第 16 期

第 2~3 版综合测试(八)参考答案

一、单项选择题

1.D　**提示**:由$\{a_n\}$是等差数列,得$S_9=\frac{9}{2}(a_1+a_9)=\frac{9}{2}\cdot(a_4+a_6)=\frac{9}{2}\times10=45$.故选D.

2.C　**提示**:因为$y=x\ln x$,所以$y'=1+\ln x$,当$x=1$时,$y'=1$,所以曲线$y=x\ln x$在$x=1$处的切线的斜率为1,故切线的倾斜角为$\frac{\pi}{4}$.故选C.

3.A　**提示**:设点D的坐标为(x,y,z),则$\overrightarrow{AD}=(x-1,y,z-1)$,$\overrightarrow{AB}=(2,2,1)$,因为$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}$,

则$\begin{cases}x-1=4,\\y=4,\\z-1=2,\end{cases}$解得$x=5,y=4,z=3$,所以$D(5,4,3)$.故选A.

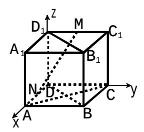
4.D　**提示**:由题得直线$l:\lambda(x-1)-y+1=0$,令$x=1$,则$y=1$,所以直线l过定点$(1,1)$,因为圆心$(0,2)$到直线l的距离$d\leqslant\sqrt{(1-0)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}$,所以$|AB|=2\sqrt{2^2-d^2}\geqslant2\sqrt{2}$.故选D.

5.B　**提示**:抛物线$C:y^2=2px$的准线方程为$x=-\frac{p}{2}$,由抛物线的定义以及抛物线$C:y^2=2px$上一点$(1,y_0)$到其焦点的距离为3,可得$1-\left(-\frac{p}{2}\right)=3$,解得$p=4$,所以抛物线方程为$y^2=8x$.故选B.

6.B　**提示**:由$a_1>a_3$,$S_2>S_4$,可得$a_1>a_1q^2$,$a_1+a_1q>a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3$,即为$a_1(1-q^2)>0$,$a_1(1+q)<0$.若$a_1>0$,则$-1<q<1$,且$q\neq0$,又$q<-1$,可得$q\in\varnothing$;若$a_1<0$,则$q>1$或$q<-1$,又$q>-1$,可得$q>1$.综上可得,数列$\{a_n\}$单调递减.若数列$\{a_n\}$单调递减,令$a_1>0$,$0<q<1$,则$a_1>a_3$,但$S_2<S_4$,所以“数列$\{a_n\}$单调递减”是“$a_1>a_3$,$S_2>S_4$”的必要不充分条件,故选B.

7.D　**提示**:不妨设正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为2,连接AC,以D为坐标原点,建立如图所示的空间直角坐标系,则$A(2,0,0)$,$C(0,2,0)$,$N(1,0,0)$,$M(0,1,2)$,$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$,$\overrightarrow{MN}=(1,-1,-2)$,因为$DD_1\perp$平面$ABCD$,$AC\subset$平面$ABCD$,所以$AC\perp DD_1$,又$AC\perp BD$,$DD_1\cap BD=D$,$DD_1,BD\subset$平面$DBB_1D_1$,故$AC\perp$平面$DBB_1D_1$,所以$\overrightarrow{AC}$为平面$DBB_1D_1$的一个法向量,设直线$MN$与平面$DBB_1D_1$所成角为$\theta$,则$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{MN}|}=\frac{4}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

故直线MN与平面DBB_1D_1所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.故选D.



(第7题图)

8.D　**提示**:因为$\angle AFB=60^\circ$,$|FB|=|FA|=a$,所以$\triangle AFB$为正三角形,所以$F(c,0)$到渐近线$bx-ay=0$的距离为$\frac{\sqrt{3}a}{2}$,所以$\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{3}a}{2}$,因为$a^2+b^2=c^2$,所以$b=\frac{\sqrt{3}a}{2}$,所以$c^2=\frac{7}{4}a^2$,所以该双曲线的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.故选D.

二、多项选择题

9.ABC　**提示**:直线$l_1:x\sin\alpha+y=0$与直线$l_2:x+3y+c=0$,对于A,$\sin\alpha\neq\frac{1}{3}$时,直线$l_1$与直线$l_2$相交,故A正确;对于B,$\sin\alpha=\frac{1}{3}$,$c=0$时,直线$l_1$与直线$l_2$重合,故B正确;对于C,$\sin\alpha=\frac{1}{3}$,$c\neq0$时,直线$l_1$与直线$l_2$平行,故C正确;对于D,$\frac{1}{3}\sin\alpha=-1$不可能成立,所以直线$l_1$与直线$l_2$不可能垂直.故选ABC.

10.ABC　**提示**:一个等比数列的前n项和、前$2n$项和、前$3n$项和分别为P,Q,R,

由等比数列的性质得$S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n}$成等比数列,所以$P,Q-P,R-Q$成等比数列,

所以$(Q-P)^2=P(R-Q)$,解得$P^2+Q^2=P(Q+R)$.故选ABC.

11.BD　**提示**:函数$f(x)=e^{\sin x}-e^{\cos x}$,

因为$f(x+2\pi)=e^{\sin(x+2\pi)}-e^{\cos(x+2\pi)}=e^{\sin x}-e^{\cos x}=f(x)$,所以$2\pi$为函数$f(x)$的周期,故A错误;因为$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+f(-x)=e^{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}-e^{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}+e^{\sin(-x)}-e^{\cos(-x)}=e^{\cos x}-e^{-\sin x}+e^{-\sin x}-e^{\cos x}=0$,所以$f(x)$关于点$\left(\frac{\pi}{4},0\right)$对称,故B正确;因为函数$f(x)=e^{\sin x}-e^{\cos x}$,则$f'(x)=e^{\sin x}\cos x+e^{\cos x}\sin x$,

当$0<x<\frac{\pi}{2}$时,$f'(x)>0$,所以$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,故C错误;令$f(x)=e^{\sin x}-e^{\cos x}=0$,即$e^{\sin x}=e^{\cos x}$,即$\sin x=\cos x$,因为$x\in(0,\pi)$,所以$\tan x=1$,所以$x=\frac{\pi}{4}$,故方程在$(0,\pi)$上只有一个根,所以$f(x)$在$(0,\pi)$内有且只有一个零点,故D正确.故选BD.

12.ACD　**提示**:对于A,由题意知,$a+c=3$,$a-c=1$,得$a=2$,$c=1$,所以椭圆C的离心率为$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$,故A正确;

对于B,$\triangle PF_2F_1$的周长为$2a+2c=6$,故B错误;对于C,若$\angle F_2PF_1=90^\circ$,则$|F_2F_1|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2=(|PF_1|+|PF_2|)^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|$,

即$(2c)^2=(2a)^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|$,故$|PF_1|\cdot|PF_2|=6$,

故$S_{\triangle PF_2F_1}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=3$,故C正确;

对于D,由余弦定理,可得$|F_2F_1|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2\cdot|PF_1|\cdot|PF_2|\cos\angle F_2PF_1=(|PF_1|+|PF_2|)^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|(1+\cos\angle F_2PF_1)$,即$4=16-2\times4(1+\cos\angle F_2PF_1)$,

解得$\cos\angle F_2PF_1=\frac{1}{2}$,故$\angle F_2PF_1=60^\circ$,故D正确.故选ACD.

三、填空题

13.60°　**提示**:因为$A(1,-1,-1)$,$B(-1,-2,2)$,$C(2,-4,1)$,所以$\overrightarrow{AB}=(-2,-1,3)$,$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}$,$\overrightarrow{AC}=(1,-3,2)$,$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}$,

所以$\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{-2+3+6}{\sqrt{14}\times\sqrt{14}}=\frac{1}{2}$.因为$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle\in[0^\circ,180^\circ]$,所以$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为$60^\circ$.

14.$\sqrt{3}$　**提示**:双曲线$x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$的渐近线方程为$y=\pm bx$,即$bx\pm y=0$,由对称性不妨取渐近线方程为$bx+y=0$,则$(2,0)$到直线$bx+y=0$的距离等于$\sqrt{3}$,所以$\frac{|2b|}{\sqrt{b^2+1}}=\sqrt{3}$,又$b>0$,解得$b=\sqrt{3}$.

15.$-\frac{1}{506}$　**提示**:由等差数列$\{a_n\}$满足$a_3a_4+2a_4a_6+a_5a_{12}=2024d$,可得$a_4(a_4-d)+2a_4(a_4+2d)+(a_4+d)(a_4+8d)=2024d$,即$4a_4^2+12a_4d+8d^2=2024d$,所以$4(a_4+2d)(a_4+d)=2024d$,即$4a_6a_5=2024d$,故$a_6a_5=506d$,所以$\frac{1}{a_6}-\frac{1}{a_5}=\frac{a_5-a_6}{a_6a_5}=\frac{-d}{506d}=-\frac{1}{506}$.

16.$[1,+\infty)$　**提示**:因为$f(x)=xe^x-\ln x-x(x>0)$,

所以$f'(x)=e^x+xe^x-\frac{1}{x}-1=(x+1)\left(e^x-\frac{1}{x}\right)$,

令$f'(x)=0$,得$e^x=\frac{1}{x}$,设$e^{x_1}=\frac{1}{x_1}$,$x_1\in(0,1)$,所以$x_1e^{x_1}=1$,即$\ln x_1+x_1=0$,

因为函数$y=e^x-\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上单调递增,所以当$x\in(0,x_1)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;当$x\in(x_1,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,所以$[f(x)]_{\min}=f(x_1)=x_1e^{x_1}-\ln x_1-x_1=x_1e^{x_1}-(\ln x_1+x_1)=1-0=1$,所以$a\geqslant1$,

即实数a的取值范围是$[1,+\infty)$.

四、解答题

17.**解**:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,由$a_3+a_5=2a_4=2\cdot(a_1+3d)=-20$,又$a_1=-16$,得$2(-16+3d)=-20$,解得$d=2$,所以$a_n=-16+2(n-1)=2n-18$.

