第4期

第2~3版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.C　**提示**：设数列7,10,13,16,…为数列$\{a_n\}$，则数列$\{a_n\}$是以7为首项，3为公差的等差数列，其通项公式为$a_n=7+3(n-1)=3n+4$，令$3n+4=82$，解得$n=26$.

故选C.

2.A　**提示**：设数列$\{a_n\}$公差为d，则$a_1+a_2+a_3=3a_1+3d=6$，解得$d=-1$，所以$a_3+a_4+a_5=3a_1+9d=0$.故选A.

3.B　**提示**：因为$\{a_n\}$为正项等比数列，所以$a_6=\sqrt{a_4a_8}=8$，又$a_2+a_6=10$，所以$a_2=10-8=2$，

所以$a_4=\sqrt{a_2a_6}=\sqrt{2\times8}=4$.故选B.

4.D　**提示**：由$S_{n+1}=3S_n+2$，得$S_n=3S_{n-1}+2(n\geqslant2)$，所以$S_{n+1}-S_n=3S_n-3S_{n-1}$，得$a_{n+1}=3a_n$，

所以等比数列$\{a_n\}$的公比为$q=3$，所以由$S_{n+1}=3S_n+2$，得$\frac{a_1(1-3^{n+1})}{1-3}=3\cdot\frac{a_1(1-3^n)}{1-3}+2$，

所以$a_1(3^{n+1}-1)=3a_1(3^n-1)+4$，解得$a_1=2$，所以$S_5=\frac{2\times(1-3^5)}{1-3}=3^5-1=242$.故选D.

5.A　**提示**：设$b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$，由题意知$\{b_n\}$是公差为1的等差数列，则$b_1=a_1+a_2+a_3=9$，

故$b_n=9+(n-1)\times1=n+8$，

则$b_2+b_5+\cdots+b_{38}=(2+8)+(5+8)+\cdots+(38+8)=13\times8+\frac{13\times(2+38)}{2}=364$，

于是$S_{40}=a_1+(a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7)+\cdots+(a_{38}+a_{39}+a_{40})=a_1+b_2+b_5+\cdots+b_{38}=2+364=366$.故选A.

6.B　**提示**：由题意得，分到的钱数构成以3为首项，1为公差的等差数列，设有n人，

则$3n+\frac{n(n-1)}{2}\times1=10n$，整理得$n^2-15n=0$，故$n=15$.

故选B.

7.D　**提示**：由$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n,0\leqslant a_n<\frac{1}{2},\\2a_n-1,\frac{1}{2}\leqslant a_n<1,\end{cases}$ $a_1=\frac{1}{5}$，得$a_2=\frac{2}{5}$，$a_3=\frac{4}{5}$，$a_4=\frac{3}{5}$，$a_5=\frac{1}{5}$，…，可得数列$\{a_n\}$是以4为周期的周期数列，所以$a_{2023}=a_{505\times4+3}=a_3=\frac{4}{5}$.故选D.

8.D　**提示**：由题意知，当$n=1$时，$a_1=\frac{2}{3}$，当$n\geqslant2$时，由$a_1+3a_2+9a_3+\cdots+3^{n-1}a_n=\frac{n+1}{3}$，可得$a_1+3a_2+9a_3+\cdots+3^{n-2}a_{n-1}=\frac{n}{3}$，两式相减，可得$3^{n-1}a_n=\frac{n+1}{3}-\frac{n}{3}=\frac{1}{3}$，解得$a_n=\frac{1}{3^n}$，

因为当$n=1$时，$a_1=\frac{2}{3}$不满足上式，

所以$a_n=\begin{cases}\frac{2}{3},n=1,\\\frac{1}{3^n},n\geqslant2,\end{cases}$ 则当$n=1$时，$S_1=a_1=\frac{2}{3}$，

当$n\geqslant2$时，$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{5}{6}-\frac{1}{2\cdot3^n}$，

因为当$n=1$时，$S_1=\frac{2}{3}$也满足上式，所以$S_n=\frac{5}{6}-\frac{1}{2\cdot3^n}$，$n\in\mathbf{N}_+$，因为$S_n=\frac{5}{6}-\frac{1}{2\cdot3^n}<\frac{5}{6}$，且$S_n<k$对任意$n\in\mathbf{N}_+$恒成立，所以$k\geqslant\frac{5}{6}$，即实数$k$的最小值为$\frac{5}{6}$.故选D.

