$n=(1,-1,2)$，所以 C_1 到平面 BDE 的距离为 $\frac{|n\cdot\overrightarrow{C_1E}|}{|n|}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，即直线 AC_1 到平面 BDE 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.故选 A.

5.D 提示：因为 A_1N 与 C_1A 为异面直线，故 A 错误；因为 A_1N 的延长线必过点 B，则直线 A_1N 与平面 BAM 相交，故 B 错误；因为 AB_1 与 AB 不垂直，所以 AB_1 不垂直于平面 ABM，故 C 错误；取 BC 的中点 P，连接 PB_1，在正方形 BCC_1B_1 中，易知 $\tan\angle MBP=\frac{1}{2}$，$\tan\angle B_1PB=2$，得 $\tan\angle MBP\cdot\tan\angle B_1PB=1$，则 $\angle MBP+\angle B_1PB=90°$，所以 $BM\perp B_1P$. 连接 AP，则 $AP\perp BC$，又平面 $BCC_1B_1\perp$ 底面 ABC，平面 $BCC_1B_1\cap$ 底面 $ABC=BC$，$AP\subset$ 平面 ABC，所以 $AP\perp$ 平面 BCC_1B_1，又 $BM\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $AP\perp BM$，又 $AP\cap B_1P=P$，$AP,B_1P\subset$ 平面 B_1AP，所以 $BM\perp$ 平面 B_1AP，又 $AB_1\subset$ 平面 B_1AP，所以 $BM\perp AB_1$.故 D 正确.故选 D.

6.D 提示：以 A 为坐标原点，AB，AD，AA_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系 Axyz，设正方体的棱长为 2，则 $A(0,0,0)$，$C_1(2,2,2)$，$A_1(0,0,2)$，$E(2,1,0)$，则 $\overrightarrow{AC_1}=(2,2,2)$，$\overrightarrow{EA_1}=(-2,-1,2)$，$\overrightarrow{EC_1}=(0,1,2)$，设平面 A_1EC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EA_1}=-2x-y+2z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EC_1}=y+2z=0,\end{cases}$ 得 $y=-2z$，$x=2z$，令 $z=1$，则 $x=2$，$y=-2$，所以平面 A_1EC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$. 设直线 AC_1 与平面 A_1EC_1 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\left|\cos\langle n,\overrightarrow{AC_1}\rangle\right|=\frac{|n\cdot\overrightarrow{AC_1}|}{|n|\cdot|\overrightarrow{AC_1}|}=\frac{2}{3\times2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$.故选 D.

7.B 提示：设圆 O_1 的半径 r，$\triangle ABC$ 的边长为 a，由题意，得 $\pi r^2=6\pi$，则 $r=\sqrt{6}$，所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{3}{2}\sqrt{6}$，得 $a=3\sqrt{2}$，因为三棱锥 D-ABC 的体积的最大值为 $9\sqrt{3}$，设此时三棱锥 D-ABC 的高为 H，所以 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(3\sqrt{2})^2\cdot H=9\sqrt{3}$，解得 $H=6$，设外接球 O 的半径为 R，则 $R^2=(6-R)^2+(\sqrt{6})^2$，解得 $R=\frac{7}{2}$，所以球 O 的体积为 $\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{7}{2}\right)^3=\frac{343}{6}\pi$.故选B.

8.A 提示：在题图 5 中，设 $OA\cap DE=F$，因为 O 为 BC 的中点，$AC=AB$，所以 $OA\perp BC$，因为 $AD=2CD$，$AE=2BE$，所以 $BC/\!/DE$，所以 $OA\perp DE$，$AF=2OF$，将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起，则 $OF\perp DE$，$A'F\perp DE$，所以 $\angle OFA'$ 为二面角 $A'-DE-O$ 的平面角，因为 $A'O\perp$ 平面 $BCDE$，$OF\subset$ 平面 $BCDE$，所以 $A'O\perp OF$，所以 $\cos\angle OFA'=\frac{OF}{A'F}=\frac{OF}{AF}=\frac{1}{2}$.故选 A.

专题八 直线和圆、圆锥曲线

专项训练(1)

1.D 提示：因为直线 $ax-4y+2=0$ 与直线 $2x+5y+c=0$ 垂直，所以 $2a-20=0$，解得 $a=10$，因为垂足为 $(1,b)$，所以 $\begin{cases}10\times1-4b+2=0,\\2\times1+5b+c=0,\end{cases}$ 解得 $b=3$，$c=-17$，故 $a+b+c=-4$.故选 D.

2.C 提示：由题意，得该圆的半径为 $\sqrt{(1-0)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{2}$，所以所求圆的方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$，故选 C.

3.D 提示：设椭圆 C 的右焦点为 F'，依题意得，线段 P_1P_2 与 FF' 互相平分，则四边形 P_1FP_2F' 为平行四边形，所以 $|P_2F|=|P_1F'|$，因为椭圆 $C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 的长半轴长为 $a=4$，所以 $|P_1F|+|P_2F|=|P_1F|+|P_1F'|=2a=8$.故选D.

4.D 提示：由圆 $C:(x-3)^2+(y-1)^2=9$，得圆心为 $C(3,1)$，半径为 3，因为 $P(0,-3)$，则 $|CP|=\sqrt{3^2+(1+3)^2}=5$，所以 P 在圆 C 外，因为 A,B 是圆 $C:(x-3)^2+(y-1)^2=9$ 上的两个动点，且 $|AB|=2\sqrt{5}$，所以圆心 C 到 AB 的距离 $d=\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=2$，所以点 P 到直线 AB 距离的最大值为 $|CP|+d=5+2=7$.故选 D.

5.B 提示：因为 $(\overrightarrow{F_1F_2}+\overrightarrow{F_1A})\cdot\overrightarrow{F_2A}=0$，$\overrightarrow{F_2A}=\overrightarrow{F_1A}-\overrightarrow{F_1F_2}$，所以 $(\overrightarrow{F_1F_2}+\overrightarrow{F_1A})\cdot(\overrightarrow{F_1A}-\overrightarrow{F_1F_2})=0$，则 $\overrightarrow{F_1A}^2=\overrightarrow{F_1F_2}^2$，即 $|F_1A|=|F_1F_2|=2c$，因为 A 在第二象限，由双曲线的定义，得 $|F_2A|-|F_1A|=2a$，所以 $|F_2A|=2a+2c$，由过点 F_1 的直线 AF_1 的斜率为 $-\frac{24}{7}$，即 $\tan\angle AF_1F_2=-\frac{24}{7}$，得 $\cos\angle AF_1F_2=-\frac{7}{25}$，在 $\triangle AF_1F_2$ 中，由余弦定理的推论，得 $\cos\angle AF_1F_2=\frac{|AF_1|^2+|F_1F_2|^2-|AF_2|^2}{2|AF_1||F_1F_2|}=\frac{4c^2+4c^2-(2a+2c)^2}{2\cdot2c\cdot2c}=-\frac{7}{25}$，整理得 $39c^2-50ac-25a^2=0$，则 $39e^2-50e-25=0$，即 $(13e+5)\cdot(3e-5)=0$，解得 $e=\frac{5}{3}$，即双曲线 C 的离心率为 $\frac{5}{3}$.故选B.

6.D 提示：因为抛物线 $C:y^2=2px$，所以抛物线的焦点为 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，由题意，得 $0=\frac{p}{2}-1$，解得 $p=2$，所以抛物线 $C:y^2=4x$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}y^2=4x,\\y=x-1,\end{cases}$ 得 $x^2-6x+1=0$，所以 $x_1+x_2=6$，所以 $|AB|=x_1+x_2+p=8$.故选D.

7.A 提示：由题意，得 $|PF_1|+|PF_2|=2a$，$|F_1F_2|=2c$，设 $\triangle PF_1F_2$ 内切圆的半径为 r，所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\cdot(|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|)\cdot r=\frac{1}{2}(2c+2a)r=(c+a)r$，因为 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径的最大值为 $a-c$，所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=(c+a)r\leqslant(c+a)(c-a)=c^2-a^2=b^2$，又 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_P|\leqslant\frac{1}{2}\cdot2c\cdot b=bc$，所以 $b^2=bc$，可得 $b=c$，又椭圆的长轴长为 4，即 $2a=4$，则 $a=2$，由 $a^2=b^2+c^2$，得 $b=c=\sqrt{2}$，所以 $\triangle PF_1F_2$ 的面积的最大值为 $bc=2$.故选 A.

8.A 提示：设点 $P(x_0,y_0)$，由 $\begin{cases}\frac{c}{a}=2,\\a^2+b^2=c^2,\end{cases}$ 得 $c=2a$，$b=\sqrt{3}a$，因为 $PF\perp FA_2$，所以 $x_0=c$，将点 $P(c,y_0)$ 代入双曲线 C 的方程，得 $\frac{c^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$，解得 $y_0=\pm\sqrt{3}b$，由双曲线的对称性，不防取 $y_0=\sqrt{3}b$，则 $\tan\angle PA_2F=\frac{\sqrt{3}b-0}{c-a}=3$，$\tan\angle PA_1F=\frac{\sqrt{3}b-0}{c-(-a)}=1$，所以 $\tan\angle A_1PA_2=\tan(\angle PA_2F-\angle PA_1F)=\frac{3-1}{1+3\times1}=\frac{1}{2}$.故选 A.

