=513$，故D错误.故选ABC.

10.BCD　提示：由于圆 C 的方程为 $(x-3)^2+y^2=1$，圆心为 $(3,0)$，由题意可知 $(3,0)$ 到直线 $kx-y-2=0$ 的距离应小于2，即 $\frac{|3k-2|}{\sqrt{k^2+1}}<2$，解得 $0<k<\frac{12}{5}$，故选BCD.

11.ABD　提示：对于A，甲、乙两人恰有一人购买华为手机的概率 $P=0.8\times0.1+0.2\times0.9=0.26$，故A正确；对于B，甲购买了华为手机，但不是黑色的概率 $P=0.8\times0.3=0.24$，故B正确；对于C，甲、乙两人都没有购买黑色手机的概率 $P=0.3\times0.5=0.15$，故C错误；对于D，甲购买黑色华为手机的概率 $P_1=0.8\times0.7=0.56$，乙购买黑色华为手机的概率 $P_2=0.9\times0.5=0.45$，则甲、乙至少有一人购买黑色华为手机的概率 $P=1-0.44\times0.55=0.758$，故D正确.故选ABD.

12.ABD　提示：由题意知，设椭圆的长轴长为 2a，短轴长为 2b，焦距为 2c，则 $b=c=2$，得 $a=2\sqrt{2}$，则 $2a=4\sqrt{2}$，故 A 正确；$|AB|=|OB|+|OA|=2+|OA|$，

由椭圆性质，知 $2\leqslant|OA|\leqslant2\sqrt{2}$，所以 $4\leqslant|AB|\leqslant2+2\sqrt{2}$，故 B 正确；记 $\angle AOF=\theta$，则 $S_{\triangle ABF}=S_{\triangle AOF}+S_{\triangle OBF}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OF\sin\theta+\frac{1}{2}OB\cdot OF\sin(\pi-\theta)=OA\sin\theta+2\sin\theta=(OA+2)\cdot\sin\theta$，取 $\theta=\frac{\pi}{6}$，则 $S_{\triangle ABF}=1+\frac{1}{2}OA\leqslant1+\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}<4$，故 C 错误；

由椭圆定义知，$|AF|+|AG|=2a=4\sqrt{2}$，所以 $\triangle AFG$ 的周长 $L=|FG|+4\sqrt{2}=4+4\sqrt{2}$，故 D 正确.故选 ABD.

三、填空题

13.$\frac{1}{3}$　提示：在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$BE=\frac{1}{3}BB_1$，$DF=\frac{2}{3}DD_1$，所以 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BB_1}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DD_1}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$，由 $\overrightarrow{EF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}+z\overrightarrow{AA_1}$，所以 $x=-1$，$y=1$，$z=\frac{1}{3}$，$x+y+z=-1+1+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

14.0.4　提示：因为随机变量 $X\sim N(1,\sigma^2)$，$P(X<3)=0.9$，所以 $P(1<X<3)=P(X<3)-P(X\leqslant1)=0.9-0.5=0.4$，

所以 $P(-1<X<1)=P(1<X<3)=0.4$.

15.12　提示：由题意得，将心电图、血压测量两项全排列，有 $A_2^2=2$ 种情况，再将腹部彩超和胸部CT两项排在其空位中，有 $A_3^2=6$ 种情况，最后将抽血放在第一位，有1种情况，所以共有 $2\times6\times1=12$ 种情况.

16.$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{3}-1\right]$　提示：设 $|PF_1|=n$，$|PF_2|=m$，因为 $x_1>0,y_1>0$，则 $m<n$，因为点 P,Q 在椭圆 C 上，$|PQ|=2|OF_2|$，所以四边形 PF_1QF_2 为矩形，且 $|QF_1|=|PF_2|$，由 $\frac{|QF_1|}{|PF_1|}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$，可得 $\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant\frac{m}{n}<1$，由题意可得，$m+n=2a$，$m^2+n^2=4c^2$，　①