(2)由(1)可知$S_n=\frac{n}{2}(-16+2n-18)=n^2-17n$,由于$n\in\mathbf{N}_+$,根据二次函数的性质可知当$n=8$或9时,$S_n$取得最小值,所以$S_n$取最小值时的项数为8或9.

18.**解**:由题意可知,直线l的斜率存在,直线l经过点$P(1,2)$,则可设直线l的方程为$y-2=k(x-1)$,

令$x=0$,则$y=2-k$,令$y=0$,则$x=1-\frac{2}{k}$,故$A\left(1-\frac{2}{k},0\right)$,$B(0,2-k)$.

(1)因为$P(1,2)$是线段AB的中点,所以$\frac{1}{2}(2-k)=2$,解得$k=-2$,故直线l的方程为$2x+y-4=0$.

(2)由上可得,$A\left(1-\frac{2}{k},0\right)$,$B(0,2-k)$,因为$A,B$两点分别在$x,y$轴的正半轴上,所以$1-\frac{2}{k}>0$,$2-k>0$,得$k<0$,

所以$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{k}\right)(2-k)=\frac{1}{2}\left(4-\frac{4}{k}-k\right)\geqslant\frac{1}{2}\left[4+2\cdot\sqrt{\left(-\frac{4}{k}\right)\times(-k)}\right]=4$,

当且仅当$-\frac{4}{k}=-k$,即$k=-2$时,等号成立,此时直线l的方程为$2x+y-4=0$.

19.**解**:(1)因为$\frac{a_3+3}{a_2+3}=\frac{24+3}{6+3}=3$,所以数列$\{a_n+3\}$的公比为3,所以$a_n+3=(a_2+3)\cdot3^{n-2}=9\cdot3^{n-2}=3^n$,故$a_n=3^n-3$.

(2)因为$3(b_{n+1}-b_n)=a_n$,所以$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{3}(3^n-3)=3^{n-1}-1$,

所以$b_2-b_1=3^0-1$,$b_3-b_2=3^1-1$,$\cdots$,$b_n-b_{n-1}=3^{n-2}-1$,以上各式累加,得$b_n-b_1=(3^0+3^1+\cdots+3^{n-2})-(n-1)=\frac{1-3^{n-1}}{1-3}-(n-1)=\frac{3^{n-1}}{2}-n+\frac{1}{2}$,又$b_1=\frac{1}{2}$,所以$b_n=\frac{3^{n-1}}{2}-n+1$.

20.**解**:(1)如图所示,以B为坐标原点,以BC,BA,BP所在直线分别为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系,则$A(0,2,0)$,$B(0,0,0)$,$D(t,2,0)$,$P(0,0,2)$.

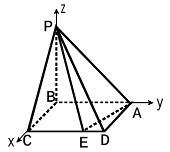
设$E(t,x,0)(0\leqslant x\leqslant2)$,所以$\overrightarrow{PE}=(t,x,-2)$,$\overrightarrow{EA}=(-t,2-x,0)$,因为$\overrightarrow{PE}\perp\overrightarrow{EA}$,

所以$-t^2+x(2-x)=0$,所以$t^2=x(2-x)=-(x-1)^2+1$,又$x\in[0,2]$,所以$0\leqslant t^2\leqslant1$,所以在所给的数据中,t可以取①②③.

(2)由(1)知$t=\frac{\sqrt{3}}{2}$,此时,$x=\frac{1}{2}$或$x=\frac{3}{2}$,即满足条件的点E有两个.

根据题意得,其坐标为$E_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$和$E_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$,

因为$PB\perp$底面$ABCD$,所以$PB\perp BE_1$,$PB\perp BE_2$,所以$\angle E_1BE_2$是二面角E_1-PB-E_2的平面角,由$\cos\langle\overrightarrow{BE_1},\overrightarrow{BE_2}\rangle=\frac{\overrightarrow{BE_1}\cdot\overrightarrow{BE_2}}{|\overrightarrow{BE_1}||\overrightarrow{BE_2}|}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}}{1\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,由题意得,二面角$E_1-PB-E_2$为锐角,所以二面角$E_1-PB-E_2$的大小为$30^\circ$.



(第20题图)

21.(1)**解**:由题意可得$\begin{cases}e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{5}}{3},\\2a=6,\end{cases}$解得$a=3,b=2$,所以椭圆E的标准方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)**证明**:由(1)可得,$A(0,2)$,$B(0,-2)$,$C(3,0)$,易知直线AP斜率存在,设直线AP的方程为$y=kx+2$,

由$\begin{cases}y=kx+2,\\4x^2+9y^2=36,\end{cases}$整理可得$(4+9k^2)x^2+36kx=0$,可得$x_P=-\frac{36k}{4+9k^2}$,$y_P=\frac{-36k^2}{4+9k^2}+2=\frac{8-18k^2}{4+9k^2}$,即$P\left(-\frac{36k}{4+9k^2},\frac{8-18k^2}{4+9k^2}\right)$,

则$Q\left(-\frac{36k}{4+9k^2},\frac{18k^2-8}{4+9k^2}\right)$.

直线BC的方程为$\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$,即$y=\frac{2}{3}x-2$,由$\begin{cases}y=kx+2,\\y=\frac{2}{3}x-2,\end{cases}$得$x_M=\frac{-4}{k-\frac{2}{3}}$,$y_M=\frac{-2k-\frac{4}{3}}{k-\frac{2}{3}}$,所以$M\left(\frac{-4}{k-\frac{2}{3}},\frac{-2k-\frac{4}{3}}{k-\frac{2}{3}}\right)$.直线AQ的方程为$y=\frac{4}{9k}x+2$,由$\begin{cases}y=\frac{4}{9k}x+2,\\y=\frac{2}{3}x-2,\end{cases}$得

$N\left(\frac{-4}{\frac{4}{9k}-\frac{2}{3}},\frac{-2\cdot\frac{4}{9k}-\frac{4}{3}}{\frac{4}{9k}-\frac{2}{3}}\right)$,即$N\left(\frac{6k}{k-\frac{2}{3}},\frac{2k+\frac{4}{3}}{k-\frac{2}{3}}\right)$,

此时$y_M+y_N=0$,$x_M+x_N=6$,所以MN的中点为$(3,0)$,又AT的中点$\left(\frac{6}{2},\frac{-2+2}{2}\right)$,即$(3,0)$,所以AT,MN互相平分,则四边形ANTM为平行四边形,所以$|AM|=|TN|$.

22.**解**:(1)$f(x)=\frac{1}{x}-x+3\ln x(x>0)$,所以$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-1+\frac{3}{x}=-\frac{x^2-3x+1}{x^2}$,

令$f'(x)>0$,得$\frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$;令$f'(x)<0$,得$0<x<\frac{3-\sqrt{5}}{2}$或$x>\frac{3+\sqrt{5}}{2}$,

所以$f(x)$的单调递增区间为$\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$,单调递减区间为$\left(0,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$,$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$.

(2)结论:$f(x_1)+f(x_2)\geqslant-\frac{1}{2}(a-2)^2$.证明如下:

$f(x_1)+f(x_2)=\left(\frac{1}{x_1}-x_1+a\ln x_1\right)+\left(\frac{1}{x_2}-x_2+a\ln x_2\right)=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}-(x_1+x_2)+a\ln(x_1x_2)=\frac{2}{x_1x_2}-2+a\ln(x_1x_2)$.

设$t=x_1x_2$,由x_1,x_2均为正数,得$x_1x_2\leqslant\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2=1$,即$0<t\leqslant1$,设$g(t)=\frac{2}{t}-2+a\ln t(0<t\leqslant1)$,则$g'(t)=-\frac{2}{t^2}+\frac{a}{t}=\frac{at-2}{t^2}$.

①当$a\leqslant2$时,由$0<t\leqslant1$,得$at-2\leqslant0$,即$g'(t)\leqslant0$,所以$g(t)$单调递减,

所以$g(t)\geqslant g(1)=0$,又因为$-\frac{1}{2}(a-2)^2\leqslant0$,

所以$f(x_1)+f(x_2)\geqslant-\frac{1}{2}(a-2)^2$;

②当$a>2$时,$g(t)$在$\left(0,\frac{2}{a}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{2}{a},1\right)$上单调递增,所以$g(t)$的最小值为$g\left(\frac{2}{a}\right)=a-2+a\ln\frac{2}{a}$,此时只需证$a-2+a\ln\frac{2}{a}\geqslant-\frac{1}{2}(a-2)^2$,化简后即证$\ln\frac{2}{a}+\frac{1}{2}a-1\geqslant0$.

设$h(a)=\ln\frac{2}{a}+\frac{1}{2}a-1(a>2)$,$h'(a)=\frac{a-2}{2a}>0$,所以$h(a)$单调递增,所以$h(a)>h(2)=0$,即证得$\ln\frac{2}{a}+\frac{1}{2}a-1\geqslant0$.

综上所述,不等式得证.

扫码免费下载习题讲解ppt

第 13 期

第 2~3 版综合测试(五)参考答案

一、单项选择题

1.B　**提示**:向量$a=(1,3,0)$,$b=(2,1,1)$,则$a\cdot b=2+3+0=5$,$|b|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$,故向量$a$在向量$b$上的投影向量$c=\frac{a\cdot b}{|b|}\times\frac{b}{|b|}=\frac{5}{6}b=\left(\frac{5}{3},\frac{5}{6},\frac{5}{6}\right)$.故选B.

2.C　**提示**:因为两直线l_1与l_2平行,所以$\frac{1}{1}=\frac{n}{-2}$,解得$n=-2$,又$d=\frac{|m+3|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$,而$m>0$,所以$m=2$,所以$m+n=0$,故选C.

3.A　**提示**:由已知得$\overrightarrow{OP}=(x,y)$,$\overrightarrow{AO}=(1,-2)$,因为$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AO}=8$,所以$x-2y=8$,即点$P$的轨迹方程为$x-2y-8=0$,故选A.