二、多项选择题

9.BD　**提示**：因为1,a,b,c,16成等比数列，设该数列的公比为q，则$1\times q^4=16$，解得$q=\pm2$，

当$q=2$时，$a=2$，$b=4$，$c=8$，$ac=16$；当$q=-2$时，$a=-2$，$b=4$，$c=-8$，$ac=16$.故选BD.

10.AC　**提示**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，$a_1+5a_3=S_7$，则$a_1+5(a_1+2d)=7a_4=7(a_1+3d)$，化简得，$a_1+11d=a_{12}=0$，故A正确；由于无法判断公差$d$的正负，不能确定$S_{12}$最小，故B错误；

$S_{15}-S_8=a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}=7a_{12}=0$，即$S_8=S_{15}$，故C正确；

$S_{23}=\frac{23(a_1+a_{23})}{2}=23a_{12}=0$，故D错误.故选AC.

11.BD

提示：设方程$(x^2-2x+m)(x^2-2x+n)=0$的四根分别为a_1,a_2,a_3,a_4，

则数列a_1,a_2,a_3,a_4是首项为$\frac{1}{4}$的等差数列，设其公差为d，由等差数列的性质，得$a_1+a_4=a_2+a_3$，

①若a_1,a_4为方程$x^2-2x+m=0$的两根，则a_2,a_3为方程$x^2-2x+n=0$的两根，

由韦达定理可得$a_1+a_4=\frac{1}{4}+a_4=2$，所以$a_4=\frac{7}{4}$，$d=\frac{a_4-a_1}{3}=\frac{1}{2}$，则$a_2=\frac{3}{4}$，$a_3=\frac{5}{4}$，

此时$m=a_1a_4=\frac{7}{16}$，$n=a_2a_3=\frac{15}{16}$，则$m-n=-\frac{1}{2}$；

②若a_1,a_4为$x^2-2x+n=0$的两根，则a_2,a_3为方程$x^2-2x+m=0$的两根，

同理可得$m=\frac{15}{16}$，$n=\frac{7}{16}$，则$m-n=\frac{1}{2}$.

综上所述，$m-n=\pm\frac{1}{2}$.故选BD.

12.AD

提示：对于A，因为等比数列$\{a_n\}$的公比为q，且$a_1>1$，$a_{1012}a_{1013}>1$，$(a_{1012}-1)(a_{1013}-1)<0$，所以$a_{1012}>1$，$0<a_{1013}<1$，所以$q\in(0,1)$，故A正确；

对于B，因为$a_{1012}a_{1014}=a_{1013}^2<1$，所以$a_{1012}a_{1014}-1<0$，故B错误；对于C，当$n\leqslant1012$时，$a_n>1$，当$n\geqslant1013$时，$a_n<1$，则$T_n$的最大值为$T_{1012}$，故C错误；

对于D，$T_{2023}=a_{1012}^{2023}>1$，$T_{2024}=(a_{1012}a_{1013})^{1012}>1$，$T_{2025}=(a_{1013})^{2025}<1$，所以使$T_n<1$成立的最小自然数$n=2025$，故D正确.故选AD.

三、填空题

13.24　**提示**：因为$\{a_n\}$为等差数列，所以$a_1+a_5=a_2+a_4=2a_3$，

所以$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5a_3=120$，解得$a_3=24$，又$a_3+a_7=2a_5$，所以$2a_5-a_7=a_3=24$.

14.2　**提示**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，

则$S_6=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=(a_1+a_2+a_3)+q^3(a_1+a_2+a_3)=S_3(1+q^3)$，

所以$q^3=\frac{S_6}{S_3}-1=8$，则$q=2$，又因为$S_3=\frac{a_1(1-2^3)}{1-2}=7a_1=\frac{7}{4}$，得$a_1=\frac{1}{4}$，则$a_4=a_1q^3=\frac{1}{4}\times8=2$，由对数的运算性质以及等比中项的性质可得

$\log_2a_3+\log_2a_5=\log_2(a_3a_5)=\log_2a_4^2=\log_22^2=2$.

15.$\frac{8}{3}$

提示：因为等差数列$\{a_n\}$的首项$a_1=-1$，公差$d=1$，所以$a_n=-1+n-1=n-2$，$S_n=-n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-3n}{2}$，所以$b_n=\frac{2S_n+8}{a_n+2}=\frac{n^2-3n+8}{n}=n+\frac{8}{n}-3$，结合对勾函数的性质及$n\in\mathbf{N}_+$知，当$n=3$时，$b_n$取得最小值，最小值为$\frac{8}{3}$.