专项训练(2)

1.C 提示：由题意，得 $-a=2a(3a-1)$，即 $6a^2-a=0$，解得 $a=0$ 或 $a=\frac{1}{6}$.经检验，当 $a=0$ 或 $a=\frac{1}{6}$ 时，直线 l_1 与 l_2 均不重合，满足题意.所以实数 a 的值为 0 或 $\frac{1}{6}$.故选 C.

2.B 提示：过点 $A(7,-2)$ 作直线 $2x-3y+6=0$ 的垂线，垂足为 B，则以 AB 为直径的圆为满足题意，因为 $|AB|=\frac{|2\times7+6+6|}{\sqrt{4+9}}=2\sqrt{13}$，所以圆的半径为 $\sqrt{13}$，设 $B(a,b)$，则 $\begin{cases}\frac{b+2}{a-7}\times\frac{2}{3}=-1,\\2a-3b+6=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3,\\b=4,\end{cases}$ 故 AB 的中点为 $(5,1)$，则圆心为 $(5,1)$，故该圆的方程为 $(x-5)^2+(y-1)^2=13$.故选B.

3.B 提示：由直线 $x+y+2=0$ 分别与 x 轴，y 轴交于 A,B 两点，得 $A(-2,0)$，$B(0,-2)$，则 $|AB|=2\sqrt{2}$，因为圆 $(x-2)^2+y^2=2$，则圆心为 $(2,0)$，半径 $r=\sqrt{2}$，所以圆心到直线 $x+y+2=0$ 的距离 $d=\frac{|2+0+2|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，由 P 在圆上，得 P 到直线 $x+y+2=0$ 的距离的最小值为 $2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$，所以 $\triangle ABP$ 面积的最小值为 $\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$.故选 B.

4.C 提示：设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由余弦定理，得 $4c^2=m^2+n^2-2mn\cos60°$，因为 $m+n=2a$，所以 $m^2+n^2=(m+n)^2-2mn=4a^2-2mn$，所以 $4c^2=4a^2-3mn$，即 $3mn=4a^2-4c^2$，又 $mn\leqslant\left(\frac{m+n}{2}\right)^2=a^2$，当且仅当 $m=n$ 时，取等号，所以 $4a^2-4c^2\leqslant3a^2$，所以 $\frac{c^2}{a^2}\geqslant\frac{1}{4}$，则 $e\geqslant\frac{1}{2}$，又 $0<e<1$，所以 e 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2},1\right)$.故选 C.

5.C 提示：因为双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{2}{a}x$，直线 $2x+y+m=0$ 与双曲线 C 至多有一个公共点，所以直线 $2x+y+m=0$ 与双曲线的渐近线重合或平行，所以 $-\frac{2}{a}=-2$，解得 $a=1$，所以双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{4}=1$，则 $F_1(-\sqrt{5},0)$，$F_2(\sqrt{5},0)$，由双曲线定义知，$|AF_1|-|AF_2|=2a=2$，所以 $|AP|+|AF_2|=|AP|+|AF_1|-2\geqslant|PF_1|-2$，当且仅当 F_1,A,P 三点共线时，等号成立，又 $|PF_1|=2\sqrt{6}$，所以 $(|AP|+|AF_2|)_{min}=2\sqrt{6}-2$.故选 C.

6.B 提示：因为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2}=1(a>\sqrt{2})$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $\frac{a^2-2}{a^2}=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2=\frac{2}{3}$，所以 $a^2=6$，所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$，因为 $|PA|=|PB|$，所以 P 为 AB 的中点.设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{2}=1$，$\frac{x_2^2}{6}+\frac{y_2^2}{2}=1$，两式相减，得 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{6}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{2}=0$，因为 $P\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ 为 AB 的中点，则 $x_1+x_2=2\times\frac{3}{2}=3$，$y_1+y_2=2\times\frac{1}{2}=1$，所以 $k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-1$，所以直线 AB 的方程为 $y-\frac{1}{2}=-\left(x-\frac{3}{2}\right)$，即 $x+y-2=0$，所以 $|OM|$ 的最小值为点 O 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.故选 B.

7.A 提示：不妨设直线 AB 的斜率 $k>0$，过 A，B作抛物线准线的垂线，垂足分别为 C，D，过 B 作BE$\perp$AC于 E，由 $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{FB}$，得 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，$|\overrightarrow{AF}|=2|\overrightarrow{FB}|$，即 $|AC|=2|BD|$，所以 E 为 AC 的中点，即 $|AE|=\frac{1}{3}|AB|$，所以 $|BE|=\sqrt{|AB|^2-|AE|^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}|AB|$，由 $S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OAF}+S_{\triangle OBF}=\frac{1}{2}|BE|\cdot|OF|=\frac{\sqrt{2}}{6}p|AB|$，由 $|AE|=\frac{1}{3}|AB|$，得直线 AB 斜率为 $k_{AB}=2\sqrt{2}$，所以直线 AB 的方程 $y=2\sqrt{2}\left(x-\frac{p}{2}\right)$，联立 $\begin{cases}y=2\sqrt{2}\left(x-\frac{p}{2}\right),\\y^2=2px,\end{cases}$ 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，整理得 $8x^2-10px+2p^2=0$，则 $x_1+x_2=\frac{5p}{4}$，所以 $|AB|=x_1+x_2+p=\frac{5p}{4}+p=\frac{9p}{4}$，所以 $S_{\triangle OAB}=\frac{\sqrt{2}}{6}p|AB|=\frac{3\sqrt{2}}{8}p^2=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，解得 $p=2$.故选 A.

8.C 提示：过 M 作 MP 与抛物线的准线垂直，垂足为点 P，则 $|FM|=|MP|$，所以 $\frac{|AM|}{|FM|}=\frac{|MA|}{|MP|}=\frac{1}{\cos\angle AMP}=\frac{1}{\cos\angle FAM}$，所以当 $\frac{|AM|}{|FM|}$ 取得最大值时，$\angle MAF$ 取到最大值，此时直线 AM 与抛物线相切.易知此时直线 AM 的斜率不为 0，抛物线 $C:y^2=2px$ 的焦点 F 的坐标为 $(1,0)$，可得 $y^2=4x$，设切线 AM 的方程为 $x=my-1$，联立 $\begin{cases}x=my-1,\\y^2=4x,\end{cases}$ 得 $y^2-4my+4=0$，则 $\Delta=16m^2-16=0$，解得 $m=\pm1$，所以切线 AM 的方程为 $x=\pm y-1$，即 $y=x+1$ 或 $y=-x-1$，又点 M 在第一象限，所以直线 AM 的方程为 $y=x+1$.故选 C.

专题九 统计与概率

1.C 提示：在 1，2，3，4，6 这 5 个整数中任取 2 个不同的数所有的情况为 (1，2)，(1，3)，(1，4)，(1，6)，(2，3)，(2，4)，(2，6)，(3，4)，(3，6)，(4，6)，共 10 种，其中 2 个数互质情况为 (1，2)，(1，3)，(1，4)，(1，6)，(2，3)，(3，4)，共 6 种，所以这 2 个数互质的概率为 $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.故选 C.

2.B 提示：因为 $15\times80\%=12$，所以 80%分位数为第 12 个与第 13 个数的平均数，即 $\frac{93+94}{2}=93.5$.故选B.

3.D 提示：根据分层随机抽样的方法，得抽取的甲型号产品的数量为 $\frac{200}{200+300+400}\times45=10$，乙种型号产品的数量为 $\frac{300}{200+300+400}\times45=15$，所以抽取的甲、乙两种型号产品的数量之和为 $10+15=25$.故选 D.

4.B 提示：因为二项式 $(1-2x)^5$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_5^r(-2x)^r$，所以 $(1+2x)(1-2x)^5$ 的展开式中 x^2 的系数为 $a_2=C_5^2(-2)^2+2\times C_5^1(-2)^1=40-20=20$.故选 B.

5.C 提示：由题意可知，在这段时间内两人都不去此地的概率为 $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{5}$，所以在这段时间内至少有 1 人去此地的概率为 $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$.故选 C.

6.B 提示：分两种情况，①羽毛球场安排 2 人，除甲外的其余 4 人每人去一个场地，不同安排方法有 $A_4^4=24$ 种；②羽毛球场只安排甲 1 人，其余 4 人分成 3 组再安排到剩余的 3 个场地，不同安排方法有 $C_4^2A_3^3=36$ 种，所以不同的安排方法共有 $24+36=60$ 种.故选 B.

7.C 提示：由题意，得 $\bar{x}=\frac{1}{5}\times(20+30+40+50+60)=40$，$\bar{y}=\frac{1}{5}\times(25+27.5+29+32.5+36)=30$，所以样本点的中心为 $(40,30)$，将点 $(40,30)$ 代入 $\hat{y}=0.25x+k$，可得 $30=0.25\times40+k$，解得 $k=20$，所以 $\hat{y}=0.25x+20$，当 $x=80$ 时，$\hat{y}=0.25\times80+20=40$.所以当蟋蟀每分钟鸣叫 80 次时，该地当时的气温预报值为 40℃.故选 C.