4.B　**提示**:$h'(x)=2+\frac{k}{x^2}=\frac{2x^2+k}{x^2}$.因为$h(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增,所以$h'(x)\geqslant0$,即$\frac{2x^2+k}{x^2}\geqslant0$对$x\in[1,+\infty)$恒成立,所以$k\geqslant-2x^2$对$x\in[1,+\infty)$恒成立,则$k\geqslant-2$,即$k\in[-2,+\infty)$,故选B.

5.A　**提示**:冬至、小寒、大寒、立春、雨水、惊蛰、春分、清明、谷雨、立夏、小满、芒种这十二个节气日影长构成等差数列$\{a_n\}$,设其公差为d,则$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=28.5,\\a_{10}+a_{11}+a_{12}=1.5,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=10.5,\\d=-1,\end{cases}$所以$a_n=a_1+(n-1)d=11.5-n$,所以$a_7=11.5-7=4.5$,即所求的日影长为4.5尺,故选A.

6.B　**提示**:因为OP是$\triangle PF_1F_2$边F_1F_2的中线,所以$\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}=2\overrightarrow{PO}$,则$2|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|=4|\overrightarrow{PO}|$,因为$2|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|\leqslant|\overrightarrow{F_1F_2}|$,所以$4|\overrightarrow{PO}|\leqslant2c$.又$|\overrightarrow{PO}|\geqslant a$,所以$4a\leqslant2c$,所以$\frac{c}{a}\geqslant2$,即此双曲线的离心率$e$的取值范围是$[2,+\infty)$,故选B.

7.B　**提示**:以A为原点,直线AB,AD,AA_1为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系,不妨设正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1,则$A_1(0,0,1)$,$B(1,0,0)$,$D(0,1,0)$,$E\left(\frac{1}{2},0,1\right)$,所以$\overrightarrow{A_1B}=(1,0,-1)$,$\overrightarrow{DE}=\left(\frac{1}{2},-1,1\right)$.设$A_1B$与$DE$所成的角为$\theta$,则$\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{A_1B},\overrightarrow{DE}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{DE}|}{|\overrightarrow{A_1B}|\cdot|\overrightarrow{DE}|}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{9}{4}}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$,故$A_1B$与$DE$所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{2}}{6}$,故选B.

8.D　**提示**:函数$f(x)=xe^x-mx+\frac{m}{2}$在$(0,+\infty)$上有两个零点,等价于$h(x)=xe^x$与$g(x)=m\left(x-\frac{1}{2}\right)$在$(0,+\infty)$上有两个不同的交点,$g(x)$恒过点$\left(\frac{1}{2},0\right)$,设$g(x)$与$h(x)$相切时切点为$(a,ae^a)$,因为$h'(x)=e^x(x+1)$,所以切线斜率为$e^a(a+1)$,则切线方程为$y-ae^a=(a+1)e^a(x-a)$,当切线经过点$\left(\frac{1}{2},0\right)$时,解得$a=1$或$a=-\frac{1}{2}$(舍去),此时切线斜率为$2e$,由函数图象特征可知,函数$f(x)=xe^x-mx+\frac{m}{2}$在$(0,+\infty)$上有两个零点,则实数m的取值范围是$(2e,+\infty)$.故选D.

二、多项选择题

9.ABC　**提示**:化圆的方程为标准方程,得$(x-2)^2+y^2=5$,所以圆心为$(2,0)$,半径为$\sqrt{5}$.对于A,圆是关于圆心对称的中心对称图形,而点$(2,0)$是圆心,故A正确;对于B,圆是关于直径所在直线对称的轴对称图形,直线$y=0$过圆心,故B正确;对于C,圆是关于直径所在直线对称的轴对称图形,直线$x+3y-2=0$过圆心,故C正确;对于D,圆是关于直径所在直线对称的轴对称图形,而直线$x-y+2=0$不过圆心,故D错误.故选ABC.

10.CD　**提示**:对于A,$\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,2,1)$,不存在实数$\lambda$,使得$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$,所以$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$不是共线向量,故A错误;

对于B,因为$\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$,所以与$\overrightarrow{AB}$共线的单位向量为$\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5},0\right)$或$\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5},0\right)$,故B错误;

对于C,因为向量$\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$,$\overrightarrow{BC}=(-3,1,1)$,所以$\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=-\frac{\sqrt{55}}{11}$,故C正确;

对于D,设平面ABC的法向量是$n=(x,y,z)$,因为$\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,2,1)$,所以$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\n\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2x+y=0,\\-x+2y+z=0,\end{cases}$令$x=1$,则$y=-2$,$z=5$,所以$n=(1,-2,5)$,故D正确.故选CD.

11.AC　**提示**:根据题意,结合图形分析可得纸板P_n相较于纸板$P_{n-1}(n\geqslant2)$,剪掉了半径为$\frac{1}{2^{n-1}}$的半圆,

对于数列$\{L_n\}$,则有$L_n-L_{n-1}=\frac{1}{2}\pi\times\frac{2}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n-1}}\times2=\frac{\pi-2}{2^{n-1}}$,故C正确;因为$L_1=\pi+2$,所以$L_2=L_1-1+\frac{1}{2}\times2\pi\times\frac{1}{2}=\frac{3\pi}{2}+1$,故A正确;

同时,每次剪掉的半圆形面积构成一个以$\frac{\pi}{8}$为首项,以$\frac{1}{4}$为公比的等比数列,对于数列$\{S_n\}$,则有$S_n-S_{n-1}=-\frac{\pi}{8}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}=-\frac{\pi}{2^{2n-1}}$,

则有$S_n=(S_n-S_{n-1})+(S_{n-1}-S_{n-2})+(S_{n-2}-S_{n-3})+\cdots+(S_2-S_1)+S_1=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2^3}+\frac{\pi}{2^5}+\cdots+\frac{\pi}{2^{2n-1}}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\frac{\pi}{8}\left(1-\frac{1}{4^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{1}{2^{2n-1}}\right)$,

故D错误,当$n=4$时,$S_4=\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{1}{2^7}\right)=\frac{43\pi}{128}$,故B错误.

故选AC.

12.AD　**提示**:因为椭圆C的长轴长与圆E的直径长相等,所以$2a=4$,即$a=2$,设椭圆的左焦点为$F'(-c,0)$,由椭圆的定义可知$|PF'|+|PF|=2a=4$,所以$|PQ|-|PF|=|PQ|-(4-|PF'|)=|PQ|+|PF'|-4\geqslant|QF'|-4\geqslant|EF'|-2-4=2\sqrt{5}-6$,所以$|EF'|=2\sqrt{5}=\sqrt{(c-3)^2+(4-0)^2}$,解得$c=1$或$c=5$(舍去).

对于A,因为$c=1$,所以椭圆C的焦距为$2c=2$,故A正确;

对于B,由$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$,所以椭圆C的短轴长为$2\sqrt{3}$,故B错误;

对于C,$|PQ|+|PF|\geqslant|QF|\geqslant|EF|-|EQ|=\sqrt{(1+3)^2+(0-4)^2}-2=4\sqrt{2}-2$,故C错误;

对于D,若过点F的直线的斜率不存在,则直线方程为$x=1$,圆心$(-3,4)$到直线$x=1$的距离为4,不合题意;

设过点F的切线方程为$y=k(x-1)$,即$kx-y-k=0$,则$\frac{|-3k-k-4|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{4|k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=2$,解得$k=\frac{-4\pm\sqrt{7}}{3}$,故D正确.

故选AD.

三、填空题

13.$\sqrt{13}$　**提示**:设过$A(-2,1)$,$B(-1,0)$,$C(2,3)$的圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$,

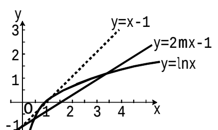
由已知得$\begin{cases}4+1-2D+E+F=0,\\1-D+F=0,\\4+9+2D+3E+F=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}D=0,\\E=-4,\\F=-1,\end{cases}$所以过A,B,C的圆的方程为$x^2+y^2-4y-1=0$,

因为点$D(a,3)$在此圆上,所以$a^2+3^2-4\times3-1=0$,解得$a^2=4$,所以点D到坐标原点O的距离为$\sqrt{a^2+3^2}=\sqrt{4+3^2}=\sqrt{13}$.

14.$\left(5,\frac{1}{2},0\right)$　**提示**:设$P(x,y,z)$,则$\overrightarrow{AP}=(x-2,y+1,z-2)$,$\overrightarrow{AB}=(2,6,-3)$,$\overrightarrow{AC}=(-4,3,1)$,因为$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$,所以$(x-2,y+1,z-2)=\frac{1}{2}(6,3,-4)=\left(3,\frac{3}{2},-2\right)$,所以点$P$的坐标为$\left(5,\frac{1}{2},0\right)$.

15.4　**提示**:由题得$S_n+2=a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$,所以$S_{n+1}=2S_n+2$,所以$S_{n+1}+2=2(S_n+2)$,所以$\{S_n+2\}$是等比数列且公比$q=2$.又$S_1+2=a_1+2=2$,所以$S_n+2=2^n$,所以$S_n=2^n-2$,所以当$n\geqslant2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n-1}$,则有$\frac{a_{n+1}}{a_{n+4}}=\frac{1}{8}$.又因为$\frac{S_{n+1}}{S_{2n}}<\frac{a_{n+1}}{a_{n+4}}$,所以$\frac{2^{n+1}-2}{2^{2n}-2}<\frac{1}{8}$,化简得$2^{2n}-16\cdot2^n+14>0$,解得$2^n>8+5\sqrt{2}$或$2^n<8-5\sqrt{2}$.因为$n\in\mathbf{N}_+$,所以$2^n>8+5\sqrt{2}$,则$n_{\min}=4$.

