$\frac{\ln e}{e}=f(e)$,因为$e<4$,所以$f(e)>f(4)$,即$\ln b>\ln a$,故$b>a$.

因为$b=e^{\frac{1}{e}}<e^{\frac{1}{2}}<\sqrt{3}$,且$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{6}}=\frac{3^{\frac{1}{2}}}{6^{\frac{1}{3}}}=\frac{3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{3}}}=\frac{3^{\frac{1}{6}}}{2^{\frac{1}{3}}}=\frac{3^{\frac{1}{6}}}{4^{\frac{1}{6}}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{6}}<1$,故$c=\sqrt[3]{6}>\sqrt{3}$,即$c>b$.

综上,$a<b<c$.故选B.

7.B 提示:已知函数$f(x)=x^2-2\ln x$,则$f'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x-1)(x+1)}{x}$,

当$1\leqslant x\leqslant e$时,$f'(x)\geqslant 0$,即函数$f(x)$在$[1,e]$上单调递增,则$f(x)_{max}=f(e)=e^2-2$,

又关于x的不等式$f(x)-m\geqslant 0$在$[1,e]$上有实数解,则不等式$m\leqslant f(x)$在$[1,e]$上有实数解,即$m\leqslant e^2-2$,

所以实数m的取值范围是$(-\infty,e^2-2]$,故选B.

8.A 提示:令$g(a)=a^3-\frac{1}{2}a^2-2a+e^{-1}$,$a\in[0,1]$,则$g'(a)=3a^2-a-2=(3a+2)(a-1)$,

所以当$a\in[0,1]$时,$g'(a)\leqslant 0$,函数$g(a)$在$[0,1]$上单调递减,所以$g(a)_{max}=g(0)=e^{-1}$,

存在实数$a\in[0,1]$,使得不等式$f\left(2-\frac{1}{m}\right)\leqslant a^3-\frac{1}{2}a^2-2a+e^{-1}$成立,等价于$f\left(2-\frac{1}{m}\right)\leqslant g(a)_{max}=e^{-1}$成立,又因为$f(1)=e^{-1}$,所以$f\left(2-\frac{1}{m}\right)\leqslant f(1)$.

因为$f(x)=\frac{x^2}{e^x}$,所以$f'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}=\frac{x(2-x)}{e^x}$,$x>0$,

当$x\in(0,2)$时,$f'(x)>0$,函数$f(x)$在$(0,2)$上单调递增;

当$x\in(2,+\infty)$时,$f'(x)<0$,函数$f(x)$在$(2,+\infty)$上单调递减.

因为m为正实数,所以$2-\frac{1}{m}<2$,又因为函数$f(x)$在$(0,2)$上单调递增,所以$\begin{cases}0<2-\frac{1}{m}\leqslant 1,\\ m>0,\end{cases}$解得$\frac{1}{2}<m\leqslant 1$,

所以正实数m的取值范围为$\left(\frac{1}{2},1\right]$.故选A.

二、多项选择题

9.BC 提示:$(\ln 2023)'=0$,$(\log_4(4x))'=\frac{4}{4x\ln 4}=\frac{1}{x\ln 4}$,$\left(\frac{1}{\tan x}\right)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{-\sin^2x-\cos^2x}{\sin^2x}=-\frac{1}{\sin^2x}$,$\left(x^3-\frac{1}{x}\right)'=3x^2+\frac{1}{x^2}$.故选BC.

10.BD 提示:$f'(x)=(2x-4)e^x+(x^2-4x+1)e^x=(x^2-2x-3)e^x$,令$f'(x)>0$,得$x^2-2x-3>0$,解得$x<-1$或$x>3$,

所以$f(x)$的单调递增区间是$(-\infty,-1)$,$(3,+\infty)$,

所以$f(x)$在$(-2,-1)$与$(3,4)$上单调递增.故选BD.

11.AB 提示:由题意知,$(1-2x)(a+1)+axe^x\geqslant 0$对$x\in(0,+\infty)$恒成立,即$axe^x\geqslant(2x-1)(a+1)$对$x\in(0,+\infty)$恒成立,

当$a>-1$时,$\frac{a}{a+1}\geqslant\frac{2x-1}{xe^x}=\frac{2-\frac{1}{x}}{e^x}$,令$g(x)=\frac{2-\frac{1}{x}}{e^x}$,$x>0$,则$g'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}+2\right)\left(\frac{1}{x}-1\right)}{e^x}$,

则当$x\in(0,1)$时,$g'(x)>0$,$g(x)$在$(0,1)$上单调递增,当$x\in(1,+\infty)$时,$g'(x)<0$,$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减,

故$g(x)_{max}=g(1)=\frac{1}{e}$,所以$\frac{a}{a+1}\geqslant\frac{1}{e}$,解得$a\geqslant\frac{1}{e-1}$.故选AB.

12.CD 提示:对于A,$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$,所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递减,$(1,+\infty)$上单调递增,故A错误;

对于B,设$F(x)=f(x)+x$,则$F'(x)=\frac{e^x(x-1)+x^2}{x^2}$,设$g(x)=e^x(x-1)+x^2$,$g'(x)=e^x\cdot x+2x$,

所以当$x>0$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增,$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{e}=\frac{1-2\sqrt{e}}{4}<0$,故当$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时,$g(x)<0$,$F'(x)<0$,

所以当$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时,$F(x)$单调递减,当$x_1<x_2$时,$f(x_1)+x_1>f(x_2)+x_2$,故B错误;

对于C,若$0<x_1<x_2<1$,则$f(x_1)>f(x_2)$,又$-x_1>-x_2$,所以$f(x_1)-x_1>f(x_2)-x_2$,故C正确;

对于D,若$1<x_1<x_2$,则$f(x_1)<f(x_2)$,即$f(x_1)-f(x_2)<0$,又$x_1<x_2$,所以$x_1\cdot[f(x_1)-f(x_2)]>x_2\cdot[f(x_1)-f(x_2)]$,整理得$x_1f(x_1)+x_2f(x_2)>x_2f(x_1)+x_1f(x_2)$,故D正确.故选CD.

三、填空题

13.$y=8x-72$ 提示:因为$f(0)=81+m=0$,

所以$m=-81$,$f(-1)=1+m=-80$,

$f'(x)=8(2x+3)^3$,所以$f'(-1)=8$,所以所求切线方程为$y+80=8(x+1)$,即$y=8x-72$.

14.$\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2},1\right)$ 提示:因为函数$f(x)=a^x+(1+a)^x$在$(0,+\infty)$上单调递增,所以$f'(x)=a^x\ln a+(1+a)^x\ln(1+a)\geqslant 0$在$(0,+\infty)$上恒成立,即$(1+a)^x\ln(1+a)\geqslant -a^x\ln a$在$(0,+\infty)$上恒成立,化简可得$\left(\frac{1+a}{a}\right)^x\geqslant-\frac{\ln a}{\ln(1+a)}$在$(0,+\infty)$上恒成立,而在$(0,+\infty)$上$\left(\frac{1+a}{a}\right)^x>1$,故有$1\geqslant-\frac{\ln a}{\ln(1+a)}$,由$a\in(0,1)$,化简得$\ln(1+a)\geqslant\ln\frac{1}{a}$,

即$1+a\geqslant\frac{1}{a}$,$a^2+a-1\geqslant 0$,解得$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\leqslant a<1$,故$a$的取值范围是$\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2},1\right)$.

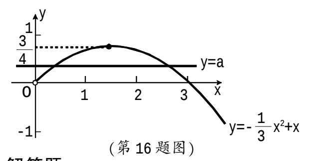
15.$(-\infty,2e]$ 提示:$f'(x)=\ln x-1$,当$x\in(0,e)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,

当$x\in(e,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,所以当$x=e$时,函数取得最小值$f(e)=e\ln e-2e+m=m-e$,所以$f(x)\in[m-e,+\infty)$,

若$f(x)\in[m-e,+\infty)$,函数$y=f(f(x))$与$y=f(x)$有相同的值域,只需$m-e\leqslant e$,即$m\leqslant 2e$.

16.$\left(0,\frac{3}{4}\right)$ 提示:因为$f'(x)=-\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x}$,所以$g(x)=f'(x)-\frac{1}{3}=-\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{3}(x>0)$,

由$g(x)=0$,得$a=-\frac{1}{3}x^2+x(x>0)$,在同一坐标系中分别作出$y=-\frac{1}{3}x^2+x(x>0)$和$y=a$的图象如下图所示,由图可知当$0<a<\frac{3}{4}$时,两函数图象有两个不同的交点,即函数$g(x)$有两个零点,所以实数a的取值范围是$\left(0,\frac{3}{4}\right)$.



(第16题图)

四、解答题

17.解:(1)由$f(x)=e^x\sin x-x$,得$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x-1$,

所以$f'(0)=0$,又$f(0)=0$,所以曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y=0$.