8.B 提示：由题意，得 X 的所有可能的取值为 0，1，2，由题意，得 $P(X=0)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$，$P(X=1)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$，$P(X=2)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$，所以 $E(X)=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$，所以 $E(5X+1)=5E(X)+1=5$.故选 B.

扫码免费下载习题讲解 ppt

第 25 期

第 2~3 版

专题一 集合与常用逻辑用语、复数

专项训练(1)

1.B 提示：因为集合 $A=\{x|\log_2x>0\}=\{x|x>1\}$，$B=\{y|y=2^x,x\leqslant0\}=\{y|0<y\leqslant1\}$，所以 $A\cup B=\{x|x>0\}$.故选 B.

2.B 提示：因为全称量词命题的否定为存在量词命题，所以命题“$\forall x\in\mathbf{R},\ln(x^2+1)>0$”的否定为“$\exists x\in\mathbf{R},\ln(x^2+1)\leqslant0$”.故选 B.

3.A 提示：因为 $z(2+i)=1+3i$，

所以 $z=\frac{1+3i}{2+i}=\frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=1+i$.故选 A.

4.A 提示：因为 $x^2-3x>0\Leftrightarrow x<0$ 或 $x>3$，$|x-1|>1\Leftrightarrow x<0$ 或 $x>2$，则 $\{x|x<0$ 或 $x>3\}\subsetneqq\{x|x<0$ 或 $x>2\}$，所以“$x^2-3x>0$”是“$|x-1|>1$”的充分不必要条件.故选 A.

5.C 提示：由 $y=\ln(6+x-x^2)$，得 $6+x-x^2>0$，解得 $-2<x<3$，则集合 $B=\{x|-2<x<3\}$，因为集合 $A=\{x|a<x<a+2\}\neq\varnothing$，$A\subseteq B$，所以 $\begin{cases}a\geqslant-2,\\a+2\leqslant3,\end{cases}$ 解得 $-2\leqslant a\leqslant1$.故选 C.

6.D 提示：因为 $(1+i)z=|1+\sqrt{3}i|=2$，所以 $z=\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-i$，所以 $\bar{z}=1+i$.故选 D.

7.C 提示：因为“$\exists x\in\mathbf{R}$，使 $x^2-x-m=0$”为真命题，所以 $\exists x\in\mathbf{R}$，使 $m=x^2-x$ 成立，则 $m\geqslant(x^2-x)_{min}$，设 $f(x)=x^2-x$，则 $[f(x)]_{min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$，所以 $m\geqslant-\frac{1}{4}$.故选 C.

8.A 提示：由 $4^x-2^{x+1}<0$，令 $t=2^x$，得 $t^2-2t<0$，解得 $0<t<2$，则 $0<2^x<2$，解得 $x<1$，所以集合 $A=\{x|x<1\}$，又 $B=\{x|y=\lg(x+1)\}=\{x|x>-1\}$，所以 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|x\leqslant-1\}$，$A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x|x\leqslant-1\}$.故选 A.

专项训练(2)

1.B 提示：因为集合 $A=\{x|x^2-6x+8\leqslant0\}=\{x|2\leqslant x\leqslant4\}$，$B=\{x\in\mathbf{Z}||x-3|<2\}=\{2,3,4\}$，所以 $A\cap B=\{2,3,4\}$.故选 B.

2.C 提示：因为存在量词命题的否定为全称量词命题，命题 $p:\exists x_0>0,\sin x_0>1+\cos x_0$，所以 $\neg p$ 为 $\forall x>0,\sin x\leqslant1+\cos x$.故选 C.

3.D 提示：因为复数 $\frac{2-i}{a+i}(a\in\mathbf{R})$ 为纯虚数，$\frac{2-i}{a+i}=\frac{(2-i)(a-i)}{(a+i)(a-i)}=\frac{2a-1+(-2-a)i}{a^2+1}$，所以 $2a-1=0$，且 $-2-a\neq0$，解得 $a=\frac{1}{2}$，所以 $z=2a-i=1-i$ 在复平面内对应的点为 $(1,-1)$，位于第四象限.故选 D.

4.B 提示：由题意，得 $A=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$，$B=(0,1]$，因为 $A\times B=\{x|x\in A\cup B$，且 $x\notin A\cap B\}$，因为 $A\cup B=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$，$A\cap B=(0,1]$，所以 $A\times B=\left(-\frac{1}{2},0\right]\cup\left(1,\frac{3}{2}\right)$.故选 B.

5.A 提示：由 $|x-a|\leqslant3$，得 $-3+a\leqslant x\leqslant3+a$，由 $2x^2+x-1\leqslant0$，得 $-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$，因为 p 是 q 的必要不充分条件，所以 $\left[-1,\frac{1}{2}\right]\subsetneqq[-3+a,3+a]$，则 $\begin{cases}-3+a\leqslant-1,\\3+a\geqslant\frac{1}{2}\end{cases}$（等号不能同时成立），解得 $-\frac{5}{2}\leqslant a\leqslant2$.故选 A.

6.C 提示：根据复数模的几何意义，可知 $|z-1+2i|=|z-(1-2i)|=1$ 表示点 $Z(x,y)$ 的轨迹为复平面内以 $(1,-2)$ 为圆心，1 为半径的圆，又 $|z|$ 表示复数 z 对应的点到原点的距离，结合图形可知，$|z|_{min}=\sqrt{1^2+(-2)^2}-1=\sqrt{5}-1$.故选 C.

7.B 提示：因为 $\forall x\in[1,2]$，$x^2-ax+1\leqslant0$ 为真命题，所以 $a\geqslant\left(x+\frac{1}{x}\right)_{max}$，$x\in[1,2]$，因为 $y=x+\frac{1}{x}$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递增，所以 $\left(x+\frac{1}{x}\right)_{max}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$，则 $a\geqslant\frac{5}{2}$.故选 B.

8.C 提示：由 $a,b\in G$，$a-b\in G$，得 $b=a$ 时，$a-b=0\in G$，故①正确；若数域 G 中有非零元素，则必有 $\frac{a}{a}=1\in G$，则 $1+1=2\in G$，所以 $3\in G$，以此类推，$2023\in G$，故②正确；集合 P 表示偶数集，显然 $2\in P$，则 $\frac{2}{2}=1\in P$，这与 P 表示偶数集矛盾，故③错误；因为有理数进行四则运算的结果仍为有理数，故④正确.故选 C.

专题二 不等式

专项训练(1)

1.A 提示：因为 $-1\leqslant b\leqslant4$，所以 $-8\leqslant-2b\leqslant2$，又 $1\leqslant a\leqslant2$，所以 $-7\leqslant a-2b\leqslant4$.故选 A.

2.A 提示：因为 $5^{0.3}>5^0=1$，所以 $a>1$，因为 $0<0.3^5<0.3^0=1$，所以 $0<b<1$，因为 $0<(\sin2023)^2<1$，所以 $\ln(\sin2023)^2<0$，所以 $c<0$，所以 $a>b>c$.故选 A.

3.D 提示：因为 $x^2+4x-5>0$，即 $(x+5)(x-1)>0$，解得 $x>1$ 或 $x<-5$.故选 D.

4.D 提示：设 $f(x)=ax^2+(a+2)x+9a$，由题意，得 $a\neq0$，则 $\begin{cases}a>0,\\f(1)<0,\\\Delta>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0,\\f(1)>0,\\\Delta>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a>0,\\11a+2<0,\\(7a+2)(5a-2)<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0,\\11a+2>0,\\(7a+2)(5a-2)<0,\end{cases}$ 解得 $-\frac{2}{11}<a<0$.故选 D.

5.D 提示：因为 $x>0$，$y>0$，$x+3y=1$，所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+3y)=4+\frac{3y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant4+2\sqrt{\frac{3y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=4+2\sqrt{3}$，当且仅当 $\frac{3y}{x}=\frac{x}{y}$，且 $x+3y=1$，即 $y=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$，$x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 时，取等号，所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为 $4+2\sqrt{3}$.故选 D.

6.B 提示：因为 $mx^2+mx-4<2x^2+2x-1$，即 $(m-2)x^2+(m-2)x-3<0$，所以当 $m-2=0$，即 $m=2$ 时，不等式为 $-3<0$，恒成立，符合题意；当 $m-2\neq0$ 时，由题意，得 $\begin{cases}m-2<0,\\\Delta=(m-2)^2+12(m-2)<0,\end{cases}$ 解得 $-10<m<2$.

综上，实数 m 的取值范围是 $(-10,2]$.故选 B.

7.A 提示：因为 $a,b>0$，$a+2b=1$，所以 $\frac{3a}{b}+\frac{1}{ab}=\frac{3a}{b}+\frac{(a+2b)^2}{ab}=\frac{3a}{b}+\frac{a^2+4ab+4b^2}{ab}=\frac{4a}{b}+\frac{4b}{a}+4\geqslant2\sqrt{\frac{4a}{b}\cdot\frac{4b}{a}}+4=12$，当且仅当 $\frac{4a}{b}=\frac{4b}{a}$，且 $a+2b=1$，即 $a=b=\frac{1}{3}$ 时，取等号.所以 $\frac{3a}{b}+\frac{1}{ab}$ 的最小值为 12.故选 A.

