4.AD　**提示**：$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\ln x+1-a$. 对于A，当$a=0$时，$f'(x)=\ln x+1$，当$x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，当$x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，所以当$x=\frac{1}{e}$时，函数$f(x)$取得极小值也是最小值，$f(x)_{min}=f\left(\frac{1}{e}\right)=1-\frac{1}{e}$，故A正确；对于B，当$a=1$时，$f'(x)=\ln x$，当$x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，所以当$x=1$时，函数$f(x)$取得极小值，则$x=1$为极小值点，故B错误；对于C，假设存在实数$a$，使得函数$f(x)$在定义域上单调递增，此时$f'(x)\geqslant0$在$(0,+\infty)$上恒成立，即$\ln x+1-a\geqslant0$在$(0,+\infty)$上恒成立，所以$a\leqslant(\ln x+1)_{min}$，又函数$y=\ln x+1$在$(0,+\infty)$上单调递增且值域为$\mathbf{R}$，所以函数$y=\ln x+1$无最小值，则不存在实数$a$，使得函数$f(x)$在定义域上单调递增，故C错误；对于D，若$f(x)\geqslant0$恒成立，即$a\leqslant\ln x+\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上恒成立，令$g(x)=\ln x+\frac{1}{x}(x>0)$，得$g'(x)=\frac{x-1}{x^2}$，当$x\in(0,1)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，当$x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，所以当$x=1$时，$g(x)$取得极小值也是最小值，$g(x)_{min}=g(1)=1$，所以$a\leqslant1$，故D正确.故选AD.

专项训练(2)

1.AC　**提示**：由$y=f(x+3)$的图象关于直线$x=-3$对称，得$y=f(x)$的图象关于y轴对称，则$f(x)$是偶函数，故B错误；$f(x)=f(x+4)+f(2)$中，令$x=-2$，得$f(-2)=2f(2)$，又$f(-2)=f(2)$，所以$f(2)=2f(2)$，得$f(2)=0$，故A正确；因为$f(x)=f(x+4)+f(2)$，$f(2)=0$，所以$f(x)=f(x+4)$，即$f(x)$是周期为4的周期函数，故C正确；由$f(x)$是周期为4的周期函数，且$f(x)$是偶函数，得$f(0)=f(-4)$，$f(3)=f(-1)=f(1)$，由题意，得$f(x)$在$[0,2]$上单调递增，则$f(1)>f(0)$，所以$f(3)>f(-4)$，故D错误.故选AC.

2.ABC　**提示**：对于A，$f'(x)=\ln(x+2)+\frac{x}{x+2}$，当$x\in(0,+\infty)$时，$\ln(x+2)>0$，$\frac{x}{x+2}>0$，所以$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，故A正确；对于B，令$x\ln(x+2)=0$，解得$x=0$或$x=-1$，所以$f(x)$有两个零点，故B正确；对于C，曲线$y=f(x)$在点$(-1,f(-1))$处切线的斜率为$f'(-1)=-1$，故C正确；对于D，函数$f(x)$的定义域为$(-2,+\infty)$，关于原点不对称，则$f(x)$是非奇非偶函数，故D错误.故选ABC.

3.AC　**提示**：$g(x)$有4个零点等价于$g(x)=0$有4个根.由$g(x)=[f(x)]^2-(m-1)f(x)-m=[f(x)+1][f(x)-m]=0$，解得$f(x)=-1$或$f(x)=m$，所以$g(x)$有4个零点等价于函数$y=f(x)$的图象与直线$y=-1$和直线$y=m$共有4个交点.当$x\geqslant0$时，$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$.由$f'(x)>0$，得$x>1$，由$f'(x)<0$，得$0<x<1$，则$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，且$f(0)=-1$，$f(1)=-2$.作出$f(x)$的大致图象(图略)，由图可知，函数$y=f(x)$的图象与直线$y=-1$有2个交点，所以$g(x)$有4个零点等价于函数$y=f(x)$的图象与直线$y=m$有2个交点，且$m\neq-1$，所以$m\in(-2,-1)\cup\{0\}$.故选AC.

4.BCD　**提示**：由$f(x)=e^x\cdot x^3$，得$f'(x)=x^2(x+3)e^x$，所以当$x>-3$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，当$x<-3$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，所以$f(x)$在$x=-3$处取得极小值，也是最小值，没有极大值，故A错误；当$x>-3$时，$f(x)$单调递增，且$-3<e^{-2}<1<\ln\pi$，所以$f(e^{-2})<f(1)<f(\ln\pi)$，故B正确；因为$f(x)_{min}=f(-3)=-\frac{27}{e^3}<0$，且当$x\to-\infty$时，$f(x)\to0$且$f(x)<0$，当$x\to+\infty$时，$f(x)\to+\infty$，所以函数$f(x)$只有1个零点，故C正确；$f(x)=kx$，即$e^x\cdot x^3=kx$有一个根为$x=0$，当$x\neq0$时，方程为$e^x\cdot x^2=k$，令$h(x)=e^x\cdot x^2$，则$h'(x)=x(x+2)e^x$，当$x>0$或$x<-2$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，当$-2<x<0$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，又$h(-2)=\frac{4}{e^2}$，$h(0)=0$，所以当$0<k<\frac{4}{e^2}$时，$y=h(x)$的图象与$y=k$有3个交点，此时$e^x\cdot x^2=k$有3个实数根，则$f(x)=kx$有4个实数解，故D正确.故选BCD.

专项训练(3)

1.ABD　**提示**：因为$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=-f(x)$，所以$f(x)$为奇函数，$f(0)=0$，故A正确；由题意，得$f(1)=1-2=-1$，所以$f(-1)=-f(1)=1$，故B正确；当$x>0$时，$f(x)=x^2-\frac{2}{x}$，因为函数$y=x^2$与$y=-\frac{2}{x}$在$(0,+\infty)$上都是增函数，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，又$f(x)$为奇函数，所以$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增，故C错误；当$x<0$时，$-x>0$，则$f(-x)=x^2+\frac{2}{x}$，所以$f(x)=-f(-x)=-x^2-\frac{2}{x}$，又$f(x)$在$(-1,0)$上单调递增，所以$f(x)>f(-1)=1$，且$x\to0$时，$f(x)\to+\infty$，所以$\exists x\in(-1,0)$，$f(x)>2$，故D正确.故选ABD.

2.ABC　**提示**：令$x=y=0$，则$f(0)+f(0)=2f(0)^2$，又$f(0)\neq0$，则$f(0)=1$，故A正确；令$x=0$，则$f(y)+f(-y)=2f(0)f(y)$，又$f(0)=1$，则$f(-y)=f(y)$，所以函数$f(x)$是偶函数，故B正确；令$x=\frac{1}{2}$，则$f\left(\frac{1}{2}+y\right)+f\left(\frac{1}{2}-y\right)=2f\left(\frac{1}{2}\right)f(y)$，因为$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，所以$f\left(\frac{1}{2}+y\right)+f\left(\frac{1}{2}-y\right)=0$，令$y=\frac{1}{2}-x$，得$f(1-x)+f(x)=0$，所以$f(1+x)=-f(-x)=-f(x)$，故C正确，D错误.故选ABC.

3.AB　**提示**：$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，$f'(x)=(x^2+x)e^x=x(x+1)e^x$，令$f'(x)>0$，解得$x<-1$或$x>0$，令$f'(x)<0$，解得$-1<x<0$，所以$f(x)$在$(-\infty,-1)$，$(0,+\infty)$上单调递增，在$(-1,0)$上单调递减，则$f(x)$在$x=-1$处取得极大值，在$x=0$处取得极小值，即$f(x)$有两个极值点，故A正确；又$f(1)=e$，$f'(1)=2e$，所以$f(x)$在$x=1$处的切线方程为$y-e=2e(x-1)$，即$y=2ex-e$，故B正确；因为$f(-1)=\frac{3}{e}>1$，$f(0)=1$，$f(1)=e$，所以$f(x)$在$[-1,1]$上的值域为$[1,e]$，故C错误；方程$f(x)=a$的解的个数，即函数$y=f(x)$的图象与直线$y=a$的交点个数，因为$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$，$e^x>0$，所以$f(x)=(x^2-x+1)e^x>0$恒成立，所以当$0<a<1$时，函数$y=f(x)$的图象与直线$y=a$有1个交点，当$a\leqslant0$时，函数$y=f(x)$的图象与直线$y=a$没有交点，故D错误.故选AB.

4.ACD　**提示**：对于A，$f'(x)=x(x-1)e^x$，当$x<0$或$x>1$时，$f'(x)>0$，$0<x<1$时，$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$(-\infty,0)$和$(1,+\infty)$上单调递增，$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，故A正确；对于B，函数$f(x)=e^x(x^2-3x+3)=e^x\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]>0$，故B错误；对于C，$f(0)=3$，$f(1)=e$，当$x\to+\infty$时，$f(x)\to+\infty$，当$x\to-\infty$时，$f(x)\to0$，故C正确；对于D，作出$f(x)$的大致图象(图略)，又$f(0)=3$，$f(2)=e^2>3$，所以$0\leqslant t<2$，又$t\in\mathbf{Z}$，则$t=0$或1，即$t$的最大值为1，故D正确.故选ACD.

专项训练(4)

1.ACD　**提示**：因为函数$y=xf(x)$是$\mathbf{R}$上的偶函数，$y=x$是$\mathbf{R}$上的奇函数，所以$y=f(x)$是$\mathbf{R}$上的奇函数，又$f(x-1)+f(x+3)=0$，令$x-1=t$，则$x=t+1$，所以$f(t)+f(t+4)=0$　①，所以$f(-t+4)=-f(-t)=f(t)$，所以$f(x)$的图象关于直线$x=2$对称，故A正确；由①得，$f(t+4)=-f(t)$，所以$f(t+8)=-f(t+4)=f(t)$，则$f(x)$是以8为周期的周期函数，故B错误；当$x\in[-2,0]$时，$f(x)=2^x-2^{-x}+x$为增函数，所以$f(x)$在$(0,2]$上单调递增，故C正确；因为$2023=253\times8-1$，所以$f(2023)=f(-1)$，又$0.5^{0.2}>0.5^1=0.5$，所以$f(-1)<f\left(\frac{1}{2}\right)<f(0.5^{0.2})$，故D正确.故选ACD.

2.BCD　**提示**：由$a>0$，$b<0$，$c<0$，得当$x<0$时，函数值恒小于零，无负零点，故不可能是A；当$b-ac>0$，如$b=-1$，$a=2$，$c=-1$时，$f(x)=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$，定义域为$\{x|x\neq1\}$，该函数图象和B相符，故可能是B；当$b-ac<0$时，如$b=-2$，$a=1$，$c=-1$时$f(x)=\frac{x-2}{(x-1)^2}$，该函数图象和C相符，故可能是C；当$b=ac$，如$a=1$，$b=c<0$时，$f(x)=\frac{1}{x+c}$，故可能是D.故选BCD.