(2)由$f(x)=e^x\sin x-x$,得$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x-1$,

$f''(x)=e^x\sin x+e^x\cos x+e^x\cos x-e^x\sin x=2e^x\cos x$,

因为$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,所以$f''(x)\geqslant 0$,则$f'(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增,

又$f'(0)=0$,所以$f'(x)\geqslant 0$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上成立,即$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增,所以$f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值为$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}\cdot\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}$.

18.解:(1)当$a=b=2$时,$f(x)=2x^3-6x^2+2$,$f'(x)=6x^2-12x(x\in\mathbf{R})$,

令$f'(x)=0$,解得$x=0$或$x=2$,

当x变化时,$f'(x)$,$f(x)$变化情况如下表:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以当$x=0$时,$f(x)$有极大值,极大值为$f(0)=2$,

当$x=2$时,$f(x)$有极小值,极小值为$f(2)=2\times 2^3-6\times 2^2+2=-6$.

(2)$f(x)=ax^3-3ax^2+b$,则$f'(x)=3ax^2-6ax$,令$f'(x)=0$,解得$x=0$或$x=2$,

因为$a>0$,所以$x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$时,$f'(x)>0$;$x\in(0,2)$时,$f'(x)<0$,

所以$f(x)$在$(-\infty,0)$,$(2,+\infty)$上单调递增,$f(x)$在$(0,2)$上单调递减,

故当$x\in[1,4]$时,$f(x)$在$(1,2)$上单调递减,在$(2,4)$上单调递增,

则$[f(x)]_{min}=f(2)=b-4a$,而$f(1)=-2a+b$,$f(4)=16a+b$,

因为$a>0$,所以$f(4)>f(1)$,所以$[f(x)]_{max}=f(4)=16a+b$,

所以$\begin{cases}b-4a=13,\\16a+b=53,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\b=21.\end{cases}$

19.解:(1)因为每件商品售价为6元,所以x万件商品销售收入为$6x$万元.

依题意得当$0<x<7$时,$P(x)=6x-\left(\frac{4}{x}+7x-10\right)-2=-\frac{4}{x}-x+8$,

当$x\geqslant 7$时,$P(x)=6x-\left(6x+\ln x+\frac{e^3}{x}-11\right)-2=9-\ln x-\frac{e^3}{x}$,

所以$P(x)=\begin{cases}-\frac{4}{x}-x+8,0<x<7,\\9-\ln x-\frac{e^3}{x},x\geqslant 7.\end{cases}$

(2)当$0<x<7$时,$P(x)=-\frac{4}{x}-x+8=-\left(\frac{4}{x}+x\right)+8\leqslant-2\sqrt{\frac{4}{x}\cdot x}+8=4$,当且仅当$x=2$时,等号成立,此时,$P(x)$取得最大值$P(2)=4$;

当$x\geqslant 7$时,$P(x)=9-\ln x-\frac{e^3}{x}$,所以$P'(x)=-\frac{1}{x}+\frac{e^3}{x^2}=\frac{e^3-x}{x^2}$,当$7\leqslant x<e^3$时,$P'(x)>0$,函数$P(x)$单调递增,当$x>e^3$时,$P'(x)<0$,函数$P(x)$单调递减,所以当$x=e^3$时,$P(x)$取得最大值,最大值为$P(e^3)=9-\ln e^3-1=5$(万元).

综上,当$x=e^3\approx 20$时,$P(x)$取得最大值5万元,故当年产量约为20万件时,该同学的这一产品所获年利润最大,最大年利润为5万元.

20.解:(1)当$a=1$时,$f(x)=x-\frac{\sin x}{\cos^2x}$,$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

所以$f'(x)=1-\frac{\cos x\cos^2x-2\cos x(-\sin x)\sin x}{\cos^4x}=1-\frac{\cos^2x+2\sin^2x}{\cos^3x}=\frac{\cos^3x+\cos^2x-2}{\cos^3x}$,

令$t=\cos x$,因为$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以$t\in(0,1)$,

所以$\cos^3x+\cos^2x-2=t^3+t^2-2=(t-1)(t^2+2t+2)=(t-1)\cdot[(t+1)^2+1]<0$,

又$\cos^3x=t^3>0$,所以$f'(x)=\frac{\cos^3x+\cos^2x-2}{\cos^3x}=\frac{(t-1)(t^2+2t+2)}{t^3}<0$,所以$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减.

(2)$f(x)+\sin x<0$,设$g(x)=f(x)+\sin x=ax-\frac{\sin x}{\cos^2x}+\sin x$,$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,则$g(x)<0$,注意到$g(0)=0$,则$g'(0)\leqslant 0$,

因为$g'(x)=a-\frac{1+\sin^2x}{\cos^3x}+\cos x$,$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

所以$g'(0)=a-1+1\leqslant 0$,故$a\leqslant 0$.

当$a\leqslant 0$时,证明$g(x)<0$,$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$恒成立.

即证明$-\frac{\sin x}{\cos^2x}+\sin x<0$成立,令$m(x)=\sin x-\frac{\sin x}{\cos^2x}$,

则$m'(x)=\cos x-\frac{2-\cos^2x}{\cos^3x}=\frac{\cos^4x+\cos^2x-2}{\cos^3x}=\frac{(\cos^2x-1)(\cos^2x+2)}{\cos^3x}<0$,$0<x<\frac{\pi}{2}$,

所以$m(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减,$m(x)<m(0)=0$.

综上,a的取值范围为$(-\infty,0]$.

21.解:(1)因为$f(x)=e^x-a\sin x$,所以$f'(x)=e^x-a\cos x$,所以$f(0)=1$,$f'(0)=1-a$,

所以函数$y=f(x)$在$(0,1)$处的切线方程为$y=(1-a)\cdot x+1$.

(2)因为$a=0$,所以$f(x)=e^x$,又$y=f(x)$和$y=g(x)$有公共点,

所以方程$f(x)=g(x)$有解,即$e^x=b\sqrt{x}$有解,显然$x\neq 0$,所以$b=\frac{e^x}{\sqrt{x}}$在$(0,+\infty)$上有解.

设$h(x)=\frac{e^x}{\sqrt{x}}(x>0)$,所以$h'(x)=\frac{e^x(2x-1)}{2x\sqrt{x}}$,

所以当$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时,$h'(x)<0$;当$x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$时,$h'(x)>0$,

所以$h(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增,

所以$h(x)_{min}=h\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2e}$,且当$x\to 0$时,$h(x)\to+\infty$;当$x\to+\infty$时,$h(x)\to+\infty$,

所以$h(x)\in[\sqrt{2e},+\infty)$,所以$b$的取值范围为$[\sqrt{2e},+\infty)$.

22.解:(1)若$a=2$,则$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)$,

所以$f'(x)=x^2-4x-2$,

令$f'(x)>0$,则$x<2-\sqrt{6}$或$x>2+\sqrt{6}$,

即$f(x)$在$(-\infty,2-\sqrt{6})$和$(2+\sqrt{6},+\infty)$上单调递增;

令$f'(x)<0$,则$2-\sqrt{6}<x<2+\sqrt{6}$,即$f(x)$在$(2-\sqrt{6},2+\sqrt{6})$上单调递减.

故$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,2-\sqrt{6})$和$(2+\sqrt{6},+\infty)$,单调递减区间为$(2-\sqrt{6},2+\sqrt{6})$.

(2)因为函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-a\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)$,所以$x=-\frac{1}{2}$不是$f(x)$的零点,

令$f(x)=0$,则$a=\frac{\frac{1}{3}x^3}{x^2+x+\frac{1}{4}}$,令$g(x)=\frac{\frac{1}{3}x^3}{x^2+x+\frac{1}{4}}$,

则$g'(x)=\frac{4x^2(2x+3)}{3(2x+1)^3}$,

当$-\frac{1}{2}<x<0$,或$x>0$或$x<-\frac{3}{2}$时,$g'(x)>0$,函数$g(x)$单调递增;

当$-\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{2}$时,$g'(x)<0$,函数$g(x)$单调递减.

所以$g(x)_{极大值}=g\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{8}$,

又当$x\to-\infty$时,$g(x)\to-\infty$,当$x\to-\frac{1}{2}$时,$g(x)\to-\infty$,当$x\to+\infty$时,$g(x)\to+\infty$.

综上,当$a>-\frac{9}{8}$时,$f(x)$有1个零点;当$a=-\frac{9}{8}$时,$f(x)$有2个零点;当$a<-\frac{9}{8}$时,$f(x)$有3个零点.

扫码免费下载习题讲解ppt

第5期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.D 提示:$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1.1)-f(1)}{1.1-1}=\frac{(1.1^2+3)-(1^2+3)}{0.1}=2.1$.故选D.