16.$\frac{2023}{4047}$

提示：已知等比数列$\{a_n\}$各项均为正数，a_2,a_4为方程$x^2+mx+16=0$(m为常数)的两根，则$a_2a_4=16$，即$a_1^2q^4=16$，又$a_1=1$，$q>0$，所以$q=2$，所以$S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，则$b_n=\log_{\sqrt{2}}2^n=2n$，

所以$\frac{1}{b_n^2-1}=\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

所以数列$\left\{\frac{1}{b_n^2-1}\right\}$的前2023项和为$\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4045}-\frac{1}{4047}\right)\right]=\frac{2023}{4047}$.

四、解答题

17.**解**：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为$d(d\neq0)$，

由a_1,a_{11},a_{13}成等比数列，得$a_{11}^2=a_1a_{13}$，即$(a_1+10d)^2=a_1(a_1+12d)$，化简为$d(2a_1+25d)=0$，

又$a_1=25$，$d\neq0$，所以$d=-2$，

所以$a_n=25+(n-1)\times(-2)=-2n+27$.

(2)由(1)可知，$a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{58}=25+19+13+\cdots+(-89)=\frac{20}{2}\times(25-89)=-640$.

18.**解**：(1)设正项等比数列$\{a_n\}$的公比为q，

因为$a_9^2=a_2\cdot a_{16}=16$，所以$a_9=a_1\cdot q^8=4$，

因为$\frac{a_6+a_7}{a_3+a_4}=\frac{a_3q^3+a_4q^3}{a_3+a_4}=q^3=\frac{1}{8}$，所以$q=\frac{1}{2}$，

因为$a_9=a_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^8=4$，所以$a_1=1024$，

所以$a_n=a_1\cdot q^{n-1}=1024\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

(2)因为a_n随着n的增大而减小，所以T_n最大时，需要a_n是最后一项大于1的数，

当$a_n\geqslant1$时，得$1024\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\geqslant1$，所以$n\leqslant11$，

所以当$n=11$时，T_n有最大值$T_{11}=a_1a_2a_3\cdots a_{11}=(a_6)^{11}=\left[1024\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]^{11}=2^{55}$.

19.**解**：(1)在等差数列$\{a_n\}$中，设其公差为d，因为$a_2=11$，$S_{10}=40$，

所以$\begin{cases}a_1+d=11,\\10a_1+\frac{10\times9}{2}d=40,\end{cases}$ 即$\begin{cases}a_1+d=11,\\a_1+\frac{9}{2}d=4,\end{cases}$ 解得$a_1=13$，$d=-2$，

所以$a_n=13-2(n-1)=-2n+15(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)$|a_n|=|-2n+15|=\begin{cases}-2n+15,1\leqslant n\leqslant7,\\2n-15,n\geqslant8,\end{cases}$

当$1\leqslant n\leqslant7$时，数列$\{|a_n|\}$的前n项和$T_n=a_1+\cdots+a_n=13n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-2)=-n^2+14n$；

当$n\geqslant8$时，数列$\{|a_n|\}$的前n项和$T_n=a_1+\cdots+a_7-a_8-\cdots-a_n=-S_n+2(a_1+\cdots+a_7)=-\left[13n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-2)\right]+2\times\frac{13+1}{2}\times7=n^2-14n+98$.

综上，$T_n=\begin{cases}-n^2+14n,1\leqslant n\leqslant7,\\n^2-14n+98,n\geqslant8.\end{cases}$

20.(1)**解**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，因为S_n,T_n为$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前n项和，$S_4=32$，$T_3=16$，

则$\begin{cases}a_1+a_2+a_3+a_4=32,\\a_1-6+2a_2+a_3-6=16,\end{cases}$ 即$\begin{cases}4a_1+\frac{4\times(4-1)}{2}d=32,\\a_2=7,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a_1=5,\\d=2,\end{cases}$ 故$a_n=5+2(n-1)=2n+3$.

(2)**证明**：由(1)可知，$b_n=\begin{cases}2n-3,n\text{为奇数},\\4n+6,n\text{为偶数},\end{cases}$

$S_n=\frac{(5+2n+3)n}{2}=(n+4)n$.