3.ABC　**提示**：在同一坐标系中，分别作出$y=e^x-1$与$y=-x^2-4x-4$的图象(图略)，当$m>0$时，$y=e^x-1(x\geqslant m)$没有零点，$y=-x^2-4x-4(x<m)$有一个零点，所以函数$f(x)$有一个零点；当$-2<m\leqslant0$时，$y=e^x-1(x\geqslant m)$有一个零点，$y=-x^2-4x-4(x<m)$有一个零点，所以函数$f(x)$有两个零点；当$m\leqslant-2$时，$y=e^x-1(x\geqslant m)$有一个零点，$y=-x^2-4x-4(x<m)$没有零点，所以函数$f(x)$有一个零点，所以函数$f(x)$至多有2个零点，至少有1个零点，故A，C正确；当$m<-3$时，$y=e^x-1(x\geqslant m)$是增函数，$y=-x^2-4x-4(x<m)$也是增函数，且$y=e^x-1>-1(x\geqslant m)$，$y=-x^2-4x-4<-1(x<m)$，所以$f(x)$是增函数，故B正确；当$m=0$时，$f(x)=\begin{cases}e^x-1,x\geqslant0,\\-x^2-4x-4,x<0,\end{cases}$由$f(t)=0$，得$t_1=0$，$t_2=-2$，由$f(f(x))=0$，得$f(x)=0$或$f(x)=-2$，由$f(x)=0$，得$x_1=0$，$x_2=-2$，由$f(x)=-2$，得$x_3=-2+\sqrt{2}$，$x_4=-2-\sqrt{2}$，所以当$m=0$时，方程$f(f(x))=0$有4个不同的实数根，故D错误.故选ABC.

4.AD　**提示**：$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{-2x^2+1}{x}$，当$0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，当$x>\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，所以函数$f(x)$在$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$处取得极大值，也是最大值，故A正确；由A项知，$f(x)$在$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$上单调递减，故B错误；$f(x)_{max}=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}<0$，当$x\to0$时，$f(x)\to-\infty$，当$x\to+\infty$时，$f(x)\to-\infty$，作出函数$f(x)$的大致图象(图略)，则$f(x)$在$(0,+\infty)$上无零点，故C错误；$f(x)<e^x-x^2-2$恒成立，即$e^x-\ln x-2>0$恒成立，令$h(x)=e^x-\ln x-2(x>0)$，则$h'(x)=e^x-\frac{1}{x}$，易知$h'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$h'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$，$h'(1)=e-1>0$，所以$h'(x)$在$(0,+\infty)$上存在唯一零点$x_0$，且$\frac{1}{2}<x_0<1$，由$h'(x_0)=0$，得$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，当$x\in(0,x_0)$，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，当$x\in(x_0,+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，所以$h(x)_{min}=h(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-2=\frac{1}{x_0}+x_0-2$，又$\frac{1}{2}<x_0<1$，所以$\frac{1}{x_0}+x_0-2>1+1-2=0$，即$h(x)_{min}>0$，则$h(x)>0$在$(0,+\infty)$上恒成立，故D正确.故选AD.

专题七　统计与概率

专项训练(1)

1.ABD　**提示**：两件都是一等品的概率是$\frac{C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{6}$，故A正确；两件中有1件是次品的概率是$\frac{C_3^1}{C_4^2}=\frac{1}{2}$，故B正确；两件都是正品的概率是$\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{1}{2}$，故C错误；两件中至少有1件是一等品的概率是$1-\frac{C_2^2}{C_4^2}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$，故D正确.故选ABD.

2.ACD　**提示**：对于A，高一年级学生中男生所占比例为$\frac{5}{9}$，所以男生样本容量为$180\times\frac{5}{9}=100$，故A正确；对于B，C，女生样本容量为$180-100=80$，所以抽取的样本的均值为$\frac{100\times170+80\times161}{180}=166$，故B错误，C正确；对于D，抽取的样本的方差为$\frac{1}{180}\times[100\times(19+(170-166)^2)+80\times(28+(161-166)^2)]=43$，故D正确.故选ACD.

3.ACD　**提示**：由展开式共有7项，得$n=6$，所以所有项的二项式系数和为$2^6=64$，故A正确；令$x=1$，则展开式的所有项的系数和为$\left(1+\frac{1}{2}\right)^6=\frac{729}{64}$，故B错误；二项式系数最大项为第4项，故C正确；展开式的通项为$T_{r+1}=C_6^rx^{6-r}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^r=C_6^r\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^r\cdot x^{6-\frac{3}{2}r}$，$r=0,1,2,\cdots,6$，所以当$r=0,2,4,6$时，为有理项，则有理项共有4项，故D正确.故选ACD.

4.BCD　**提示**：由题意，知$\frac{8}{27}+\frac{4}{9}+m+\frac{1}{27}=1$，解得$m=\frac{2}{9}$，所以$E(\xi)=0\times\frac{8}{27}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{1}{27}=1$，$D(\xi)=\frac{8}{27}\times(-1)^2+\frac{4}{9}\times0^2+\frac{2}{9}\times1^2+\frac{1}{27}\times2^2=\frac{2}{3}$，$P(0\leqslant\xi\leqslant1)=\frac{8}{27}+\frac{4}{9}=\frac{20}{27}$.故选BCD.

专项训练(2)

1.ABC　**提示**：由题意，得$\bar{x}=\frac{5+6+8+9+12}{5}=8$，$\bar{y}=\frac{17+20+25+28+35}{5}=25$，所以样本点的中心为$(8,25)$，故A正确；把$(8,25)$代入$\hat{y}=2.6x+\hat{a}$，得$25=2.6\times8+\hat{a}$，解得$\hat{a}=4.2$，故B正确；当$x=5$时，$\hat{y}=2.6\times5+4.2=17.2$，则残差为$17-17.2=-0.2$，故C正确；由相关系数公式，可知去掉样本点$(8,25)$后，$x$与$y$的样本相关系数$r$不变，故D错误.故选ABC.

2.BC　**提示**：对于A，该学校男生中经常体育锻炼的概率的估计值为$\frac{40}{50}=\frac{4}{5}$，故A错误；对于B，经常体育锻炼的概率的估计值男生为$\frac{4}{5}$，女生为$\frac{30}{50}=\frac{3}{5}$，$\frac{4}{5}>\frac{3}{5}$，故B正确；对于C，$\chi^2\approx4.762>3.841$，故有95%的把握认为男、女生在体育锻炼的经常性方面有差异，故C正确；对于D，$\chi^2\approx4.762<6.635$，所以没有99%的把握认为男、女生在体育锻炼的经常性方面有差异，故D错误.故选BC.

3.AC　**提示**：对于A，先将5位志愿者分成3组，每组至少一人，则每组人数分别为3，1，1或2，2，1，再将这三组志愿者分配给3所学校，则不同的安排方法种数为$\left(C_5^3+\frac{C_5^2C_3^2}{A_2^2}\right)\times A_3^3=150$种，故A正确；对于B，若甲学校至少安排两人，则甲学校安排2人或3人，则不同的安排方法有$(C_5^2C_3^2+C_5^3)\times A_2^2=80$种，故B错误；对于C，因为小晗被安排到三个学校的任意一个学校是等可能的，所以小晗被安排到甲学校的概率为$\frac{1}{3}$，故C正确；对于D，记事件A为“小晗被安排到甲学校”，事件B为“甲学校安排两人”，则$P(A)=\frac{1}{3}$，$P(AB)=\frac{C_4^1C_3^2A_2^2}{150}=\frac{4}{25}$，所以$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{12}{25}$，故D错误.故选AC.

4.ABC　**提示**：由题意知$\xi\sim B\left(5,\frac{2}{3}\right)$，则$X=10\xi-5(5-\xi)=15\xi-25$，所以$E(\xi)=5\times\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$，$D(\xi)=5\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{10}{9}$，故A正确；所以$P(X\leqslant5)=P(\xi\leqslant2)=P(\xi=0)+P(\xi=1)+P(\xi=2)=C_5^0\times\left(\frac{1}{3}\right)^5+C_5^1\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^4+C_5^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{17}{81}$，故B正确；$E(X)=15E(\xi)-25=25$，故C正确；$D(X)=15^2D(\xi)=15^2\times\frac{10}{9}=250$，故D错误.故选ABC.

专项训练(3)

1.ACD　**提示**：由$120\,000:75\,000:55\,000=24:15:11$，得从高中生中抽取的人数为$\frac{11}{24+15+11}\times2000=440$，故A正确；每名学生被抽到的概率为$\frac{2000}{120\,000+75\,000+55\,000}=\frac{1}{125}$，故B错误；从小学生中抽取的人数为$\frac{24}{24+15+11}\times2000=960$，从初中生中抽取的人数为$\frac{15}{24+15+11}\times2000=600$，则估计该地区中小学生总体的平均近视率为$\frac{960\times0.3+600\times0.7+440\times0.8}{960+600+440}\times100\%=53\%$，故C正确；估计高中学生的近视人数约为$55\,000\times80\%=44\,000$，故D正确.故选ACD.

2.AB　**提示**：由频率分布直方图，可知$0.01\times5+0.07\times5+0.06\times5+m\times5+0.02\times5=1$，解得$m=0.04$，故A正确；由频率分布直方图，可估计该样本的均值是$0.05\times77.5+0.35\times82.5+0.3\times87.5+0.2\times92.5+0.1\times97.5=87.25$(分)，故B正确；由频率分布直方图，得第1到5组的频率依次为0.05，0.35，0.3，0.2，0.1，所以第60百分位数在区间$[85,90)$内，设该样本的第60百分位数为x，则$0.05+0.35+0.06\times(x-85)=0.6$，解得$x\approx88.33$，故C错误；成绩在$[90,100)$内的频率为$(0.04+0.02)\times5=0.3$，所以全市数学素养优秀的学生约为$30\,000\times0.3=9000$(人)，故D错误.故选AB.

3.ABD　**提示**：由题意，得A_1，A_2，A_3是两两互斥的事件，故D正确；$P(A_1)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$，$P(A_2)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$，$P(A_3)=\frac{3}{10}$，$P(B|A_1)=\frac{5}{11}$，故A正确；$P(B|A_2)=\frac{4}{11}$，$P(B|A_3)=\frac{4}{11}$，所以$P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)+P(A_3B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}+\frac{1}{5}\times\frac{4}{11}+\frac{3}{10}\times\frac{4}{11}=\frac{9}{22}$，又$P(A_1B)=P(A_1)P(B|A_1)=\frac{5}{22}$，所以$P(A_1B)\neq P(A_1)P(B)$，故C错误；$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{5}{9}$，故B正确.故选ABD.