2.C 提示:根据题意,由导数的定义,得$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2+2x)-f(2)}{x}=2\lim\limits_{2x\to 0}\frac{f(2+2x)-f(2)}{2x}=2f'(2)=8$.故选C.

3.A 提示:因为$\Delta s=s(2)-s(1)=24+2m-6-m=18+m$,所以$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(2)-s(1)}{2-1}=18+m=20$,所以$m=2$.故选A.

4.B 提示:$f(x)=e^x\sin x$,则$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x$.故选B.

5.A 提示:由图可知,经过点$(2,f(2))$和点$(4,f(4))$的割线的斜率大于曲线$y=f(x)$在点$(2,f(2))$处的切线斜率,且小于曲线$y=f(x)$在点$(4,f(4))$处的切线斜率,所以$f'(2)<\frac{f(4)-f(2)}{4-2}<f'(4)$,所以$2f'(2)<f(4)-f(2)<2f'(4)$.故选A.

6.C 提示:由$y=\frac{e^x}{x+1}$,得$y'=\frac{e^x(x+1)-e^x}{(x+1)^2}=\frac{xe^x}{(x+1)^2}$,故函数y在点$\left(1,\frac{e}{2}\right)$处的切线斜率为$k=y'|_{x=1}=\frac{e}{4}$,切线方程为$y-\frac{e}{2}=\frac{e}{4}(x-1)$,即$y=\frac{e}{4}x+\frac{e}{4}$.故选C.

7.B 提示:①$f(x)=\sin x+\cos x$,则$f'(x)=\cos x-\sin x$,所以$f''(x)=-\sin x-\cos x$,当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$\sin x>0$,$\cos x>0$,则$-\sin x-\cos x<0$,故①满足题意;

②$f(x)=-xe^{-x}$,则$f'(x)=-e^{-x}+xe^{-x}$,所以$f''(x)=(2-x)e^{-x}$,当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$2-x>0$,即$f''(x)>0$,故②不满足题意;

③$f(x)=\ln x-2x$,则$f'(x)=\frac{1}{x}-2$,所以$f''(x)=-\frac{1}{x^2}$,当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$f''(x)<0$,故③满足题意;

④$f(x)=-x^3+2x-1$,则$f'(x)=-3x^2+2$,所以$f''(x)=-6x$,当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$f''(x)<0$,故④满足题意.

综上,有3个函数满足题意.故选B.

8.A 提示:对$f(x)=e^x+a\cdot e^{-x}$求导,得$f'(x)=e^x-ae^{-x}$.又$f'(x)$是奇函数,故$f'(0)=1-a=0$,解得$a=1$,故有$f'(x)=e^x-e^{-x}$.设切点为(x_0,y_0),则$f'(x_0)=e^{x_0}-e^{-x_0}=\frac{3}{2}$,得$e^{x_0}=2$或$e^{x_0}=-\frac{1}{2}$(舍去),得$x_0=\ln 2$.故选A.

二、多项选择题

9.AD 提示:因为$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)=2$,故A正确;

因为$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{2h}=\frac{1}{2}f'(x_0)=1$,故B错误;

因为$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=2f'(x_0)=4$,故C错误;

因为$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{2h}=f'(x_0)=2$,故D正确.

故选AD.

10.AC 提示:对于A,若$y=x^2-\frac{1}{x}$,则$y'=2x+\frac{1}{x^2}$,故A正确;对于B,若$y=x\sin x$,则$y'=\sin x+x\cos x$,故B错误;对于C,若$y=\frac{2x}{e^x}$,则$y'=\frac{2e^x-2xe^x}{(e^x)^2}=\frac{2-2x}{e^x}$,故C正确;对于D,若$y=(2x+1)^4$,则$y'=8(2x+1)^3$,故D错误.故选AC.

11.BD 提示:对于A,由$f(x_0)=f'(x_0)$,得$2x_0^2+3=4x_0$,$\Delta=4^2-4\times 2\times 3=-8<0$,无实数解,所以函数$f(x)=2x^2+3$无巧值点,故A错误;

对于B,由$f(x_0)=f'(x_0)$,得$\frac{1}{x_0}=-\frac{1}{x_0^2}$,解得$x_0=-1$,函数$f(x)=\frac{1}{x}$有巧值点-1,故B正确;

对于C,由$f(x_0)=f'(x_0)$,得$e^{-x_0}=-e^{-x_0}$,无解,所以函数$f(x)=e^{-x}$无巧值点,故C错误;

对于D,由$f(x_0)=f'(x_0)$,得$\ln x_0=\frac{1}{x_0}$,函数$y=\ln x_0$与$y=\frac{1}{x_0}$在第一象限有一个交点,所以方程$\ln x_0=\frac{1}{x_0}$有一个实数解,所以函数$f(x)=\ln x$有巧值点,故D正确.

故选BD.

12.BC 提示:由图可知$f(-1)=2$,$f(-2)>2$,又因为函数$f(x)$是奇函数,

所以$f(1)=-2$,$f(2)<-2$,所以$f(1)\cdot f(2)>4$,所以A错误,B正确;

由$f(x)$是奇函数,结合图象可知$f'(1)<0$,$f'(2)>0$,所以$f'(1)\cdot f'(2)<0$,所以C正确,D错误.故选BC.

三、填空题

13.e 提示:因为函数$f(x)=f'(1)x^2-e^x$,所以$f'(x)=2f'(1)x-e^x$,故$f'(1)=2f'(1)-e$,得$f'(1)=e$.

14.-1 提示:因为$f(x)=e^{-x}$,所以$f'(x)=-e^{-x}$,

设切点为(x_0,e^{-x_0}),则$f'(x_0)=-e^{-x_0}$,又该切线过点$(1,0)$,所以$\frac{e^{-x_0}}{x_0-1}=-e^{-x_0}$,解得$x_0=0$,

所以$f'(0)=-e^0=-1$,即该切线的斜率为-1.

15.$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$ 提示:$y'=e^x+(x+a)e^x$,设切点坐标为$(x_0,(x_0+a)e^{x_0})$,所以切线的斜率$k=e^{x_0}+(x_0+a)\cdot e^{x_0}$,所以切线方程为$y-(x_0+a)e^{x_0}=[e^{x_0}+(x_0+a)e^{x_0}](x-x_0)$,又因为切线过原点,所以$-(x_0+a)e^{x_0}=[e^{x_0}+(x_0+a)e^{x_0}](-x_0)$,

整理得$x_0^2+ax_0-a=0$,因为切线存在两条,所以上述方程有两个不等实根,

所以$\Delta=a^2+4a>0$,解得$a<-4$或$a>0$,所以a的取值范围是$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$.

16.$\frac{\sqrt{2}}{8}$ 提示:设端点A运动的路程为Sm,运动的时间为ts,木棒的长度为定值3,点B运动了$\frac{t}{2}$m,则有$(3-S)^2+\frac{t^2}{4}=9$,变形可得$S=3-\sqrt{9-\frac{t^2}{4}}$,所以$S'=\frac{t}{4\sqrt{9-\frac{t^2}{4}}}$,$S'|_{t=2}=\frac{\sqrt{2}}{8}$,即端点A在t=2s这一时刻的瞬时速度为$\frac{\sqrt{2}}{8}$m/s.

四、解答题

17.解:(1)由$f(x)=3x^4+\sin x$,得$f'(x)=12x^3+\cos x$.

(2)由$f(x)=\sqrt{x}\ln x-e^{2x-1}$,

得$f'(x)=\frac{\sqrt{x}\ln x}{2x}+\frac{\sqrt{x}}{x}-2e^{2x-1}$.

18.解:因为$f(x)=ax^2-\frac{4}{3}ax+b$,所以$f'(x)=2ax-\frac{4}{3}a$,

所以$f'(1)=2a-\frac{4}{3}a=1$,解得$a=\frac{3}{2}$.又$f(1)=a-\frac{4}{3}\cdot a+b=2$,解得$b=\frac{5}{2}$.故$a=\frac{3}{2}$,$b=\frac{5}{2}$.

19.解:(1)$f(x)=\frac{2}{3}x^3+x^2+2x$,故第1s内的平均速度为$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{2}{3}+1+2=\frac{11}{3}$m/s.

(2)$f'(x)=2x^2+2x+2$,则$f'(1)=6$,所以质点在第1s末的瞬时速度是6m/s.

(3)由$2x^2+2x+2=14$,解得$x=2$,或$x=-3$(舍去),故经过2s质点的运动速度达到14m/s.

20.解:(1)当$a=1$时,$f(x)=\ln x-\frac{1}{x}$,$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$.

(2)因为$f(x)=a\ln x-\frac{1}{x}$,所以$f'(x)=\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}$,因为$f(x)$在$(1,f(1))$处的切线与直线$2x-y=0$平行,

所以$f'(1)=a+1=2$,解得$a=1$.

