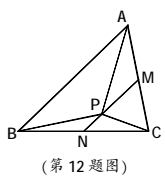


第 4 期
第2-3版章节测试参考答案
一、单项选择题
1.C
提示:质量、距离、体重都没有方向,不是向量;力既有方向又有大小,是向量.故选 C.
2.D
提示:因为点 C 是线段 AB 的中点,所以 \overrightarrow{AC} 与 \overrightarrow{BC} 是相反向量, \overrightarrow{CA} 与 \overrightarrow{BC} 是相等向量, \overrightarrow{AC} 与 \overrightarrow{AB} 是平行向量, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{0}$. 故选 D.
3.A
提示:根据题意,得 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) + (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AQ}) = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{QC} = \mathbf{0}$. 故选 A.
4.A
提示:由 $a = (2, -1)$, $b = (-1, 3)$, 得 $2a + b = (3, 1)$. 设向量 (x, y) 与 $2a + b$ 平行, 则 $3y - x = 0$. 观察各选项, 只有 A 满足, 故选 A.
5.B
提示:因为 $a = (3, 1)$, $b = (2, 2)$, 所以 $a + b = (5, 3)$, $a - b = (1, -1)$.
所以 $\cos\langle a + b, a - b \rangle = \frac{(a+b) \cdot (a-b)}{|a+b| \cdot |a-b|}$
 $= \frac{5 \times 1 - 3 \times 1}{\sqrt{5^2 + 3^2} \times \sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$. 故选 B.
6.C
提示:由 $a \cos B - b \cos A = c$, 得 $a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = c$, 整理得 $a^2 = b^2 + c^2$. 所以 $A = \frac{\pi}{2}$. 又 $C = \frac{\pi}{5}$, 所以 $B = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$. 故选 C.
7.A
提示:因为 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, 所以 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$. 所以 \overrightarrow{BA} 在 \overrightarrow{BC} 上的投影向量为 $|\overrightarrow{BA}| \cos B \cdot \frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} = |\overrightarrow{BA}| \cdot \frac{|\overrightarrow{BA}|}{|\overrightarrow{BC}|}$.
 $\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{|\overrightarrow{BA}|^2}{|\overrightarrow{BC}|^2} \overrightarrow{BC} = \frac{5}{6} \overrightarrow{BC}$, 得 $\frac{|\overrightarrow{BA}|^2}{|\overrightarrow{BC}|^2} = \frac{5}{6}$. 又 $|\overrightarrow{BC}| = 6$, 所以 $|\overrightarrow{BA}|^2 = 30$. 所以 $|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 - |\overrightarrow{BA}|^2 = 6$. 因为 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, 所以 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2) = \frac{1}{2} \times (6 - 30) = -12$. 故选 A.
8.C
提示:设扇形 AOB 所在圆的半径为 r, 以 O 为坐标原点, OA 所在直线为 x 轴, 建立平面直角坐标系, 则 $O(0, 0)$, A(r, 0), $B(-\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}r)$, 所以 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} = (xr - \frac{r}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}ry)$. 设 $P(a \cos \theta, a \sin \theta)$ ($0 \leq a \leq r$, $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$), 则 $\begin{cases} a \cos \theta = xr - \frac{r}{2}y, \\ a \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}ry, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = \frac{a \sin \theta}{\sqrt{3}r} + \frac{a \cos \theta}{r}, \\ y = \frac{2a}{\sqrt{3}} \sin \theta. \end{cases}$ 所以 $2x + y = 2(\frac{a \sin \theta}{\sqrt{3}r} + \frac{a \cos \theta}{r}) + \frac{2a}{\sqrt{3}} \sin \theta = \frac{4a}{\sqrt{3}r} \sin \theta + \frac{2a \cos \theta}{r} = \frac{a}{r} \cdot \sqrt{\frac{28}{3}} \sin(\theta + \varphi)$, 其中 φ 为锐角, 且 $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 因为 $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$, 所以 $\varphi \leq \theta + \varphi \leq \frac{2\pi}{3} + \varphi$, 所以当 $\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$ 且 $a = r$ 时, $2x + y$ 取得最大值, 且最大值为 $\sqrt{\frac{28}{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$. 故选 C.
二、多项选择题
9.ABD
提示:因为 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$, 所以 $AD \parallel BC$, 且 $AD = 2BC$, 所以 $\triangle AED \sim \triangle CEB$, 得 $\frac{DE}{EB} = \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{BC} = 2$, 所以 $AE = 2EC$. 所以 $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EC} = \mathbf{0}$, 故 A 正确; 同理, 得 $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, 故 B 正确, C 错误; $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, 故 D 正确. 故选 ABD.
10.BC
提示:由题意得 $a \cdot b = 2\sqrt{3} \times 2 \cos 30^\circ = 6$. 所以 $|a + b|^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2 \times 6 + 2 = 28$, $|a - b|^2 = a^2 - 2a \cdot b + b^2 = (2\sqrt{3})^2 - 2 \times 6 + 2 = 4$, 得 $|a + b| = 2\sqrt{7}$, $|a - b| = 2$. 所以以向量 a, b 为邻边的平行四边形的对角线的长度分别为 $2\sqrt{7}$ 和 2. 故选 BC.
11.AD
提示:因为 $a = (-2, 1)$, $b = (k, -3)$, 所以 $a - 2b = (-2 - 2k, 7)$. 又 $c = (1, 2)$, $(a - 2b) \perp c$, 所以 $(a - 2b) \cdot c = -2 - 2k + 7 \times 2 = 0$, 解得 $k = 6$. 所以 $b = (6, -3)$, $|b| = 3\sqrt{5}$. 所以与 b 共线的单位向量为 $\pm \frac{b}{|b|} = \pm (\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5})$. 故选 AD.
12.ACD
提示:对于 A, 取 AC, BC 的中点 M, N, 连接 PM, PN, 由 $PA^2 + 2PB^2 + 3PC^2 = 0$, 得 $PA^2 + PC^2 = -2(PB^2 + PC^2)$, 所以