8.D 提示：因为方程 $x^2+2mx+m^2+3m-2=0$ 的两个实根为 x_1,x_2，所以 $x_1+x_2=-2m$，$x_1x_2=m^2+3m-2$，$\Delta=4m^2-4(m^2+3m-2)\geqslant0$，则 $m\leqslant\frac{2}{3}$，所以 $x_1(x_2+x_1)+x_2^2=x_1x_2+x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-x_1x_2=4m^2-m^2-3m+2=3\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$，因为 $m\leqslant\frac{2}{3}$，所以当 $m=\frac{1}{2}$ 时，$x_1(x_2+x_1)+x_2^2$ 取得最小值 $\frac{5}{4}$.故选 D.

专项训练(2)

1.A 提示：因为 $a>b>0>c$，所以 $\frac{a}{b}>0>\frac{a}{c}$，故 A 正确；因为函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，且 $a>c$，所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^c$，故 B 错误；因为 $a>0>c$，则 $\frac{1}{a}>0>\frac{1}{c}$，故 C 错误；当 $a=1$，$c=-2$ 时，满足 $a>0>c$，但 $a^2<c^2$，故 D 错误.故选 A.

2.A 提示：不等式 $x(2x+7)\geqslant-3$，即 $2x^2+7x+3\geqslant0$，解得 $x\geqslant-\frac{1}{2}$ 或 $x\leqslant-3$，所以原不等式的解集为 $(-\infty,-3]\cup\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$.故选 A.

3.B 提示：当 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$4^x<\log_ax$，则 $0<a<1$.因为当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$4^{\frac{1}{2}}<\log_a\frac{1}{2}$，所以 $a^2>\frac{1}{2}$，解得 $a>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $a<-\frac{\sqrt{2}}{2}$（舍去）.所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}<a<1$.故选 B.

4.A 提示：因为 $x>0$，$y>0$，$x+y=1$，

所以 $\frac{2x^2+x+1}{xy}=\frac{2x^2+x(x+y)+(x+y)^2}{xy}=\frac{4x^2+3xy+y^2}{xy}=\frac{4x}{y}+\frac{y}{x}+3\geqslant2\sqrt{\frac{4x}{y}\cdot\frac{y}{x}}+3=7$，当且仅当 $\frac{4x}{y}=\frac{y}{x}$，且 $x+y=1$，即 $x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{2}{3}$ 时，取等号.所以 $\frac{2x^2+x+1}{xy}$ 的最小值为 7.故选 A.

5.D 提示：因为关于 x 的不等式 $ax+b>0$ 的解集是 $\{x|x<-3\}$，所以 $-\frac{b}{a}=-3$，且 $a<0$，所以 $b=3a$，所以不等式 $bx^2-(a+2b)x-2b<0$ 可变形为 $3ax^2-7ax-6a<0$，即 $3x^2-7x-6>0$，解得 $x<-\frac{2}{3}$ 或 $x>3$，即所求不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x<-\frac{2}{3}\text{或}x>3\right\}$.故选 D.

6.A 提示：设函数 $f(x)=x^2+(a-1)x+a+2$，因为 $f(x_1)=f(x_2)=0$，且 $-1<x_1<1$，$1<x_2<2$，所以 $\begin{cases}f(-1)>0,\\f(1)<0,\\f(2)>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}4>0,\\2a+2<0,\\3a+4>0,\end{cases}$ 解得 $-\frac{4}{3}<a<-1$，所以实数 a 的取值范围是 $\left(-\frac{4}{3},-1\right)$.故选A.

7.C 提示：因为 $x>0$，$y>0$，$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=1$，所以 $x+\frac{y}{2}=\left(x+\frac{y}{2}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)=2+\frac{2x}{y}+\frac{y}{2x}\geqslant2+2\sqrt{\frac{2x}{y}\cdot\frac{y}{2x}}=4$，当且仅当 $2x=y$，即 $x=2$，$y=4$ 时，取等号，所以 $x+\frac{y}{2}$ 的最小值为 4，因为 $x+\frac{y}{2}<m^2+3m$ 有解，所以 $m^2+3m>4$，解得 $m<-4$ 或 $m>1$.故选 C.

8.D 提示：因为正实数 x,y 满足 $x+y=4$，$e^x>0$，$e^y>0$，所以 $e^x+e^y\geqslant2\sqrt{e^x\cdot e^y}=2\sqrt{e^{x+y}}=2e^2$，当且仅当 $e^x=e^y$，即 $x=y=2$ 时，取等号，故 A 正确；$\lg x+\lg y=\lg(xy)\leqslant\lg\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\lg4$，当且仅当 $x=y=2$ 时，取等号，故 B 正确；$x^2+y^2\geqslant\frac{(x+y)^2}{2}=8$，当且仅当 $x=y=2$ 时，取等号，故 C 正确；由题意，得 $y=4-x>0$，则 $0<x<4$，所以 $x(y+4)=x(8-x)=-x^2+8x=-(x-4)^2+16\in(0,16)$，故D 错误.故选 D.

专题三 函数与导数

专项训练(1)

1.B 提示：要使函数 $f(x)=\frac{1}{\ln(x+1)}+\sqrt{9-x^2}$ 有意义，则 x 应满足 $\begin{cases}x+1>0,\\x+1\neq1,\\9-x^2\geqslant0,\end{cases}$ 解得 $-1<x<0$ 或 $0<x\leqslant3$，所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,0)\cup(0,3]$.故选 B.

2.B 提示：因为 $f(x)=\begin{cases}f(x+2),x<1,\\\log_2x,x\geqslant1,\end{cases}$ 所以 $f(-2)=f(0)=f(2)=\log_22=1$.故选 B.

3.D 提示：因为 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}-2ax$，所以 $f'(1)=1-2a=-1$，解得 $a=1$.故选 D.

4.A 提示：设 $\sqrt{1-2x}=t$，则 $t\geqslant0$，$x=\frac{1-t^2}{2}$，所以 $y=1+x-\sqrt{1-2x}=1+\frac{1-t^2}{2}-t=-\frac{1}{2}(t+1)^2+2$，对称轴为 $t=-1$，开口向下，因为 $t\geqslant0$，所以当 $t=0$ 时，y 取得最大值 $\frac{3}{2}$，即 $y\leqslant\frac{3}{2}$，故函数 $y=1+x-\sqrt{1-2x}$ 的值域为 $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$.故选 A.

5.B 提示：因为 $f(x)$ 的定义域为 R，且 $f(-x)=\frac{2(-x)^3\cos(-x)}{e^{-x}+e^x}=-\frac{2x^3\cos x}{e^x+e^{-x}}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，其图象关于原点对称，故排除 C，D；当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$2x^3>0$，$\cos x>0$，所以 $f(x)>0$，故排除 A.故选 B.

6.C 提示：由 $y=axe^x+\ln x$，得 $y'=ae^x+axe^x+\frac{1}{x}$，由题意，得 $\begin{cases}2ae+1=3,\\ae=3+b,\end{cases}$ 解得 $a=\frac{1}{e}$，$b=-2$.故选 C.

7.A 提示：因为 $f(x)$ 是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，$f(-2)=0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为增函数，且 $f(2)=-f(-2)=0$，所以当 $x<-2$ 或 $0<x<2$ 时，$f(x)<0$，当 $-2<x<0$ 或 $x>2$ 时，$f(x)>0$.因为 $\frac{f(x)}{x-1}<0$ 等价于 $\begin{cases}f(x)>0,\\x-1<0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)<0,\\x-1>0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}-2<x<0\text{ 或 }x>2,\\x<1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<-2\text{ 或 }0<x<2,\\x>1,\end{cases}$ 解得 $-2<x<0$，或 $1<x<2$，所以原不等式的解集为 $(-2,0)\cup(1,2)$.故选 A.

8.A 提示：由题意，得 $a>0$，不等式 $\frac{1}{2}e^{ax}-\frac{\ln(2x)}{a}\geqslant0$ 恒成立，即 $\frac{1}{2}e^{ax}\geqslant\frac{\ln(2x)}{a}$ 恒成立，即 $ae^{ax}\geqslant2\ln(2x)$，进而转化为 $axe^{ax}\geqslant2x\ln(2x)=e^{\ln(2x)}\cdot\ln(2x)$ 恒成立.因为 $a>0$，$x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，所以 $ax>0$，$\ln(2x)>0$.设 $g(x)=xe^x(x>0)$，则

$g'(x)=(x+1)e^x$,当 $x>0$ 时,$g'(x)>0$,所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,所以不等式$\frac{1}{2}e^{ax}-\frac{\ln(2x)}{a}\geqslant 0$恒成立等价于 $g(ax)\geqslant g(\ln(2x))$恒成立,又 $ax>0,\ln(2x)>0$,所以 $ax\geqslant\ln(2x)$对任意的 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$恒成立,所以$\frac{a}{2}\geqslant\frac{\ln(2x)}{2x}$在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上恒成立.设 $h(t)=\frac{\ln t}{t}(t>1)$,则 $h'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$.当$1<t<e$ 时,$h'(t)>0$,$h(t)$单调递增;当 $t>e$ 时,$h'(t)<0$,$h(t)$单调递减.所以$[h(t)]_{max}=h(e)=\frac{1}{e}$,此时 $2x=e$,即 $x=\frac{e}{2}\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$,所以$\frac{a}{2}\geqslant\frac{1}{e}$,解得 $a\geqslant\frac{2}{e}$.故选A.