21.解:(1)设$P(x_0,y_0)$是满足条件的点,由函数$f(x)=x^2$,可得$f'(x)=2x$,所以$f'(x_0)=2x_0$,即切线的斜率为$k=2x_0$,因为切线与直线$y=4x-5$平行,所以$2x_0=4$,解得$x_0=2$,可得$y_0=f(2)=4$,

所以点$P(2,4)$是满足条件的点.

(2)由(1)知,切线的斜率为$k=2x_0$,因为切线与直线$2x-6y+5=0$垂直,所以$2x_0\times\frac{1}{3}=-1$,解得$x_0=-\frac{3}{2}$,可得$y_0=\frac{9}{4}$,所以点$P\left(-\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$是满足条件的点.

(3)由(1)知,切线的斜率为$k=2x_0$,因为切线的倾斜角为135°,所以其斜率为-1,可得$2x_0=-1$,解得$x_0=-\frac{1}{2}$,可得$y_0=\frac{1}{4}$,所以点$P\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$是满足条件的点.

22.(1)解:$f'(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1\geqslant-1$,故切线斜率的取值范围为$[-1,+\infty)$.

(2)解:结合(1)可知,$f'(x)\geqslant-1$且$-\frac{1}{f'(x)}\geqslant-1$,

即$-1\leqslant f'(x)<0$或$f'(x)\geqslant 1$,

解得$x\leqslant 2-\sqrt{2}$,或$1<x<3$,或$x\geqslant 2+\sqrt{2}$.

故切点横坐标的取值范围为$(-\infty,2-\sqrt{2}]\cup(1,3)\cup[2+\sqrt{2},+\infty)$.

(3)证明:假设存在切线l与曲线C同时切于不同的两点$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$x_1\neq x_2$,则在点A处的切线方程是$y-\left(\frac{1}{3}x_1^3-2x_1^2+3x_1\right)=(x_1^2-4x_1+3)(x-x_1)$,

即$y=(x_1^2-4x_1+3)x+\left(-\frac{2}{3}x_1^3+2x_1^2\right)$;

同理,在点B处的切线方程是

$y=(x_2^2-4x_2+3)x+\left(-\frac{2}{3}x_2^3+2x_2^2\right)$.

由于两切线是同一直线,则有$x_1^2-4x_1+3=x_2^2-4x_2+3$,且$-\frac{2}{3}x_1^3+2x_1^2=-\frac{2}{3}x_2^3+2x_2^2$,化简得$x_1+x_2=4$,

且$(x_1+x_2)^2-3(x_1+x_2)-x_1x_2=0$,解得$x_1=2$,$x_2=2$.

这与$x_1\neq x_2$矛盾,所以不存在与曲线C同时切于两个不同点的直线.

第6期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.D 提示:函数$f(x)=4x^2+\frac{1}{x}$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,$f'(x)=8x-\frac{1}{x^2}=\frac{8x^3-1}{x^2}$,

令$f'(x)>0$,解得$x>\frac{1}{2}$,所以函数$f(x)$的单调递增区间为$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.故选D.

2.C 提示:设$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数,且在(a,b)内可导,令$f'(x)=0$,

若方程无解,或方程有解时,在导数为0的点左右附近,导数符号不改变,则函数无极值点;

若方程有解时,在导数为0的点左右附近,导数符号改变,则函数有极值点,与端点函数值比较,可知是否为最值点.故选C.

3.D 提示:由导函数图象可知原函数从左到右,先减后增,再减,最后增,因此排除A,C.

又0在单调递增区间内,排除B,故选D.

4.A 提示:由题意得$f'(x)=12x^2-2ax-2b$,因为$f(x)$在$x=1$处有极小值-3,

所以$f'(1)=12-2a-2b=0$,$f(1)=4-a-2b+2=-3$,解得$a=3$,$b=3$,经检验,在$x=1$处$f(x)$有极小值-3,所以$a-b=0$.故选A.

5.A 提示:因为$f(x)=x^2-\ln x(x>0)$,所以$f'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$,所以当$x\in[1,2]$时,$f'(x)=\frac{2x^2-1}{x}>0$,则$f(x)$在$[1,2]$上单调递增,所以$f(x)$在$[1,2]$上的最小值为$f(1)=1$.故选A.

6.B 提示:结合图象可知,当$x\in(-\infty,-2)$时,$f(x)<0$,$f'(x)>0$,此时$f(x)\cdot f'(x)<0$;

当$x\in(-2,-1)$时,$f(x)>0$,$f'(x)>0$,此时$f(x)\cdot f'(x)>0$;当$x\in(-1,0)$时,$f(x)>0$,$f'(x)<0$,此时$f(x)\cdot f'(x)<0$;当$x\in(0,+\infty)$时,$f(x)>0$,$f'(x)>0$,此时$f(x)f'(x)>0$.故$f(x)\cdot f'(x)<0$的解集为$(-\infty,-2)\cup(-1,0)$.故选B.

7.C 提示:对函数$f(x)$求导可得,$f'(x)=ae^x-\frac{1}{x}$,

依题意,$ae^x-\frac{1}{x}\geqslant 0$在$(1,2)$上恒成立,即$a\geqslant\frac{1}{xe^x}$在$(1,2)$上恒成立,令$g(x)=\frac{1}{xe^x}$,$x\in(1,2)$,则$g'(x)=\frac{-(e^x+xe^x)}{(xe^x)^2}=-\frac{x+1}{x^2e^x}$,

易知当$x\in(1,2)$时,$g'(x)<0$,则函数$g(x)$在$(1,2)$上单调递减,所以$a\geqslant g(x)_{max}=g(1)=\frac{1}{e}=e^{-1}$,所以a的最小值为$e^{-1}$.故选C.

8.A 提示:令$g(x)=-(x-1)^2$,则$g(x)$的图象开口向下,对称轴为$x=1$,

因为$\frac{\sqrt{6}}{2}-1-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2}-\frac{4}{2}$,而$(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2-4^2=9+6\sqrt{2}-16=6\sqrt{2}-7>0$,

所以$\frac{\sqrt{6}}{2}-1-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)>0$,所以$\frac{\sqrt{6}}{2}-1>1-\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以由一元二次函数的性质可知$g\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)<g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.因为$\frac{\sqrt{6}}{2}-1-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-4}{2}$,

而$(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-4^2=4\sqrt{3}-8<0$,所以$\frac{\sqrt{6}}{2}-1<1-\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以$g\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)>g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

综上,$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<g\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)<g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,又$y=e^x$为增函数,所以$a<c<b$,即$b>c>a$.故选A.

二、多项选择题

9.BD 提示:对于A,$f(x)=x^4$,其导数$f'(x)=4x^3$,在区间$(-\infty,0)$上,有$f'(x)<0$,函数$f(x)$单调递减,不符合题意;

对于B,$f(x)=x-\sin x$,其导数$f'(x)=1-\cos x$,在$(-\infty,+\infty)$上,有$f'(x)\geqslant 0$,则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增,符合题意;

对于C,$f(x)=xe^x$,其导数$f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$,在区间$(-\infty,-1)$上,有$f'(x)<0$,函数$f(x)$单调递减,不符合题意;

对于D,$f(x)=e^x-e^{-x}-2x$,其导数$f'(x)=e^x+e^{-x}-2$,必有$f'(x)=e^x+e^{-x}-2\geqslant 2-2=0$,则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增,符合题意.故选BD.

10.ACD 提示:由函数$f(x)$的导函数$y=f'(x)$的图象可知,当$x_4<x<x_5$时,$f'(x)<0$,即$f(x)$在(x_4,x_5)内单调递减,故$f(x_4)>f(x_5)$,A正确;当$x_2<x<x_3$时,$f'(x)>0$,即$f(x)$在(x_2,x_3)内单调递增,当$x_3<x<x_4$时,$f'(x)<0$,即$f(x)$在(x_3,x_4)内单调递减,故函数$f(x)$在$[x_2,x_4]$上不单调递减,B错误;当$x\in[x_1,0]$时,$f'(x)>0$,$f(x)$在$[x_1,0]$上单调递增,故函数$f(x)$在$[x_1,0]$上无极值,C正确;当$x_4<x<x_5$时,$f'(x)<0$,即$f(x)$在(x_4,x_5)内单调递减,当$x>x_5$时,$f'(x)>0$,即$f(x)$在$(x_5,+\infty)$上单调递增,故$x=x_5$为函数$f(x)$的极小值点,即函数$f(x)$在$[x_4,+\infty)$上有极值,D正确.故选ACD.

11.AB 提示:令$g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$,则$g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}<0$,故$g(x)$在$\mathbf{R}$上单调递减,

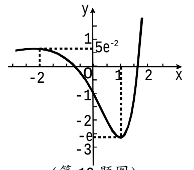
而$\ln 2>0$,$2>0$,故$g(\ln 2)<g(0)$,$g(2)<g(0)$,即$\frac{f(\ln 2)}{2}<\frac{f(0)}{1}$,$\frac{f(2)}{e^2}<\frac{f(0)}{1}$,即$f(\ln 2)<2f(0)$,$f(2)<e^2f(0)$.故选AB.