当n为偶数时，$n>5$，$T_n=(b_1+b_3+\cdots+b_{n-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_n)=-1+3+\cdots+2(n-1)-3+14+22+\cdots+4n+6=\frac{\frac{n}{2}[-1+2(n-1)-3]}{2}+\frac{\frac{n}{2}(14+4n+6)}{2}=\frac{\frac{n}{2}(14+6n)}{2}=\frac{n(3n+7)}{2}$，$T_n-S_n=\frac{n(n-1)}{2}>0$；

当n为奇数时，$n>5$，$T_n=T_{n-1}+b_n=\frac{(n-1)(3n+4)}{2}+2n-3=\frac{3n^2+5n-10}{2}$，

$T_n-S_n=\frac{n^2-3n-10}{2}>\frac{25-15-10}{2}=0$，故原式得证.

21.(1)**证明**：由条件$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1(n\in\mathbf{N}_+)$，得$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，

因为$a_1+1=2\neq0$，所以$\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$，$n\in\mathbf{N}_+$，即$\frac{b_{n+1}}{b_n}=2$，$n\in\mathbf{N}_+$，

所以数列$\{b_n\}$是以2为首项，2为公比的等比数列.

(2)**解**：由(1)知，数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$，$n\in\mathbf{N}_+$.

选①，$b_n+\log_2b_n=2^n+n$，则$S_n=(2+1)+(2^2+2)+(2^3+3)+\cdots+(2^n+n)=(2+2^2+\cdots+2^n)+(1+2+\cdots+n)=\frac{2(1-2^n)}{1-2}+\frac{n(n+1)}{2}=2^{n+1}+\frac{n^2+n-4}{2}$.

选②，$\frac{1}{\log_2b_n\cdot\log_2b_{n+1}}=\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

则$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

选③，$nb_n=n\cdot2^n$，则$S_n=1\times2^1+2\times2^2+\cdots+n\cdot2^n$，

$2S_n=1\times2^2+2\times2^3+\cdots+(n-1)\cdot2^n+n\cdot2^{n+1}$，

两式相减得，$S_n=-(2+2^2+\cdots+2^n)+n\cdot2^{n+1}=-\frac{2(1-2^n)}{1-2}+n\cdot2^{n+1}=(n-1)2^{n+1}+2$.

22.**解**：(1)因为$\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}+\cdots+\frac{b_n}{a_n}=\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}+6$，则当$n\geqslant2$时，$\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}=\frac{b_n}{a_n}+6$，

两式相减得，$\frac{b_n}{a_n}=\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}-\frac{b_n}{a_n}$，即$\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}=2\times\frac{b_n}{a_n}$，

而当$n=1$时，$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}+6$，$a_1=1$，$b_1=2$，得$\frac{b_2}{a_2}=-4$，

$\frac{b_2}{a_2}\neq2\times\frac{b_1}{a_1}$，因此，当$n\geqslant2$时，数列$\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$是公比为2的等比数列，则$\frac{b_n}{a_n}=\begin{cases}2,n=1,\\-2^n,n\geqslant2,\end{cases}$

又$\{a_n\}$是首项为1，公差为2的等差数列，所以$a_n=2n-1$，

所以数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=\begin{cases}2,n=1,\\-(2n-1)\times2^n,n\geqslant2.\end{cases}$

(2)当$n=1$时，$S_1=2$，

当$n\geqslant2$时，$S_n=2-3\times2^2-5\times2^3-\cdots-(2n-1)\times2^n$，

$2S_n=4-3\times2^3-5\times2^4-\cdots-(2n-1)\times2^{n+1}$，

两式相减得$-S_n=-2-3\times2^2-2\times(2^3+\cdots+2^n)+(2n-1)\times2^{n+1}=-14-\frac{2\times2^3(1-2^{n-2})}{1-2}+(2n-1)\times2^{n+1}=2+(2n-3)\times2^{n+1}$，则$S_n=-2-(2n-3)\times2^{n+1}$，而$S_1=2$满足上式，所以数列$\{b_n\}$的前n项和$S_n=-2-(2n-3)\times2^{n+1}(n\in\mathbf{N}_+)$.

扫码免费下载习题讲解ppt

第1期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B

提示：根据题意，数列的通项公式为$a_n=\frac{n+1}{4n+3}$，令$\frac{n+1}{4n+3}=\frac{10}{39}$，解得$n=9$.故选B.

2.C

提示：因为数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{n}{n^2+6}$，所以$a_4=\frac{4}{16+6}=\frac{2}{11}$.故选C.