4.BD　**提示**：由题意，得该厂机器零件的质量指标Z服从正态分布$N(200,224)$，则$\mu=200$，$\sigma^2=224$，又$\sqrt{224}\approx14.97$，则$\sigma\approx14.97$，所以$Z\sim N(200,14.97^2)$.对于A，$P(185.03\leqslant Z<200)=\frac{1}{2}P(\mu-\sigma\leqslant Z\leqslant\mu+\sigma)\approx\frac{1}{2}\times0.6827=0.341\,35$，故A错误；对于B，$P(200<Z\leqslant229.94)=\frac{1}{2}P(\mu-2\sigma\leqslant Z\leqslant\mu+2\sigma)\approx\frac{1}{2}\times0.9545=0.477\,25$，故B正确；对于C，$P(185.03\leqslant Z\leqslant229.94)=\frac{1}{2}P(\mu-\sigma\leqslant Z\leqslant\mu+\sigma)+\frac{1}{2}P(\mu-2\sigma\leqslant Z\leqslant\mu+2\sigma)\approx0.341\,35+0.477\,25\approx0.8186$，故C错误；对于D，由C项知，$P(185.03\leqslant Z\leqslant229.94)=0.8186$，所以$Z$位于区间$(185.03,229.94)$内的件数约为$10\,000\times0.8186=8186$(件)，故D正确.故选BD.

扫码免费下载
习题讲解ppt

第27期

第2~3版

专题一　三角函数

专项训练(1)

1.BCD　**提示**：$-\frac{7\pi}{6}$是第二象限角，故A错误；若$\tan\alpha=2$，则$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=3$，故B正确；若圆心角为$\frac{\pi}{3}$的扇形的弧长为$\pi$，则扇形的半径为3，所以该扇形的面积$S=\frac{1}{2}\times\pi\times3=\frac{3\pi}{2}$，故C正确；终边经过点$(m,m)$的角的集合为$\left\{\alpha\middle|\alpha=\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$，故D正确.故选BCD.

2.BC　**提示**：$f(x)=\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.对于A，由$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$，得$f(x)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{6}$不对称，故A错误；对于B，由$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=0$，得$f(x)$的图象关于点$\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$对称，故B正确；对于C，当$x\in\left[-\frac{2\pi}{3},0\right]$时，$x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right]$，因为$y=\sin z$在$z\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right]$上单调递增，所以$f(x)$在$\left[-\frac{2\pi}{3},0\right]$上单调递增，故C正确；对于D，当$x\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$时，$x+\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，则$f(x)\in(-1,2]$，故D错误.故选BC.

3.ABD　**提示**：$f(x)=\sin\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)+2=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+2$，因为$f\left(\frac{11\pi}{12}\right)=3$，所以$f(x)$的图象关于直线$x=\frac{11\pi}{12}$对称，故A正确；因为$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$，所以$f(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{6},2\right)$对称，故B正确；令$2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant2x-\frac{\pi}{3}\leqslant2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得$k\pi+\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{11\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以$f(x)$的单调递增区间为$\left[k\pi+\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{11\pi}{12}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，故C错误；将函数$y=\sin2x+2$的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，可得到$y=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+2=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+2=f(x)$的图象，故D正确.故选ABD.

4.ABD　**提示**：由题意，得$A=2$，$\frac{T}{4}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$，则$T=\pi$，$\omega=2$，$f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，故A正确；因为$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=2$，则$\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以$\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\frac{\pi}{3}$，$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.对于B，当$x=-\frac{5\pi}{12}$时，$2x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}$，则$y=f(x)$的图象关于直线$x=-\frac{5\pi}{12}$对称，故B正确；对于C，将$y=f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度后，得到$y=2\sin\left(2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象，其图象关于原点不对称，故C错误；对于D，因为$f(\lambda x)=2\sin\left(2\lambda x+\frac{\pi}{3}\right)$在$[0,\pi]$上有且仅有一个零点，当$x\in[0,\pi]$时，$2\lambda x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},2\lambda\pi+\frac{\pi}{3}\right]$，所以$\pi\leqslant2\lambda\pi+\frac{\pi}{3}<2\pi$，解得$\frac{1}{3}\leqslant\lambda<\frac{5}{6}$，故D正确.故选ABD.

专项训练(2)

1.BD　**提示**：$-\frac{\pi}{6}$是第四象限角，故A错误；设扇形的半径为r，则$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot r^2=3\pi$，得$r=3\sqrt{2}$，则扇形的弧长为$\frac{\pi}{3}\times3\sqrt{2}=\sqrt{2}\pi$，故B正确；$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-A\right)=-\sin A$，$\sin(\pi-A)=\sin A$，故C错误；$\cos\alpha=\frac{-3}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}=-\frac{3}{5}$，故D正确.故选BD.

2.BC　**提示**：$2\sin15°\sin75°=2\sin15°\cos15°=\sin30°=\frac{1}{2}$，故A错误；$\frac{1+\tan15°}{1-\tan15°}=\frac{\tan45°+\tan15°}{1-\tan45°\cdot\tan15°}=\tan60°=\sqrt{3}$，故B正确；$\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故C正确；$\cos15°-\sqrt{3}\sin15°=2\sin(30°-15°)=2\sin15°\neq\sqrt{3}$，故D错误.故选BC.

3.AC　**提示**：易知$f(x)$的最小正周期为π，故A正确；由$x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$，得$2x-\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right)$，所以$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$上先减后增，故B错误；$f\left(\frac{11\pi}{12}\right)=2\cos\frac{3\pi}{2}=0$，故C正确；当$x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{12}\right)$时，$2x-\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$，$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{12}\right)$上单调递减，无最小值，故D错误.故选AC.

4.ABD　**提示**：由题意，知$\frac{\pi}{2}=\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}$，则$\omega=2$，因为将$y=f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位得到$y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$的图象，其关于$y$轴对称，所以$\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，又$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$，故A正确；$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，则$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\frac{3\pi}{2}=-2$，所以直线$x=\frac{2\pi}{3}$为函数$y=f(x)$图象的一条对称轴，故B正确；由$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}=2\neq0$，得$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$不是函数$y=f(x)$图象的一个对称中心，故C错误；由$-\frac{\pi}{2}\leqslant2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}$，得$-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}$，则$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$内单调递增，又$f(x)$在$(-a,a)$内单调递增，所以$0<a\leqslant\frac{\pi}{6}$，故D正确.故选ABD.

专项训练(3)

1.ABD　**提示**：由$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{5}$①，得$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{25}$，则$\sin\theta\cos\theta=\frac{12}{25}$，因为$\theta\in(\pi,2\pi)$，所以$\sin\theta<0$，$\cos\theta<0$，所以$\theta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，故A正确；因为$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{49}{25}$，且$\theta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，所以$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{7}{5}$②，故D正确；联立①②，解得$\sin\theta=-\frac{3}{5}$，$\cos\theta=-\frac{4}{5}$，故B正确；$\tan\theta=\frac{3}{4}$，故C错误.故选ABD.

2.AC　**提示**：由题意，得$f(x)$的最小正周期$T=\pi$，所以$\omega=2$，$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，故A正确；当$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，所以$f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$上先增后减，故B错误；$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$，故C正确；当$x\in[0,\pi]$时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{13\pi}{6}\right]$，令$f(x)=0$，即$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=0$，得$2x+\frac{\pi}{6}=\pi$或$2x+\frac{\pi}{6}=2\pi$，解得$x=\frac{5\pi}{12}$或$x=\frac{11\pi}{12}$，所以$f(x)$在$[0,\pi]$上有两个零点，分别为$\frac{5\pi}{12}$和$\frac{11\pi}{12}$，故D错误.故选AC.

3.AC　**提示**：由图象，得$A=2$，$T=2\times\left(\frac{11\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)=\pi$，则$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，$f(x)=2\cos(2x+\varphi)$，又$\frac{1}{2}\times\left(\frac{11\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{2\pi}{3}$，所以$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\cos\left(2\times\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=-2$，得$\frac{4\pi}{3}+\varphi=\pi+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即$\varphi=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=-\frac{\pi}{3}$，$f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，故A正确，B错误；由$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$，得直线$x=\frac{\pi}{6}$是函数$f(x)$的图象的对称轴，故C正确；将$f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，可得$g(x)=2\cos\left(2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin2x$的图象，其关于原点对称，不关于$y$轴对称，故D错误.故选AC.

4.ABD　**提示**：对于A，因为筒车按逆时针方向每旋转一周用时60秒，即$T=60$，所以$\omega=\frac{2\pi}{60}=\frac{\pi}{30}$rad/s，故A正确；对于B，因为当$t=0$时，盛水筒$M$位于点$P_0(3,-3\sqrt{3})$，所以$R=\sqrt{3^2+(-3\sqrt{3})^2}=6$，所以$f(0)=6\sin\varphi=-3\sqrt{3}$，即$\sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，则$\varphi=-\frac{\pi}{3}$，所以$f(t)=6\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{3}\right)$，所以$f(50)=6\sin\left(\frac{\pi}{30}\times50-\frac{\pi}{3}\right)=6\sin\frac{4\pi}{3}=-3\sqrt{3}$，故B正确；对于C，由B项知，当筒车旋转50秒时，盛水筒M的纵坐标为$-3\sqrt{3}$，设此时盛水筒M的横坐标为x，则$\sqrt{x^2+(-3\sqrt{3})^2}=6$，解得$x=\pm3$，又此时盛水筒$M$在第三象限，则$x=-3$，所以盛水筒$M$和初始点$P_0$的水平距离为$3-(-3)=6$，故C错误；对于D，令$\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，得$t=25\in(0,60]$，所以盛水筒$M$第一次到达最高点需要的时间是25s，故D正确.故选ABD.

专题二　平面向量、解三角形

专项训练(1)

1.ABD　**提示**：因为$a=\sqrt{7}$，$b=2$，$A=\frac{\pi}{3}$，由余弦定理，得$a^2=7=4+c^2-2\times2c\times\frac{1}{2}$，即$c^2-2c-3=0$，解得$c=3$，故A正确；由正弦定理，得$\frac{\sqrt{7}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{\sin B}=\frac{3}{\sin C}=2R$($R$为$\triangle ABC$外接圆半径)，所以$\sin B=\frac{\sqrt{21}}{7}$，$\sin C=\frac{3\sqrt{21}}{14}$，$R=\frac{\sqrt{21}}{3}$，所以$\triangle ABC$外接圆的面积$S=\pi R^2=\frac{7\pi}{3}$，故B正确，C错误，D正确.故选ABD.

2.BCD　**提示**：对于A，因为$a+b=(-1,2)$，$-1\times1\neq2\times2$，所以$a+b$与a不共线，故A错误；对于B，因为$a\cdot b=-5$，$|b|=\sqrt{10}$，所以向量a在向量b上的投影向量为$\frac{a\cdot b}{|b|}\cdot\frac{b}{|b|}=-\frac{1}{2}b$，故B正确；对于C，由$a-b=(5,0)$，得$a\cdot(a-b)=10$，则$\cos\langle a,a-b\rangle=\frac{a\cdot(a-b)}{|a||a-b|}=\frac{10}{\sqrt{5}\times5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，故C正确；对于D，因为$c=\left(\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$，所以$a\cdot c=0$，则$a\perp c$，故D正确.故选BCD.