所以 $mn=2(a^2-c^2)$，　②

由①②可得 $\frac{4c^2}{2(a^2-c^2)}=\frac{m^2+n^2}{mn}=\frac{m}{n}+\frac{n}{m}$，令 $t=\frac{m}{n}+\frac{n}{m}$，令 $v=\frac{m}{n}\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$，所以 $t=v+\frac{1}{v}\in\left(2,\frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$，则 $2<\frac{4c^2}{2(a^2-c^2)}\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}$，即 $a^2-c^2<c^2\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}(a^2-c^2)$，即 $1-e^2<e^2\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}(1-e^2)$，即 $\frac{1}{2}<e^2\leqslant4-2\sqrt{3}$，解得 $\frac{\sqrt{2}}{2}<e\leqslant\sqrt{3}-1$，所以椭圆 C 的离心率的取值范围为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{3}-1\right]$.

四、解答题

17.解：(1)因为直线 L 过定点 $(0,-1)$，将点 $(0,-1)$ 代入椭圆方程 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的左边，得 $\frac{0}{25}+\frac{1}{16}=\frac{1}{16}<1$，所以定点 $(0,-1)$ 在椭圆内，所以直线 $L:y=x-1$ 与椭圆相交.

(2)依题意，椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的焦点分别是两圆 $(x+3)^2+y^2=4$ 和 $(x-3)^2+y^2=1$ 的圆心，

所以 $(|PM|+|PN|)_{max}=2\times5+3=13$，$(|PM|+|PN|)_{min}=2\times5-3=7$，则 $|PM|+|PN|$ 的取值范围是 $[7,13]$.

18.解：(1)由折线图中数据知，$\bar{x}=\frac{1}{7}\times(2+3+4+6+8+10+13)=\frac{46}{7}$，$\bar{y}=\frac{1}{7}\times(13+22+31+42+50+56+58)=\frac{272}{7}$，

因为 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2}\approx\frac{400}{98}=\frac{200}{49}\approx4$，

所以 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=\frac{272}{7}-\frac{200}{49}\times\frac{46}{7}\approx12$，

所以 y 关于 x 的线性回归方程为 $y=4x+12$.

(2)当 $x=17$ 时，$y=4\times17+12=80$ 亿元，此时公司的实际收益的预测值为80+5=85亿元.

19.解：(1)记随机抽取甲、乙、丙三家企业的一件产品，产品合格分别为事件 B_1,B_2,B_3，则三个事件相互独立，记恰有两件产品合格为事件 D，则 $D=B_1B_2\overline{B_3}+B_1\overline{B_2}B_3+\overline{B_1}B_2B_3$.

所以 $P(D)=P(B_1B_2\overline{B_3})+P(B_1\overline{B_2}B_3)+P(\overline{B_1}B_2B_3)=\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{13}{30}$.故从三家企业的产品中各取一件抽检，则这三件产品中恰有两件合格的概率是 $\frac{13}{30}$.

(2)记事件 B 为购买的电器合格，记随机买一件产品，买到的产品为甲、乙、丙三个品牌分别为事件 A_1,A_2,A_3，则 $P(A_1)=\frac{2}{5}$，$P(A_2)=\frac{9}{25}$，$P(A_3)=\frac{6}{25}$，$P(B|A_1)=\frac{4}{5}$，$P(B|A_2)=\frac{2}{3}$，$P(B|A_3)=\frac{3}{4}$，所以 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{9}{25}\times\frac{2}{3}+\frac{6}{25}\times\frac{3}{4}=\frac{37}{50}$.

故从市场中随机购买一台该电器，买到的是合格品的概率为 $\frac{37}{50}$.

20.解：(1)因为抛物线 C 的准线为 $l:x=-\frac{p}{2}$，所以 $|MF|+|NF|=x_1+\frac{p}{2}+x_2+\frac{p}{2}=3p$.

(2)设直线 MN 的方程为 $x=my-\frac{p}{2}$，联立 $y^2=2px(p>0)$ 可得，$y^2-2mpy+p^2=0$，

则 $y_1+y_2=2mp$，$y_1y_2=p^2$，而 M 是线段 AN 的中点，所以 $y_1=\frac{y_2}{2}$，解得 $y_1=\frac{\sqrt{2}p}{2}$，$y_2=\sqrt{2}p$，即 $\frac{\sqrt{2}p}{2}+\sqrt{2}p=2mp$，解得 $m=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，所以直线 MN 的方程为 $x=\frac{3\sqrt{2}}{4}y-\frac{p}{2}$，

即 $4x-3\sqrt{2}y+2p=0$.