以 $\overrightarrow{PM} = -2\overrightarrow{PN}$, 所以 P, M, N 三点共线, 且 P 是 MN 上靠近点 N 的三等分点, $MN = \frac{1}{2}AB$, 如图所示, 可知 $\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle PAB}} = \frac{2S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle PAB}} = \frac{2PM}{AB} = \frac{2 \times \frac{2}{3}MN}{AB} = 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$, 故 A 正确; 对于 B, 由 $a > b$, 得 $A > B$, 所以满足条件的三角形只有一个, 故 B 错误; 对于 C, 由 $\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AC}|}$, 得 $|\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\pi - B) + |\overrightarrow{BC}| \cos C = 0$, 所以 $\cos C = \cos B$. 又 $B, C \in (0, \pi)$, 所以 $B = C$, 所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形, 故 C 正确; 对于 D, 因为点 P 是 $\triangle ABC$ 的重心, 所以 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$, 即 $\overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC}$, 代入 $2a \cdot \overrightarrow{PA} + b \cdot \overrightarrow{PB} + \frac{2\sqrt{3}}{3}c \cdot \overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$ 中并整理, 得 $(b - 2a)\overrightarrow{PB} + (\frac{2\sqrt{3}}{3}c - 2a)\overrightarrow{PC} = \mathbf{0}$, 所以 $\begin{cases} b - 2a = 0, \\ \frac{2\sqrt{3}}{3}c - 2a = 0, \end{cases}$ 解得 $b = 2a, c = \sqrt{3}a$, 所以 $a^2 + c^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 = b^2$, 所以 $B = \frac{\pi}{2}$, 即 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 故 D 正确. 故选 ACD.
三、填空题
13. 单位圆
提示:把平面上一切单位向量归结到共同的起点, 那么这些向量的终点到起点的距离都等于 1, 由圆的定义知, 这些向量的终点所构成的图形是半径为 1 的圆, 即单位圆.
14. $[\frac{1}{2}, 6, 14]$
提示:由公式 $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$ 及等号成立的条件可知, 当船速与水速方向相同时, 船的实际航行的速度最大, 为 $10 + 4 = 14$ (km/h); 当船速与水速方向相反时, 船的实际航行的速度最小, 为 $10 - 4 = 6$ (km/h), 故船的实际航行的速度的取值范围为 $[\frac{1}{2}, 6, 14]$.
15. 2
提示:在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理, 得 $\frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{AB}{\sin C}$, 所以 $\sin C = \frac{AB \sin \angle BAC}{BC} = \frac{2 \sin 60^\circ}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 所以 $C = 45^\circ$ 或 135° . 又 $\angle BAC = 60^\circ$, 所以 $C = 45^\circ$. 所以 $B = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ$. 因为 AD 为 $\angle BAC$ 的平分线, 且 $\angle BAC = 60^\circ$, 所以 $\angle BAD = 30^\circ$, 所以 $\angle ADB = 75^\circ$. 所以 $B = \angle ADB$. 所以 $AD = AB = 2$.
16. $\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b; \frac{13}{24}$
提示:根据题意, 得 $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b$. $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b$, 所以 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = (\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b) \cdot (\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b) = \frac{1}{12}(2a^2 + 5a \cdot b + 2b^2)$. 设 $AB = m, AC = n$, 则在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理, 得 $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A = m^2 + n^2 - mn = 1$, 所以 $m^2 + n^2 = 1 + mn \geq 2mn$, 得 $mn \leq 1$, 当且仅当 $m = n = 1$ 时, 等号成立. 所以 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = \frac{1}{12}(2a^2 + 5a \cdot b + 2b^2) = \frac{1}{12}(2m^2 + \frac{5}{2}mn + 2n^2) = \frac{1}{12}(\frac{9}{2}mn + 2) \leq \frac{1}{12} \times (\frac{9}{2} \times 1 + 2) = \frac{13}{24}$. 所以 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的最大值为 $\frac{13}{24}$.
四、解答题
17. 解: (1) 四边形 ABCD 是菱形. 理由如下: 因为 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{AD}|$, 所以 $AB = AD$. 又四边形 ABCD 是平行四边形, 所以四边形 ABCD 是菱形.
(2) 因为在平行四边形 ABCD 中, G 为 AC 与 BD 的交点, 所以 $GC = \frac{1}{2}AC$. 因为 EF 是 $\triangle ABC$ 的中位线, 所以 $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. 所以 $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{EF}$. 所以 $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} - (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}) = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FD}$. 作出向量 \overrightarrow{FD} 如图所示.
18. 解: (1) 由已知, 得 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OA} = (2a - b) - 2(a + 2b) = -5b = -a + b$, 所以 $x = 0, y = -5$.
(2) 若 A, B, C 三点共线, 则存在实数 λ , 使得 $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$, 即 $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$, 又 $\overrightarrow{OA} = a + 2b, \overrightarrow{OB} = 2a - b, \overrightarrow{OC} = xa + yb$, 代入上式并整理, 得 $(x - 1)a + (y - 2)b = \lambda a - 3\lambda b$. 所以 $x - 1 = \lambda$, 且 $y - 2 = -3\lambda$, 解得 $x = 1 + \lambda, y = 2 - 3\lambda$. 所以 $xy = (1 + \lambda)(2 - 3\lambda) = -3\lambda^2 - \lambda + 2 = -3(\lambda + \frac{1}{6})^2 + \frac{25}{12}$. 所以 xy 的最大值为 $\frac{25}{12}$.
19. 解: 选择条件①:
(1) 由 $b^2 + \sqrt{2}ac = a^2 + c^2$, 得 $a^2 + c^2 - b^2 = \sqrt{2}ac$, 所以