3.ABD　**提示**：由$a^2+c^2-b^2=ac$及余弦定理的推论，得$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{ac}{2ac}=\frac{1}{2}$，因为$B\in(0,\pi)$，所以$B=\frac{\pi}{3}$，由正弦定理及$\sin^2B=3\sin A\sin C$，得$b^2=3ac$，又$b=1$，所以$ac=\frac{1}{3}$，所以$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{12}$，因为$a^2+c^2-b^2=ac$，所以$b^2=1=a^2+c^2-ac=(a+c)^2-3ac=(a+c)^2-1$，则$a+c=\sqrt{2}$，所以$\triangle ABC$的周长为$\sqrt{2}+1$.故选ABD.

4.AD　**提示**：对于A，因为$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，所以$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，故A正确；对于B，由$\angle BAC=90°$，得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，又$AB=3$，所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\times3^2=3$，故B错误；对于C，由$AB=AC=3$，得$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}\overrightarrow{AB}^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{4}{9}\cdot\overrightarrow{AC}^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$，故C错误；对于D，因为$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}$，所以$(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，故D正确.故选AD.

专项训练(2)

1.ABD　**提示**：因为向量$\boldsymbol{a}=(2,1)$，所以与向量$\boldsymbol{a}$方向相同的单位向量是$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$，故A正确；$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=(-1,2)\cdot(2,1)=0$，故B正确；向量$\boldsymbol{a}$在向量$\boldsymbol{b}$上的投影向量是$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，故C错误；又$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$，故D正确.故选ABD.

2.ACD　**提示**：由$B+D=180°$，得$\cos B+\cos D=0$，在$\triangle ABC$与$\triangle ADC$中，由余弦定理，得$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B=AD^2+DC^2-2AD\cdot CD\cos D$，即$36-16\sqrt{2}\cdot\cos B=36+16\sqrt{5}\cos D=36+16\sqrt{5}\cos B$，解得$\cos B=0$，则$B=90°$，又$B+D=180°$，所以$B=D=90°$，故A正确；$S_{ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}\times2\times4\sqrt{2}+\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{5}=4\sqrt{2}+4\sqrt{5}$，故B错误；在$Rt\triangle ABC$中，$AC^2=AB^2+BC^2=36$，则$AC=6$，故C正确；四边形$ABCD$的周长为$AB+BC+AD+CD=6+4\sqrt{2}+2\sqrt{5}$，故D正确.故选ACD.

3.BC　**提示**：由余弦定理推论及$c\cos B+b\cos C-2a\cos A=0$，得$a-2a\cos A=0$，又$a>0$，所以$\cos A=\frac{1}{2}$，则$A=\frac{\pi}{3}$，故C正确；由$b=2$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=2\sqrt{3}$，即$\frac{1}{2}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}c=2\sqrt{3}$，得$c=4$，故D错误；由余弦定理，得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=2^2+4^2-2\times2\times4\times\frac{1}{2}=12$，得$a=2\sqrt{3}$，故A错误；由正弦定理，得$\sin C=\frac{c\cdot\sin A}{a}=1$，又$C\in(0,\pi)$，所以$C=\frac{\pi}{2}$，故B正确.故选BC.

4.BC　**提示**：由$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，得$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{CD}$，因为$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=1$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}$，所以$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\angle DAB=-\frac{1}{2}$，得$\cos\angle DAB=-\frac{1}{2}$，则$\angle DAB=\frac{2\pi}{3}$，所以$\angle ADB=\angle ABD=\frac{\pi}{6}$，$\angle BDC=\angle DBC=\frac{\pi}{3}$，则$\triangle BCD$为正三角形，在$\triangle BCD$中，由余弦定理，得$BD=\sqrt{AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos\angle DAB}=\sqrt{3}$，所以以点$D$为坐标原点，以$DC$，$DA$所在直线分别为$x$轴，$y$轴，建立平面直角坐标系，则$A(0,1)$，$C(\sqrt{3},0)$，$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$，设$E(x,0)$，$x\in[0,\sqrt{3}]$，则$\overrightarrow{AE}=(x,-1)$，$\overrightarrow{BE}=\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)$，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=x^2-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}=\left(x-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\frac{21}{16}$，所以当$x=\frac{\sqrt{3}}{4}$时，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}$取最小值$\frac{21}{16}$，当$x=\sqrt{3}$时，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}$取得最大值3，所以$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}\in\left[\frac{21}{16},3\right]$.故选BC.

专题三　数　列

专项训练(1)

1.BC　**提示**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由$S_{10}=$

S_{20},得 $10a_1+45d=20a_1+190d$,即 $2a_1+29d=0$,又 $a_1>0$,所以 $d=-\frac{2}{29}a_1<0$,故 A 错误;由 $2a_1+29d=0$,得 $a_1+14d+a_1+15d=0$,即 $a_{15}+a_{16}=0$,所以 $a_{15}>0,a_{16}<0$,故 B 正确;由 $d<0$,得 $\{a_n\}$ 是递减数列,且 $1\leqslant n\leqslant 15$ 时,$a_n>0$,当 $n\geqslant 16$ 时,$a_n<0$,所以 S_n 的最大值是 S_{15},故 C 正确;由 $d=-\frac{2}{29}a_1$,得 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{a_1(-n^2+30n)}{29}$,令 $S_n<0$,得 $n>30$,所以当且仅当 $S_n<0$ 时,$n\geqslant 31$,故 D 错误.故选BC.

2.AB 提示:因为 $a_n-3a_{n+1}=2a_n\cdot a_{n+1}$,所以 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{3}{a_n}=2$,则 $\frac{1}{a_{n+1}}+1=3\left(\frac{1}{a_n}+1\right)$,又 $\frac{1}{a_1}+1=2$,所以 $\left\{\frac{1}{a_n}+1\right\}$ 是以 2 为首项,3 为公比的等比数列,所以 $\frac{1}{a_n}+1=2\times 3^{n-1}$,则 $a_n=\frac{1}{2\times 3^{n-1}-1}$,所以 $\{a_n\}$ 为递减数列,$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和 $T_n=(2\times 3^0-1)+(2\times 3^1-1)+\cdots+(2\times 3^{n-1}-1)=2\times(3^0+3^1+\cdots+3^{n-1})-n=2\times\frac{1-3^n}{1-3}-n=3^n-n-1$.故选 AB.

3.AC 提示:对于 A,因为 $\frac{3S_n}{T_n}=2b_n+1$,所以当 $n=1$ 时,$\frac{3a_1}{b_1}=2b_1+1$,又 $a_1=b_1$,则 $3=2b_1+1$,得 $b_1=1,a_1=1$,故 A 正确;对于 B,当 $n=2$ 时,$\frac{3S_2}{T_2}=2b_2+1$,即 $\frac{3(a_1+a_1q_1)}{b_1+b_1q_2}=2b_1q_2+1$,将 $a_1=b_1=1,q_1=2q_2$ 代入,得 $\frac{3(1+2q_2)}{1+q_2}=2q_2+1$,即 $(2q_2+1)(q_2-2)=0$,解得 $q_2=2$ 或 $q_2=-\frac{1}{2}$,又 $\{b_n\}$ 是正项等比数列,所以 $q_2>0$,则 $q_2=2$,所以 $b_2=b_1q_2=2$,故 B 错误;对于 C,由 B 项得 $q_1=2q_2=4$,所以 $a_2=a_1q_1=4$,则 $S_2=a_1+a_2=5$,又 $T_2=b_1+b_2=3$,所以 $S_2\leqslant T_2^2$,故 C 正确;对于 D,由 B 项得 $b_3=b_2q_2=4,b_4=b_3q_2=8$,所以 $T_4=b_1+b_2+b_3+b_4=1+2+4+8=15$,则 $S_2<T_4$,故 D 错误.故选AC.

4.AC 提示:因为 $S_{n+1}=S_n+2a_n+1$,所以 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=2a_n+1$,则 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$,即 $\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$,又 $a_1+1=2$,所以数列 $\{a_n+1\}$ 是首项为 2,公比为 2 的等比数列,故 A 正确,B 错误;$a_n+1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$,则 $a_n=2^n-1$,故 C 正确;因为 $\frac{2^n}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$,所以 $T_n=\left(\frac{1}{2^1-1}-\frac{1}{2^2-1}\right)+\left(\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}<1$,故 D 错误.故选 AC.

专项训练(2)

1.BC 提示:因为等差数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1<0,S_6=S_{13}$,则 $S_{13}-S_6=a_7+a_8+\cdots+a_{13}=7a_{10}=0$,所以 $a_{10}=0,d>0$,故 $\{a_n\}$ 是递增数列,故 A 错误,B 正确;因为 $a_1<0,d>0,a_{10}=0$,所以 $S_9=S_{10}$,即 S_9 和 S_{10} 都是 $\{S_n\}$ 中的最小项,故 C 正确;因为 $S_{16}-S_2=a_3+a_4+\cdots+a_{16}=7(a_9+a_{10})=7a_9<0$,所以 $S_{16}<S_2$,故 D 错误.故选 BC.

2.BCD 提示:设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,因为 $2a_5-a_3=3$,所以 $2(a_1+4d)-(a_1+2d)=a_1+6d=a_7=3$,$a_1$ 无法确定,故 B 正确,A 错误;设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q,因为 $b_2=1,b_4=4$,所以 $b_4=b_2\cdot q^2$,即 $4=q^2$,解得 $q=\pm 2$,故 D 正确;$b_6=b_2\cdot q^4=1\times(\pm 2)^4=16$,故 C 正确.故选 BCD.

3.ABD 提示:由题意可知,$a_1=5\times(1+50\%)-1.5=6$,故 A 正确;由 $a_{n+1}=1.5a_n-1.5$,得 $a_{n+1}-3=1.5(a_n-3)$,又 $a_1-3=3$,所以数列 $\{a_n-3\}$ 是以 3 为首项,1.5 为公比的等比数列,故 B 正确,C 错误;由 C 项知,$a_n-3=3\times 1.5^{n-1}$,则 $a_n=3+3\times 1.5^{n-1}$,令 $3+3\times 1.5^{n-1}>21$,得 $n-1>\frac{\lg 6}{\lg 1.5}=\frac{\lg 3+\lg 2}{\lg 3-\lg 2}\approx 4.42$,则 $n\geqslant 6$,故至少到 2026 年的年底,企业的剩余资金会超过 21 千万元,故 D 正确.故选 ABD.