专项训练(2)

1.D **提示:**令 $t=2x-1$,则 $x=\frac{t+1}{2}$,$f(t)=4\left(\frac{t+1}{2}\right)^2+3=t^2+2t+4$,所以 $f(x)=x^2+2x+4$.故选 D.

2.B **提示:**由题意,知当 $t=0$ 时,$y=0.05+\lambda=0.25$,解得 $\lambda=0.2$,所以 $y=0.05+0.2e^{-\frac{t}{10}}$,令 $y=0.05+0.2e^{-\frac{t}{10}}<0.15$,即$e^{-\frac{t}{10}}<\frac{1}{2}$,即$-\frac{t}{10}<\ln\frac{1}{2}=-\ln 2\approx-0.693$,解得 $t>6.93$,所以需要的时间 t 的最小整数值为 7.故选 B.

3.C **提示:**因为 $f(x)=x^2+3xf'(2)+\ln x$,所以 $f'(x)=2x+3f'(2)+\frac{1}{x}$,令 $x=2$,得 $f'(2)=4+3f'(2)+\frac{1}{2}$,即 $2f'(2)=-\frac{9}{2}$,所以 $f'(2)=-\frac{9}{4}$.故选 C.

4.C **提示:**当 $0<a<1$ 时,要使得不等式 $\log_a(2x+1)\geqslant 2\log_a(x+m)$有意义,需要 $x+m>0$ 在 $x\in[0,4]$恒成立,可得 $m>0$,此时不等式 $\log_a(2x+1)\geqslant 2\log_a(x+m)$恒成立等价于$\sqrt{2x+1}\leqslant x+m$ 恒成立,即 $m\geqslant\sqrt{2x+1}-x$,令 $t=\sqrt{2x+1}$,则 $t\in[1,3]$,$x=\frac{t^2-1}{2}$,所以 $m\geqslant\sqrt{2x+1}-x=t-\frac{t^2-1}{2}=-\frac{1}{2}t^2+t+\frac{1}{2}$,因为 $y=-\frac{1}{2}t^2+t+\frac{1}{2}$在$[1,3]$上单调递减,所以当 $t=1$ 时,$y=-\frac{1}{2}t^2+t+\frac{1}{2}$取得最大值 1,所以 $m\geqslant 1$.综上,实数 m 的取值范围是$[1,+\infty)$.故选C.

5.A **提示:**由已知,得函数 $f(x)$为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且 $f(x)$的最小正周期 $T=4$,则 $f(2023)=f(505\times4+3)=f(3)=f(-1)=-f(1)$,又当 $x\in(0,2)$时,$f(x)=x^3-3x$,所以 $f(1)=-2$,所以 $f(2023)=-f(1)=2$.故选 A.

6.C **提示:**因为当 $x<0$ 时,$f(x)=x^3-3x$,所以 $f'(x)=3x^2-3$,令 $f'(x)=0$,得 $x=-1$(舍正),所以 $f(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递增,在$(-1,0)$上单调递减,又 $f(x)=\ln(x+1)$在$[0,+\infty)$上单调递增,所以作出 $f(x)$的大致图象(图略),则 $f(x)$极大值为 $f(-1)=2$,又 $f(0)=0$,所以当 $k\in(0,2)$时,$y=f(x)$的图象与直线 $y=k$ 有 3 个交点,即函数 $y=f(x)-k$ 有三个不同的零点,所以实数 k 的取值范围为$(0,2)$.故选C.

7.A **提示:**由题意,得 $f'(x)=2x^2-ax+1$,因为函数 $f(x)$在$(1,2)$内存在极值点,所以 $y=f'(x)$在$(1,2)$内有变号零点,即 $ax=2x^2+1$ 在$(1,2)$上有解,则方程 $a=2x+\frac{1}{x}$在$(1,2)$上有解,所以条件等价于直线 $y=a$ 与函数 $y=2x+\frac{1}{x}$的图象在$(1,2)$内有交点,因为 $y=2x+\frac{1}{x}$在$(1,2)$上单调递增,所以 $y=2x+\frac{1}{x}\in\left(3,\frac{9}{2}\right)$,所以实数 a 的取值范围是$\left(3,\frac{9}{2}\right)$.故选 A.

8.C **提示:**由 $f(x)=(x-1)(e^x-e)$,$x\in\mathbf{R}$,得 $f'(x)=xe^x-e$,因为$f'(1)=0$,且当 $x>1$ 时,$e^x>e$,所以 $xe^x>e$,即$xe^x-e>0$,所以$f'(x)>0$;当 $0<x<1$ 时,$1<e^x<e$,所以 $0<xe^x<e$,即 $xe^x-e<0$,所以$f'(x)<0$;当 $x\leqslant0$ 时,$0<e^x\leqslant1$,所以$xe^x\leqslant0$,所以 $xe^x-e<0$,所以 $f'(x)<0$.所以 $f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,所以$[f(x)]_{min}=f(1)=0$.因为$\forall x_2\in[0,+\infty)$,都$\exists x_1\in\mathbf{R}$,使得不等式 $f(x_1)\leqslant g(x_2)$成立,所以对$\forall x_2\in[0,+\infty)$,$[f(x)]_{min}\leqslant g(x_2)$恒成立,等价于$\forall x_2\in[0,+\infty)$,$g(x_2)\geqslant0$ 恒成立,即$\forall x\in[0,+\infty)$,$g(x)=e^x-ax-1\geqslant0$ 恒成立,又 $g'(x)=e^x-a(x\geqslant0)$,且 $g'(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,所以 $g'(x)\geqslant g'(0)=1-a$.①当 $1-a\geqslant0$,即 $a\leqslant1$ 时,$g'(x)\geqslant0$,所以 $g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,所以$[g(x)]_{min}=g(0)=0$,符合题意,所以 $a\leqslant1$时,$g(x)\geqslant0$ 恒成立;②当 $1-a<0$,即 $a>1$ 时,令 $g'(x)=e^x-a=0$,得$x=\ln a$,所以当 $x\in(0,\ln a)$时,$g'(x)<0$;当 $x\in(\ln a,+\infty)$时,$g'(x)>0$,所以 $g(x)$在$(0,\ln a)$单调递减,在$(\ln a,+\infty)$单调递增,又 $g(0)=0$,所以$[g(x)]_{min}=g(\ln a)<g(0)=0$,所以$\forall x\in[0,+\infty)$,$g(x)=e^x-ax-1\geqslant0$ 不恒成立,所以 $a>1$ 不满足题意.综上,a 的取值范围为$(-\infty,1]$,即 a 的最大值为 1.故选 C.

第 26 期

专题四 三角函数

专项训练(1)

1.C **提示:**$y=\tan2x$ 的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$,故 A 错误;$y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$为非奇非偶函数,故 B 错误;$y=\cos\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)=\sin2x$ 为奇函数,且最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$,故 C 正确;$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos2x$ 为偶函数,故 D 错误.故选 C.

2.A **提示:**由 $\sin\alpha-\sin\beta=-\frac{2}{3}$,得 $\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{4}{9}$,由 $\cos\alpha-\cos\beta=\frac{2}{3}$,得 $\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{4}{9}$,两式相加,得 $2-2\cos(\alpha-\beta)=\frac{8}{9}$,所以 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{5}{9}$,因为 $\sin\alpha-\sin\beta=-\frac{2}{3}<0$,$\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\alpha-\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,所以 $\sin(\alpha-\beta)=-\frac{2\sqrt{14}}{9}$,$\tan(\alpha-\beta)=-\frac{2\sqrt{14}}{5}$.故选 A.

3.A **提示:**因为将线段 AB 绕点 A 顺时针旋转 60°后,点 B 恰好落在 CE 上的点 F 处,所以$\angle A=60°$.

因为$\angle ACB=90°$,$AC=1$,所以 $AB=AF=2AC=2$,$BC=CE=\sqrt{3}AC=\sqrt{3}$,所以 $S_{阴影}=S_{\triangle ACB}+S_{扇形CBE}-S_{扇形ABF}=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}+\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times(\sqrt{3})^2-\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times2^2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{12}$.故选A.

4.B **提示:**令$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,解得$\frac{5\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{11\pi}{12}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$.当 $k=-2$ 时,$-\frac{19\pi}{12}\leqslant x\leqslant-\frac{13\pi}{12}$,当 $k=-1$ 时,$-\frac{7\pi}{12}\leqslant x\leqslant-\frac{\pi}{12}$,故 B 正确,A 错误;当 $k=0$ 时,$\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{11\pi}{12}$,故 C,D 错误.故选 B.