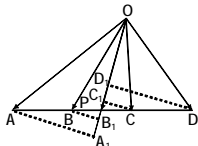


(第 12 题图)

$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{\sqrt{2}ac}{2ac} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
又 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{4}$.
(2) 由正弦定理, 得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 又 $A = \frac{\pi}{3}, b = \sqrt{2}$, $B = \frac{\pi}{4}$, 所以 $a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \sqrt{3}$.
 $\sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.
所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{3 + \sqrt{3}}{4}$.
选择条件②:
(1) 由正弦定理, 得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 所以 $a \sin B = b \sin A$. 又 $a \cos B = b \sin A$, 所以 $\sin B = \cos B$, 得 $\tan B = 1$. 又 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{4}$.
(2) 同条件①中(2).
20. 解: (1) 四边形 ABCD 的外接圆即 $\triangle ABC$ 的外接圆. 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理及已知条件, 得 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B = 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times (-\frac{3}{5}) = 52$, 所以 $AC = 2\sqrt{13}$. 又 $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$, 所以四边形 ABCD 外接圆的半径 $r = \frac{AC}{2 \sin B} = \frac{2\sqrt{13}}{2 \times \frac{4}{5}} = \frac{5\sqrt{13}}{4}$.
(2) 因为 A, B, C, D 四点共圆, 所以 $\angle D + \angle B = \pi$. 所以 $\sin D = \sin B = \frac{4}{5}$. 在 $\triangle ACD$ 中, $AC = 2\sqrt{13}, \sin D = \frac{4}{5}$, $\sin \angle ACD = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 由正弦定理, 得 $\frac{AD}{\sin \angle ACD} = \frac{AC}{\sin D}$, 所以 $AD = \frac{AC \sin \angle ACD}{\sin D} = \sqrt{65}$.
21. (1) 解: 设 $\overrightarrow{BP} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC}$, 则 $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BC} = x\overrightarrow{BA} + (y - 1)\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BA} = (x - 1)\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC}$. 由已知, 得 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, 因为 \overrightarrow{BA} 与 \overrightarrow{BC} 不共线, \overrightarrow{CP} 与 \overrightarrow{CD} 共线, \overrightarrow{AP} 与 \overrightarrow{AE} 共线, 所以 $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1}, \\ \frac{3}{x-1} = \frac{y}{1}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = \frac{4}{7}, \\ y = \frac{1}{7}, \end{cases}$ 所以 $\overrightarrow{BP} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{7}\overrightarrow{BC}$.
(2) 证明: 设正 $\triangle ABC$ 的边长为 a, 结合(1)可得 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CD} = (\frac{4}{7}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{7}\overrightarrow{BC}) \cdot (\frac{2}{3}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}) = \frac{8}{21}a^2 - \frac{10}{21}a^2 \cdot \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - \frac{1}{7}a^2 = \frac{8}{21}a^2 - \frac{10}{21}a^2 \cos \frac{\pi}{3} - \frac{1}{7}a^2 = 0$. 所以 $\overrightarrow{BP} \perp \overrightarrow{CD}$, 即 $BP \perp CD$.
22. 解: (1) 因为 $m = (2a, 2b), n = (\cos B, \cos A)$, 所以 $m \cdot n = 2a \cos B + 2b \cos A = \frac{c}{\cos C}$, 结合正弦定理, 得 $2 \sin A \cos B + 2 \sin B \cos A = \frac{\sin C}{\cos C}$, 即 $2 \sin(A + B) = \frac{\sin C}{\cos C}$, 即 $2 \sin C = \frac{\sin C}{\cos C}$, 显然 $\sin C \neq 0$, 所以 $\cos C = \frac{1}{2}$. 又 $0 < C < \pi$, 所以 $C = \frac{\pi}{3}$.
(2) 由(1)得 $C = \frac{\pi}{3}$, 所以 $f(B) = \cos 2B - 4 \cos C \sin B = 1 - 2 \sin^2 B - 2 \sin B = -2(\sin B + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{2}$. 由 $C = \frac{\pi}{3}$, 得 $0 < B < \frac{2\pi}{3}$, 所以 $0 < \sin B \leq 1$, 所以当 $\sin B = 1$ 时, $f(B)$ 取得最小值, 此时 $B = \frac{\pi}{2}$.
因为 $c = 3$, 所以 $b = \frac{c}{\sin C} = 2\sqrt{3}, a = b \cos C = \sqrt{3}$. 所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $a + b + c = 3 + 3\sqrt{3}$.
(3) 因为 $C = \frac{\pi}{3}$, 所以 $B = \frac{2\pi}{3} - A, A \in (0, \frac{2\pi}{3})$, 所以 $\sin A \sin B = \sin A \sin(\frac{2\pi}{3} - A) = \sin A (\frac{\sqrt{3}}{2} \cos A + \frac{1}{2} \sin A) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A \cos A + \frac{1}{2} \sin^2 A = \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2A + \frac{1}{4} (1 - \cos 2A) = \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2A - \frac{1}{4} \cos 2A + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \sin(2A - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{4}$. 因为 $A \in (0, \frac{2\pi}{3})$, 所以 $2A - \frac{\pi}{6} \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6})$, $\sin(2A - \frac{\pi}{6}) \in (-\frac{1}{2}, 1]$, $\frac{1}{2} \sin(2A - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{4} \in (0, \frac{3}{4}]$, 所以 $\sin A \sin B$ 的取值范围是 $(0, \frac{3}{4}]$.