4.BCD 提示:因为 7 为质数,所以与 7^7 不互质的数为 $7,14,21,\cdots,7^7$,共有 7^6 个,所以 $\log_7\varphi(7^7)=\log_7(7^7-7^6)=6+\log_7 6$,故 A 错误;因为与 3^n 互质的数为 $1,2,4,5,7,8,10,11,\cdots,3^n-2,3^n-1$,共有 $3^n-3^{n-1}=2\cdot 3^{n-1}$ 个,所以 $\varphi(3^n)=2\cdot 3^{n-1}$,则数列 $\{\varphi(3^n)\}$ 为等比数列,故B正确;因为 $\varphi(6)=2,\varphi(5)=4$,所以 $\varphi(6)<\varphi(5)$,故数列 $\{\varphi(n)\}$ 不单调递增,又 $\varphi(9)=6>\varphi(6)=2$,所以数列 $\{\varphi(n)\}$ 不单调递减,所以数列 $\{\varphi(n)\}$ 不单调,故 C 正确;因为 $\varphi(2^n)=2^{n-1}$,所以 $\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{\varphi(2^i)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{2i}{2^i}=2\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^i}$,设 $S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2^i}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^n}$,则 $\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$,两式作差,得 $\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}$,所以 $S_n=2-\frac{n+2}{2^n}$,所以数列 $\left\{\frac{n}{\varphi(2^n)}\right\}$ 的前 n 项和为 $2S_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}<4$,故 D 正确.故选 BCD.

专项训练(3)

1.AD 提示:因为 $S_{11}<S_{10}<S_{12}$,则 $a_{11}=S_{11}-S_{10}<0,a_{12}=S_{12}-S_{11}>0$,所以 $d=a_{12}-a_{11}>0$,故 A 正确;由 $a_{11}<0,d>0$,得 $a_1=a_{11}-10d<0$,故 B 错误;由 $S_{11}<S_{10}<S_{12}$,得 $a_{11}+a_{12}=S_{12}-S_{10}>0$,所以 $S_{22}=\frac{22(a_1+a_{22})}{2}=11(a_{11}+a_{12})>0$,故 C 错误;$S_{21}=\frac{21(a_1+a_{21})}{2}=21a_{11}<0$,故 D 正确.故选AD.

2.ACD 提示:由 $a_{2023}\cdot a_{2024}>1$,得 $a_1q^{2022}\cdot a_1q^{2023}=a_1^2\cdot q^{4045}>1$,因为 $a_1>1$,则 $q>0$,所以数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数,又 $(a_{2023}-1)(a_{2024}-1)<0$,所以 $a_{2023}>1,0<a_{2024}<1$,则 $0<q<1$,故 A 正确;所以 $S_{2023}+1>S_{2023}+a_{2024}=S_{2024}$,故 B 错误;由 $a_1>a_2>\cdots>a_{2023}>1>a_{2024}>\cdots>0$,得 T_{2023} 是数列 $\{T_n\}$ 中的最大项,故 C 正确;因为 $a_1a_{4046}=a_2a_{4045}=\cdots=a_{2023}a_{2024}>1$,所以 $T_{4046}=a_1a_2\cdots a_{4046}=(a_{2023}a_{2024})^{2023}>1$,故 D 正确.故选 ACD.

3.ACD 提示:因为 $a_1=a_2=1,a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$,所以 $a_3=a_2-a_1=0,a_4=a_3-a_2=-1,a_5=a_4-a_3=-1,a_6=a_5-a_4=0,a_7=a_6-a_5=1,a_8=a_7-a_6=1,a_9=a_8-a_7=0,\cdots$,所以数列 $\{a_n\}$ 是周期为 6 的周期数列,且前六项为 $1,1,0,-1,-1,0$.所以 $a_4+a_{2023}=a_4+a_1=-1+1=0$,故 A 正确;$S_{15}=2\times(1+1+0-1-1+0)+1+1+0=2$,故 B 错误;由上述分析可知,对任意 $n\in\mathbf{N}_+,a_{n+3}+a_n=0$,故 C 正确;对任意 $m,n\in\mathbf{N}_+,a_{6m-2}=a_4=-1<a_{6n-4}=a_2=1$,故 D 正确.故选ACD.

4.ABD 提示:因为 $a_2=3$,且 $a_{n+1}=3S_n+2$,所以当 $n=1$ 时,$a_2=3S_1+2$,即 $3=3a_1+2$,得 $a_1=\frac{1}{3}$,故 A 正确;因为 $a_{n+1}=3S_n+2$ ①,所以 $a_n=3S_{n-1}+2(n\geqslant 2)$ ②,由①-②,得 $a_{n+1}-a_n=3a_n$,即 $a_{n+1}=4a_n(n\geqslant 2)$,当 $n=1$ 时,不满足 $a_2=4a_1$,所以数列 $\{a_n\}$ 不是等比数列,故 C 错误;当 $n\geqslant 2$ 时,$a_{n+1}=4a_n$,则 $a_3=4a_2=12,a_4=4a_3=48$,所以 $S_4=\frac{1}{3}+3+12+48=\frac{190}{3}$,故 B 正确;由 $a_{n+1}=3S_n+2$,得 $S_{n+1}-S_n=3S_n+2$,所以 $S_{n+1}=4S_n+2$,则 $S_{n+1}+\frac{2}{3}=4\left(S_n+\frac{2}{3}\right)$,即 $\frac{S_{n+1}+\frac{2}{3}}{S_n+\frac{2}{3}}=4$,所以数列 $\left\{S_n+\frac{2}{3}\right\}$ 是首项为 $S_1+\frac{2}{3}=a_1+\frac{2}{3}=1$,公比为 4 的等比数列,故 D 正确.故选 ABD.

第 28 期

专题四 立体几何、空间向量

专项训练(1)

1.ABC 提示:因为 $PA\perp$ 平面 ABC,所以 $PA\perp BC$,又 $AB\perp BC,PA\cap AB=A$,所以 $BC\perp$ 平面 PAB,故 A 正确;由 $PA=AB$,D 为 PB 的中点,得 $AD\perp PB$,又 $BC\perp$ 平面 PAB,所以 $BC\perp AD$,又 $PB\cap BC=B$,所以 $AD\perp$ 平面 PBC,所以 $AD\perp PC$,故 B,C 都正确;假设 $PB\perp$ 平面 ADC,则 $PB\perp CD$,又 $BC\perp$ 平面 PAB,所以 $BC\perp PB$,所以在平面 PBC 内,B 与 D 重合,与已知矛盾,故 D 错误.故选 ABC.

2.ABC 提示:连接 BD,交 AC 于点 O,易知 $AC\perp$ 平面 BB_1D_1D,又 $BE\subset$ 平面 BB_1D_1D,所以 $AC\perp BE$,故 A 正确;因为 $B_1D_1\,//$ 平面 $ABCD$,又 E,F 在线段 B_1D_1 上运动,所以 $EF\,//$ 平面 $ABCD$,故 B 正确;因为点 B 到直线 B_1D_1 的距离为 BB_1 的长度,为定值,又 $EF=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $\triangle BEF$ 的面积为定值.又点 A 到平面 BEF 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,则 V_{A-BEF} 为定值,故 C 正确;当点 E 在 D_1 处,F 为 D_1B_1 的中点时,异面直线 AE 与 BF 所成的角是 $\angle OD_1A$(或其补角),当 E 为 B_1D_1 的中点时,F 在 B_1 的位置,异面直线 AE 与 BF 所成的角是 $\angle OEA$,显然这两个角不相等,故 D 错误.故选 ABC.

3.ABC 提示:对于 A,易证 $CD\perp AB,CD\perp AA_1$,又 $AB\cap AA_1=A$,所以 $CD\perp$ 平面 ABB_1A_1,故 A 正确;对于 B,连接 AC_1,设 $AC_1\cap A_1C=O$,连接 OD,因为四边形 ACC_1A_1 是矩形,所以 O 是 AC_1 的中点,又 D 为 AB 的中点,所以 $OD\,//\,BC_1$,又 $OD\subset$ 平面 $A_1DC,BC_1\not\subset$ 平面 A_1DC,所以 $BC_1\,//$ 平面 A_1DC,故 B 正确;对于 C,由 A 项知,$CD\perp$ 平面 ABB_1A_1,又 $CD\subset$ 平面 A_1DC,所以平面 $A_1DC\perp$ 平面 ABB_1A_1,故 C 正确;对于 D,由 B 项知,$OD\,//$ 平面 BCC_1B_1,又 OD 与 A_1D 相交,所以 A_1D 与平面 BCC_1B_1 相交,故 D 错误.故选 ABC.

4.BD 提示:易知 $A_1D\perp$ 平面 ABC_1D_1,则 $A_1D\perp AC_1$,所以 A_1D 与 AF 不垂直,故 A 错误;以点 D 为原点,DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,则 $D_1(0,0,2),E(1,2,0),F(0,2,1),A(2,0,0),C(0,2,0)$,则 $\overrightarrow{CD_1}=(0,-2,2),\overrightarrow{AE}=(-1,2,0),\overrightarrow{AF}=(-2,2,1)$,设平面 AEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=-x+2y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=-2x+2y+z=0,\end{cases}$ 令 $x=2$,则平面 AEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,1,2)$,设直线 D_1C 与平面 AEF 所成角为 θ,则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{CD_1},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{CD_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{CD_1}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{2}}{6}$,故 B 正确;平面 CEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$,$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{3}$,又二面角 A-EF-C 为钝二面角,所以二面角 A-EF-C 的余弦值为 $-\frac{1}{3}$,故 C 错误;连接 BC_1,AD_1,D_1F,因为 E,F 分别是棱 BC,CC_1 的中点,所以 $EF\,//\,BC_1$,又 $AD_1\,//\,BC_1$,则 $EF\,//\,AD_1$,所以平面 AEF 截正方体所得截面为四边形 EFD_1A,由正方体的棱长为 2,得 $AD_1=2\sqrt{2},EF=\sqrt{2},AE=D_1F=\sqrt{5}$,所以平面 AEF 截正方体所得的截面周长为 $2\sqrt{5}+3\sqrt{2}$,故 D 正确.故选 BD.

专项训练(2)

1.AD 提示:$V_{A-BDM}=V_{M-BDA}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 4\times 2\times 3=4$,故 A 正确;以 A 为坐标原点,AB,AD,AA_1 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,则 $B(4,0,0),D(0,2,0),C_1(4,2,3),A_1(0,0,3),C(4,2,0),B_1(4,0,3),M(4,1,3),\overrightarrow{AC_1}=(4,2,3),\overrightarrow{BD}=(-4,2,0)$,设 AC_1 与 BD 所成角为 θ,则 $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{BD}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AC_1}|\cdot|\overrightarrow{BD}|}=\frac{6\sqrt{145}}{145}$,故 B 错误;由 $\overrightarrow{A_1C}=(4,2,-3)$,得 $|\overrightarrow{A_1C}|=\sqrt{29}$,故 C 错误;设 $\overrightarrow{AQ}=\lambda\overrightarrow{AM},\overrightarrow{CP}=\mu\overrightarrow{CC_1}$,则 $Q(4\lambda,\lambda,3\lambda),P(4,2,3\mu)$,所以 $|\overrightarrow{PQ}|^2=(4\lambda-4)^2+(\lambda-2)^2+(3\lambda-3\mu)^2=9(\lambda-\mu)^2+17\left(\lambda-\frac{18}{17}\right)^2+\frac{16}{17}\geqslant\frac{16}{17}$,当且仅当 $\lambda=\mu=\frac{18}{17}$ 时,取等号,则 PQ 的最小值为 $\frac{4\sqrt{17}}{17}$,故 D 正确.故选 AD.