12.AC 提示:$f'(x)=e^x(x^2-x-1)+e^x(2x-1)=e^x\cdot(x^2+x-$

② $2)=e^x(x+2)(x-1)$，

所以在$(-\infty,-2)$，$(1,+\infty)$上，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，在$(-2,1)$上，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，所以$f(x)$极大值为$f(-2)=e^{-2}[(-2)^2-(-2)-1]=5e^{-2}$，

$f(x)$极小值为$f(1)=e(1-1-1)=-e$，故A正确；当$x\to-\infty$时，$f(x)>0$，所以$f(x)$有两个零点，故B不正确；$f(-2)=5e^{-2}$，$f(2)=e^2(4-2-1)=e^2$，所以当$x\in[-2,2]$时，$f(x)$的最大值为e^2，故C正确；由上可知，$f(x)$的图象如图所示.



（第12题图）

方程$f(x)=k$恰有3个不等实根，可转化为$y=f(x)$与$y=k$的交点有3个，由图象可得，当$-e<k\leqslant0$时，$f(x)=k$有2个实数根，当$0<k<5e^{-2}$时，$f(x)=k$有3个实数根，当$k=5e^{-2}$时，$f(x)=k$有2个实数根，当$k>5e^{-2}$时，$f(x)=k$有1个实数根，故D不正确.故选AC.

三、填空题

13.$\left(0,\frac{1}{e}\right)$　**提示**：由题意知，$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=\ln\sqrt{x}+x\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\ln\sqrt{x}+\frac{1}{2}$，

令$f'(x)<0$，解得$0<x<\frac{1}{e}$，故$f(x)$的单调递减区间为$\left(0,\frac{1}{e}\right)$.

14.②　**提示**：①$y'=3x^2\geqslant0$恒成立，所以函数在$\mathbf{R}$上单调递增，无极值点；

②$y'=2x$，当$x>0$时，$y'>0$，函数单调递增，当$x<0$时，$y'<0$，函数单调递减，所以$x=0$处函数取得极小值，故②符合；

③$y'=\frac{1}{x+1}>0$，函数在定义域上单调递增，无极值点；④$y=2^x$在$\mathbf{R}$上单调递增，无极值点.

15.50　**提示**：设A系列木版画的月利润为$g(x)$，则$g(x)=f(x)(x-30)=(x-90)^2(x-30)$，$30<x<90$，得$g'(x)=2(x-90)(x-30)+(x-90)^2=3(x-90)(x-50)$，

令$g'(x)=0$，则$x=50$，当$x\in(30,50)$时，$g'(x)>0$，当$x\in(50,90)$时，$g'(x)<0$，

故$g(x)$在$(30,50)$内单调递增，$g(x)$在$(50,90)$内单调递减，所以当$x=50$时，利润$g(x)$取到极大值，也是最大值，

即当A系列木版画销售价格定为50元/套时，月利润最大.

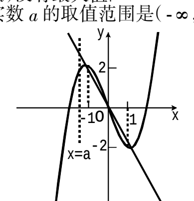
16.2；$(-\infty,-1)$　**提示**：若$a=0$，函数$f(x)=\begin{cases}x^3-3x,x\leqslant0,\\-2x,x>0,\end{cases}$

若$x\leqslant0$，则$f(x)=x^3-3x$，$f'(x)=3x^2-3$，令$3x^2-3=0$，解得$x=-1$或$x=1$（舍去），

当$x\leqslant-1$时，$f'(x)>0$，此时函数$f(x)$单调递增，当$-1<x<0$时，$f'(x)<0$，此时$f(x)$单调递减.若$x>0$，则$f(x)=-2x$，此时函数$f(x)$单调递减，所以当$x=-1$时，$f(x)$取得最大值，为$f(-1)=2$.函数$f(x)=\begin{cases}x^3-3x,x\leqslant a,\\-2x,x>a,\end{cases}$

画出$f(x)$的大致图象，由图可知，只有当$a<-1$时，函数$f(x)$没有最大值.

所以实数a的取值范围是$(-\infty,-1)$.



（第16题图）

四、解答题

17.**解**：(1)当$a=3$时，$f(x)=\ln x-3x$，函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，且$f'(x)=\frac{1}{x}-3=\frac{1-3x}{x}$，

所以$f'(1)=-2$，所以曲线$y=f(x)$在点P处的切线方程为$y+3=-2(x-1)$，即为$2x+y+1=0$.

(2)$f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}(x>0)$，

当$a\leqslant0$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

当$a>0$时，令$f'(x)>0$，解得$0<x<\frac{1}{a}$；令$f'(x)<0$，解得$x>\frac{1}{a}$，故函数$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$单调递增，在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$单调递减.

综上，当$a\leqslant0$时，函数$f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$；当$a>0$时，函数$f(x)$的单调递增区间为$\left(0,\frac{1}{a}\right)$，单调递减区间为$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$.

18.**解**：(1)当$a=2$时，$f(x)=e^x-2x-1$，所以$f'(x)=e^x-2$.

令$f'(x)>0$，即$e^x-2>0$，解得$x>\ln2$；令$f'(x)<0$，即$e^x-2<0$，解得$x<\ln2$，

所以当$a=2$时，函数$f(x)$的单调递增区间是$(\ln2,+\infty)$，单调递减区间为$(-\infty,\ln2)$.

(2)因为$f(x)=e^x-ax-1$，所以$f'(x)=e^x-a$.

因为$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，所以$f'(x)=e^x-a\geqslant0$恒成立，即$a\leqslant e^x$恒成立.

因为$x\in\mathbf{R}$时，$e^x\in(0,+\infty)$，所以$a\leqslant0$，即a的取值范围为$(-\infty,0]$.

19.**解**：(1)由题意知，$f(x)$定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=-\frac{a}{x^2}-1+\frac{a}{x}=\frac{-x^2+ax-a}{x^2}$，令$g(x)=-x^2+ax-a$，则$g(x)=0$有两个不等正根$x_1,x_2$，

所以$\begin{cases}\Delta=a^2-4a>0,\\x_1+x_2=a>0,\\x_1x_2=a>0,\end{cases}$解得$a>4$，所以实数$a$的取值范围为$(4,+\infty)$.

(2)由(1)知，$a>4$，x_1,x_2是$g(x)=0$的两根，则$x_1+x_2=x_1x_2=a$，所以$f(x_1)+f(x_2)-3a=\frac{a}{x_1}-x_1+a\ln x_1+\frac{a}{x_2}-x_2+a\ln x_2-3a=\frac{a(x_1+x_2)}{x_1x_2}-(x_1+x_2)+a\ln(x_1x_2)-3a=a\ln a-3a$.

令$h(a)=a\ln a-3a(a>4)$，则$h'(a)=\ln a-2$，

所以当$a\in(4,e^2)$时，$h'(a)<0$；

当$a\in(e^2,+\infty)$时，$h'(a)>0$.

所以$h(a)$在$(4,e^2)$上单调递减，在$(e^2,+\infty)$上单调递增，

所以$h(a)_{min}=h(e^2)=2e^2-3e^2=-e^2$，即$f(x_1)+f(x_2)-3a$的最小值为$-e^2$.

20.**解**：(1)$F(x)=xG(x)-50-7x=x\left(-\frac{2}{x^2}+\frac{\ln x}{x}+\frac{80}{x}+4\right)-50-7x=-\frac{2}{x}+\ln x-3x+30(x>0)$.

(2)由(1)得$F(x)=-\frac{2}{x}+\ln x-3x+30(x>0)$，

则$F'(x)=\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}-3=-\frac{(3x+2)(x-1)}{x^2}(x>0)$，

令$F'(x)=0$，得$x=1$或$x=-\frac{2}{3}$（舍去），所以在$(0,1)$内，$F'(x)>0$，$F(x)$单调递增，在$(1,+\infty)$上，$F'(x)<0$，$F(x)$单调递减，所以$F(x)_{max}=F(1)=-2+\ln1-3+30=25$.

答：当2021年的年产量为1百件时，该企业在这种茶文化衍生产品中获利最大，且最大利润为25万元.

21.(1)**解**：$f(x)=a(e^x+a)-x$，则$f'(x)=ae^x-1$.

①当$a\leqslant0$时，$f'(x)<0$恒成立，$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递减；

②当$a>0$时，令$f'(x)=0$，得$x=\ln\frac{1}{a}$，当$x\in\left(-\infty,\ln\frac{1}{a}\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当$x\in\left(\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

综上所述，当$a\leqslant0$时，$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递减；当$a>0$时，$f(x)$在$\left(-\infty,\ln\frac{1}{a}\right)$上单调递减，在$\left(\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增.