数学
人教 A
第 1 期
第3-4版同步周测参考答案
一、单项选择题
1.D
提示:身高和温度没有方向,不是向量,故 A, B 错误;有向线段由起点、方向和长度三个要素确定,故 C 错误;根据有向线段的定义可知 D 正确. 故选 D.
2.B
提示:因为点 O 是正 $\triangle ABC$ 的中心, 所以 $|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{BO}| = |\overrightarrow{CO}|$. 故选 B.
3.B
提示:由 $\overrightarrow{AB} = 3e, \overrightarrow{CD} = -3e$, 得 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, 即 $AB = DC$, 且 $AB \parallel DC$, 所以四边形 ABCD 是平行四边形. 又 $|\overrightarrow{AD}| = 3$, 所以 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$, 所以四边形 ABCD 是菱形. 故选 B.
4.D
提示:原式 $= (6 - 4 + 4)a + (-6 + 8)b + (6 - 4 - 2)c = 6a + 2b$. 故选 D.
5.A
提示:因为 a, b 均为非零向量, 由 $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \langle a, b \rangle = |a| \cdot |b|$, 得 $\cos \langle a, b \rangle = 1$, 所以 $\langle a, b \rangle = 0$, 所以 a 与 b 同向共线, 充分性成立; 反之, 由 a 与 b 共线, 得 $\langle a, b \rangle = 0$ 或 π , 所以 $\cos \langle a, b \rangle = \pm 1$, 所以 $a \cdot b = \pm |a| \cdot |b|$, 必要性不成立. 故选 A.
6.A
提示:原式 $= 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$. 故选 A.
7.D
提示:如图所示, 过点 A, B, C, D 分别作线段 OP 或其延长线的垂线, 垂足分别为 A_1, B_1, C_1, D_1 ,

(第 7 题图)
则 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OA}| \cos \angle POA = |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OA_1}|$, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cos \angle POB = |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OB_1}|$, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OC}| \cos \angle POC = |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OC_1}|$, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OD} = |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OD}| \cos \angle POD = |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OD_1}|$. 由题图可知, 在 $|\overrightarrow{OA_1}|, |\overrightarrow{OB_1}|, |\overrightarrow{OC_1}|, |\overrightarrow{OD_1}|$ 中, $|\overrightarrow{OD_1}|$ 的值最小, 所以 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OD}$ 的值最小. 故选 D.
8.D
提示:由 $a + b$ 与 c 互为相反向量, 得 $c = -(a + b)$, 所以 $|c|^2 = (a + b)^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2a \cdot b$, 又 $|a| = 2, |c| = 1$, 代入可得 $|b|^2 + 2a \cdot b = -3$. ①
由 $a \cdot c = a \cdot [-(a + b)] = -|a|^2 - a \cdot b = 1$, 得 $a \cdot b = -5$. ②
联立①②, 解得 $|b| = \sqrt{7}$. 故选 D.
二、多项选择题
9.ABD
提示:由已知, 得 $b = -6e = -3 \cdot 2e = -3a$, 所以 $a \parallel b, a, b$ 方向相反, 且 $3|a| = |b|$. 故选 ABD.
10.ACD
提示:因为 $|a| = 4, |b| = 2, a \cdot b \geq 3$, 所以向量 b 在向量 a 上的投影向量的模为 $|b| \cdot |\cos \langle a, b \rangle| = \frac{|a \cdot b|}{|a|} \geq \frac{3}{4}$. 结合选项可知选 ACD.
11.AC
提示:因为 a, b 为单位向量, 所以 $|a| = |b| = 1$. 由 $(a + kb) \perp (ka - b)$, 得 $(a + kb) \cdot (ka - b) = ka^2 - kb^2 +$



(第 7 题图)

高一必修(第二册)答案页第 1 期
2023-2024 学年
学习周报
($k^2 - 1$) $a \cdot b = 0$, 则 $(k^2 - 1)a \cdot b = 0$, 所以 $k^2 - 1 = 0$, 或 $a \cdot b = 0$, 得 $k = \pm 1$, 或 $a \perp b$. 故选 AC.
12.AC
提示:由 $\overrightarrow{OC} = t\overrightarrow{OA} + (1 - t)\overrightarrow{OB}$, 得 $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = t(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$, 即 $\overrightarrow{BC} = t\overrightarrow{BA}$. 当 $t = \frac{1}{2}$ 时, $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, 则点 C 为线段 AB 的中点, 故 A 正确; 当点 C 为线段 AB 的三等分点时, $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ 或 $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$, 则 $t = \frac{1}{3}$ 或 $t = \frac{2}{3}$, 故 B 错误; 当 $t \in (0, 1)$ 时, \overrightarrow{BC} 与 \overrightarrow{BA} 同向, 则点 C 在线段 AB 上, 故 C 正确; 当点 C 在线段 AB 的延长线上时, \overrightarrow{BC} 与 \overrightarrow{BA} 反向, 则 $t < 0$, 故 D 错误. 故选 AC.
三、填空题
13. 0
提示:因为 $a = b$, 所以 $a - b = 0$.
14. (1) $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{HC}$; (2) $\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{CB}$; (3) $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{HA}$
提示: (1) 与 \overrightarrow{GH} 相等的向量, 是指与 \overrightarrow{GH} 长度相等, 方向相同的向量, 为 $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{HC}$.
(2) 与 \overrightarrow{GH} 共线且模相等的向量, 是指与 \overrightarrow{GH} 方向相同或相反, 且长度相等的向量, 为 $\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{CB}$.
(3) 与 \overrightarrow{EA} 方向相反且模相等的向量为 $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{HA}$.
15. $\sqrt{3}$
提示:因为 $|a - b| = \sqrt{3}$, 所以 $|a - b|^2 = (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b = 3$. ①
同理, 因为 $|a + b| = |2a - b|$, 所以 $a^2 + b^2 + 2a \cdot b = 4a^2 + b^2 - 4a \cdot b$, 整理得 $a^2 - 2a \cdot b = 0$. ②
由①②, 得 $b^2 = 3$, 所以 $|b| = \sqrt{3}$.
16. $b - \frac{1}{3}a; \sqrt{7}$
提示:因为在平行四边形 ABCD 中, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{FC}$, 所以 $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = b - \frac{1}{3}a$. 所以 $\overrightarrow{BF}^2 = b^2 - \frac{2}{3}a \cdot b + \frac{1}{9}a^2$. 又 $|\overrightarrow{AB}| = |a| = 3, |\overrightarrow{AD}| = |b| = 2$, 且 $|\overrightarrow{BF}| = \sqrt{7}$, 代入得 $3 = 4 - \frac{2}{3}a \cdot b + 1$, 解得 $a \cdot b = 3$. 因为 $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = a - \frac{1}{2}b$, 所以 $\overrightarrow{DE}^2 = a^2 - a \cdot b + \frac{1}{4}b^2 = 9 - 3 + 1 = 7$, 所以 $|\overrightarrow{DE}| = \sqrt{7}$.
四、解答题
17. 解: (1) 先作出向量 $3e_1$ 与 $2e_2$, 使其起点重合, 然后以向量 $3e_1$ 与 $2e_2$ 为边作平行四边形, 如下图所示, 则 $\overrightarrow{OA} = 3e_1 + 2e_2$, 即 \overrightarrow{OA} 为所求作向量.