16.$\left(0,\frac{1}{2}\right)$　**提示**:由题意,$f'(x)=\ln x+1-2mx$.令$f'(x)=\ln x-2mx+1=0$,得$\ln x=2mx-1$,函数$f(x)=x\ln x-mx^2$有两个极值点,等价于$f'(x)=\ln x-2mx+1$有两个零点,等价于函数$y=\ln x$与$y=2mx-1$的图象有两个交点,又直线$y=2mx-1$过定点$(0,-1)$,当直线$y=2mx-1$与$y=\ln x$的图象相切时,设切点为$(x_0,\ln x_0)$,$y'=\frac{1}{x}$,则切线的斜率为$\frac{1}{x_0}$,所以切线方程为$y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$,将点$(0,-1)$代入得$-1-\ln x_0=-1$,解得$x_0=1$,即切线的斜率为1,即$2m=1$,所以$m=\frac{1}{2}$.由图可知,当$0<m<\frac{1}{2}$时,$y=\ln x$与$y=2mx-1$的图象有两个交点,所以实数m的取值范围是$\left(0,\frac{1}{2}\right)$.



(第16题图)

四、解答题

17.**解**:(1)因为$f'(x)=xe^x$,所以$f'(0)=0$,又$f(0)=-1$,故曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y=-1$.

(2)由$f'(x)=0$,得$x=0$,由$f'(x)>0$,得$x>0$;

由$f'(x)<0$,得$x<0$.所以当$x\in(0,+\infty)$时,$f(x)$单调递增,当$x\in(-\infty,0)$时,$f(x)$单调递减.

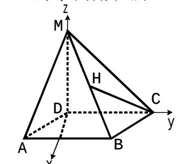
故$f(x)$的极小值为$f(0)=-1$,无极大值.

18.**解**:若选①:因为$MD\perp$平面$ABCD$,所以$AD\perp MD$,$CD\perp MD$,

所以$\angle ADC$就是二面角$A-MD-C$的平面角,所以$\angle ADC=\frac{2\pi}{3}$.

以D为坐标原点,以DC,DM所在直线为y轴,z轴,建立如图1所示的空间直角坐标系,

则$C(0,1,0)$,$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$,$M(0,0,1)$,$H\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$,所以$\overrightarrow{CH}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)$.取平面$MCD$的一个法向量$n=(1,0,0)$.设$CH$与平面$MCD$所成角为$\theta$,则$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{CH},n\rangle|=\frac{|\overrightarrow{CH}\cdot n|}{|\overrightarrow{CH}|\cdot|n|}=\frac{\sqrt{3}}{4}$,所以$CH$与平面$MCD$所成角的正弦值是$\frac{\sqrt{3}}{4}$.



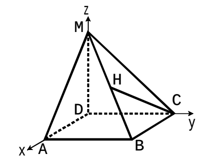
(第18题图1)

若选②:因为$MD\perp$平面$ABCD$,$\angle BAD=\frac{\pi}{2}$,所以DA,DC,DM两两垂直.

以D为坐标原点,以DA,DC,DM所在直线分别为x轴,y轴,z轴,建立如图2所示的空间直角坐标系,

则$C(0,1,0)$,$H\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,所以$\overrightarrow{CH}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.取平面$MCD$的一个法向量$n=(1,0,0)$,

设CH与平面MCD所成角为θ,则$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{CH},n\rangle|=\frac{|\overrightarrow{CH}\cdot n|}{|\overrightarrow{CH}|\cdot|n|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以$CH$与平面$MCD$所成角的正弦值是$\frac{\sqrt{3}}{3}$.



(第18题图2)

19.(1)**证明**:因为圆$C:x^2+(y-4)^2=4$,所以圆心$C(0,4)$,半径$r=2$.因为直线$l:(3m+1)x+(1-m)y-4=0$,整理得$(3x-y)m+(x+y-4)=0$,

由$\begin{cases}3x-y=0,\\x+y-4=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\y=3,\end{cases}$所以直线$l$过定点$M(1,3)$,所以$|CM|=\sqrt{(1-0)^2+(3-4)^2}=\sqrt{2}<2=r$,

所以定点$M(1,3)$在圆C内,所以直线l与圆C相交.

(2)**解**:因为直线l被圆C所截得的弦长为$2\sqrt{3}$,所以圆心$C(0,4)$到直线l的距离

$d=\sqrt{r^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{2^2-3}=1$.

因为直线$l:(3m+1)x+(1-m)y-4=0$,所以$d=\frac{|(1-m)\times4-4|}{\sqrt{(3m+1)^2+(1-m)^2}}=\frac{|-4m|}{\sqrt{(3m+1)^2+(1-m)^2}}=1$,解得$m=-\frac{1}{3}$或$m=1$.将$m=-\frac{1}{3}$或$m=1$分别代入直线$l:(3m+1)x+(1-m)y-4=0$,所以直线$l$的方程为$x=1$或$y=3$.

20.**解**:(1)由$a_2+a_8=10$,得$a_5=5$.设数列$\{a_n\}$的公差为d,则$a_5-a_1=4=4d$,所以$d=1$,故$a_n=n$.

(2)由(1)得$c_n=\frac{1}{n(n+1)}+2^n$,所以$T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=\left[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]+(2^1+2^2+\cdots+2^n)=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-1-\frac{1}{n+1}=2^{n+1}-\frac{n+2}{n+1}$.

21.**解**:(1)圆$E:x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$,令$y=0$,解得$x=\pm\sqrt{2}$,

所以椭圆C的半焦距$c=\sqrt{2}$,$F_1(-\sqrt{2},0)$,$F_2(\sqrt{2},0)$,因为圆E的圆心$E\left(0,\frac{1}{2}\right)$,所以$OE\parallel PF_2$,$|OE|=\frac{1}{2}|PF_2|$,因为$2a=|PF_1|+|PF_2|=2\times\frac{3}{2}+2\times\frac{1}{2}=4$,所以$a=2$,

因为$a^2=b^2+c^2$,所以$b=\sqrt{2}$,

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,当AB斜率存在时,设直线AB的方程为$y=kx+m$,

由$\begin{cases}y=kx+m,\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$整理得$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-4=0$,

则$x_1+x_2=\frac{-4km}{1+2k^2}$,$x_1x_2=\frac{2m^2-4}{1+2k^2}$,因为以线段AB为直径的圆经过坐标原点O,所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$,即$x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=0$,整理得$(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=0$,即$(1+k^2)\cdot\frac{2m^2-4}{1+2k^2}+km\cdot\frac{-4km}{1+2k^2}+m^2=0$,化简得$3m^2=4(1+k^2)$,此时原点O到AB的距离$d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$;

当AB斜率不存在时,易知$|x_1|=|y_1|$,$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{2}=1$,解得$|x_1|=\frac{2}{\sqrt{3}}$,此时原点O到AB的距离$d=|x_1|=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

综上所述,存在以点O为圆心的定圆与直线AB相切,定圆的方程为$x^2+y^2=\frac{4}{3}$.

22.(1)**解**:$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{t}{x^2}=\frac{x-t}{x^2}(x>0)$.

当$t\leqslant0$时,$f'(x)>0$在$(0,+\infty)$上恒成立,所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增;当$t>0$时,令$f'(x)>0$,得$x>t$;令$f'(x)<0$,得$0<x<t$,所以$f(x)$在$(0,t)$上单调递减,在$(t,+\infty)$上单调递增.

(2)**证明**:当$t=1$时,$f(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,所以$f(1)=1-s<0$,解得$s>1$.

由$\ln x_1+\frac{1}{x_1}-s=\ln x_2+\frac{1}{x_2}-s$,得$\ln\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}=\frac{\frac{x_1}{x_2}-1}{x_1}$,

令$m=\frac{x_1}{x_2}(0<m<1)$,则$\ln m=\frac{m-1}{x_1}$,$x_1=\frac{m-1}{\ln m}$.所以$x_1+x_2=x_1\left(1+\frac{x_2}{x_1}\right)=\frac{m-1}{\ln m}\left(1+\frac{1}{m}\right)=\frac{m^2-1}{m\ln m}$,所以$x_1+x_2-2=\frac{m^2-1}{m\ln m}-2=\frac{m^2-1-2m\ln m}{m\ln m}=\frac{m-\frac{1}{m}-2\ln m}{\ln m}$.令$g(m)=m-\frac{1}{m}-2\ln m$,则$g'(m)=1+\frac{1}{m^2}-\frac{2}{m}=\frac{m^2-2m+1}{m^2}=\frac{(m-1)^2}{m^2}$,当$0<m<1$时,$g'(m)>0$,所以$g(m)$单调递增,$g(m)<g(1)=0$,

又当$0<m<1$时,$\ln m<0$,所以$x_1+x_2-2>0$,即$x_1+x_2>2$.

第14期

第2~3版综合测试(六)参考答案

一、单项选择题

1.B　**提示:**由双曲线方程可知$a^2=3,b^2=2$,所以渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}x$,故选B.

2.D　**提示:**因为等差数列$\{a_n\}$中,$a_{11}+7=2a_{12}$,所以$a_1+10d+7=2(a_1+11d)$,即$a_1+12d=7$,即$a_{13}=7$,所以$S_{25}=\frac{25(a_1+a_{25})}{2}=25a_{13}=25\times7=175$,故选D.

3.C　**提示:**设$P(x,y)$,$R(x_1,y_1)$,因为$A(1,0)$,P是RA的中点,所以$\begin{cases}x=\frac{x_1+1}{2},\\y=\frac{y_1}{2},\end{cases}$则$\begin{cases}x_1=2x-1,\\y_1=2y,\end{cases}$因为点$R$是直线$l$上的一个动点,所以$y_1=2x_1-4$.所以点P的轨迹方程为$2y=2(2x-1)-4$,即$y=2x-3$,故选C.

4.A　**提示:**若直线$l:y=kx+1$与圆$O:x^2+y^2=1$相交于A,B两点,则圆心到直线距离$d=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$,$|AB|=2\sqrt{1-d^2}=2\sqrt{1-\frac{1}{1+k^2}}=2\sqrt{\frac{k^2}{1+k^2}}$.

若$k=1$,则$|AB|=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$,$d=\frac{1}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,则△OAB的面积为$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$,即充分性成立.若△OAB的面积为$\frac{1}{2}$,则$S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\times2\sqrt{\frac{k^2}{1+k^2}}=\frac{|k|}{1+k^2}=\frac{1}{2}$,即$k^2+1=2|k|$,即$k^2-2|k|+1=0$,则$(|k|-1)^2=0$,即$|k|=1$,解得$k=\pm1$,即必要性不成立.故"$k=1$"是"△OAB的面积为$\frac{1}{2}$"的充分不必要条件.故选A.