(2)**证明**：由(1)可知，当$a>0$时，$f(x)_{min}=f\left(\ln\frac{1}{a}\right)=a\left(\frac{1}{a}+a\right)-\ln\frac{1}{a}=1+a^2+\ln a$.

要证$f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$，只需证$1+a^2+\ln a>2\ln a+\frac{3}{2}$，只需证$a^2-\ln a-\frac{1}{2}>0$.

设$g(a)=a^2-\ln a-\frac{1}{2}$，$a>0$，则$g'(a)=2a-\frac{1}{a}=\frac{2a^2-1}{a}$，

令$g'(a)=0$，得$a=\frac{\sqrt2}{2}$，当$a\in\left(0,\frac{\sqrt2}{2}\right)$时，$g'(a)<0$，$g(a)$单调递减，当$a\in\left(\frac{\sqrt2}{2},+\infty\right)$时，$g'(a)>0$，$g(a)$单调递增，所以$g(a)\geqslant g\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)=\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt2}{2}-\frac{1}{2}=-\ln\frac{\sqrt2}{2}>0$，即$g(a)>0$，所以$a^2-\ln a-\frac{1}{2}>0$得证，即$f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$得证.

22.**解**：(1)当$a=0$时，$f(x)=-\frac{1}{x}-\ln x$，则$f'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x^2}$，令$f'(x)>0$，得$0<x<1$，令$f'(x)<0$，得$x>1$，

所以函数$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，

所以$f(x)$在$x=1$处取得极大值，同时也是最大值，所以函数$f(x)$的最大值为$f(1)=-1$.

(2)$f'(x)=a+\frac{1}{x^2}-\frac{a+1}{x}=\frac{(x-1)(ax-1)}{x^2}$，

①当$a=0$时，由(1)可知，函数$f(x)$无零点；

②当$a<0$时，易知函数$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，

又$f(1)=a-1<0$，故此时函数$f(x)$无零点；

③当$0<a<1$时，易知函数$f(x)$在$(0,1)$，$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增，在$\left(1,\frac{1}{a}\right)$单调递减，

且$f(1)=a-1<0$，$f\left(\frac{1}{a}\right)<f(1)<0$，且当$x\to+\infty$时，$f(x)\to+\infty$，此时$f(x)$在$(0,+\infty)$上存在唯一零点；

④当$a=1$时，$f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}\geqslant0$，函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，且$f(1)=0$，故此时函数$f(x)$有唯一零点；

⑤当$a>1$时，易知函数$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$，$(1,+\infty)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{a},1\right)$上单调递减，且$f(1)=a-1>0$，$f\left(\frac{1}{a}\right)>f(1)>0$，$x\to0$时，$f(x)\to-\infty$，故函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上存在唯一零点.

综上，实数a的取值范围为$(0,+\infty)$.

第7期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C　**提示**：由题意知，$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{2}{x}-1=\frac{2-x}{x}$，令$f'(x)>0$，得$0<x<2$，所以函数$f(x)$单调递增区间为$(0,2)$.故选C.

2.A　**提示**：$f'(x)=x+\frac{1}{x}-2=\frac{(x-1)^2}{x}\geqslant0$，故原函数单调递增，$f(x)$无极值点.故选A.

3.D　**提示**：令$f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$，则$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，故当$x>1$时，$f'(x)>0$，故$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，而$a=\frac{2}{3}+\ln\frac{3}{2}=f\left(\frac{3}{2}\right)$，$b=1+\frac{1}{e}=f(e)$，$c=\frac{1}{2}+\ln2=f(2)$，因为$1<\frac{3}{2}<2<e$，所以$f\left(\frac{3}{2}\right)<f(2)<f(e)$，即$a<c<b$，故选D.

4.B　**提示**：由题意得，$f'(x)=\cos x-a\sin x\leqslant0$在区间$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$上恒成立，所以$a\geqslant\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\tan x}$在区间$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$上恒成立，因为当$x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$时，$0<\frac{1}{\tan x}<1$，所以$a\geqslant1$.故选B.

5.A　**提示**：设$g(x)=f(x)-2\ln x-1$，所以$g'(x)=f'(x)-\frac{2}{x}>0$，所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

因为$f(e)=3$，所以$g(e)=f(e)-2\ln e-1=3-2-1=0$，所以不等式$f(x)>2\ln x+1$等价于$g(x)>0=g(e)$，所以$x>e$，即不等式的解集为$(e,+\infty)$.故选A.

6.B　**提示**：由$y=\ln x-x-\frac{12}{x}+9(0<x<10)$，

得$y'=\frac{1}{x}-1+\frac{12}{x^2}=\frac{-x^2+x+12}{x^2}=\frac{-(x-4)(x+3)}{x^2}$，

令$y'>0$，解得$0<x<4$，令$y'<0$，解得$4<x<10$，

所以y在$(0,4)$内单调递增，在$(4,10)$内单调递减，所以当$x=4$时，y取得最大值.故选B.

7.D　**提示**：因为$f(x)+f(-x)=0$，可得$f(x)$是奇函数，且在$x\in\mathbf{R}$上是减函数，由$f(a\cdot e^x)+f(1-2x)\leqslant0$，

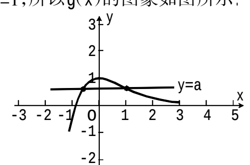
即$f(a\cdot e^x)\leqslant-f(1-2x)=f(2x-1)$，即$a\geqslant\frac{2x-1}{e^x}$对任意的$x\in\mathbf{R}$恒成立，令$h(x)=\frac{2x-1}{e^x}$，

由$h'(x)=\frac{3-2x}{e^x}$，令$h'(x)>0$，解得$x<\frac{3}{2}$，令$h'(x)<0$，解得$x>\frac{3}{2}$，故$h(x)$在$\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$单调递增，在$\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$单调递减，故$h(x)$的最大值为$h\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{e^3}}$，可得$a\geqslant\frac{2}{\sqrt{e^3}}$.故选D.

8.B　**提示**：由$f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^x-x=0$，得到$a=\frac{2e^x+x}{e^{2x}+e^x}$，令$g(x)=\frac{2e^x+x}{e^{2x}+e^x}$，则问题等价于直线$y=a$与函数$g(x)$的图象有两个交点，$g'(x)=\frac{e^x(2e^x+1)(-e^x-x+1)}{(e^{2x}+e^x)^2}$，

其中$e^x>0$，$2e^x+1>0$，$-e^x-x+1$是单调递减的，并且$x=0$时，$-e^x-x+1=0$，

因此函数$g'(x)=\frac{e^x(2e^x+1)(-e^x-x+1)}{(e^{2x}+e^x)^2}$存在唯一零点$x=0$，当$x>0$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，且此时$g(x)>0$；当$x<0$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增且$x\to-\infty$时，$g(x)\to-\infty$，又$g(0)=1$，所以$g(x)$的图象如图所示.



（第8题图）

显然，当$0<a<1$时，$y=a$与$g(x)$有两个交点，故选B.

二、多项选择题

9.BCD　**提示**：函数$f(x)$定义域为$(0,+\infty)$，且$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}-\frac{2c}{x^3}=\frac{ax^2-bx-2c}{x^3}$，

由题意知，方程$f'(x)=0$，即$ax^2-bx-2c=0$有两个正根，设为x_1,x_2，

则有$x_1+x_2=\frac{b}{a}>0$，$x_1x_2=\frac{-2c}{a}>0$，$\Delta=b^2+8ac>0$，所以$ab>0$，$ac<0$，所以$ab\cdot ac=a^2bc<0$，即$bc<0$.故选BCD.

10.AC　**提示**：$f'(x)=-x^3+a$，若函数$f(x)$在$[1,2]$上单调递增，则$-x^3+a\geqslant0$恒成立，

故$a\geqslant x^3$在$[1,2]$上恒成立，故$a\geqslant8$，故C正确，D错误；若函数$f(x)$在$[1,2]$上单调递减，则$-x^3+a\leqslant0$恒成立，

故$a\leqslant x^3$在$[1,2]$上恒成立，故$a\leqslant1$，故A正确，B错误.故选AC.

11.AD　**提示**：$f(x)=x\sin x$，$f'(x)=\sin x+x\cos x$，令$g(x)=\sin x+x\cos x$，$g'(x)=\cos x+\cos x-x\sin x=2\cos x-x\sin x$.

对于A，$f(x)$在$(0,\pi)$上连续，$f(0)=f(\pi)=0$，所以$f(x)$在$(0,\pi)$上不单调，故A正确；

对于B，因为$g'(x)=2\cos x-x\sin x$，当$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，

因为$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1>0$，$g(\pi)=f'(\pi)=-\pi<0$，

所以存在唯一$x_0\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，使得$f'(x_0)=0$.