(3)设直线 MN 的方程为 $x=my-\frac{p}{2}$，$P\left(-\frac{p}{2},y_0\right)$，$Q\left(-\frac{p}{2},-y_0\right)$，$y_0\neq0$，则直线 $PM:y=\frac{y_1-y_0}{x_1+\frac{p}{2}}\left(x+\frac{p}{2}\right)+y_0=\frac{y_1-y_0}{my_1}\left(x+\frac{p}{2}\right)+y_0$，直线 $QN:y=\frac{y_2+y_0}{x_2+\frac{p}{2}}\left(x+\frac{p}{2}\right)-y_0=\frac{y_2+y_0}{my_2}\left(x+\frac{p}{2}\right)-y_0$，联立可得 $\left(x+\frac{p}{2}\right)\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}\right)=2m$，将 $y_1+y_2=2mp$，$y_1y_2=p^2$ 代入，解得 $x=\frac{2my_1y_2}{y_1+y_2}-\frac{p}{2}=\frac{2m\times p^2}{2mp}-\frac{p}{2}=\frac{p}{2}$，所以直线 PM 与 QN 的交点在定直线 $x=\frac{p}{2}$ 上.

21.解：(1)因为底面 ABCD 是正方形，所以 $AB\perp AD$，又因为 $AB\perp QD$，$AD\cap QD=D$，所以 $AB\perp$ 平面 QAD，又因为 $AB\subset$ 平面 ABCD，所以平面 ABCD $\perp$ 平面 QAD，因为平面 QAD $\cap$ 平面 ABCD=AD，QA=QD，取 AD 的中点 O，连接 QO，则 $QO\perp AD$，以 O 为原点，OD 所在直线为 y 轴，OQ 所在直线为 z 轴，建立空间直角坐标系，则 $B(2,-1,0)$，$C(2,1,0)$，$D(0,1,0)$，$Q(0,0,2\sqrt{2})$，

$\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{DC}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{DQ}=(0,-1,2\sqrt{2})$，

设平面 QCD 的法向量为 $n=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{DC}=2x=0,\\ n\cdot\overrightarrow{DQ}=-y+2\sqrt{2}z=0,\end{cases}$

令 $z=1$，则 $y=2\sqrt{2}$，$x=0$，所以 $n=(0,2\sqrt{2},1)$，

所以点 B 到平面 QCD 的距离为

$d=\frac{|\overrightarrow{BC}\cdot n|}{|n|}=\frac{|0+4\sqrt{2}+0|}{\sqrt{0+8+1}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

(2)显然平面 ADQ 的一个法向量为 $\overrightarrow{DC}=(2,0,0)$，又 $\overrightarrow{DB}=(2,-2,0)$，

设平面 BDQ 的法向量为 $m=(a,b,c)$，

则 $\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{DB}=2a-2b=0,\\ m\cdot\overrightarrow{DQ}=-b+2\sqrt{2}c=0,\end{cases}$

令 $c=1$，则 $b=2\sqrt{2}$，$a=2\sqrt{2}$，所以 $m=(2\sqrt{2},2\sqrt{2},1)$，

所以 $\cos\langle m,\overrightarrow{DC}\rangle=\frac{m\cdot\overrightarrow{DC}}{|m||\overrightarrow{DC}|}=\frac{4\sqrt{2}+0+0}{\sqrt{8+8+1}\times2}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$，

$\sin\langle m,\overrightarrow{DC}\rangle=\sqrt{1-\frac{8}{17}}=\frac{3\sqrt{17}}{17}$，所以二面角 B-QD-A 的正弦值为 $\frac{3\sqrt{17}}{17}$.

22.解：(1)“不多于两次答题就决出胜负”，等价于“两次答题决出胜负”.