3.D

提示：根据题意，数列$\frac{3}{2},\frac{5}{4},\frac{7}{6},\frac{9}{8},\cdots$，即$\frac{2\times1+1}{2\times1},\frac{2\times2+1}{2\times2},\frac{2\times3+1}{2\times3},\frac{2\times4+1}{2\times4},\cdots$，

故该数列的一个通项公式可以是$\frac{2n+1}{2n}$.故选D.

4.C

提示：由$(n+1)a_{n+1}=na_n$，得$a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$，

所以$a_{15}=\frac{14}{15}a_{14}=\frac{14}{15}\times\frac{13}{14}a_{13}=\frac{14}{15}\times\frac{13}{14}\times\frac{12}{13}a_{12}=\cdots=\frac{14}{15}\times\frac{13}{14}\times\frac{12}{13}\times\cdots\times\frac{1}{2}a_1=\frac{a_1}{15}=\frac{1}{15}$.

故选C.

5.C

提示：因为$a_1=\frac{\sqrt{6}+(-1)\times\sqrt{6}}{2}$，

$a_2=\frac{\sqrt{6}+(-1)^2\times\sqrt{6}}{2}$，$a_3=\frac{\sqrt{6}+(-1)^3\times\sqrt{6}}{2}$，

$a_4=\frac{\sqrt{6}+(-1)^4\times\sqrt{6}}{2}$，所以该数列的一个通项公式是$a_n=\frac{\sqrt{6}+(-1)^n\cdot\sqrt{6}}{2}(n\in\mathbf{N}_+)$.故选C.

6.A

提示：设$\frac{a_n+n}{2^n}=k$(k为常数)，所以$a_n=k\cdot2^n-n$，因为$a_n>0$，所以$k>\frac{n}{2^n}$，易得$k>\frac{1}{2}$.

因为$a_n-a_{n-1}=k\cdot2^n-n-k\cdot2^{n-1}+n-1=k\cdot2^{n-1}-1>\frac{1}{2}\times2^1-1=0(n\geqslant2)$，所以$a_n-a_{n-1}>0(n\geqslant2)$，即$a_n>a_{n-1}(n\geqslant2)$，所以数列$\{a_n\}$是递增数列.

故选A.

7.A

提示：数列$\{a_n\}$中，对任意$n\in\mathbf{N}_+$，$a_n>0$，则$S_n=S_{n-1}+a_n>S_{n-1}$，$n\geqslant2$，

所以数列$\{S_n\}$是递增数列，充分性成立；

当数列$\{S_n\}$为递增数列时，$S_n>S_{n-1}$，$n\geqslant2$，即$S_{n-1}+a_n>S_{n-1}$，所以$a_n>0(n\geqslant2)$，如数列$\{a_n\}$为$-1,2,2,2,\cdots$，不满足"对任意$n\in\mathbf{N}_+$，$a_n>0$"，故必要性不成立.

所以"对任意$n\in\mathbf{N}_+$，$a_n>0$"是"数列$\{S_n\}$为递增数列"的充分不必要条件.故选A.

8.B

提示：因为数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n+\frac{\lambda}{n}$，数列$\{a_n\}$是递增数列，

所以$a_{n+1}-a_n=n+1+\frac{\lambda}{n+1}-n-\frac{\lambda}{n}=\frac{-\lambda}{n(n+1)}+1>0$，$n\in\mathbf{N}_+$恒成立，即$\lambda<n^2+n$，$n\in\mathbf{N}_+$恒成立，而$n^2+n$，$n\in\mathbf{N}_+$随n的增大而增大，即当$n=1$时，$n^2+n$，$n\in\mathbf{N}_+$取得最小值2，则$\lambda<2$，所以实数$\lambda$的取值范围是$(-\infty,2)$.故选B.

二、多项选择题

9.AD

提示：根据题意，分析可得该数列的周期为4，连续4项依次为0,1,0,-1，

分析可得A,D选项符合题意.故选AD.

10.ABD

提示：对于A，由题意知，$a_{n+1}-a_n=\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{(n+2)(n+1)}>0$，是递增数列，故A正确；

对于B，由题意知，$a_{n+1}-a_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}>0$，是递增数列，故B正确；

对于C，$a_1=1$，$a_n+a_{n+1}=3$，若$a_2=2$，$a_3=1$，则$\{a_n\}$不是递增数列，故C错误；

对于D，由题意知，$a_{n+1}-a_n=a_n^2-2a_n+2=(a_n-1)^2+1>0$，是递增数列，故D正确.故选ABD.