随着x的变化，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下：

x	$\left(\frac{\pi}{2},x_0\right)$	x_0	(x_0,π)
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$内有且只有一个极值点，故B错误；

对于C，令$f(x)=x\sin x=0$，得$x=0$或$x=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以在$[-2\pi,2\pi]$上有5个零点，故C错误；

对于D，由选项B可知，$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},x_0\right)$内单调递增，在$(x_0,\pi)$内单调递减，

又因为$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}>0$，$f(\pi)=0$，所以当$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$时，$\ln\frac{\pi}{2}<\ln x\leqslant\ln\pi$，所以$g(x)=\frac{f(x)+1}{\ln x}\geqslant\frac{1}{\ln\pi}$，当且仅当$x=\pi$时取等号，所以$g(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$上的最小值为$\frac{1}{\ln\pi}$，故D正确.故选AD.

12.ABC　**提示**：对于A，令$f(x)=e^x-(x+1)$，$f'(x)=e^x-1$，所以当$x>0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，当$x<0$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，所以$f(x)\geqslant f(0)=0$，所以$e^x\geqslant x+1$，所以$e^{x+2}\geqslant x+3$，故A正确；

对于B，令$f(x)=x^2-\ln x$，$f'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$，所以在$\left(0,\frac{\sqrt2}{2}\right)$上，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，在$\left(\frac{\sqrt2}{2},+\infty\right)$上，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，所以$f(x)\geqslant f\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)=\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt2}{2}=\ln\sqrt{e}-\ln\frac{\sqrt2}{2}>0$，所以$x^2>\ln x$，所以$(x+1)^2>\ln(x+1)(x>-1)$，故B正确；

对于C，令$f(x)=\ln x-(x-1)$，$f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，当$x>1$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，当$0<x<1$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，所以$f(x)\leqslant f(1)=0$，所以$\ln x-(x-1)\leqslant0$，所以$\ln x\leqslant x-1$，所以$\ln(x+2)\leqslant x+1(x>-2)$，故C正确；

对于D，取$x=-\pi$，得$e^{-\pi}=\frac{1}{e^{\pi}}<\frac{1}{8}=\sin(-\pi)+\frac{1}{8}$，故D错误.故选ABC.

三、填空题

13.1　**提示**：$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}+x-1=\frac{(x-1)(e^x-1)}{e^x}$，

令$f'(x)>0$，得$x>1$或$x<0$，令$f'(x)<0$，得$0<x<1$，所以$f(x)$在$(-\infty,0)$，$(1,+\infty)$上单调递增，在$(0,1)$上单调递减，所以$f(x)$的极大值为$f(0)=1$.

14.3（答案不唯一）　**提示**：由题意得，$f'(x)=2-\frac{a}{x^2}$在$[1,2]$上有变号零点，

故$a=2x^2$在$(1,2)$上有解，所以$2<a<8$.故可填3（答案不唯一）.

15.$(-\infty,2e]$　**提示**：$f(x)\leqslant1$等价于$ae^{-x+\ln x}+(-x+\ln x)\leqslant1$，令$t=-x+\ln x$，则$t'=-1+\frac{1}{x}=\frac{-x+1}{x}(x>0)$，

所以在$(0,1)$上，$t'>0$，$t(x)$单调递增，在$(1,+\infty)$上，$t'<0$，$t(x)$单调递减，

所以$t\leqslant t(1)=-1$，所以$f(x)\leqslant1$转化为$ae^t+t\leqslant1$，即$a\leqslant\frac{1-t}{e^t}$在$[-1,+\infty)$上恒成立，

令$g(t)=\frac{1-t}{e^t}$，$t\leqslant-1$，则$g'(t)=\frac{-e^t+e^t(t-1)}{(e^t)^2}=\frac{t-2}{e^t}<0$，

则$g(t)\geqslant g(-1)=\frac{1-(-1)}{e^{-1}}=2e$，因为$a\leqslant\frac{1-t}{e^t}$在$[-1,+\infty)$上恒成立，

所以$a\leqslant g(t)_{min}=g(-1)=2e$，所以$a$的取值范围为$(-\infty,2e]$.

16.$(1,+\infty)$　**提示**：不等式$f(2-x)>f(x)\cdot3^{2-2x}$，变形为$f(2-x)>f(x)\cdot3^{2-x}\cdot3^{-x}$，

所以$\frac{f(2-x)}{3^{2-x}}>\frac{f(x)}{3^x}$，令$F(x)=\frac{f(x)}{3^x}$，则$F(2-x)>F(x)$，$F'(x)=\frac{f'(x)3^x-3^x\ln3f(x)}{(3^x)^2}=\frac{f'(x)-\ln3f(x)}{3^x}$，

又因为"$\forall x\in\mathbf{R}$，$f'(x)<\ln3\cdot f(x)$"是真命题，所以$x\in\mathbf{R}$，$f'(x)-\ln3\cdot f(x)<0$，

即$F'(x)<0$，所以$F(x)$在$\mathbf{R}$上单调递减，又$F(2-x)>F(x)$，所以$2-x<x$，

所以$x>1$，所以不等式$f(2-x)>f(x)\cdot3^{2-2x}$的解集为$(1,+\infty)$.

四、解答题

17.**解**：(1)由题意知，该产品一年的销售量为$y=\frac{k}{e^x}$，将$x=40$，$y=500$代入得$k=500e^{40}$.

(2)由(1)知该产品的销售量为$y=500e^{40-x}$，

所以$L(x)=(x-30-5)y=500(x-35)e^{40-x}(35\leqslant x\leqslant41)$.

(3)由(2)知，$L'(x)=500[e^{40-x}-(x-35)e^{40-x}]=500e^{40-x}\cdot(36-x)(35\leqslant x\leqslant41)$，

所以在$(35,36)$内，$L'(x)>0$，$L(x)$单调递增，在$(36,41)$内，$L'(x)<0$，$L(x)$单调递减，所以$L(x)_{max}=L(36)=500e^4$.

答：当每件产品的售价为36元时，分公司一年的利润$L(x)$最大，$L(x)$的最大值为$500e^4$万元.

18.**解**：(1)当$a=0$时，$f(x)=x^3-3x^2+2$，

所以$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$，

当x变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,0)$，$(2,+\infty)$，单调递减区间为$(0,2)$，

所以函数$f(x)$的极大值为$f(0)=2$，极小值为$f(2)=-2$.

(2)$f'(x)=3x^2-6x+a$，因为函数$f(x)$在区间$[-1,a]$上单调递增，

所以$f'(x)\geqslant0$对$x\in[-1,a]$恒成立，因为函数$f'(x)=3x^2-6x+a$图象的对称轴为$x=1$，

①当$-1<a\leqslant1$时，$f'(x)$在$[-1,a]$上的最小值为$f'(a)$，由$f'(a)=3a^2-5a\geqslant0$，得$a\geqslant\frac{5}{3}$或$a\leqslant0$，所以$-1<a\leqslant0$；

②当$a>1$时，$f'(x)$在$[-1,a]$上的最小值为$f'(1)$，由$f'(1)=3-6+a\geqslant0$，解得$a\geqslant3$.

所以实数a的取值范围为$(-1,0]\cup[3,+\infty)$.

19.(1)**解**：当$n=2$时，$f(x)=x^2\ln x(x>0)$，

所以$f'(x)=x(1+2\ln x)$，

令$f'(x)=0$，得$x=\frac{1}{\sqrt{e}}$，

当$x\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$时，$f'(x)<0$，

当$x\in\left(\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，

所以函数$f(x)$在区间$\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$上单调递减，在区间$\left(\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$上单调递增，

所以函数$f(x)$有极小值$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\frac{1}{2e}$，无极大值，所以函数$f(x)$有最小值$-\frac{1}{2e}$，无最大值.

(2)**证明**：当$n=1$时，$f(x)=x\ln x$，要证当$x>1$时，$f(x)<\frac{1}{2}(x^2-1)$，只需证当$x>1$时，$x\ln x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2<0$成立.

令$g(x)=x\ln x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2(x>1)$，$g'(x)=\ln x+1-x$，$g''(x)=\frac{1}{x}-1<0$，

所以$g'(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，所以$g'(x)<g'(1)=0$，所以$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，所以$g(x)<g(1)=0$，所以当$x>1$时，$f(x)<\frac{1}{2}(x^2-1)$.

20.(1)**解**：$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}-\frac{1}{x}+1=\frac{(e^x+x)(x-1)}{x^2}$，

令$f'(x)>0$，解得$x>1$，故函数$f(x)$在$(0,1)$单调递减，$(1,+\infty)$单调递增，

故$f(x)_{min}=f(1)=e+1-a$，要使得$f(x)\geqslant0$恒成立，只需$e+1-a\geqslant0$，

故$a\leqslant e+1$，故a的取值范围是$(-\infty,e+1]$.