2.BD 提示:对于 A,当 P 与 B 重合时,$PC_1\,//\,AD_1$,当 P 与 B 不重合时,PC_1 与 AD_1 异面,故 A 错误;对于 B,连接 AC,A_1C_1,B_1C,因为 $BD\perp AC,AA_1\perp BD,AC\cap AA_1=A_1$,所以 $BD\perp$ 平面 A_1ACC_1,所以 $BD\perp A_1C$,因为 $BC_1\perp B_1C,CD\perp BC_1$,又 $B_1C\cap CD=C$,所以 $BC_1\perp$ 平面 A_1B_1CD,所以 $BC_1\perp A_1C$,因为 $BD\cap BC_1=B$,所以 $A_1C\perp$ 平面 BDC_1,因为 $PC_1\subset$ 平面 BDC_1,所以 $A_1C\perp PC_1$,故 B 正确;对于 C,当 P 与 B 重合时,PC_1 与 BD 所成角为 $\frac{\pi}{3}$,所以 PC_1 与平面 A_1BD 不垂直,故 C 错误;对于 D,因为 $B_1D_1\,//\,BD$,所以 $BD\,//$ 平面 AB_1D_1,又 $AD_1\,//\,BC_1$,所以 $BC_1\,//$ 平面 AB_1D_1,又 $BD\cap BC_1=B$,所以平面 $BDC_1\,//$ 平面 AB_1D_1,又 $PC_1\subset$ 平面 BDC_1,所以 $PC_1\,//$ 平面 AB_1D_1,故 D 正确.故选 BD.

3.ABC 提示:以 D 为坐标原点,DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,可得 $D(0,0,0),A(2,0,0),B(2,2,0),C(0,2,0),A_1(2,0,6),B_1(2,2,6),C_1(0,2,6),D_1(0,0,6)$,因为 E,F 分别是 AB_1,B_1C 的中点,所以 $E(2,1,3),F(1,2,3)$.对于 A,由 $\overrightarrow{EF}=(-1,1,0),\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$,得 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,则 $EF\,//\,AC$,又 $EF\not\subset$ 平面 $ABCD,AC\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $EF\,//$ 平面 $ABCD$,故 A 正确;对于 B,$\overrightarrow{AF}=(-1,2,3)$,则 $|\overrightarrow{AF}|=\sqrt{14}$,故 B 正确;对于 C,平面 ADD_1A_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{AF}=(-1,2,3)$,设直线 AF 与平面 ADD_1A_1 所成角为 θ,所以 $\sin\theta=\cos|\langle\overrightarrow{AF},\overrightarrow{DC}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DC}|}{|\overrightarrow{AF}|\cdot|\overrightarrow{DC}|}=\frac{\sqrt{14}}{7}$,故 C 正确,D 错误.故选 ABC.

4.ACD 提示:对于 A,取 AD 的中点 M,连接 PM,BM,BD.因为侧面 PAD 为正三角形,所以 $PM\perp AD$.因为底面 $ABCD$ 为菱形,$\angle DAB=60°$,所以 $\triangle ABD$ 为等边三角形,所以 $BM\perp AD$.又 $AB=2$,所以 $MB=PM=\sqrt{3}$,又 $PB=\sqrt{6}$,所以 $PM^2+MB^2=PB^2$,所以 $PM\perp BM$,又 $AD\cap BM=M$,所以 $PM\perp$ 平面 $ABCD$,又 $PM\subset$ 平面 PAD,所以平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$,故 A 正确;因为 $PM\perp AD,BM\perp AD,PM\cap BM=M$,所以 $AD\perp$ 平面 PMB,又 $PB\subset$ 平面 PMB,所以 $AD\perp PB$,所以异面直线 AD 与 PB 所成的角为 90°,故 B 错误;对于 C,又 $BC\,//\,AD,AD\perp BM,AD\perp PB$,所以 $BC\perp BM,BC\perp PB$,所以 $\angle PBM$ 是二面角 P-BC-A 的平面角,大小为 45°,故 C 正确;对于 D,因为 $\triangle PAD,\triangle BAD$ 是等边三角形,过 $\triangle PAD$ 的中心 E 作 $OE\perp$ 平面 PAD,过 $\triangle BAD$ 的中心 F 作 $OF\perp$ 平面 PAD,OE 交 OF 于点 O,则 O 为三棱锥 P-ABD 外接球的球心,由已知得,$MF=\frac{1}{3}BM=\frac{\sqrt{3}}{3}=ME,BF=\frac{2\sqrt{3}}{3},OF=ME=\frac{\sqrt{3}}{3}$,则 $OB^2=OF^2+BF^2=\frac{5}{3}$,设三棱锥 P-ABD 外接球的半径为 R,则 $R^2=\frac{5}{3}$,所以外接球的表面积为 $4\pi R^2=\frac{20}{3}\pi$,故 D 正确.故选 ACD.

专项训练(3)

1.ABD 提示:对于 A,由 $n\,//\,\alpha$,得存在过直线 n 的平面 γ 与平面 α 相交,令交线为 c,则 $c\,//\,n$,由 $m\perp\alpha,c\subset\alpha$,得 $m\perp c$,所以 $m\perp n$,故 A 正确;对于 B,根据直线与平面平行的判定定理,故 B 正确;对于 C,由于 $\alpha\perp\beta$,令 $\alpha\cap\beta=l$,当 $m\,//\,l,m\not\subset\alpha$ 时,有 $m\,//\,\alpha$,此时 $m\subset\beta$ 或 $m\,//\,\beta$,当 m 与 l 不平行时,m 与 β 相交,故 C 错误;对于 D,由 $m\perp\alpha,m\subset\beta$,根据平面与平面垂直的判定定理,得 $\alpha\perp\beta$,故 D 正确.故选ABD.

2.AC 提示:由 $PA\perp$ 平面 ABC,得 $PA\perp BC$,故 A 正确;因为 C 为圆 O 上异于 A,B 的任一点,所以 $AC\perp BC$,又 $PA\perp BC,AP\cap AC=A$,所以 $BC\perp$ 平面 PAC,故 C 正确;由 $BC\perp$ 平面 PAC,得 $BC\perp PC$,故 D 错误;假设 $AC\perp PB$,又 $AC\perp BC,PB\cap BC=B$,所以 $AC\perp$ 平面 PBC,所以 $AC\perp PC$,这与 Rt$\triangle PAC$ 中,$\angle ACP$ 为锐角矛盾,故 B 错误.故选 AC.

3.BCD 提示:以 D 为原点,DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,则 $A_1(2,0,2),F(2,0,1),E(1,0,2),B_1(2,2,2),B(2,2,0),G(0,1,0),\overrightarrow{EB}=(1,2,-2),\overrightarrow{BF}=(0,-2,1),\overrightarrow{B_1G}=(-2,-1,-2),\overrightarrow{EF}=(1,0,-1),\overrightarrow{FA_1}=(0,0,1)$,则 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EB}=3$,故 A 错误;因为 $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{B_1G}=0,\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{B_1G}=0$,所以 $BE\perp B_1G,BF\perp B_1G$,又 $BE\cap BF=B$,所以 $B_1G\perp$ 平面 BEF,故 B 正确;延长 B_1B 至点 S,使得 $BS=B_1B$,则 $CS\,//\,EF$,所以 E,F,C,S 四点共面,连接 FS 与 AB 的交点就是直线 AB 与平面 EFC 的交点 P,易知 $AF=\frac{1}{2}BS$,则 $AP=\frac{1}{3}AB$,故 C 正确;由 $B_1G\perp$ 平面 BEF,得点 A_1 到平面 BEF 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{FA_1}\cdot\overrightarrow{B_1G}|}{|\overrightarrow{B_1G}|}=\frac{2}{3}$,故 D 正确.故选 BCD.

4.ABD 提示:由题意,得 $AB\perp DE,CD\perp DE$,因为 $A'D\perp DC,A'D\cap DE=D$,所以 $CD\perp$ 平面 $A'DE$,又 $CD\,//\,BE$,所以 $BE\perp$ 平面 $A'DE$,又 $BE\subset$ 平面 $A'BE$,所以平面 $A'DE\perp$ 平面 $A'BE$,故 A 正确;因为 $CD\,//\,BE,CD\not\subset$ 平面 $A'BE,BE\subset$ 平面 $A'BE$,所以 $CD\,//$ 平面 $A'BE$,又 $CD\subset$ 平面 $A'CD$,平面 $A'BE$ 与平面 $A'CD$ 的交线为 l,所以 $CD\,//\,l$,故 B 正确;由 A 项知,$BE\perp$ 平面 $A'DE$,则 $BE\perp A'E$,又 $DE\perp A'E,DE\perp BE$,所以以 E 为原点,以 EB,ED,EA' 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,则 $B(1,0,0),A'(0,0,1),C(2,\sqrt{3},0),D(0,\sqrt{3},0),\overrightarrow{BC}=(1,\sqrt{3},0)$,由 A 项知,$BE\perp$ 平面 $A'DE$,所以 $\overrightarrow{EB}=(1,0,0)$ 为平面 $A'DE$ 的一个法向量,设 BC 与平面 $A'DE$ 所成的角为 θ,所以 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{EB},\overrightarrow{BC}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{EB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\frac{1}{2}$,所以 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$,故 C 错误;易证 $DE\perp$ 平面 $A'BE$,故平面 $A'BE$ 的一个法向量为 $\overrightarrow{ED}=(0,\sqrt{3},0)$,又 $\overrightarrow{A'B}=(1,0,-1),\overrightarrow{BD}=(-1,\sqrt{3},0)$,设平面 $A'DB$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A'B}=x-z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=-x+\sqrt{3}y=0,\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$,所以 $\cos\langle\overrightarrow{ED},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{ED}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{ED}|}=\frac{\sqrt{7}}{7}$,所以二面角 E-$A'B$-D 的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$,故 D 正确.故选 ABD.

专题五 直线和圆、圆锥曲线

专项训练(1)

1.CD 提示:直线的点斜式方程不能表示斜率不存在的直线,故 A 错误;点(2,-1)不在方程 $k=\frac{y+1}{x-2}$ 所表示的直线上,但在方程 $y+1=k(x-2)$ 表示的直线上,故 B 错误;倾斜角为 90°的直线,且过点 $P_0(x_0,y_0)$,其

直线方程为 $x=x_0$,故 C 正确;由 $y-3=k(x+1)$,即 $(x+1)k-(y-3)=0$,令 $x+1=0$,且 $y-3=0$,得 $x=-1,y=3$,则该直线恒过定点(-1,3),故 D 正确.故选 CD.