(第 17 题图①)
(2) 先作出向量 $2e_1$ 与 e_2 , 使其起点重合, 然后连接向量 $2e_1$ 与 e_2 的终点, 如下图所示, 则 $\overrightarrow{BC} = 2e_1 - e_2$, 即 \overrightarrow{BC} 为所求作向量.

(第 17 题图②)

18. 解: (1) 原式 $= \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA}$.
(2) 原式 $= \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}) - \overrightarrow{DC} + (\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \mathbf{0}$.
19. 解: (1) 由 $2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$, 得 $2(2a - b) - a - 3b + ka + 5b = \mathbf{0}$, 即 $(3 + k)a = \mathbf{0}$, 因为 $a \neq \mathbf{0}$, 所以 $3 + k = 0$, 得 $k = -3$.
(2) 若 A, B, C 三点共线, 则存在实数 λ , 使 $\overrightarrow{BC} = \lambda \overrightarrow{AB}$, 即 $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$, 即 $(k - 1)a + 2b = \lambda(-a + 4b)$, 整理得 $(k - 1 + \lambda)a = (4\lambda - 2)b$. 因为非零向量 a 与 b 不共线, 所以 $k - 1 + \lambda = 0$, 且 $4\lambda - 2 = 0$, 解得 $k = \frac{1}{2}$.
20. 解: (1) 由 $(2a + b) \cdot (4a - 3b) = -6$, 得 $8a^2 - 2a \cdot b - 3b^2 = -6$, 又 $|a| = 1, |b| = 2$, 得 $8 \times 1^2 - 2 \times 1 \times 2 \cos \theta - 3 \times 2^2 = -6$, 解得 $\cos \theta = \frac{1}{2}$.
因为 $0 \leq \theta \leq \pi$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{3$

一、单项选择题

1.B

提示:因为 $A(1,2),B(3,5)$,所以 $\overrightarrow{AB}=(2,3)$.因为向量是可以平移的,所以 $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}=(2,3)$.故选 B.

2.A

提示:因为 $A(2,4),B(-1,-5),C(3,-2)$,所以 $\overrightarrow{AC}=(1,-6),\overrightarrow{BA}=(3,9),\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=(1,3)$.所以 $\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=(2,-3)$.故选 A.

3.B

提示:因为 $a=(1,2),a-b=(3,2)$,所以 $b=a-(a-b)=(-2,0)$.故选 B.

4.B

提示:由 $a+b=(2,3),a-b=(-2,1)$,得 $|a|^2-|b|^2=(a+b)\cdot(a-b)=2\times(-2)+3\times1=-1$.故选 B.

5.D

提示:由已知,得 $a+\lambda b=(\lambda+1,1-\lambda),a+\mu b=(\mu+1,1-\mu)$.由 $(a+\lambda b)\perp(a+\mu b)$,得 $(\lambda+1)(\mu+1)+(-\lambda)(1-\mu)=0$,整理得 $\lambda\mu=-1$.故选 D.

6.B

提示:根据向量共线的充要条件,可知集合 A 表示与 y 共线的向量;根据平面向量基本定理,可知集合 B 表示平面内的所有向量,故集合 A 是集合 B 的子集,即 $A\subseteq B$.故选 B.

7.A

提示:根据题意,得 $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AM}=\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{2}{5}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{2}{5}\left(\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{5\lambda}\overrightarrow{AN}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

因为 N,D,C 三点共线,所以 $\frac{2}{5\lambda}+\frac{2}{5}=1$,解得 $\lambda=\frac{2}{3}$.故选 A.

8.A

提示:由题意,得 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{ED}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE})+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

因为 $MN\perp BC$,所以 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}^2=-\frac{1}{6}\times3-\frac{1}{6}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\cos A+\frac{1}{3}\times2=0$,解得 $\cos A=\frac{\sqrt{6}}{6}$.故选 A.

二、多项选择题

9.ABD

提示:对于 A,给定向量 a 和 b ,由向量的减法运算可知总存在向量 c ,使 $c=a-b$,即 $a=b+c$,故 A 正确;对于 B,因为向量 a,b,c 在同一平面内且两两不共线,所以 $|b,c|$ 可作为一组基底,由平面向量基本定理可知总存在实数 λ 和 μ ,使 $a=\lambda b+\mu c$,故 B 正确;对于 C,当 a 分解到 c 方向的向量长度大于 μ 时,向量 a 无法按 b,c 方向分解,故 C 错误;对于 D,因为 b,c 不共线,所以 $4=|a|^2=(\lambda b+\mu c)^2=\lambda^2b^2+2\lambda\mu\cos\langle b,c\rangle<\lambda^2b^2+2\lambda\mu$,即 $(\lambda+\mu)^2>4$,得 $\lambda+\mu>2$,故 D 正确.故选 ABD.