5.C　**提示:**$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos x$.当$x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$时,$f(x)$单调递减;当$x\in(0,\pi)$时,$f(x)$单调递增;当$x\in(\pi,2\pi)$时,$f(x)$单调递减,当$x=\pi$时,$f(x)$取得极大值,所以C项成立,故选C.

6.B　**提示:**设$|AB|=2r$,由题意知$r\geqslant2$,设AB中点为M,作$MN\perp y$轴于点N,过A,B作准线的垂线,垂足分别为P,Q,由抛物线定义及梯形中位线性质,知$2(|MN|+1)=|AP|+|BQ|=|AF|+|BF|=|AB|=2r$,于是$|MN|=r-1$,由垂径定理,得$|DE|=2\sqrt{r^2-(r-1)^2}=\frac{8}{5}r$,即$16r^2-50r+25=0$,解得$r=\frac{5}{2}$或$r=\frac{5}{8}$,又$r\geqslant2$,故$r=\frac{5}{2}$,于是M横坐标为$\frac{3}{2}$,设直线$l:y=k\cdot(x-1)$,与$y^2=4x$联立,得$k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$,则$x_A+x_B=\frac{2k^2+4}{k^2}=2x_M=3$,解得$k=\pm2$,故直线$l$方程为$2x\pm y-2=0$.故选B.

7.B　**提示:**取AC的中点D,以D为原点,BD,DC,DM所在直线分别为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系.不妨设$AC=2$,N为BC的中点,连接AN,则$A(0,-1,0)$,$M(0,0,2)$,$B(-\sqrt{3},0,0)$,$C(0,1,0)$,$N\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$,所以$\overrightarrow{AM}=(0,1,2)$,$\overrightarrow{AN}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$.由直棱柱的性质,知$C_1C\perp$平面$ABC$,所以$C_1C\perp AN$.又由等边三角形的性质,知$AN\perp BC$.因为$C_1C\cap BC=C$,所以$AN\perp$平面$BCC_1B_1$,所以$\overrightarrow{AN}$为平面$BCC_1B_1$的一个法向量.设$AM$与平面$BCC_1B_1$所成角为$\alpha$,所以$\sin\alpha=|\cos\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}|}{|\overrightarrow{AM}|\cdot|\overrightarrow{AN}|}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{10}$,即$AM$与平面$BCC_1B_1$所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{15}}{10}$,故选B.

8.D　**提示:**因为$n(S_n-S_{n-1})=nS_n-nS_{n-1}=S_n+2(n-1)n$,即$(n-1)S_n-nS_{n-1}=2(n-1)n$,即$\frac{S_n}{n}-\frac{S_{n-1}}{n-1}=2$,又$\frac{S_1}{1}=1$,所以数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是以1为首项,2为公差的等差数列,所以$\frac{S_n}{n}=1+2(n-1)=2n-1$,所以$S_n=2n^2-n$,则$nS_n-2n^2=2n^3-3n^2$.令$f(x)=2x^3-3x^2$,则$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$,$x\geqslant1$时,$f'(x)\geqslant0$,所以$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增,即$\{nS_n-2n^2\}$是单调递增数列,所以当$n=1$时,$nS_n-2n^2$取得最小值$-1$,故选D.

二、多项选择题

9.ABD　**提示:**对于A,因为$a_3a_4a_5=a_4^3=1$,所以$a_4=1$,故A正确;对于B,因为$a_1a_2=a_1a_2a_3a_4a_5$,所以$T_2=T_5$,故B正确;对于C,$T_7=a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7=a_4^7=1$,故C错误;对于D,若$a_1=1$,则$q^3=\frac{a_4}{a_1}=1$,解得$q=1$,所以$a_2=a_1q=1$,故D正确.故选ABD.

10.BC　**提示:**根据题意,圆$C_1:x^2+y^2=1$,其圆心$C_1(0,0)$,半径$R=1$,圆$C_2:x^2+y^2-6x+8y+24=0$,即$(x-3)^2+(y+4)^2=1$,其圆心$C_2(3,-4)$,半径$r=1$,圆心距$|C_1C_2|=\sqrt{16+9}=5$,则$|PQ|$的最小值为$|C_1C_2|-R-r=3$,最大值为$|C_1C_2|+R+r=7$,故A错误,B正确;对于C,圆心$C_1(0,0)$,圆心$C_2(3,-4)$,则两个圆心所在的直线斜率$k=\frac{-4-0}{3-0}=-\frac{4}{3}$,故C正确;对于D,两圆圆心距$|C_1C_2|=5$,有$|C_1C_2|>R+r=2$,两圆外离,不存在相交弦,故D错误.故选BC.

11.ABD　**提示:**设正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1,以D为原点,DA,DC,DD_1所在直线分别为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系,则$A(1,0,0)$,$B(1,1,0)$,$C(0,1,0)$,$D(0,0,0)$,$A_1(1,0,1)$,$B_1(1,1,1)$,$C_1(0,1,1)$,$D_1(0,0,1)$.

对于A,$\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,1)$,$\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BC}=(0,0,1)+(-1,0,0)=(-1,0,1)$,因为$\overrightarrow{AD_1}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BC}$,所以$\overrightarrow{AD_1}//(\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BC})$,故A正确;

对于B,$\overrightarrow{A_1C}=(-1,1,-1)$,$\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{A_1A}=(0,1,0)-(0,0,-1)=(0,1,1)$,有$\overrightarrow{A_1C}\cdot(\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{A_1A})=0+1\times1+(-1)\times1=0$,故B正确;

对于C,$\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,1)$,$\overrightarrow{A_1B}=(0,1,-1)$,

记向量$\overrightarrow{AD_1}$与$\overrightarrow{A_1B}$的夹角为θ,$\theta\in[0,\pi]$,则$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{A_1B}}{|\overrightarrow{AD_1}|\cdot|\overrightarrow{A_1B}|}=\frac{-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$,又$\theta\in[0,\pi]$,所以$\theta=\frac{2\pi}{3}=120°$,故C错误;

对于D,因为$\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{A_1C}$,又$\overrightarrow{A_1C}=(-1,1,-1)$,所以$(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{A_1B_1})^2=\overrightarrow{A_1C}^2=(-1)^2+1^2+(-1)^2=3$,又$\overrightarrow{A_1B_1}=(0,1,0)$,所以$\overrightarrow{A_1B_1}^2=1$,有$(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{A_1B_1})^2=3\overrightarrow{A_1B_1}^2$,故D正确.故选ABD.

12.AD　**提示:**双曲线C_1的一条渐近线的方程为$y=\sqrt{3}x$,则设双曲线C_1的方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=\lambda(\lambda\neq0)$.由双曲线$C_1$过点$\left(1,\frac{3}{2}\right)$,得$1-\frac{3}{4}=\lambda$,得$\lambda=\frac{1}{4}$,所以双曲线$C_1$的方程为$\frac{x^2}{\frac{1}{4}}-\frac{y^2}{\frac{3}{4}}=1$,所以双曲线$C_1$的离心率$e=2$,实轴的长为1,故A正确,B错误;又易知椭圆$C_2$的两焦点为$F_1(-1,0)$,$F_2(1,0)$,将$A(1,y_1)(y_1>0)$代入$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,得$\frac{1}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$,所以$y_1=\frac{b^2}{a}$,所以直线$AB$的方程为$y=\frac{b^2}{2a}(x+1)$,联立$\begin{cases}y=\frac{b^2}{2a}(x+1),\\\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$整理得$(a^2+3)x^2+2(a^2-1)x-3a^2-1=0$,所以$1\cdot x_B=-\frac{3a^2+1}{a^2+3}$,则$x_B=-\frac{3a^2+1}{a^2+3}=-3+\frac{8}{a^2+3}$.由$a^2>1$,得$a^2+3>4$,则$0<\frac{8}{a^2+3}<2$,所以$-3<x_B<-1$,故C错误,D正确.故选AD.

三、填空题

13.$2x-y+1=0$　**提示:**设与直线$2x-y+3=0$平行的直线为$2x-y+m=0$.因为点$(0,1)$在直线$2x-y+m=0$上,所以$2\times0-1+m=0$,可得$m=1$,所以该直线方程为$2x-y+1=0$.

14.2　**提示:**以A为原点,AC,AA_1所在直线分别为y轴,z轴,建立空间直角坐标系,则$A(0,0,0)$,$B(\sqrt{3},1,0)$,$A_1(0,0,2)$,$C(0,2,0)$,$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},1,0)$,$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2)$,所以$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1})=\frac{1}{2}(\sqrt{3},1,2)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right)$,即$D\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right)$,

所以$|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0\right)^2+\left(\frac{1}{2}-2\right)^2+(1-0)^2}=2$.

15.$\frac{65}{2}$　**提示:**设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,则$a_1+d=4$,$a_1+5d=16$,解得$a_1=1$,$d=3$,设在数列$\{a_n\}$每相邻两项之间插入三个数所得新数列为$\{b_n\}$,则新的等差数列$\{b_n\}$的公差为$\frac{d}{4}=\frac{3}{4}$,首项为$b_1=a_1=1$,所以新数列的通项公式为$b_n=1+\frac{3}{4}(n-1)=\frac{3}{4}n+\frac{1}{4}$,故$b_{43}=\frac{3}{4}\times43+\frac{1}{4}=\frac{65}{2}$.