11.BC

提示：因为数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\begin{cases}3n+1,n\text{为奇数},\\2-2n,n\text{为偶数},\end{cases}$

所以$a_1=4$，$a_3=10$，$a_5=16$，$a_7=22$，$a_2=-2$，$a_4=-6$，$a_6=-10$，$a_8=-14$，故A错误；

$a_7>a_6$，故B正确；$S_5=4-2+10-6+16=22$，故C正确；

$S_6=4-2+10-6+16-10=12$，$S_8=4-2+10-6+16-10+22-14=20$，$S_6<S_8$，故D错误.故选BC.

12.AB

提示：因为数列$\{a_n\}$是递减数列，所以$a_{n+1}-a_n=\frac{3(n+1)+k}{2^{n+1}}-\frac{3n+k}{2^n}<0$恒成立，

即$\frac{3n+3+k-6n-2k}{2^{n+1}}<0$恒成立，即$k>3-3n$恒成立，又$n\in\mathbf{N}_+$，所以$k>0$.故选AB.

三、填空题

13.21

提示：由$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{462}$，可得$n=21$，故$\frac{1}{462}$是数列$\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}$的第21项.

14.$-\frac{1}{2}$

提示：因为$a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{1+a_n}{1-a_n}$，

所以当$n=1$时，$a_2=\frac{1+a_1}{1-a_1}=\frac{1+2}{1-2}=-3$；

当$n=2$时，$a_3=\frac{1+a_2}{1-a_2}=\frac{1-3}{1+3}=-\frac{1}{2}$；依此类推，$a_4=\frac{1}{3}$，$a_5=2$，所以数列$\{a_n\}$为周期数列，周期$T=4$，所以$a_{2023}=a_3=-\frac{1}{2}$.

15.61

提示：由图形可知$f(6)=(1+3+5+7+9+11+9+7+5+3+1)=61$.

16.8

提示：设数列$\{a_n\}$中的最大项是第n项，

则$(2n-1)\left(\frac{7}{8}\right)^n>(2n+1)\left(\frac{7}{8}\right)^{n+1}$，解得$n>\frac{15}{2}$；

由$(2n-1)\left(\frac{7}{8}\right)^n>(2n-3)\left(\frac{7}{8}\right)^{n-1}$，解得$n<\frac{17}{2}$.

所以$\frac{15}{2}<n<\frac{17}{2}$，$n\in\mathbf{N}_+$，所以$n=8$.

四、解答题

17.**解**：(1)因为$a_n=\frac{1}{n^2}$，故前5项分别为1，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{9}$，$\frac{1}{16}$，$\frac{1}{25}$.

(2)因为$a_n=(-1)^n(n^2-1)$，故前5项分别为0,3,-8,15,-24.

(3)因为$a_n=|2n-7|$，故前5项分别为5,3,1,1,3.

18.**解**：(1)数列为$\frac{2\times1-1}{2^2},\frac{2\times2-1}{2^3},\frac{2\times3-1}{2^4},\frac{2\times4-1}{2^5}$，

所以该数列的一个通项公式为$a_n=\frac{2n-1}{2^{n+1}}$.

(2)数列为$\frac{3\times1+2}{1+1},\frac{3\times2+2}{2+1},\frac{3\times3+2}{3+1},\frac{3\times4+2}{4+1}$，所以该数列的一个通项公式为$a_n=\frac{3n+2}{n+1}$.

(3)数列为$(-1)^{1+1}\left(2\times1-1+\frac{1}{2}\right)$，$(-1)^{2+1}\left(2\times2-1+\frac{1}{2^2}\right)$，$(-1)^{3+1}\left(2\times3-1+\frac{1}{2^3}\right)$，$(-1)^{4+1}\left(2\times4-1+\frac{1}{2^4}\right)$，所以该数列的一个通项公式为$a_n=(-1)^{n+1}\left(2n-1+\frac{1}{2^n}\right)$.

(4)数列为$\frac{1}{3}(10^2-1)+1$，$\frac{1}{3}(10^3-1)+1$，$\frac{1}{3}(10^4-1)+1$，$\frac{1}{3}(10^5-1)+1$，

所以该数列的一个通项公式为$a_n=\frac{1}{3}(10^{n+1}-1)+1$.

19.**解**：(1)数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=n^2-7n+6$，

所以这个数列的第4项是$a_4=4^2-7\times4+6=-6$.

(2)令$a_n=n^2-7n+6=150$，即$n^2-7n-144=0$，解得$n=16$或$n=-9$(舍去)，

所以150是这个数列的项，是第16项.