5.C **提示:**对于函数 $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$,其最小正周期 $T=2\pi$,故-2π 也是 $f(x)$的一个周期,故 A 正确;对称轴为 $x+\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in Z)$,即 $x=k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in Z)$,则当 $k=3$ 时,$x=\frac{8\pi}{3}$,故 B 正确;由$x+\frac{\pi}{3}\in[2k\pi,\pi+2k\pi](k\in Z)$,可得$x\in\left[2k\pi-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$,当 $k=0$ 时,$f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$上单调递减,在$\left(\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$上单调递增,故 C 错误;$f(x+\pi)=\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)$,令$x+\frac{4\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得 $x=k\pi-\frac{5\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$,则当 $k=1$ 时,$x=\frac{\pi}{6}$,故 D 正确.故选 C.

6.B **提示:**由函数 $f(x)$的部分图象,可得$\frac{3T}{4}=\frac{11\pi}{12}-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{4}$,则 $T=\pi$,所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$,所以 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$,因为$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$,即 $\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=1$,解得$\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,则 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,可得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$,所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,所以$f\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=2\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$.故选 B.

7.B **提示:**由水轮每分钟逆时针转动 4 圈,得函数 $y=f(x)$的最小正周期 $T=15$,则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{15}$,因为水轮的半径为 2m,水轮圆心 O 距离水面$\sqrt{3}$ m,且 $y=A\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)+k(A>0)$,所以$\begin{cases}-A+k=-2+\sqrt{3},\\A+k=2+\sqrt{3},\end{cases}$解得 $k=\sqrt{3}$,$A=2$,所以 $y=2\sin\left(\frac{2\pi}{15}x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}$,由题意,令 $2\sin\left(\frac{2\pi}{15}x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$,得$\frac{2\pi}{15}x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,令 $k=0$,得 $x=\frac{25}{4}$,所以点 P 到达最高点所需的最短时间为$\frac{25}{4}$s.故选 B.

8.B **提示:**因为函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$为奇函数,且 $\omega>0$,$\varphi\in(0,\pi)$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}$,所以 $f(x)=-\sin\omega x$,

所以$x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$时,$\omega x\in\left[-\frac{\pi}{3}\omega,\frac{\pi}{4}\omega\right]$,

因为 $f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$上恰有一个最大值和一个最小值,

所以$\begin{cases}-\frac{3\pi}{2}<-\frac{\pi}{3}\omega\leqslant-\frac{\pi}{2},\\\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{4}\omega<\frac{3\pi}{2},\end{cases}$解得 $2\leqslant\omega<\frac{9}{2}$,所以 ω 的取值范围是$\left[2,\frac{9}{2}\right)$.故选 B.

专项训练(2)

1.A **提示:**因为 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}$,所以 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left[2\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\pi\right]=-\cos\left[2\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\right]=-\left[1-2\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\right]=-\left(1-\frac{8}{9}\right)=-\frac{1}{9}$,故选 A.

2.B **提示:**由 $y=\tan\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$,令 $k\pi-\frac{\pi}{2}<3x+\frac{\pi}{6}<k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,解得$\frac{k\pi}{3}-\frac{2\pi}{9}<x<\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{9}$,$k\in\mathbf{Z}$.所以该函数的单调递增区间是$\left(\frac{k\pi}{3}-\frac{2\pi}{9},\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{9}\right)$,$k\in\mathbf{Z}$.故选B.

3.D **提示:**因为 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{5}-\cos\alpha$,所以$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha+\cos\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{5}$,所以$\sqrt{3}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{5}$,即 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{5}$,所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$,所以$\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)=\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=2\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-1=2\times\left(\frac{4}{5}\right)^2-1=\frac{7}{25}$.故选 D.

4.B **提示:**因为 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$满足 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$,$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=0$,所以$\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{T}{4}+\frac{nT}{2}$,$n\in\mathbf{N}_+$,解得 $T=\frac{17\pi}{3+6n}(n\in\mathbf{N}_+)$,则$\frac{2\pi}{\omega}=\frac{17\pi}{3+6n}(n\in\mathbf{N}_+)$,所以 $\omega=\frac{6+12n}{17}(n\in\mathbf{N}_+)$,又 $f(x)$在$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right)$上单调,所以$\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{T}{2}$,即$\frac{7\pi}{12}\leqslant\frac{\pi}{\omega}$,解得 $\omega\leqslant\frac{12}{7}$,又 $\omega>0$,所以当 $n=1$ 时,ω 取得最大值,最大值为$\frac{18}{17}$.故选B.

5.A **提示:**因为 $f(x)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$,所以-2π 为 $f(x)$的一个周期,故 A 正确;当 $x=\frac{8\pi}{3}$ 时,$f\left(\frac{8\pi}{3}\right)=\cos\frac{17\pi}{3}\neq\pm1$,故 B 错误;令 $g(x)=f(x+\pi)=\cos\left(2x+2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,当 $x=\frac{\pi}{6}$时,$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$,故 C 错误;因为 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,所以 $2x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{4\pi}{3},\frac{7\pi}{3}\right)$,故函数 $f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上先增后减,故 D 错误.故选 A.

6.A **提示:**由题意,得$\begin{cases}\frac{2\pi}{\omega}=4\pi,\\\frac{\pi}{3}\omega+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\end{cases}k\in\mathbf{Z}$,解得$\begin{cases}\omega=\frac{1}{2},\\\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z},\end{cases}$又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,则 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,所以 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$,令$\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}=n\pi$,$n\in\mathbf{Z}$,解得 $x=-\frac{2\pi}{3}+2n\pi$,$n\in\mathbf{Z}$,令 $n=0$,得 $x=-\frac{2\pi}{3}$,所以 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$的一个对称中心为$\left(-\frac{2\pi}{3},0\right)$.故选 A.

7.C **提示:**由图象,得$\frac{T}{2}=\frac{13\pi}{12}-\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$,则 $T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$,所以 $\omega=2$,因为 $f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=0$,所以$\frac{7\pi}{12}\times2+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,所以 $\varphi=2k\pi-\frac{2\pi}{3}$,$k\in\mathbf{Z}$,因为$|\varphi|<\pi$,所以 $\varphi=-\frac{2\pi}{3}$,所以 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$.由 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant\pi$,得$-\frac{2\pi}{3}\leqslant2x_1-\frac{2\pi}{3}<2x_2-\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{4\pi}{3}$,由 $f(x_1)=f(x_2)=-\frac{4}{5}$,结合图象可得 $2x_1-\frac{2\pi}{3}+2x_2-\frac{2\pi}{3}=2\pi$,则 $x_1+x_2=\frac{5\pi}{3}$,所以 $x_2=\frac{5\pi}{3}-x_1$,所以 $\cos(x_2-x_1)=\cos\left(\frac{5\pi}{3}-2x_1\right)=-\cos\left(2x_1-\frac{2\pi}{3}\right)=-f(x_1)=\frac{4}{5}$.故选 C.

8.B **提示:**因为 $f(x)$在区间$\left(\frac{7\pi}{12},\frac{51\pi}{60}\right)$上单调,$f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=-f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$,$\frac{3\pi}{4}\in\left(\frac{7\pi}{12},\frac{51\pi}{60}\right)$,所以 $f(x)$的一个对称中心为$\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$,且$\frac{51\pi}{60}-\frac{2\pi}{3}=\frac{11\pi}{60}>\frac{2\pi}{3}-\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{12}$,所

以$\frac{T}{4}\geqslant\frac{11\pi}{60}$,即 $T\geqslant\frac{11\pi}{15}$,即$\frac{2\pi}{\omega}\geqslant\frac{11\pi}{15}$,所以 $0<\omega\leqslant\frac{30}{11}$.又 $f(x)$的一个对称中心为$\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$,所以 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=0$,因为 $f(x)$在区间$\left[\frac{2\pi}{3},\frac{13\pi}{6}\right)$上恰有 5 个零点,相邻两个零点之间的距离为$\frac{T}{2}$,5 个零点之间的距离为 $2T$,6 个零点之间的距离为$\frac{5T}{2}$,所以$\frac{2\pi}{3}+2T<\frac{13\pi}{6}\leqslant\frac{2\pi}{3}+\frac{5T}{2}$,即$\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi}{\omega}<\frac{13\pi}{6}\leqslant\frac{2\pi}{3}+\frac{5\pi}{\omega}$,解得$\frac{8}{3}<\omega\leqslant\frac{10}{3}$,又 $0<\omega\leqslant\frac{30}{11}$,所以$\frac{8}{3}<\omega\leqslant\frac{30}{11}$.故选 B.

专题五 平面向量、解三角形

专项训练(1)

1.A **提示:**由 $a\perp c$,得 $a\cdot c=x-2=0$,即 $x=2$,由 $b//c$,得 $y=1\times(-2)=-2$,则 $x+y=0$.故选 A.

2.C **提示:**由题意,得 a 在 b 方向上的投影向量为$\frac{a\cdot b}{|b|}\cdot\frac{b}{|b|}=\frac{1\times3\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{3}\times\frac{b}{3}=-\frac{\sqrt{2}}{6}b$.故选 C.