16.$[-1,2]$　**提示:**因为$g(x)=(x-2)e^x-a(x+2)$,所以$g(-2)=-\frac{4}{e^2}$.由$g(x)=(x-2)e^x-a(x+2)=0$,得$a=\frac{x-2}{x+2}e^x=f(x)$,函数$f(x)$的定义域为$\{x|x\neq-2\}$,当$x<-2$或$x>2$时,$f(x)>0$,当$-2<x\leqslant2$时,$f'(x)=\frac{(x-1)(x+2)e^x-(x-2)e^x}{(x+2)^2}=\frac{x^2e^x}{(x+2)^2}\geqslant0$,所以函数$f(x)$在$(-2,2]$上单调递增.又因为$f(-1)=-\frac{3}{e}$,$f(2)=0$,由$-\frac{3}{e}\leqslant a\leqslant0$,即$-\frac{3}{e}\leqslant f(x)\leqslant0$,即$f(-1)\leqslant f(x)\leqslant f(2)$,解得$-1\leqslant x\leqslant2$,所以,若$a\in\left[-\frac{3}{e},0\right]$,则函数$g(x)=(x-2)e^x-a(x+2)$零点的取值范围是$[-1,2]$.

四、解答题

17.**解:**(1)由题意,得$f'(x)=\frac{a}{x}-2bx$.因为函数$f(x)$在$x=1$处与直线$y=-\frac{1}{2}$相切,

所以$\begin{cases}f'(1)=a-2b=0,\\f(1)=-b=-\frac{1}{2},\end{cases}$得$a=1,b=\frac{1}{2}$.

(2)由(1),得$f(x)=\ln x-\frac{x^2}{2}$,$f'(x)=\frac{1}{x}-x=\frac{(1-x)(1+x)}{x}$,

所以当$x\in[1,2]$时,$f'(x)\leqslant0$,所以函数$f(x)$在$[1,2]$上单调递减,所以$f(x)_{\min}=f(2)=\ln2-2$.

18.**解:**(1)选条件①时,由$na_{n+1}=(n+1)a_n$,得$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}=\frac{a_1}{1}=1$,所以$a_n=n$.

选条件②时,由$S_n=\frac{(n+1)a_n}{2}$,得$2S_n=(n+1)a_n$,

当$n\geqslant2$时,$2S_{n-1}=na_{n-1}$,两式相减,得$2a_n=(n+1)a_n-na_{n-1}$,即$(n-1)a_n=na_{n-1}$,整理得$\frac{a_n}{n}=\frac{a_{n-1}}{n-1}=\frac{a_1}{1}=1$,所以$a_n=n$.

选条件③时,由于$a_n^2+a_n=2S_n$,当$n\geqslant2$时,$a_{n-1}^2+a_{n-1}=2S_{n-1}$.

两式相减,得$a_n^2-a_{n-1}^2=a_n+a_{n-1}$.因为$\{a_n\}$为正项数列,所以$a_n-a_{n-1}=1$,所以数列$\{a_n\}$是以1为首项,1为公差的等差数列,所以$a_n=n$.

(2)由(1),得$b_n=-n\cdot2^n$,设$c_n=n\cdot2^n$,其前n项和为C_n,所以$C_n=1\times2^1+2\times2^2+\cdots+n\cdot2^n$,

$2C_n=1\times2^2+2\times2^3+\cdots+(n-1)\cdot2^n+n\cdot2^{n+1}$,

两式相减,得$-C_n=(2^1+2^2+\cdots+2^n)-n\cdot2^{n+1}=\frac{2\times(1-2^n)}{1-2}-n\cdot2^{n+1}$,故$C_n=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$,所以$T_n=(1-n)\cdot2^{n+1}-2$.

19.**解:**(1)$x^2+y^2+2x-4y+3=0$可化为$(x+1)^2+(y-2)^2=2$.

当直线l的斜率不存在时,其方程为$x=-2$,易求得直线l与圆C的交点为$A(-2,1)$,$B(-2,3)$,此时$|AB|=2$,符合题意;当直线l的斜率存在时,设其方程为$y=k(x+2)$,即$kx-y+2k=0$,则圆心C到直线l的距离$d=\frac{|-k-2+2k|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{(\sqrt{2})^2-1}=1$,解得$k=\frac{3}{4}$.所以直线$l$的方程为$3x-4y+6=0$.

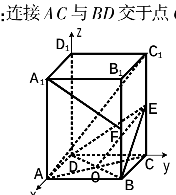
综上,直线l的方程为$x=-2$或$3x-4y+6=0$.

(2)因为PM为圆C的切线,连接MC,PC,所以$CM\perp PM$,△PMC为直角三角形,所以$|PM|^2=|PC|^2-|MC|^2$.设$P(x,y)$,由(1)知点C为$(-1,2)$,$|MC|=\sqrt{2}$.因为$|PM|=|PO|$,所以$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2-2}=\sqrt{x^2+y^2}$,化简得点$P$的轨迹方程为$2x-4y+3=0$.

求$|PM|$的最小值,即求$|PO|$的最小值,也即求原点O到直线$2x-4y+3=0$的距离,

代入点到直线的距离公式可求得$|PM|$的最小值$d=\frac{|3|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

20.(1)**证明:**连接AC与BD交于点O,连接OE,如图,



(第20题图)

因为四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$是正四棱柱,所以四边形$ABCD$是正方形,所以O为AC的中点,又因为E为CC_1的中点,所以$AC_1//OE$,又$AC_1\not\subset$平面BDE,$OE\subset$平面BDE,所以$AC_1//$平面BDE.

(2)**解:**以D为坐标原点,DA,DC,DD_1所在直线分别为x轴,y轴,z轴,建立如图所示的空间直角坐标系,则$A_1(1,0,2)$,$F(1,1,1)$,$B(1,1,0)$,$D(0,0,0)$,$E(0,1,1)$,

所以$\overrightarrow{A_1F}=(0,1,-1)$,$\overrightarrow{BD}=(-1,-1,0)$,$\overrightarrow{BE}=(-1,0,1)$,

设平面BDE的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-x-y=0,\\-x+z=0,\end{cases}$

令$x=1$,得$y=-1$,$z=1$,则$\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$,

设直线A_1F与平面BDE所成的角为θ,

则直线A_1F与平面BDE所成角的正弦值为$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{A_1F},n\rangle|=\frac{|\overrightarrow{A_1F}\cdot n|}{|\overrightarrow{A_1F}||n|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

21.(1)**证明:**设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$P(x_0,y_0)$,由题意知,$F_1(-2,0)$,$F_2(2,0)$,则$k_1=\frac{y_0}{x_0+2}$,$k_2=\frac{y_0}{x_0-2}$.因为点P为双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$上异于顶点的任意一点,所以$x_0^2-y_0^2=4$,所以$k_1k_2=\frac{y_0}{x_0+2}\cdot\frac{y_0}{x_0-2}=\frac{y_0^2}{x_0^2-4}$,即$k_1\cdot k_2=1$.

(2)**解:**由直线PF_1的方程为$y=k_1(x+2)$,

代入椭圆C的方程$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$,可得$(1+2k_1^2)x^2+8k_1^2\cdot x+8\cdot k_1^2-8=0$,所以$x_1+x_2=-\frac{8k_1^2}{2k_1^2+1}$,$x_1x_2=\frac{8k_1^2-8}{2k_1^2+1}$,所以$|AB|=\sqrt{1+k_1^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=4\sqrt{2}\cdot\frac{k_1^2+1}{2k_1^2+1}$.同理可得$|CD|=4\sqrt{2}\cdot\frac{k_2^2+1}{2k_2^2+1}$,因为$k_1\cdot k_2=1$,所以$|CD|=4\sqrt{2}\cdot\frac{k_1^2+1}{k_1^2+2}$,则$\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{2k_1^2+1}{k_1^2+1}+\frac{k_1^2+2}{k_1^2+1}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{8}$,即存在常数$\lambda=\frac{3\sqrt{2}}{8}$,使得$\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|CD|}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$恒成立.

22.(1)**解:**当$k=1$时,$f(x)=\frac{x^2}{2}-\ln x$,$f(1)=\frac{1}{2}$,$f'(x)=x-\frac{1}{x}$,所以$f'(1)=0$,所以$f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程为$y-\frac{1}{2}=0$.

(2)**证明:**当$k>0$时,$f(x)+\frac{3}{2}k^2-2k\geqslant0$,即$\frac{x^2}{2}+(1-k)x-k\ln x+\frac{3}{2}k^2-2k\geqslant0$,

令$g(x)=\frac{x^2}{2}+(1-k)x-k\ln x+\frac{3}{2}k^2-2k$,$x\in(0,+\infty)$,$k>0$,

则$g'(x)=x+(1-k)-\frac{k}{x}=\frac{(x-k)(x+1)}{x}$,

当$k>0$时,$x\in(0,k)$,$g'(x)<0$,此时函数$g(x)$单调递减;$x\in(k,+\infty)$,$g'(x)>0$,此时函数$g(x)$单调递增.

当$x=k$时,函数$g(x)$取得极小值,也是最小值,

所以只要证明$g(k)=k^2-k-k\ln k\geqslant0$,

即证明$k-1-\ln k\geqslant0(k>0)$即可.

令$h(k)=k-1-\ln k$,$k\in(0,+\infty)$,则$h'(k)=1-\frac{1}{k}=\frac{k-1}{k}$,

由$h'(k)<0$,得$0<k<1$;由$h'(k)>0$,得$k>1$,所以$k\in(0,1)$时,$h(k)$单调递减;$k\in(1,+\infty)$时,$h(k)$单调递增.

所以$k=1$时,函数$h(k)$取得极小值,也是最小值,$h(1)=0$,

所以$h(k)\geqslant0$在$k\in(0,+\infty)$上恒成立,

所以当$k>0$时,$f(x)+\frac{3}{2}k^2-2k\geqslant0$成立.

第15期

第2~3版综合测试(七)参考答案

一、单项选择题

1.A　**提示:**因为$a=(1,2,3)$,$b=(-1,0,-2)$,所以$a+b=(0,2,1)$,$(a+b)\cdot b=0\times(-1)+2\times0+1\times(-2)=-2$.故选A.

2.D　**提示:**$f'(x)=1+2e^{2x}$,所以$f(x)$在$(0,f(0))$处的切线的斜率为$k=f'(0)=3$,又$f(0)=1$,所以$f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y-1=3(x-0)$,即$y=3x+1$.故选D.