20.**解**：(1)由题意知，$a_n=12n+13$，$b_n=n^2$.

(2)令$a_n=b_n$，得$12n+13=n^2$，解得$n=13$或$n=-1$(舍去).

所以这两个数列有序号与项都相同的项，它们是第13项.

21.**解**：$a_n=\frac{9n^2-9n+2}{9n^2-1}=\frac{(3n-1)(3n-2)}{(3n-1)(3n+1)}=\frac{3n-2}{3n+1}$.

(1)令$n=10$，则这个数列的第10项为$a_{10}=\frac{3\times10-2}{3\times10+1}=\frac{28}{31}$.

(2)令$\frac{3n-2}{3n+1}=\frac{98}{101}$，解得$n=\frac{100}{3}$不是正整数，因此$\frac{98}{101}$不是该数列中的项.

(3)令$\frac{1}{3}<\frac{3n-2}{3n+1}<\frac{2}{3}$，解得$\frac{7}{6}<n<\frac{8}{3}$，

因为$n\in\mathbf{N}_+$，所以$n=2$，所以在区间$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$内有该数列中的项，只有1项.

22.**解**：选择①，若$S_n=n^2+n$，

当$n=1$时，$a_1=S_1=2$；

当$n\geqslant2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+n)-[(n-1)^2+(n-1)]=2n$，

因为$a_1=2$适合$a_n=2n$，所以$a_n=2n$，$n\in\mathbf{N}_+$.

选择②，若$S_n=n^2+n-1$，

当$n=1$时，$a_1=S_1=1+1-1=1$；

当$n\geqslant2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+n-1)-[(n-1)^2+(n-1)-1]=2n$，

因为$a_1=1$不适合$a_n=2n$，所以$a_n=\begin{cases}1,n=1,\\2n,n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+.\end{cases}$

选择③，若$S_n=n^2+n+1$，

当$n=1$时，$a_1=S_1=1+1+1=3$；

当$n\geqslant2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+n+1)-[(n-1)^2+(n-1)+1]=2n$，

因为$a_1=3$不适合$a_n=2n$，所以$a_n=\begin{cases}3,n=1,\\2n,n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+.\end{cases}$

① **第 2 期**

第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.D

提示：等差数列$\{a_n\}$中，$a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=5a_4=90$，所以 $a_4=18$，所以 $a_1+a_7=2a_4=36$.故选 D.

2.C

提示：等差数列$\{a_n\}$中，$a_2+a_6=2a_4=10$，所以 $a_4=5$，$a_4a_8=5a_8=45$，

故 $a_8=9$，所以公差 $d=\frac{a_8-a_4}{8-4}=1$，$a_1=a_4-3d=5-3=2$，所以 $S_5=5a_1+\frac{5\times4}{2}d=10+10=20$.故选 C.

3.A

提示：由已知得 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{3n+5}{4n+6}$，可设 $S_n=kn(3n+5)$，$T_n=kn(4n+6)$，

则 $a_7=S_7-S_6=182k-138k=44k$，$b_8=T_8-T_7=304k-238k=66k$，即 $\frac{a_7}{b_8}=\frac{44k}{66k}=\frac{2}{3}$.故选 A.

4.C

提示：因为数列$\{S_n\}$的最大项是第 20 项和第 21 项，根据 S_n 的对称性，

所以 $S_{20}=S_{21}$，整理得 $20a_1+\frac{20\times19}{2}d=21a_1+\frac{21\times20}{2}d$，故 $a_1+20d=0$，即 $a_{21}=0$，

故 $a_{21}=a_{10}+11d=0$，因为数列$\{a_n\}$的公差为-2，所以 $a_{10}=22$.故选 C.

5.B

提示：对于数列$\left\{\frac{2}{a_n+1}\right\}$，因为 $a_1=1$，$a_4=-\frac{1}{2}$，所以 $\frac{2}{1+a_1}=1$，$\frac{2}{1+a_4}=4$，

设等差数列$\left\{\frac{2}{a_n+1}\right\}$的公差为 d，则 $3d=4-1=3$，得 $d=1$，所以 $\frac{2}{1+a_{2023}}=1+2022d=2023$，所以 $a_{2023}=-\frac{2021}{2023}$.故选 B.

6.C

提示：若$\{a_n\}$是等差数列，设数列$\{a_n\}$的首项为 a_1，公差为 d，则 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，即 $\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{n-1}{2}d=\frac{d}{2}n+a_1-\frac{d}{2}$，故$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列，即甲是乙的充分条件.