3.C **提示:**因为 $\cos B=\frac{9}{16}$,所以 $\sin B=\sqrt{1-\left(\frac{9}{16}\right)^2}=\frac{5\sqrt{7}}{16}$,又 $a=6$,$\sin A=\frac{3\sqrt{7}}{8}$,由正弦定理,得 $b=\frac{a\sin B}{\sin A}=5$.故选 C.

4.A **提示:**因为 $b=3$,$\sin^2A-\sin^2B=3\sin^2C$,所以由正弦定理,得 $a^2-b^2=3c^2$,则 $a^2=3c^2+b^2=3c^2+9$,又 $\cos A=-\frac{1}{3}$,所以由余弦定理,得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=9+c^2+2c$,所以 $3c^2+9=9+c^2+2c$,即 $c^2-c=0$,解得 $c=1$,又 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times3\times1\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}$.故选 A.

5.A **提示:**由图示可知,A,M,Q 三点共线,所以存在实数 μ,使得$\overrightarrow{BQ}=\mu\overrightarrow{BM}+(1-\mu)\overrightarrow{BA}$,又$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{BQ}=\frac{5}{7}\overrightarrow{BN}$,所以$\frac{5}{7}\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\mu\overrightarrow{BC}+(1-\mu)\overrightarrow{BA}$,则$\overrightarrow{BN}=\frac{7}{10}\mu\overrightarrow{BC}+\frac{7}{5}(1-\mu)\overrightarrow{BA}$,又 A,N,C 三点共线,所以$\frac{7}{10}\mu+\frac{7}{5}(1-\mu)=1$,解得 $\mu=\frac{4}{7}$,即$\overrightarrow{BN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}+\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}$,所以$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=\frac{2}{5}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})+\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}$,所以$\overrightarrow{AN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$,即$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{NC}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$,则$\overrightarrow{NC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$,又$\overrightarrow{NC}=\lambda\overrightarrow{AC}$,即 $\lambda=\frac{3}{5}$.故选 A.

6.A **提示:**因为 $a=(\cos\alpha,\sin\alpha)$,$b=(-\sin\alpha,\cos\alpha)$,所以 $a\cdot b=-\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha=0$,$|a|=1$,$|b|=1$,因为 $m=\sqrt{3}a+b$,$n=a+\sqrt{3}b$,所以 $m\cdot n=(\sqrt{3}a+b)\cdot(a+\sqrt{3}b)=\sqrt{3}a^2+\sqrt{3}b^2+4a\cdot b=2\sqrt{3}$,$|m|=\sqrt{(\sqrt{3}a+b)^2}=\sqrt{3a^2+2\sqrt{3}a\cdot b+b^2}=2$,同理可得,$|n|=2$,设 m 与 n 的夹角为 θ,$\theta\in[0,\pi]$,所以 $\cos\theta=\frac{m\cdot n}{|m||n|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$,故 m 与 n 的夹角为$\frac{\pi}{6}$.故选 A.

7.B **提示:**因为 $\cos37°=0.8$,所以 $\sin37°=0.6$,又 $\sin74°\approx\sin75°=\sin(45°+30°)=\sin45°\cos30°+\cos45°\sin30°=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$,因为$\angle BCD=69°$,$\angle CDB=37°$,所以$\angle CBD=180°-69°-37°=74°$,在$\triangle BCD$中,由正弦定理,得$\frac{CD}{\sin\angle CBD}=\frac{CB}{\sin\angle CDB}$,即 $CB=\frac{CD\sin\angle CDB}{\sin\angle CBD}=\frac{37.6\sin37°}{\sin74°}$,又 $\tan64°=\frac{AB}{BC}$,所以 $AB=BC\tan64°=2BC=2\times\frac{37.6\sin37°}{\sin74°}\approx\frac{2\times37.6\times0.6}{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}\approx47$m.故选B.

8.D **提示:**在锐角$\triangle ABC$ 中,由$\sqrt{3}\sin B+\cos B=2$,得 $2\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)=2$,则 $B=\frac{\pi}{3}$.因为$\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{\sin A\cdot\sin B}{3\sin C}$,由余弦定理和正弦定理,得$\frac{a^2+c^2-b^2}{2acb}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}=\frac{a}{2\sqrt{3}c}$,解得 $b=2\sqrt{3}$,设$\triangle ABC$ 外接圆的半径为 R,则 $2R=\frac{b}{\sin B}=4$.所以 $a+c=2R\sin A+2R\sin C=4(\sin A+\sin C)=4\left[\sin A+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)\right]=4\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$,又 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,则 $A+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$,所以当 $A=\frac{\pi}{3}$时,$(a+c)_{max}=4\sqrt{3}$.所以$\triangle ABC$ 周长的最大值$(a+b+c)_{max}=6\sqrt{3}$.故选 D.

专题六 数列

专项训练(1)

1.C **提示:**数列$-5,-9,-13,-17$ 的通项公式为 $a_n=-(4n+1)$,令$-(4n+1)=-401$,解得 $n=100$,即-401 是该数列的第 100 项.故选 C.

2.A **提示:**设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,首项为 a_1,因为 $a_3+a_9=4a_5$,$a_2=-6$,所以$\begin{cases}2a_1+10d=4a_1+16d,\\a_1+d=-6,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=-9,\\d=3.\end{cases}$故选A.

3.C **提示:**因为 $\log_3a_n+1=\log_3a_{n+1}(n\in\mathbf{N}_+)$,所以 $a_{n+1}=3a_n$,所以数列$\{a_n\}$是以 3 为公比的等比数列,因为 $a_1+a_3+a_5=9$,所以 $a_3+a_5+a_7=9(a_1+a_3+a_5)=9^2$,所以 $\log_{\frac{1}{9}}(a_3+a_5+a_7)=\log_{\frac{1}{9}}9^2=-2$.故选 C.

4.D **提示:**设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,则 $2a_{510}-a_8=2(a_1+509d)-(a_1+7d)=a_1+1011d=a_{1012}=4$,

所以 $S_{2023}=\frac{2023(a_1+a_{2023})}{2}=2023a_{1012}=8092$.故选 D.

5.C **提示:**因为 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$,所以 $a_{n+3}=a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n-a_{n+1}=-a_n$,即 $a_{n+3}=-a_n$,则 $a_{n+6}=-a_{n+3}=-(-a_n)=a_n$,所以数列$\{a_n\}$是以 6 为周期的周期数列,所以 $a_{2023}=a_{337\times6+1}=a_1=1$.故选C.

6.D **提示:**设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,所以 $S_1+2=a_1+2$,$\frac{S_3}{3}+4=\frac{\frac{3(a_1+a_3)}{2}}{3}+4=a_2+4$,$\frac{S_5}{5}+6=\frac{\frac{5(a_1+a_5)}{2}}{5}+6=a_3+6$,因为 S_1+2,$\frac{S_3}{3}+4$,$\frac{S_5}{5}+6$ 成等比数列,所以$(a_2+4)^2=(a_1+2)\cdot(a_3+6)$,所以$(a_2+4)^2=(a_2+2-d)(a_2+d+6)$,即 $d^2+4d+4=0$,解得 $d=-2$,所以$\frac{a_2+4}{a_1+2}=1$,所以所求公比为 1.故选D.

7.B **提示:**因为数列$\{a_n\}$为等比数列,且 $a_1>1$,$a_{2022}\cdot a_{2023}>1$,所以 $q>0$,则数列$\{a_n\}$为正项等比数列.当 $q\geqslant1$ 时,则 $a_n=a_1q^{n-1}>1$,不满足$(a_{2022}-1)(a_{2023}-1)<0$,舍去,所以 $0<q<1$,即数列$\{a_n\}$为单调递减数列,故 A 正确;由$(a_{2022}-1)\cdot(a_{2023}-1)<0$,得 $a_{2022}>1$,$0<a_{2023}<1$,所以 $S_{2023}-S_{2022}=a_{2023}<1$,即 $S_{2022}+1>S_{2023}$,故 B 错误;因为数列$\{a_n\}$单调递减,且 $a_{2022}>1$,$0<a_{2023}<1$,所以 T_{2022} 是数列$\{T_n\}$中的最大项,故 C 正确;由等比数列的性质,知 $T_{4045}=a_1a_2a_3\cdots a_{4045}=a_{2023}^{4045}<1$,故 D 正确.故选 B.

8.C **提示:**因为数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$,$a_{n+1}=2a_n+1(n\in\mathbf{N}_+)$,所以 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$,又 $a_1+1=2$,所以数列$\{a_n+1\}$是首项为 2,公比为 2 的等比数列,所以 $a_n+1=2^n$,即 $a_n=2^n-1$,所以$\frac{a_n+1}{(a_n+2)(a_{n+1}+2)}=\frac{2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}$,所以 $T_n=\left(\frac{1}{2+1}-\frac{1}{2^2+1}\right)+\left(\frac{1}{2^2+1}-\frac{1}{2^3+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2^{n+1}+1}<\frac{1}{3}$,又 $k>T_n$ 恒成立,所以 $k\geqslant\frac{1}{3}$.故选 C.