10.AB

提示:因为 $A(1,2),B(4,-2)$,所以 $\overrightarrow{AB}=(3,-4)$.设 $e=(x,y)$,则 $|e|=1$,且 $\overrightarrow{AB}\cdot e=0$,

即 $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ 3x-4y=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\frac{4}{5}, \\ y=\frac{3}{5}, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-\frac{4}{5}, \\ y=-\frac{3}{5}. \end{cases}$

所以 $e=\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$,或 $e=\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$.故选 AB.

11.ABD

提示:假设点 A,B,C 不能构成三角形,则只能三点共线.

因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2,-1)-(1,-3)=(1,2)$,

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(m+1,m-2)-(1,-3)=(m,m+1)$,所以 $1\times(m+1)-2m=0$,解得 $m=1$.

所以若 A,B,C 三点能构成三角形,则 $m\neq1$.故选 ABD.

12.AB

提示:以 A 为坐标原点, AB 所在直线为 x 轴, AC 所在直线为 y 轴建立直角坐标系,则 $\overrightarrow{AE}=(3,1),\overrightarrow{DG}=(-2,2),\overrightarrow{CH}=(1,3)$,所以 $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DG}=(1,3)=\overrightarrow{CH}$, $|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$, $|\overrightarrow{CH}|=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$,故 A,B 正确;对于 C, $\overrightarrow{JB}=(1,-2),\overrightarrow{DI}=(2,3),\overrightarrow{JB}\cdot\overrightarrow{DI}=2-6=-4\neq0$,所以向量 \overrightarrow{JB} 与 \overrightarrow{DI} 不垂直,故 C 错误;对于 D, $|\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{HF}|=|\overrightarrow{CF}|=4$,故 D 错误.故选 AB.

三、填空题

13.(1,0)

提示:因为向量 $a=(3,4),b=(1,2)$,所以 $a-2b=(3-2\times1,4-2\times2)=(1,0)$.

14.(3,3)

提示:因为 $B(2,2),C(6,2),D$ 为 BC 的中点,所以 $D\left(\frac{2+6}{2},\frac{2+2}{2}\right)$,即 $D(4,2)$.

设中线 AD 上靠近 D 的三等分点为 $M(x,y)$,则 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MD}$.

又 $A(1,5)$,所以 $x=\frac{1+4\times2}{1+2}=3,y=\frac{5+2\times2}{1+2}=3$,

即 $M(3,3)$.

所以中线 AD 上靠近 D 的三等分点的坐标是 $(3,3)$.

15.1 或 $\frac{8}{5}$

提示:由已知,得 $\overrightarrow{AB}=(-5m,-1-n),\overrightarrow{AD}=(2-m,2-n),\overrightarrow{DC}=(2,0),\overrightarrow{BC}=(-1,3)$.显然 \overrightarrow{DC} 与 \overrightarrow{BC} 不垂直.

因为 $ABCD$ 为直角梯形,当 $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{DC}$ 且 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ 时,有 $\begin{cases} -2(-1-n)=0, \\ (5-m)(2-m)+(-1-n)(2-n)=0, \end{cases}$ 解得 $m=2$ 或 $5,n=-1$,若 $m=5$,则 $\overrightarrow{AB}=(0,0)$,不合题意,应舍去,所以 $m=2,m+n=1$;

当 $\overrightarrow{AD}\parallel\overrightarrow{BC}$ 且 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$,

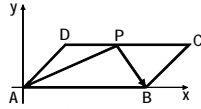
有 $\begin{cases} 3(2-m)-(-1)(2-n)=0, \\ -(5-m)+3(-1-n)=0, \end{cases}$

解得 $m=\frac{16}{5},n=-\frac{8}{5}$,所以 $m+n=\frac{8}{5}$.

综上, $m+n=1$ 或 $\frac{8}{5}$.16. $[-2,4+4\sqrt{2}]$

提示:由 $AB=4,AD=2,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AD}|\cos\angle DAB=4\sqrt{2}$,得 $\cos\angle DAB=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $0^\circ<\angle DAB<180^\circ$,所以 $\angle DAB=45^\circ$.以 A 为原点, AB 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系,如图所示,



(第 16 题图)

设 $P(x,\sqrt{2})$, $\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}+4$,则 $\overrightarrow{PA}=(-x,-\sqrt{2}),\overrightarrow{PB}=(4-x,-\sqrt{2})$.所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-x(4-x)+2=x^2-4x+2=(x-2)^2-2$.

因为 $\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}+4$,所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\in[-2,4+4\sqrt{2}]$.

四、解答题

17.(1)证明:根据题意,得 a,b 为非零向量,假设 a,b 共线,则 $\exists k\in\mathbf{R}$,使得 $b=ka$,即 $e_1+3e_2=k(e_1-2e_2)$,所以 $(1-k)e_1+(3+2k)e_2=0$.因为 e_1,e_2 不平行,所以 $\begin{cases} 1-k=0, \\ 3+2k=0, \end{cases}$ 该方程组无实数解.所以 a,b 共线不成立,即 a,b 不共线,所以 a,b 是平面向量的一组基底.

(2)解:设 $c=xa+yb=x(e_1-2e_2)+y(e_1+3e_2)=(x+y)e_1+(3y-2x)e_2$,其中 $x,y\in\mathbf{R}$,

又 $c=3e_1-e_2$,由平面向量基本定理,得 $\begin{cases} x+y=3, \\ 3y-2x=-1, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$ 所以 $c=2a+b$.

18.解:(1)由 $a=(1,3)$,得 $|a|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.(2)由 $a=(1,3),b=(-2,1)$,得 $m=a-2b=(5,1),n=\frac{1}{2}a+b=\left(-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$.(3)向量 m 与 n 不平行.理由如下:由(2)知, $m=(5,1),n=\left(-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$.