3.B　**提示:**由抛物线的方程可得准线的方程为$y=-\frac{p}{2}$,设P的纵坐标为n,由抛物线的性质,则$n+\frac{p}{2}-n=1$,解得$p=2$,故选B.

4.D　**提示:**由$\{a_n\}$是等差数列,得$a_4+a_7+a_{10}=3a_7=17$,解得$a_7=\frac{17}{3}$,又$a_4+a_5+a_6+\cdots+a_{13}+a_{14}=11a_9=77$,解得$a_9=7$,所以公差$d=\frac{a_9-a_7}{9-7}=\frac{2}{3}$.故选D.

5.C　**提示:**过E作$EO\perp$平面ABCD,垂足为O,过E分别作$EG\perp BC$,$EM\perp AB$,垂足分别为G,M,连接OG,OM,

则等腰梯形所在的面、等腰三角形所在的面与底面夹角分别为∠EMO和∠EGO,所以$\tan\angle EMO=\tan\angle EGO=\frac{\sqrt{14}}{5}$.

因为$EO\perp$平面ABCD,$BC\subset$平面ABCD,所以$EO\perp BC$,因为$EG\perp BC$,EO,$EG\subset$平面EOG,$EO\cap EG=E$,所以$BC\perp$平面EOG,因为$OG\subset$平面EOG,所以$BC\perp OG$,同理,$OM\perp BM$,又$BM\perp BG$,故四边形OMBG是矩形,所以由$BC=10$,得$BG=OM=5$,所以$EO=\sqrt{14}$,所以$OG=5$,

所以在Rt△EOG中,$EG=\sqrt{EO^2+OG^2}=\sqrt{(\sqrt{14})^2+5^2}=\sqrt{39}$,

在Rt△EBG中,$EB=\sqrt{EG^2+BG^2}=\sqrt{(\sqrt{39})^2+5^2}=8$,

又因为$EF=AB-2OG=25-2\times5=15$,所以所有棱长之和为$2\times25+2\times10+15+4\times8=117$m.故选C.

6.D　**提示:**根据题意,双曲线$C:\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{m}=1(m>0)$的一条渐近线的方程为$2x+y=0$,

则有$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2}}=2$,即$m=8$,则双曲线C的方程为$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{8}=1$,其中$a=\sqrt{2}$,$b=2\sqrt{2}$,则$c=\sqrt{10}$,所以双曲线C的离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$.故选D.

7.B　**提示:**在等比数列$\{a_n\}$中,由$a_1>1$,$a_6a_7>1$,得$a_1^2q^{11}>1$,所以$q>0$,$a_n>0$,

若$q\geqslant1$,则$a_6>1$,$a_7>1$,此时$\frac{a_6-1}{a_7-1}>0$,与已知条件$\frac{a_6-1}{a_7-1}<0$矛盾,因此$0<q<1$,故B正确,C错误;显然数列$\{a_n\}$是递减数列,由$\frac{a_6-1}{a_7-1}<0$,得$0<a_7<1<a_6$,则$a_6a_8=a_7^2<1$,故A错误;由于$\frac{T_{n+1}}{T_n}=a_{n+1}$,当$n\in\mathbf{N}_+$,$n\leqslant5$时,$a_{n+1}>1$,而$T_n>0$,则$T_{n+1}>T_n$,当$n\geqslant6$时,$a_{n+1}<1$,则$T_{n+1}<T_n$,因此当$n\leqslant6$时,$T_n$逐渐增大,当$n\geqslant6$时,$T_n$逐渐减小,所以$T_n$的最大值为$T_6$,故D错误.故选B.

8.B　**提示:**函数$g(x)$的导数$g'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$,所以函数$g(x)$在$\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$上单调递减,在$\left[\frac{2}{3},2\right]$上单调递增,$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-5=-\frac{41}{8}$,$g(2)=8-4-5=-1$,则$g(x)_{\max}=-1$,

若对任意$x_1,x_2\in\left[\frac{1}{2},2\right]$,都有$f(x_1)-g(x_2)\geqslant2$成立,即当$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant2$时,$f(x)\geqslant1$恒成立,即$\frac{a}{x}+x\ln x\geqslant1$恒成立,即$a\geqslant x-x^2\ln x$在$x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$上恒成立.

令$h(x)=x-x^2\ln x$,则$h'(x)=1-2x\ln x-x$,$h''(x)=-3-2\ln x$,当$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant2$时,$h''(x)=-3-2\ln x<0$,即$h'(x)=1-2x\ln x-x$在$\left[\frac{1}{2},2\right]$上单调递减,

由于$h'(1)=0$,则当$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant1$时,$h'(x)>0$;当$1\leqslant x\leqslant2$时,$h'(x)<0$,所以$h(x)\leqslant h(1)=1$,所以$a\geqslant1$.故选B.

二、多项选择题

9.BC　**提示:**由等差数列$\{a_n\}$的公差$d<0$,得$\{a_n\}$是单调递减数列,又$|a_3|=|a_9|$,则$a_3>0$,$a_9<0$,即$a_3=-a_9$,所以$a_3+a_9=2a_6=0$,所以数列$\{a_n\}$的前5项或前6项和最大.故选BC.

10.AD　**提示:**对于A,$\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,2,1)$,因为$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times(-1)+1\times2+0\times1=0$,所以$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$,故A正确;对于B,$\overrightarrow{AC}=(-1,2,1)$,$\overrightarrow{AC}$的单位向量是$\pm\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)=\pm\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$,故B错误;对于C,$\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$,$\overrightarrow{BC}=(-3,1,1)$,所以$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$夹角的余弦值是$\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\frac{-5}{\sqrt{5}\times\sqrt{11}}=-\frac{\sqrt{55}}{11}$,故C错误;对于D,$\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,2,1)$,

设平面ABC的法向量为$n=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AB}=2x+y=0,\\n\cdot\overrightarrow{AC}=-x+2y+z=0,\end{cases}$取$x=-1$,得$n=(-1,2,-5)$,故D正确.故选AD.

11.AB　**提示:**因为$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$,故$\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$,所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$,所以$OA\perp OB$,由题意知,圆心$(0,0)$到直线$x+y=a$的距离$d=\frac{|a|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$,所以$a=\pm2$.故选AB.

12.BD　**提示:**设$P(x,y)$,不妨设椭圆的长轴在x轴上,则$|PQ|^2=y^2$,由$a^2-x^2=ky^2$,得$\frac{x^2}{a^2}+\frac{ky^2}{a^2}=1$,则$A(-a,0)$,$B(a,0)$,所以$|AQ|\cdot|BQ|=(x+a)(a-x)=a^2-x^2$,所以$M=\frac{|PQ|^2}{|AQ|\cdot|BQ|}=\frac{y^2}{a^2-x^2}=\frac{1}{k}$(常数),所以$M$的值与$P$点在椭圆上的位置无关,故B正确,A错误;

此时椭圆离心率$e=\sqrt{1-\frac{a^2}{ka^2}}=\sqrt{1-M}$,所以$M$的值越大,椭圆的离心率越小,所以D正确,C错误.故选BD.

三、填空题

13.1　**提示:**由抛物线$x^2=8y$,得$F(0,2)$,由双曲线$\frac{y^2}{3}-x^2=1$的方程可得渐近线的方程为$\sqrt{3}x\pm y=0$,所以焦点F到渐近线的距离$d=\frac{|2|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}}=1$.

14.$(x+5)^2+y^2=16$　**提示:**因为$x^2+y^2-2x-4y-11=0$可化为$(x-1)^2+(y-2)^2=16$,故该圆的圆心为$(1,2)$,半径$r=4$,设圆心$(1,2)$关于点$P(-2,1)$对称的点为(m,n),则$\begin{cases}\frac{1+m}{2}=-2,\\\frac{2+n}{2}=1,\end{cases}$解得$m=-5$,$n=0$,故所求圆的圆心为$(-5,0)$,所求圆的方程为$(x+5)^2+y^2=16$.

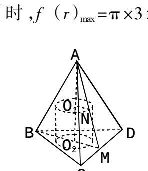
15.$\left[2,\frac{8}{3}\right)$　**提示:**因为$a_2=1$,$a_4=\frac{1}{4}$,且$a_n>0$,所以$q^2=\frac{1}{4}$,$q=\frac{1}{2}$,则$a_1=2$,$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$,$a_na_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3}$,所以数列$\{a_na_{n+1}\}$是以2为首项,公比为$\frac{1}{4}$的等比数列,则数列$\{a_na_{n+1}\}$的前$n$项和$S_n=\frac{2\times\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}=\frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$,

当$n=1$时,S_n有最小值2,又$S_n=\frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)<\frac{8}{3}$,所以$S_n$的取值范围是$\left[2,\frac{8}{3}\right)$.

16.$\sqrt{3}$;$3\sqrt{6}\pi$　**提示:**如图,正四面体ABCD,设圆柱的上底面圆心为O_1,下底面圆心为O_2,O_2为正四面体底面中心,圆柱的上底面与正四面体侧面ACD的交点N在侧面中线AM上,因为正四面体棱长为9,所以$AM=BM=\frac{9\sqrt{3}}{2}$,所以$O_2M=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,$BO_2=3\sqrt{3}$,$AO_2=\sqrt{AM^2-O_2M^2}=3\sqrt{6}$,设圆柱底面半径为$r$,高为$h$,

由$O_1N//O_2M$,得$\frac{r}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}=\frac{3\sqrt{6}-h}{3\sqrt{6}}$,所以$h=3\sqrt{6}-2\sqrt{2}r$,所以$V_{圆柱}=\pi r^2(3\sqrt{6}-2\sqrt{2}r)=3\sqrt{6}\pi r^2-2\sqrt{2}\pi r^3$,令$f(r)=3\sqrt{6}\pi r^2-2\sqrt{2}\pi r^3$,$f'(r)=6\sqrt{6}\pi r-6\sqrt{2}\pi r^2$,令$f'(r)=0$,解得$r=\sqrt{3}$,当$r\in(0,\sqrt{3})$时,$f'(r)>0$,当$x\in(\sqrt{3},+\infty)$时,$f'(r)<0$.