2ACD 提示:对于 A,由圆 $C:x^2+y^2=4$,得圆心为 $C(0,0)$,半径 r=2,则点 C 到直线 $l:x+y-2=0$ 的距离为 $\sqrt{2}$,$|AB|=2\sqrt{r^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$,故 A 正确;对于 B,设点 D 为弦 AB 的中点,则 $CD\perp AB$,则 $d_{max}=r+|CD|=2+\sqrt{2}$,故 B 错误;对于 C,易知直线 AB 的斜率 $k_{AB}=-1$,由 $CD\perp AB$,得直线 CD 的斜率 $k_{CD}=1$,则直线 CD 的方程为 $y=x$,所以点 $N(-2,-2)$ 在直线 CD 上,则 CD 为 AB 的中垂线,所以 $\triangle ABN$ 是等腰三角形,故 C 正确;对于 D,过点 M 作 ME⊥l 于点 E,过点 N 作 NF⊥l 于点 F,则 $d=|ME|$,所以 $|MN|+d=|MN|+|ME|\geqslant|NE|\geqslant|NF|$,当且仅当 N,M,E 三点共线,且点 E 与 F 重合时,等号成立,又点 N 到直线 l 的距离为 $|NF|=3\sqrt{2}$,所以 $|MN|+d$ 的最小值为 $3\sqrt{2}$,故 D 正确.故选 ACD.

3.AC 提示:由题意,得椭圆 C 的焦点在 y 轴上,且 c=2,所以 $m^2-2=4$,则 $m^2=6$,故 A 正确;椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{6}=1$ 的离心率 $e=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,故 B 错误;不妨设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$,则 $\frac{x_1^2}{2}+\frac{y_1^2}{6}=1,\frac{x_2^2}{2}+\frac{y_2^2}{6}=1$,两式相减,得 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{2}=-\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{6}$,即 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-3\times\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$,又点 $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 为线段 MN 的中点,所以 $\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=1$,所以直线 l 的斜率为 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-3$,则直线 l 的方程为 $y-\frac{1}{2}=-3\left(x-\frac{1}{2}\right)$,即 $3x+y-2=0$,故 C 正确;因为直线 l 过点 $F_1(0,2)$,所以 $\triangle F_2MN$ 的周长为 $|F_2M|+|F_2N|+|MN|=(|F_2M|+|F_1M|)+(|F_2N|+|F_1N|)=2m+2m=4m=4\sqrt{6}$,故 D 错误.故选AC.

4.ABD 提示:由题意,得 $|F_1F_2|=2c=4$,则 $c=2$,设 $A(x_1,y_1),B(-x_1,-y_1),P(x_0,y_0)$,则 $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$,两式作差,得 $\frac{x_1^2-x_0^2}{y_1^2-y_0^2}=\frac{a^2}{b^2}$,因为 $k_{PA}\cdot k_{PB}=1$,即 $\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{y_0+y_1}{x_0+x_1}=\frac{y_1^2-y_0^2}{x_1^2-x_0^2}=\frac{b^2}{a^2}=1$,所以 $a=b$,又 $a^2+b^2=c^2=4$,所以 $a=b=\sqrt{2}$,故 A 正确;离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$,故 B 正确;因为双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm x$,由题意,得 $0\leqslant k_{AB}<1$ 或 $k_{AB}>-1$,所以直线 AB 倾斜角的取值范围为 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right)$,故 C 错误;若 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$,则 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$,$|PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2=16$,由双曲线的定义,得 $||PF_1|-|PF_2||=2a=2\sqrt{2}$,两边平方,得 $|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|=8$,即 $16-2|PF_1|\cdot|PF_2|=8$,所以 $|PF_1|\cdot|PF_2|=4$,所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=2$,故 D 正确.故选 ABD.

专项训练(2)

1.BD 提示:过点 $P(1,2)$ 且在 x 轴,y 轴上截距相等的直线有两条,一条过原点,为 y=2x,另一条不过原点,为 x+y-3=0,故 A 错误;在 y=kx-2 中,令 x=0,得 y=-2,故 B 正确;因为直线 $x-\sqrt{3}y+1=0$ 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以它的倾斜角为 30°,故 C 错误;过点(5,4)且倾斜角为 90°的直线方程为 $x=5$,故 D 正确.故选 BD.

2.BC 提示:直线 $l:(1-2m)x-(m-1)y+7m-4=0$,即 $(-2x-y+7)m+x+y-4=0$,令 $-2x-y+7=0$,且 $x+y-4=0$,解得 $x=3,y=1$,则直线 l 恒过定点(3,1),故 A 错误;圆 C 的方程可化为 $(x-1)^2+(y-2)^2=25$,点(3,1)在圆 C 的内部,则直线 l 与圆 C 恒相交,故 B 正确;在圆 $C:x^2+y^2-2x-4y-20=0$ 中,令 $y=0$,得 $x^2-2x-20=0$,$\Delta>0$,$x_1+x_2=2,x_1x_2=-20$,所以 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=2\sqrt{21}$,故 C 正确;由直线 l 过定点(3,1),圆心为 $C(1,2)$,得过定点和圆心的直线的斜率 $k=\frac{1-2}{3-1}=-\frac{1}{2}$,所以当直线 l 的斜率为 2 时,被圆 C 截得的弦长最短,则 $\frac{1-2m}{m-1}=2$,解得 $m=\frac{3}{4}$,故 D 错误.故选 BC.

3.ABD 提示:根据题意,得 $a=3,b=2\sqrt{2},c^2=a^2-b^2=1$,则 c=1.对于 A,$\triangle PF_1F_2$ 的周长为 $|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=2a+2c=8$,故 A 正确;对于 B,$\triangle PF_1F_2$ 面积的最大值为 $\frac{1}{2}\cdot|F_1F_2|\cdot b=bc=2\sqrt{2}$,故 B 正确;对于 C,假设存在点 P 使得 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$,即 $PF_1\perp PF_2$,则点 P 在以 F_1F_2 为直径的圆上,且 $|F_1F_2|=2$,所以点 P 为以 F_1F_2 为直径的圆与椭圆 C 的交点,又 $b=2\sqrt{2}>\frac{|F_1F_2|}{2}=1$,所以该圆与椭圆 C 无交点,则不存在符合条件的点 P,故 C 错误;对于 D,$|PM|+|PF_1|=|PM|+2a-|PF_2|=6+|PM|-|PF_2|\leqslant 6+|MF_2|=6+1=7$,当且仅当 P,$F_2$,M 三点共线,且点 P 在第四象限时,等号成立,所以 $|PM|+|PF_1|$ 的最大值为 7,故 D 正确.故选 ABD.

4.BCD 提示:对于 A,由 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$,直线 AB 的斜率为 $\sqrt{3}$,得直线 AB 的方程为 $y=\sqrt{3}\left(x-\frac{p}{2}\right)$,联立 $\begin{cases}y^2=2px,\\ y=\sqrt{3}\left(x-\frac{p}{2}\right),\end{cases}$ 得 $12x^2-20px+3p^2=0$,又点 A 在第一象限,则 $x_A=\frac{3p}{2},x_B=\frac{p}{6}$,由 $|AF|=x_A+\frac{p}{2}=2p=4$,得 $p=2$,故 A 错误;对于 B,由 $|BF|=x_B+\frac{p}{2}=\frac{2p}{3}$,得 $|AF|=3|BF|$,故 B 正确;对于 C,抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 $F(1,0)$,由抛物线的定义,得 $|ED|+|EE_1|=|ED|+|EF|\geqslant|DF|=\sqrt{2}$,当且仅当 D,E,F 三点共线时,取等号,故 C 正确;对于 D,当直线斜率不存在时,直线方程为 $x=0$,与抛物线只有一个公共点;当直线斜率存在时,设直线方程为 $y=kx+1$,联立 $\begin{cases}y=kx+1,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 得 $ky^2-4y+4=0$,当 $k=0$ 时,方程为 $y=1$,此直线与抛物线只有一个交点;当 $k\neq 0$ 时,令 $\Delta=16-16k=0$,得 $k=1$,直线方程为 y=x+1.综上,过点 D 与抛物线 C 有且仅有一个公共点的直线有 3 条,故 D 正确.故选 BCD.

专项训练(3)

1.BC 提示:由已知,得圆 C_1 的圆心为 $C_1(0,0)$,半径为 $r=1$,圆 C_2 的标准方程为 $(x-3)^2+(y+4)^2=1$,则 $C_2(3,-4)$,半径 $R=1$,所以圆心距 $|C_1C_2|=5>R+r=2$,得两圆外离,无相交弦,故 D 错误;又 P 在圆 C_1 上,Q 在圆 C_2 上,所以 $|PQ|_{min}=|C_1C_2|-R-r=3$,$|PQ|_{max}=|C_1C_2|+R+r=7$,故 A 错误,B 正确;$k_{C_1C_2}=\frac{-4-0}{3-0}=-\frac{4}{3}$,故 C 正确.故选 BC.

2.CD 提示:由题意知,抛物线 $C:x^2=4y$ 的焦点为圆心 $F(0,1)$,由 $|PM|,|MN|,|NQ|$ 构成等差数列,得 $|PM|+|NQ|=2|MN|=4$,$|PF|-1+|QF|-1=4$,所以 $|PF|+|QF|=|PQ|=6$,令 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$,所以 $y_1+y_2+2=6$,则 $y_1+y_2=4$.当直线 l 的斜率为 0 时,易知 $|PQ|=4\neq 6$,不符合题意;当直线 l 的斜率存在且不为 0 时,设直线 l 的方程为 $x=m(y-1)$,则 $m\neq 0$,代入 $x^2=4y$,得 $m^2y^2-(2m^2+4)y+m^2=0$,所以 $y_1+y_2=\frac{2m^2+4}{m^2}=4$,所以 $m=\pm\sqrt{2}$.故选 CD.

3.BD 提示:对于 A,由双曲线的定义,得 $|PF_1|-|PF_2|=2a$,又 $|PF_1|=2|PF_2|$,所以 $|PF_1|=4a,|PF_2|=2a$,因为 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$,则 $\angle F_1PF_2=90°$,所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_1|=\frac{1}{2}\cdot 4a\cdot 2a=4a^2$,故 A 错误;对于 B,在 Rt$\triangle F_1PF_2$ 中,$|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$,即 $(4a)^2+(2a)^2=(2c)^2$,则 $5a^2=c^2$,所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$,故 B 正确;对于 C,由 $c=\sqrt{5}a$,得 $b^2=c^2-a^2=4a^2$,则 $\frac{b^2}{a^2}=4$,即 $\frac{b}{a}=2$,则双曲线 C 的渐近线方程为 $2x\pm y=0$,故 C 错误;对于 D,由双曲线 C 的焦距为 $2\sqrt{5}$,得 $c=\sqrt{5}$,则 $c^2=5a^2=5$,所以 $a^2=1$,$b^2=4$,所以双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$,故 D 正确.故选 BD.