因为 $5\times\frac{5}{2}-1\times\left(-\frac{3}{2}\right)=14\neq0$,所以向量 m 与 n 不平行.

19.解:(1)因为 $a=(1,2),b=(1,1)$,所以 $a+\lambda b=(\lambda+1,\lambda+2)$.由 a 与 $a+\lambda b$ 的夹角为锐角,得 $a\cdot(a+\lambda b)>0$ 且 a 与 $a+\lambda b$ 不共线,

所以 $\begin{cases} \lambda+1+2(\lambda+2)>0, \\ \lambda+2\neq2(\lambda+1), \end{cases}$ 解得 $\lambda>-\frac{5}{3}$ 且 $\lambda\neq0$.

所以实数 λ 的取值范围为 $\left(-\frac{5}{3},0\right)\cup(0,+\infty)$.

(2)由已知,得 $a+b=(2,3),(a+b)\cdot a=2\times1+3\times2=8$,

$|a|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

所以 $a+b$ 在 a 上的投影向量为 $\frac{(a+b)\cdot a}{|a|}\cdot\frac{a}{|a|}=\frac{8}{5}a=\left(\frac{8}{5},\frac{16}{5}\right)$.

20.解:(1)由已知,得 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b},\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$.(2)猜想 $AF\perp DE$,证明如下:

设正方形 $ABCD$ 的边长为 1.结合(1)可得 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DE}=\left(a+\frac{1}{2}b\right)\cdot\left(\frac{1}{2}a-b\right)=\frac{1}{2}a^2-\frac{3}{4}a\cdot b-\frac{1}{2}b^2=\frac{1}{2}\times1^2-\frac{3}{4}\times0-\frac{1}{2}\times1^2=0$.所以 $\overrightarrow{AF}\perp\overrightarrow{DE}$,即 $AF\perp DE$.

21.解:(1)由题意可得 $\overrightarrow{OA}=(6,0),\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=(3,0),\overrightarrow{CO}=(-1,-\sqrt{3}),\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OM}=(2,-\sqrt{3})$,故 $\cos\angle OCM=\frac{\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CM}}{|\overrightarrow{CO}|\cdot|\overrightarrow{CM}|}=\frac{\sqrt{7}}{14}$.

(2)设 $P(t,\sqrt{3})$,其中 $1\leq t\leq5$,则 $\overrightarrow{OA}-\lambda\overrightarrow{OP}=(6-\lambda t,-\sqrt{3}\lambda)$.又 $\overrightarrow{CM}=(2,-\sqrt{3})$,若 $(\overrightarrow{OA}-\lambda\overrightarrow{OP})\perp\overrightarrow{CM}$,则 $(\overrightarrow{OA}-\lambda\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{CM}=12-2\lambda t+3\lambda=0$,可得 $(2t-3)\lambda=12$.

当 $t\neq\frac{3}{2}$ 时, λ 存在,此时, $\lambda=\frac{12}{2t-3}$,因为 $t\in\left[1,\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},5\right]$,故 λ 的取值范围为 $(-\infty,-12]\cup\left[\frac{12}{7},+\infty\right)$.

22.(1)解:猜想 $\overrightarrow{CD}=(1-\lambda)a+\lambda b$,证明如下:

因为 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}$,所以 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+\lambda(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=(1-\lambda)\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{CB}=(1-\lambda)a+\lambda b$.

(2)①解:若 $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MB},\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{NA}$,则 $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.由 A,O,M 三点共线,设 $\overrightarrow{AO}=\mu\overrightarrow{AM}$,则 $\overrightarrow{CO}=(1-t)\overrightarrow{CA}+\mu\overrightarrow{CM}=(1-t)a+\frac{\mu}{3}b$.由 B,O,N 三点共线,设 $\overrightarrow{BO}=\mu\overrightarrow{BN}$,则 $\overrightarrow{CO}=\mu\overrightarrow{CN}+(1-\mu)\overrightarrow{CB}=\frac{\mu}{2}a+(1-\mu)b$.因为 a 与 b 不共线,所以 $\begin{cases} 1-t=\frac{\mu}{2}, \\ \frac{1}{3}=1-\mu, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} t=\frac{3}{5}, \\ \mu=\frac{4}{5}. \end{cases}$ 所以 $\overrightarrow{CO}=\frac{2}{5}a+\frac{1}{5}b$.②证明:因为 $\overrightarrow{CP}=x\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CQ}=y\overrightarrow{CB}(x>0,y>0)$,所以 $a=\frac{1}{x}\overrightarrow{CP},b=\frac{1}{y}\overrightarrow{CQ}$.所以 $\overrightarrow{CO}=\frac{2}{5}a+\frac{1}{5}b=\frac{2}{5x}\overrightarrow{CP}+\frac{1}{5y}\overrightarrow{CQ}$.因为 P,O,Q 三点共线,所以 $\frac{2}{5x}+\frac{1}{5y}=1$,得 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=5$.所以 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$ 为定值.

数学人教 A

一、单项选择题

1.C

提示:由余弦定理的推论,得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{9+16-4}{2\times3\times4}=\frac{7}{8}$.故选 C.

2.B

提示:由余弦定理,得 $b^2=a^2+c^2-2accosB=(a+c)^2-2ac-2accosB=7^2-2\times8-2\times8cos\frac{\pi}{3}=25$,所以 $b=5$.故选 B.

3.B

提示:由正弦定理及 $B=\frac{\pi}{4},AC=\sqrt{2}$,得 $\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{\pi}{4}}=2$,所以 $BC=2\sin A$.当 $BC=\sqrt{3}$ 时, $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$,充分性不成立;反之,当 $A=\frac{\pi}{3}$ 时, $BC=2\sin A=\sqrt{3}$,必要性成立.所以 " $BC=\sqrt{3}$ " 是 " $A=\frac{\pi}{3}$ " 的必要不充分条件.故选 B.