(2)**证明**：由(1)知$f(x)$有两个零点，必有$f(1)=e+1-a<0$，得$a>e+1$，

不妨设$0<x_1<1<x_2$，要证明$x_1x_2<1$，即证明$1<x_2<\frac{1}{x_1}$，

因为$0<x_1<1$，所以$\frac{1}{x_1}>1$，又因为$f(x)$在$(1,+\infty)$单调递增，只需证$f(x_2)<f\left(\frac{1}{x_1}\right)$，也就是$f(x_1)<f\left(\frac{1}{x_1}\right)$.

构造函数$h(x)=f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)$，$0<x<1$，

则$h'(x)=f'(x)+\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{(x-1)(e^x+x-xe^{\frac{1}{x}}-1)}{x^2}$，

令$m(x)=e^x+x-xe^{\frac{1}{x}}-1$，则$m'(x)=e^x+1-e^{\frac{1}{x}}+\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$，

因为$0<x<1$，所以$\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}>e^{\frac{1}{x}}$，所以$m'(x)>e^x+1>0$，

所以$m(x)$在$(0,1)$单调递增，所以$m(x)<m(1)=0$，又$x-1<0$，所以$h'(x)>0$，所以$h(x)$在$(0,1)$单调递增，所以$h(x_1)<h(1)=0$，故$f(x_1)<f\left(\frac{1}{x_1}\right)$，原式得证.

21.(1)**证明**：当$t=e$时，$f(x)=e^x-e\ln(x-1)$，$f'(x)=e^x-\frac{e}{x-1}$，$f''(x)=e^x+\frac{e}{(x-1)^2}>0$对$x>1$恒成立，

所以$f'(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，又$f'(1.5)=e^{1.5}-2e=e(\sqrt{e}-2)<0$，$f'(2)=e^2-e>0$，

所以存在$x_0\in(1.5,2)$使$f'(x_0)=0$，即$e^{x_0}=\frac{e}{x_0-1}$，$x_0=1-\ln(x_0-1)$，

所以当$x\in(1,x_0)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，当$x\in(x_0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

所以$f(x)_{min}=f(x_0)=e^{x_0}-e\ln(x_0-1)=\frac{e}{x_0-1}+e(x_0-1)>2e\left(\text{因}x_0-1\in\left(\frac{1}{2},1\right)\text{，等号不可能成立}\right)$.所以$f(x)>2e$.

(2)**解**：若$f(x)\geqslant0$恒成立，则$e^x+t-t\ln t-t\ln(x-1)\geqslant0$恒成立，所以$\frac{e^x}{t}+1-\ln t-\ln(x-1)\geqslant0$恒成立，所以$e^{x-\ln t}+1-\ln t-\ln(x-1)\geqslant0$恒成立，

所以$e^{x-\ln t}+x-\ln t\geqslant\ln(x-1)+x-1=e^{\ln(x-1)}+\ln(x-1)$，设$g(x)=e^x+x$，所以$g(x-\ln t)\geqslant g(\ln(x-1))$恒成立，因为$g(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，所以$x-\ln t\geqslant\ln(x-1)$，即$\ln t\leqslant x-\ln(x-1)$恒成立.

设$h(x)=x-\ln(x-1)$，$h'(x)=1-\frac{1}{x-1}=\frac{x-2}{x-1}$，

所以当$x\in(1,2)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，当$x\in(2,+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，所以$h(x)_{min}=h(2)=2$，

所以$\ln t\leqslant2$，所以$0<t\leqslant e^2$，所以t的取值范围为$(0,e^2]$.

22.(1)**证明**：设$g(x)=x-x^2-\sin x$，$x\in(0,1)$，则$g'(x)=1-2x-\cos x$，所以$g''(x)=-2+\sin x<0$，所以$g'(x)$在$(0,1)$内单调递减，所以$g'(x)<g'(0)=0$，

所以$g(x)$在$(0,1)$上单调递减，所以$g(x)<g(0)=0$，即$x-x^2-\sin x<0$，$x\in(0,1)$，所以$x-x^2<\sin x$，$x\in(0,1)$.

设$h(x)=x-\sin x$，$x\in(0,1)$，则$h'(x)=1-\cos x>0$，

所以$h(x)$在$(0,1)$上单调递增，所以$h(x)>h(0)=0$，$x\in(0,1)$，即$x-\sin x>0$，$x\in(0,1)$，所以$\sin x<x$，$x\in(0,1)$.

综上，当$0<x<1$时，$x-x^2<\sin x<x$.

(2)**解**：因为$f'(x)=-a\sin ax+\frac{2x}{1-x^2}$，所以$f''(x)=-a^2\cos ax+\frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2}$，且$f'(0)=0$，$f''(0)=-a^2+2$.

①若$f''(0)=2-a^2>0$，即$-\sqrt2<a<\sqrt2$，易知存在$t_1>0$，使得$x\in(0,t_1)$时，$f''(x)>0$，

所以$f'(x)$在$(0,t_1)$内单调递增，所以$f'(x)>f'(0)=0$，

所以$f(x)$在$(0,t_1)$内单调递增，这显然与$x=0$为函数的极大值点相矛盾，故舍去；

②若$f''(0)=2-a^2<0$，即$a<-\sqrt2$或$a>\sqrt2$，存在$t_2>0$，使得$x\in(-t_2,t_2)$时，$f''(x)<0$，

所以$f'(x)$在$(-t_2,t_2)$内单调递减，又$f'(0)=0$，所以当$-t_2<x<0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；当$0<x<t_2$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，满足$x=0$为$f(x)$的极大值点，符合题意；

③若$f''(0)=2-a^2=0$，即$a=\pm\sqrt2$，因为$f(x)$为偶函数，所以只考虑$a=\sqrt2$的情况，

此时$f'(x)=-\sqrt2\sin(\sqrt2x)+\frac{2x}{1-x^2}$，$x\in(0,1)$时，

$f'(x)>-2x+\frac{2x}{1-x^2}=2x\left(\frac{1}{1-x^2}-1\right)>0$，所以$f(x)$在$(0,1)$内单调递增，显然与$x=0$为$f(x)$的极大值点相矛盾，故舍去.

综上，a的取值范围为$(-\infty,-\sqrt2)\cup(\sqrt2,+\infty)$.

第8期

第2~3版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.A　**提示**：因为函数$f(x)$在$x=x_0$处的导数为12，则$\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}=-\frac{1}{3}\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=-\frac{1}{3}f'(x_0)=-\frac{1}{3}\times12=-4$.故选A.

2.B　**提示**：因为$y'=4x^3-3$，所以$y'|_{x=1}=1$，设直线的倾斜角为α，则$\tan\alpha=1$，因为$\alpha\in(0,\pi)$，

所以$\alpha=\frac{\pi}{4}$.故选B.

3.B　**提示**：由题意知，杯子的底面面积$S=16\pi$，

则杯中溶液上升高度$h=\frac{V(t)}{S}=\frac{\pi t^3+2\pi t^2}{16\pi}=\frac{1}{16}t^3+\frac{1}{8}t^2(t\geqslant0)$，则$h'=\frac{3}{16}t^2+\frac{1}{4}t$，当$t=4$时，$h'=\frac{3}{16}\times16+\frac{1}{4}\times4=4$，

即当$t=4$s时杯中溶液上升高度的瞬时变化率为4cm/s.故选B.

4.B　**提示**：因为$f(x)=x-\frac{6}{x}-5\ln x$，所以$x\in(0,+\infty)$，

$f'(x)=1+\frac{6}{x^2}-\frac{5}{x}=\frac{x^2-5x+6}{x^2}=\frac{(x-2)(x-3)}{x^2}$，

令$f'(x)<0$，解得$2<x<3$，故$f(x)$的单调递减区间是$(2,3)$，故选B.

5.D　**提示**：因为$f(x)=x^3-3ax+2$，$x\in\mathbf{R}$，所以$f'(x)=3x^2-3a$，又因为$x=1$是函数$f(x)$的极小值点，

所以$f'(1)=3-3a=0$，解得$a=1$，所以$f(x)=x^3-3x+2$，$f'(x)=3x^2-3$，

令$f'(x)=3x^2-3=0$，得$x_1=-1$，$x_2=1$，所以当$x\in(-\infty,-1)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

当$x\in(-1,1)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

所以$f(x)$在$x=-1$处取极大值，所以$f(x)$的极大值为$f(-1)=-1+3+2=4$.故选D.

6.B　**提示**：令$f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

当$x>e$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$在$(e,+\infty)$上单调递减；

当$0<x<e$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$在$(0,e)$内单调递增，因为$a=\sqrt2$，所以$\ln a=\frac{1}{2}\ln2=\frac{\ln4}{4}=f(4)$，又$\ln b=$