4.ABD 提示:由题意,得 $F_1(-c,0),F_2(c,0),B_1(0,-b),B_2(0,b)$,则 $k_{B_2F_1}=-\frac{b}{c}$,直线 B_1M 的方程为 $y=-\frac{b}{c}\cdot(x+c)$,联立 $\begin{cases}y=-\frac{b}{c}(x+c),\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 得 $(a^2+c^2)x^2+2a^2cx=0$,解得 $x=0$,或 $x=-\frac{2a^2c}{a^2+c^2}$,则 $M\left(-\frac{2a^2c}{a^2+c^2},\frac{b^3}{a^2+c^2}\right)$,所以 $k_{B_2M}=\frac{bc}{a^2}$,因为 $k_{B_1M}\cdot k_{B_2M}=-\frac{9}{25}$,即 $\frac{bc}{a^2}\cdot\left(-\frac{b}{c}\right)=-\frac{9}{25}$,所以 $\frac{b}{a}=\frac{3}{5}$,设 $a=5m(m>0)$,则 $b=3m,c=4m$,离心率 $e=\frac{4}{5}$,$\cos\angle B_1F_1O=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$,则 $\cos\angle MF_1N=\cos\angle B_1F_1B_2=2\cos^2\angle B_1F_1O-1=\frac{7}{25}$,易知 $\triangle MF_1F_2$ 的周长 $C_{\triangle MF_1F_2}=2a+2c=18m$,$M\left(-\frac{200m}{41},\frac{27m}{41}\right)$,$N\left(-\frac{200m}{41},-\frac{27m}{41}\right)$,所以 $S_1=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{200m}{41}-4m\right)\cdot\frac{54m}{41}=\frac{36}{41}\times\frac{27}{41}m^2$,$S_2=\frac{1}{2}\cdot 8m\cdot 3m=12m^2$,则 $\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}}=\frac{9}{41}$.故选 ABD.

专项训练(4)

1.ACD 提示:由双曲线 $E:\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$,得 $a=4,b=3,c=5$,则离心率 $e=\frac{5}{4}$,故 A 正确,B 错误;由题意,得 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times 10\times y_P=20$,解得 $y_P=4$,代入双曲线方程,得 $x_P=\frac{20}{3}$,故 C,D 正确.故选 ACD.

2.BD 提示:对于 A,圆 C 的圆心为 C(1,0),半径 $r=\sqrt{2}$,由圆心 C 到直线 $l:x+y-5=0$ 的距离为 $d=\frac{|1+0-5|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}>r=\sqrt{2}$,得直线 l 与圆 C 相离,故 A 错误;对于 B,圆上的点到直线 l 的最小距离为 $d-r=\sqrt{2}$,则 $|PQ|$ 的取值范围为 $[\sqrt{2},+\infty)$,故 B 正确;对于 C,设与 $l:x+y-5=0$ 平行的直线为 $x+y+m=0$,由圆心到该直线的距离为 $\sqrt{r^2-\left(\frac{2}{2}\right)^2}=1$,得 $\frac{|1+0+m|}{\sqrt{2}}=1\Rightarrow m=\pm\sqrt{2}-1$,所以直线方程为 $x+y+\sqrt{2}-1=0$ 或 $x+y-\sqrt{2}-1=0$,故 C 错误;对于 D,因为圆上的点到直线 l 的最小距离为 $d-r=\sqrt{2}$,最大距离为 $d+r=3\sqrt{2}$,且 $\sqrt{2}<\frac{3\sqrt{2}}{2}<3\sqrt{2}$,所以圆 C 上存在两个点到直线 l 的距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$,故 D 正确.故选BD.

3.BC 提示:对于 A,设椭圆 C 的右焦点为 F',连接 AF',BF',则四边形 $AF'BF$ 为平行四边形,所以 $|AF|+|BF|=|AF|+|AF'|=2a=4$,所以 $\frac{1}{|AF|}+\frac{4}{|BF|}=\frac{1}{4}(|AF|+|BF|)\left(\frac{1}{|AF|}+\frac{4}{|BF|}\right)=\frac{1}{4}\left(5+\frac{|BF|}{|AF|}+\frac{4|AF|}{|BF|}\right)\geqslant\frac{9}{4}$,当且仅当 $|BF|=2|AF|$,即 $|AF|=\frac{4}{3}$,$|BF|=\frac{8}{3}$ 时,取等号,故 A 错误;对于 B,联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\\ y=kx,\end{cases}$ 解得 $x=\frac{\pm 2}{\sqrt{1+2k^2}}$,所以 $|y_A-y_B|=\frac{4|k|}{\sqrt{1+2k^2}}$,所以 $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}|x_A|\cdot|y_A-y_B|=\frac{4|k|}{1+2k^2}=\frac{4}{\frac{1}{|k|}+2|k|}\leqslant\sqrt{2}$,当且仅当 $\frac{1}{|k|}=2|k|$,即 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,等号成立,故 B 正确;对于 C,设 $A(x_0,y_0)$,则 $B(-x_0,-y_0),E(x_0,0)$,所以直线 BE 的斜率 $k_{BE}=\frac{1}{2}\cdot\frac{y_0}{x_0}=\frac{1}{2}k$,故 C 正确;对于 D,设 $P(m,n)$,则 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{n-y_0}{m-x_0}\cdot\frac{n+y_0}{m+x_0}=\frac{n^2-y_0^2}{m^2-x_0^2}$,因为点 P 和点 A 在椭圆 C 上,所以 $\frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{2}=1$①,$\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{2}=1$②,由①-②,得 $\frac{n^2-y_0^2}{m^2-x_0^2}=-\frac{1}{2}$,即 $k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{1}{2}$,因为 P,B,E 三点共线,所以 $k_{PB}=k_{BE}=\frac{1}{2}k$,则 $k_{PA}\cdot\frac{1}{2}k=-\frac{1}{2}$,得 $k_{PA}=-\frac{1}{k}$,所以 $k_{PA}\cdot k_{AB}=\left(-\frac{1}{k}\right)\cdot k=-1$,所以 $\angle PAB=90°$,故 D 错误.故选 BC.

4.ABD 提示:由抛物线 $C:y^2=4x$,得焦点为 $F(1,0)$,准线方程为 $x=-1$.对于 A,过 A 作准线的垂线,交准线于 P,过点 Q 作准线的垂线,交准线于 E,则 $|AQ|+|AF|=|AQ|+|AP|\geqslant|QP|\geqslant|QE|=4$,当且仅当 Q,A,P 三点共线,且 P 与 E 重合时,取等号,所以 $|AQ|+|AF|$ 的最小值是 4,故 A 正确;对于 B,由题意得,直线 l 的斜率不为 0,设直线 l 的方程为 $x=my+1,A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,联立 $\begin{cases}x=my+1,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 得 $y^2-4my-4=0$,则 $\Delta=16m^2+16>0,y_1+y_2=4m,y_1y_2=-4$,则 $x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2=4m^2+2,x_1x_2=\frac{(y_1y_2)^2}{16}=1$,所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=-3$,故 B 正确;对于 C,因为 $|AF|\cdot|BF|=(x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+(x_1+x_2)+1=4m^2+4=12$,解得 $m=\pm\sqrt{2}$,则直线 AB 的斜率为 $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,故 C 错误;对于D,因为 $4|AF|+|BF|=4(x_1+1)+(x_2+1)=4x_1+x_2+5$,因为 $x_1>0,x_2>0$,所以 $4x_1+x_2+5\geqslant 2\sqrt{4x_1x_2}+5=9$,当且仅当 $4x_1=x_2$,即 $x_1=\frac{1}{2},x_2=2$ 时,取等号,所以 $4|AF|+|BF|$ 的最小值是 9,故 D 正确.故选 ABD.

专题六 函数与导数

专项训练(1)

1.BD 提示:由 $f(x)+|\cos x|$ 是奇函数,得 $f(x)+|\cos x|+f(-x)+|\cos(-x)|=f(x)+f(-x)+2|\cos x|=0$,即 $f(x)+f(-x)=-2|\cos x|$,由 $f(x)-\sin x$ 是偶函数,得 $f(x)-\sin x=f(-x)-\sin(-x)=f(-x)+\sin x$,即 $f(x)-f(-x)=2\sin x$,两式相加,得 $f(x)=\sin x-|\cos x|$.对于 A,$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0$,故 A 错误;对于 B,$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-0=1$,故 B 正确;对于C,$f(k\pi+x)=\pm\sin x-|\cos x|$,故 C 错误;对于 D,$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x-|\sin x|$,$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x-|\sin x|$,故 D 正确.故选 BD.

2.AC 提示:作出函数 $f(x)$ 的大致图象(图略),方程 f(x)=t 有 4 个不同的解,等价于 y=f(x) 的图象与直线 y=t 有 4 个交点,由图可知,$0<t<2$,故 A 正确;当 $|\log_2 x|=2$ 时,$x=\frac{1}{4}$ 或 x=4,所以 $\frac{1}{4}<x_1<1,4<x_3<5$,由 $|\log_2 x_1|=|\log_2 x_2|$,得 $-\log_2 x_1=\log_2 x_2$,则 $x_1x_2=1$,由余弦函数的对称性知 $x_3+x_4=12$,故 B 错误;$\frac{x_3x_4}{x_1x_2}=x_3x_4=x_3(12-x_3)=-(x_3-6)^2+36,4<x_3<5$,因为函数 $y=-(x-6)^2+36$ 在(4,5)上单调递增,所以 $32<\frac{x_3x_4}{x_1x_2}<35$,故 C 正确;$x_1+x_2+x_3+x_4=x_1+\frac{1}{x_1}+12$,因为函数 $y=x+\frac{1}{x}+12$ 在 $\left(\frac{1}{4},1\right)$ 上单调递减,所以 $x_1+x_2+x_3+x_4\in\left(14,\frac{65}{4}\right)$,无最小值,故 D 错误.故选 AC.

3.AC 提示:由 $f(x)=e^x(x^2-x+1)$,得 $f'(x)=x(x+1)e^x$,所以当 $x\in(-\infty,-1)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,当 $x\in(-1,0)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增.对于 A,函数 $[f(x)]_{极小值}=f(0)=1$,故 A 正确;对于 B,函数 $f(x)$ 在(-1,0)上单调递减,在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,故 B 错误;对于 C,函数 $f(x)$ 在(-2,-1)和(0,2)上单调递增,在(-1,0)上单调递减,又 $f(-1)=\frac{3}{e}$,$f(2)=3e^2$,所以函数 $f(x)$ 在[-2,2]上的最大值为 $3e^2$,故 C 正确;对于 D,由 $f(0)=1,f(-1)=\frac{3}{e}$,结合函数 $f(x)$ 的大致图象(图略),得当 $1<m<\frac{3}{e}$ 时,$y=f(x)$ 的图象与直线 y=m 有 3 个不同的交点,即方程 $f(x)=m$ 有 3 个不等的实根,故 D 错误.故选 AC.