4.D

提示:由向量加法的平行四边形法则知,其中两向量的和向量应该与第三个向量的方向相反,结合选项可知选 D.

5.B

提示:根据题意,得 $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=1\times1\times\cos\pi+0+0+2\times2\times\cos0=3$.故选 B.

6.D

提示:由 $\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{OG}$,得 $\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{OG}$,化简得 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$,所以点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心.故选 D.

7.B

提示:由正弦定理及 $(a+c)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$,得 $(a+c)(a-c)=b(a-b)$,即 $a^2+b^2-c^2=ab$.所以 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$.又 $C\in(0,\pi)$,所以 $C=\frac{\pi}{3}$.故选 B.

8.A

提示:根据题意,得 $AB\perp BC,AD=4\sqrt{3},DC=2\sqrt{7}$, $\angle BAC=90^\circ-49^\circ=41^\circ$, $\angle DAC=49^\circ-19^\circ=30^\circ$,在 $\triangle ACD$ 中,由余弦定理,得 $DC^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cdot\cos30^\circ$,即 $28=AC^2+48-12AC$,整理得 $(AC-2)(AC-10)=0$,因为 $\angle ADC>90^\circ$,所以 $AC=10$.所以 $BC=AC\cdot\sin41^\circ\approx10\times0.66=6.6$.故选 A.

9.BC

提示:根据题意,得 $AB\sin B<AC<AB\Rightarrow\frac{3}{2}<AC<\sqrt{3}$.故选 BC.

二、多项选择题

10.BCD

提示:因为 $A=120^\circ$,所以 $a>b$.又 a,b 是方程 $x^2-12x+35=0$ 的两个根,则 $a=7,b=5$,所以 $a-b=2$,故 A 错误,B 正确;根据余弦定理,得 $a^2=b^2+c^2-2bccosA$,即 $49=25+c^2-2\times5\times ccos120^\circ$,解得 $c=3$,或 $c=-8$ (舍去),故 C 正确; $b+c-a=5+3-7=1$,故 D 正确.故选 BCD.

11.AC

提示:由题意,如图所示,

$|\overrightarrow{AB}|=10,|\overrightarrow{AC}|=10\sqrt{3}$,且 $AC\perp AB$.作平行四边形 $ABCD$,则 $|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2}=\sqrt{10^2+(10\sqrt{3})^2}=20$,且 $\tan\angle DAC=\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{10}{10\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $\angle DAC=30^\circ$.所以船出发时行驶速度的大小为 20km/h,方向为北偏西 30° .故选 AC.

12.BC

提示:在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理,得 $\cos\angle ACB=\frac{BC^2+AC^2-AB^2}{2BC\cdot AC}=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}=-\frac{1}{2}$,又 $\angle ACB\in(0,180^\circ)$,所以 $\angle ACB=120^\circ$,故 A 错误;若 CD 是中线,则 $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$,所以 $\overrightarrow{CD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})^2=\frac{1}{4}\times[25+2\times5\times3\times\cos120^\circ+9]=\frac{19}{4}$,得 $CD=\frac{\sqrt{19}}{2}$.故 B 正确;若 CD 是角平分线,由角平分线定理,得 $\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}=\frac{5}{3}$,所以 $AD=\frac{5}{8}AB=\frac{25}{4}$, $BD=\frac{3}{8}AB=\frac{15}{4}$.由余弦定理,得 $CD^2=AD\cdot BD-AD\cdot BD\cdot\cos120^\circ=\frac{25}{4}\cdot\frac{15}{4}-\frac{25}{4}\cdot\frac{15}{4}\cdot(-\frac{1}{2})=\frac{375}{16}$,所以 $CD=\frac{5\sqrt{39}}{4}$.故 C 正确.故选 BC.

提示:在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理,得 $\cos\angle ACB=\frac{BC^2+AC^2-AB^2}{2BC\cdot AC}=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}=-\frac{1}{2}$,又 $\angle ACB\in(0,180^\circ)$,所以 $\angle ACB=120^\circ$,故 A 错误;若 CD 是中线,则 $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$,所以 $\overrightarrow{CD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})^2=\frac{1}{4}\times[25+2\times5\times3\times\cos120^\circ+9]=\frac{19}{4}$,得 $CD=\frac{\sqrt{19}}{2}$.故 B 正确;若 CD 是角平分线,由角平分线定理,得 $\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}=\frac{5}{3}$,所以 $AD=\frac{5}{8}AB=\frac{25}{4}$, $BD=\frac{3}{8}AB=\frac{15}{4}$.由余弦定理,得 $CD^2=AD\cdot BD-AD\cdot BD\cdot\cos120^\circ=\frac{25}{4}\cdot\frac{15}{4}-\frac{25}{4}\cdot\frac{15}{4}\cdot(-\frac{1}{2})=\frac{375}{16}$,所以 $CD=\frac{5\sqrt{39}}{4}$.故 C 正确.故选 BC.

高一必修(第二册)答案页第 1 期

$3\times\cos120^\circ+9]=\frac{19}{4}$,得 $CD=\frac{\sqrt{19}}{2}$,故 B 正确;若 CD 是角平分线,由 $S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}=S_{\triangle ABC}$,得 $\frac{1}{2}\times5CD\sin60^\circ+\frac{1}{2}\times3CD\sin60^\circ=\frac{1}{2}\times5\times3\times\sin120^\circ$,解得 $CD=\frac{15}{8}$,故 C 正确;

若 D 是线段 AB 的三等分点,则 $\overrightarrow{CD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ 或 $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$,所以 $\overrightarrow{CD}^2=\frac{4}{9}\times25+\frac{4}{9}\times5\times3\times\cos120^\circ+\frac{1}{9}\times9=\frac{79}{9}$,或 $\overrightarrow{CD$