专项训练(2)

1.D **提示:**因为 $2S_3=7a_2$,所以 $2\left(\frac{a_2}{q}+a_2+a_2q\right)=7a_2$,因为 $a_2\neq0$,所以$\frac{1}{q}+q=\frac{5}{2}$,即 $2q^2-5q+2=0$,解得 $q=\frac{1}{2}$,或 $q=2$.故选 D.

2.C **提示:**因为 a_2,a_{2022} 是方程 $x^2-4x+3=0$ 的两个根,所以 $a_2+a_{2022}=4$,又$\{a_n\}$是等差数列,所以 $a_1+a_{2023}=a_2+a_{2022}=\cdots=2a_{1012}$,即 $a_{1012}=2$,所以 $2^{a_1}\times2^{a_2}\times2^{a_3}\times\cdots\times2^{a_{2023}}=2^{(a_1+a_2+\cdots+a_{2023})}=2^{(1011\times4+2)}=2^{4046}$.故选 C.

3.C **提示:**因为 $OA_1=A_1A_2=A_2A_3=\cdots=A_7A_8=1$,由勾股定理,得 $a_{n+1}^2=a_n^2+1$,所以数列$\{a_n^2\}$是以 1 为首项,1 为公差的等差数列,所以 $a_n^2=1+(n-1)\times1=n$,则 $a_{36}^2=36$,$a_{16}^2=16$,所以 $a_{36}=6$,$a_{16}=4$,则 $a_{36}+a_{16}=10$.故选 C.

4.A **提示:**设正项等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,则 $q>0$,因为 $2S_3=3a_2+8a_1$,所以 $2(a_1+a_2+a_3)=3a_2+8a_1$,即 $6a_1+a_2-2a_3=0$,所以 $6a_1+a_1q-2a_1q^2=0$,因为 $a_1>0$,所以$-2q^2+q+6=0$,解得 $q=2$ 或 $q=-\frac{3}{2}$(舍去),所以 $q=2$,因为 $S_8=2S_7+2$,所以 $S_7+a_8=2S_7+2$,所以 $a_8=S_7+2$,所以 $a_1q^7=\frac{a_1(1-q^7)}{1-q}+2$,解得 $a_1=2$,所以 $a_2=a_1q=4$.故选A.

5.B **提示:**由题设,得 $2a_1=a_3-a_2$,设$\{a_n\}$的公比为 q,则 $q>0$,且 $a_n>0$,$2a_1=a_1q^2-a_1q$,即 $q^2-q-2=0$,解得 $q=2$(舍负),由$\sqrt{a_m\cdot a_n}=4a_1$,得 $a_1^2q^{m+n-2}=16a_1^2$,则 $2^{m+n-2}=16$,所以 $m+n=6$,所以$\frac{1}{m}+\frac{5}{n}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{m}+\frac{5}{n}\right)(m+n)=\frac{1}{6}\left(6+\frac{n}{m}+\frac{5m}{n}\right)\geqslant\frac{1}{6}\left(6+2\sqrt{\frac{n}{m}\cdot\frac{5m}{n}}\right)=1+\frac{\sqrt{5}}{3}$,当且仅当$\frac{n}{m}=\frac{5m}{n}$,即 $n=\sqrt{5}m=\frac{15-3\sqrt{5}}{2}\notin\mathbf{N}_+$,所以等号不成立,又$\frac{15-3\sqrt{5}}{2}\in(4,5)$,故当 $n=5$,$m=1$ 时,$\frac{1}{m}+\frac{5}{n}=2$,当 $n=4$,$m=2$ 时,$\frac{1}{m}+\frac{5}{n}=\frac{7}{4}$,显然 $2>\frac{7}{4}$,故 $n=4$,$m=2$ 时,$\frac{1}{m}+\frac{5}{n}$取得最小值$\frac{7}{4}$.故选 B.

6.C **提示:**因为 $a_n=\frac{S_n}{n}+2(n-1)$,所以 $S_n-S_{n-1}=\frac{S_n}{n}+2(n-1)(n\geqslant2)$,整理得$(n-1)S_n-nS_{n-1}=2n(n-1)$,两边同时除以 $n(n-1)$,得$\frac{S_n}{n}-\frac{S_{n-1}}{n-1}=2$,又 $a_1=1$,所以数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是以$\frac{S_1}{1}=1$为首项,以 2 为公差的等差数列,所以 $S_1+\frac{S_2}{2}+\frac{S_3}{3}+\cdots+\frac{S_m}{m}-(m-1)^2=m\times1+\frac{m(m-1)}{2}\times2-(m-1)^2=2m-1$,由题意,得 $2m-1=2023$,解得 $m=1012$.故选 C.

7.C **提示:**因为 $S_n=3a_n-2$ ①,所以当 $n=1$ 时,$S_1=a_1=3a_1-2$,解得 $a_1=1$;当 $n\geqslant2$ 时,$S_{n-1}=3a_{n-1}-2$ ②,由①-②,得 $a_n=3a_n-3a_{n-1}(n\geqslant2)$,所以$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{3}{2}(n\geqslant2)$,所以数列$\{a_n\}$是以 1 为首项,$\frac{3}{2}$为公比的等比数列,所以 $a_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.所以 $b_n=\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=n-1$,所以$\frac{1}{b_nb_{n-1}}=\frac{1}{(n-1)(n-2)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n-2}$,所以$\frac{1}{b_2b_3}+\frac{1}{b_3b_4}+\cdots+\frac{1}{b_{2023}b_{2024}}=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{2022\times2023}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2022}-\frac{1}{2023}=1-\frac{1}{2023}=\frac{2022}{2023}$.故选 C.

8.C **提示:**由 $2a_{n+1}+a_n=6$,得 $a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+3$,则$a_{n+1}-2=-\frac{1}{2}(a_n-2)$,又 $a_1=10$,所以 $a_1-2=8$,所以数列$\{a_n-2\}$是以 8 为首项,$-\frac{1}{2}$为公比的等比数列,所以 $a_n-2=8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,则 $a_n=8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2$,所以 $S_n=8+8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^1+8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2n$,所以 $S_n=\frac{8\cdot\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}+2n=2n+\frac{16}{3}-\frac{16}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n$,代入$\left|S_n-2n-\frac{16}{3}\right|<\frac{1}{192}$,得$\frac{16}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{192}$,即 $2^n>2^{10}$,因为 $n\in\mathbf{N}_+$,所以 $n\geqslant11$,所以满足不等式$\left|S_n-2n-\frac{16}{3}\right|<\frac{1}{192}$的 n 的最小正整数值为 11.故选C.

专题七 立体几何、空间向量

1.B **提示:**设圆锥的底面半径为 $r$cm,母线长为 $l$cm,由题意,得 $\pi l=2\pi r$,则 $l=2r$,因为 $S_{表}=\pi r^2+\frac{1}{2}\cdot2\pi r\cdot l=3\pi r^2=6\pi$,所以 $r=\sqrt{2}$.故选 B.

2.B **提示:**若 $m\perp\alpha$,$\alpha//\beta$,则 $m\perp\beta$,又 $n\perp\beta$,则 $m//n$,故 A 正确;若 $m//\alpha$,$\alpha\perp\beta$,则 $m\subset\beta$ 或 $m//\beta$ 或 m 与 β 相交,相交也不一定垂直,故 B 错误;若 $m\perp\alpha$,$m\perp n$,则 $n\subset\alpha$ 或 $n//\alpha$,又 $n\perp\beta$,则 $\alpha\perp\beta$,故 C 正确;若 $m\subset\alpha$,$\alpha//\beta$,则 $m//\beta$,又 $n\perp\beta$,则 $m\perp n$,故 D 正确.故选 B.

3.D **提示:**连接 AC,BD,设 $AC\cap BD=O$,则 O 是 AC 和 BD 的中点,连接 OE,因为 E 是 PC 的中点,所以 $OE//PA$,则异面直线 BE 与 PA 所成的角为$\angle BEO$(或其补角).由题意,得 $OE=\frac{1}{2}PA=2$,$BO=\sqrt{2}$,因为 $PA\perp$平面 $ABCD$,$OE//PA$,所以 $OE\perp$平面$ABCD$,又 $OB\subset$平面$ABCD$,所以$OE\perp OB$,所以$\tan\angle BEO=\frac{BO}{EO}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.故选 D.

4.A **提示:**连接 AC,交 BD 于点 O,连接 OE,因为 E 是 CC_1 的中点,O 是 AC 的中点,所以 $OE//AC_1$,因为 $AC_1\not\subset$平面 BDE,$OE\subset$平面 BDE,所以 $AC_1//$平面 BDE.以 D 为坐标原点,分别以 DA,DC,DD_1 所在直线为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,则 $C_1(0,2,2)$,$E(0,2,1)$,$B(2,2,0)$,$\overrightarrow{C_1E}=(0,0,-1)$,$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$,$\overrightarrow{DE}=(0,2,1)$,设平面 BDE 的法向量为 $n=(x,y,z)$,则$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{DB}=2x+2y=0,\\n\cdot\overrightarrow{DE}=2y+z=0,\end{cases}$可取