所以$r=\sqrt{3}$时,$f(r)_{\max}=\pi\times3\times(3\sqrt{6}-2\sqrt{2}\times\sqrt{3})=3\sqrt{6}\pi$.



(第16题图)

四、解答题

17.**解:**(1)已知圆C经过点$A(1,0)$,点$B(3,-2)$,则圆心C在线段AB的垂直平分线上,其方程为$y+1=x-2$,即$x-y-3=0$,又圆心在直线$2x+y=0$上,

联立$\begin{cases}2x+y=0,\\x-y-3=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\y=-2,\end{cases}$所以圆心C为$(1,-2)$,半径$R=|AC|=2$,

所以圆C的标准方程为$(x-1)^2+(y+2)^2=4$.

(2)设圆D的圆心为$D(x,y)$,因为圆D与圆C关于直线$x-y+1=0$对称,

所以$\begin{cases}\frac{x+1}{2}-\frac{y-2}{2}+1=0,\\\frac{y+2}{x-1}=-1,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-3,\\y=2,\end{cases}$所以圆$D$的标准方程是$(x+3)^2+(y-2)^2=4$.

18.**解:**(1)因为$f(x)=x\ln x-a(x-1)$,所以$f'(x)=\ln x+1-a$,

因为$x=e$是函数$f(x)$的一个极小值点,所以$f'(e)=2-a=0$,解得$a=2$.经检验,$a=2$符合题意.

(2)由(1)得,$f(x)=x\ln x-2x+2$,$f'(x)=\ln x-1$,令$f'(x)>0$,解得$x>e$,令$f'(x)<0$,解得$0<x<e$,故$f(x)$在$[1,e)$上单调递减,在$(e,3]$上单调递增,而$f(1)=0$,$f(3)=3\ln3-4<0$,

故$f(x)_{\max}=f(1)=0$,$f(x)_{\min}=f(e)=2-e$.

19.**解:**(1)数列$\{a_n\}$是公差不为零的等差数列,$a_1=1$,

选①时,设数列$\{a_n\}$的公差为d,因为a_1,a_2,a_5成等比数列,所以$a_2^2=a_1\cdot a_5$,所以$(1+d)^2=1+4d$,解得$d=2$或$d=0$(舍去),所以$a_n=2n-1$.因为$T_n=2-b_n$,所以$T_{n+1}=2-b_{n+1}$,两式相减得$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1}{2}$(常数),

当$n=1$时,$T_1=2-b_1$,所以$b_1=1$,所以$b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

选②时,$\frac{S_5}{5}-\frac{S_3}{3}=2$,整理得$\frac{5a_1+10d}{5}-\frac{3a_1+3d}{3}=2$,解得$d=2$,故$a_n=2n-1$.

由于$T_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,当$n=1$时,$b_1=1$;当$n\geqslant2$时,$T_{n-1}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$,所以$b_n=T_n-T_{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.当$n=1$时,也适合上式,所以$b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

(2)由(1)得,$\frac{a_n}{b_n}=(2n-1)\cdot2^{n-1}$,所以$M_n=1\times2^0+3\times2^1+\cdots+(2n-1)\cdot2^{n-1}$,　①

$2M_n=1\times2^1+3\times2^2+\cdots+(2n-3)\cdot2^{n-1}+(2n-1)\cdot2^n$,　②

①-②得,$-M_n=1+2\times2^1+2\times2^2+\cdots+2\times2^{n-1}-(2n-1)\cdot2^n=1+\frac{4(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n-1)\cdot2^n=(3-2n)\cdot2^n-3$,所以$M_n=(2n-3)\cdot2^n+3$.

20.**解:**(1)连接BD交AC于点O,因为四边形ABCD为菱形,所以$AC\perp BD$,

以O为原点,$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$正方向为x轴,y轴,作z轴$//DD_1$,建立空间直角坐标系,

因为$AB=BC=2$,$\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$,所以$AC=\sqrt{4+4-8\cos\frac{2\pi}{3}}=2\sqrt{3}$,$BD=2$,所以$B(0,1,0)$,$D(0,-1,0)$,$C_1(-\sqrt{3},0,3)$,$G(0,-1,2)$,所以$\overrightarrow{DB}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{BC_1}=(-\sqrt{3},-1,3)$,$\overrightarrow{BG}=(0,-2,2)$,设平面$BC_1G$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{BC_1}=-\sqrt{3}x-y+3z=0,\\n\cdot\overrightarrow{BG}=-2y+2z=0,\end{cases}$令$x=2$,则$n=(2,\sqrt{3},\sqrt{3})$,所以点$D$到平面$BC_1G$的距离$d=\frac{|\overrightarrow{DB}\cdot n|}{|n|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{30}}{5}$.

(2)由直四棱柱的结构特征知,平面$ADD_1A_1//$平面BCC_1B_1,因为平面$AGC_1\cap$平面$BCC_1B_1=C_1E$,平面$AGC_1\cap$平面$ADD_1A_1=AG$,所以$AG//C_1E$,同理$C_1G//AE$,所以四边形AGC_1E为平行四边形,所以$AG=C_1E$,又$AD=B_1C_1$,$\angle ADG=\angle C_1B_1E=\frac{\pi}{2}$,所以△ADG≌△$C_1B_1E$,

所以$B_1E=DG=2$,所以$BE=1$,所以$E(0,1,1)$,又$A(\sqrt{3},0,0)$,$B(0,1,0)$,$C(-\sqrt{3},0,0)$,所以$\overrightarrow{AE}=(-\sqrt{3},1,1)$,$\overrightarrow{CE}=(\sqrt{3},1,1)$,$\overrightarrow{BE}=(0,0,1)$,

设平面AEC的法向量为$n_1=(x_1,y_1,z_1)$,

则$\begin{cases}n_1\cdot\overrightarrow{AE}=-\sqrt{3}x_1+y_1+z_1=0,\\n_1\cdot\overrightarrow{CE}=\sqrt{3}x_1+y_1+z_1=0,\end{cases}$令$y_1=1$,则$n_1=(0,1,-1)$,

设平面BEC的法向量为$n_2=(x_2,y_2,z_2)$,

则$\begin{cases}n_2\cdot\overrightarrow{BE}=z_2=0,\\n_2\cdot\overrightarrow{CE}=\sqrt{3}x_2+y_2+z_2=0,\end{cases}$令$x_2=1$,则$n_2=(1,-\sqrt{3},0)$,

所以平面AEC与平面BEC夹角的余弦值为$|\cos\langle n_1,n_2\rangle|=\frac{|n_1\cdot n_2|}{|n_1||n_2|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\times2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

21.(1)**解:**当点P为椭圆上或下顶点时,△PAB的面积最大,即$\frac{1}{2}\cdot2ab=2$,所以$ab=2$,又$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$a^2=b^2+c^2$,故$a=2$,$b=1$,所以椭圆$E$的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)**证明:**设直线MN的方程为$x=ty+1$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则$H(4,y_1)$,联立直线MN的方程和椭圆E的方程,得$(t^2+4)y^2+2ty-3=0$,$y_1+y_2=-\frac{2t}{t^2+4}$,$y_1y_2=-\frac{3}{t^2+4}$,直线$HN$的方程为$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{4-x_2}(x-4)$,令$y=0$,得$x=4-\frac{4y_1-y_1x_2}{y_1-y_2}=4-\frac{4y_1-y_1(ty_2+1)}{y_1-y_2}=4-\frac{3y_1-ty_1y_2}{y_1-y_2}$,又$y_1+y_2=-\frac{2t}{t^2+4}$,$y_1y_2=-\frac{3}{t^2+4}$,故$ty_1y_2=\frac{3}{2}(y_1+y_2)$,所以$x=4-\frac{3y_1-\frac{3}{2}(y_1+y_2)}{y_1-y_2}=\frac{5}{2}$,即直线$HN$与$x$轴的交点为定点$\left(\frac{5}{2},0\right)$.

22.(1)**证明:**$f(x)=e^x-\sin x+\cos x-2$,则$f'(x)=e^x-\cos x-\sin x$,$f''(x)=e^x+\sin x-\cos x$,

因为$x\in(0,\pi)$,所以$f''(x)>0$,所以$f'(x)$在$(0,\pi)$内单调递增,且$f'(0)=0$,所以$f'(x)>0$,所以$f(x)$在$(0,\pi)$内单调递增,所以$f(x)>f(0)=0$.

(2)**解:**$g(x)=e^x-a\sin x-1$,

①当$a\leqslant0$时,$x\in[0,\pi]$,则$g(x)\geqslant0$,因为$g(0)=0$,所以$x=0$是唯一零点;

②当$0<a\leqslant1$时,$g'(x)=e^x-a\cos x$,

设$h(x)=g'(x)$,则$h'(x)=e^x+a\sin x$,$x\in[0,\pi]$时,有$h'(x)>0$,

所以$h(x)$在$[0,\pi]$上单调递增,而$h(0)=1-a\geqslant0$,所以$h(x)\geqslant h(0)\geqslant0$,所以$g(x)$在$[0,\pi]$上单调递增,因为$g(0)=0$,所以$x=0$是唯一零点;

③当$a>1$时,$g'(x)=e^x-a\cos x$,设$h(x)=g'(x)$,则$h'(x)=e^x+a\sin x$,$x\in[0,\pi]$时,有$h'(x)>0$,所以$h(x)$在$[0,\pi]$上单调递增,而$h(0)=1-a<0$,$h\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$,

所以$\exists x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,使得$h(x_0)=0$,所以当$0\leqslant x<x_0$时,$g(x)$单调递减,$x_0<x\leqslant\pi$时,$g(x)$单调递增,

所以$g(x)_{\min}=g(x_0)$,而$g(x_0)<g(0)=0$,$g(\pi)=e^{\pi}-1>0$,所以$g(x)$在(x_0,π)上有唯一零点,又$x=0$是一个零点,所以$g(x)$在$[0,\pi]$上有2个零点.