反之，若$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列，则可设 $\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=D$，则 $\frac{S_n}{n}=S_1+(n-1)D$，即 $S_n=nS_1+n(n-1)D$，

当 $n\geqslant2$ 时，有 $S_{n-1}=(n-1)S_1+(n-1)(n-2)D$，

两式相减，得 $a_n=S_n-S_{n-1}=S_1+2(n-1)D$，

当 n=1 时，上式成立，所以 $a_n=a_1+2(n-1)D$，则 $a_{n+1}-a_n=a_1+2nD-[a_1+2(n-1)D]=2D$(常数)，

所以数列$\{a_n\}$为等差数列，即甲是乙的必要条件.

综上所述，甲是乙的充要条件.故选 C.

7.A

提示：由题意知，可将李白在每家店饮酒后所剩酒量构造成一个数列$\{a_n\}$，

则李白在每家店饮酒后所剩酒量均为在前一家店饮酒后所剩酒量的 2 倍减去 5，

即 $a_{n+1}=2a_n-5$，因为 $a_1=6\times2-5=7$，所以 $a_2=2a_1-5=2\times7-5=9$，$a_3=2a_2-5=2\times9-5=13$，

$a_4=2a_3-5=2\times13-5=21$，$a_5=2a_4-5=2\times21-5=37$，

故李白在第 5 家店饮酒后所剩酒量是 37 升.故选A.

8.C

提示：设 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $\forall n\in N_+$，都有 $\frac{S_n}{n}>\frac{S_{n+1}}{n+1}$，

整理得 $\frac{n(a_1+a_n)}{2n}>\frac{(n+1)(a_1+a_{n+1})}{2(n+1)}$，化简得 $a_n>a_{n+1}$，故数列$\{a_n\}$为单调递减数列.

因为 $a_7a_8<0$，所以 $a_7>0$，$a_8<0$，故 S_n 的最大值是 S_7.

故选 C.

二、多项选择题

9.ABD

提示：由 4-1=7-4=10-7=3，得数列 1，4，7，10 是等差数列，故 A 正确；

由 lg4-lg2=lg8-lg4=lg16-lg8=lg2，得数列 lg2，lg4，lg8，lg16 是等差数列，故 B 正确；

因为 $2^4-2^5=-16\neq2^3-2^4=-8$，所以数列 $2^5,2^4,2^3,2^2$ 不是等差数列，故 C 错误；

由 8-10=6-8=4-6=2-4=-2，得数列 10，8，6，4，2 是等差数列，故 D 正确.故选 ABD.

10.ABD

提示：等差数列$\{a_n\}$中，$(a_5+a_6+a_7+a_8)(a_6+a_7+a_8)<0$，

所以 $2(a_6+a_7)\cdot3a_7<0$，即$(a_6+a_7)\cdot a_7<0$，所以 $a_6a_7+a_7^2<0$，所以 $a_6a_7<0$.

又因为 $a_1>0$，所以 $a_6>0$，$a_7<0$，所以 $a_6+a_7>0$，所以 $S_{12}=\frac{12(a_1+a_{12})}{2}=6(a_6+a_7)>0$，故 A 正确，B 正确，D 正确；又 $S_{13}=13a_7<0$，故 C 错误.故选 ABD.

11.AD

提示：对于 A，等差数列$\{a_n\}$中，设公差为 d，则 $S_4=4a_1+6d$，$S_8=8a_1+28d$，$S_{12}=12a_1+66d$，

所以 $S_8-S_4=4a_1+22d$，$S_{12}-S_8=4a_1+38d$，所以 $2(S_8-S_4)=S_4+(S_{12}-S_8)$，所以 $S_4,S_8-S_4,S_{12}-S_8$ 成等差数列，故 A 正确；

对于 B，因为数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=26-2n$，所以 $a_1=26-2=24$，

$a_n-a_{n-1}=(26-2n)-[26-2(n-1)]=-2$，所以数列$\{a_n\}$是首项为 24，公差为-2 的等差数列，

当 $a_n\geqslant0$ 时，$n\leqslant13$，且 $n\in N_+$；当 $a_n<0$ 时，$n\geqslant14$，且 $n\in N_+$，

所以当 n=12 或 n=13 时，$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 最大，故 B 错误；

对于 C，因为$\{a_n\}$是等差数列，$S_{10}=S_{20}$，所以 $S_{20}-S_{10}=\frac{10(a_{11}+a_{20})}{2}=5(a_{15}+a_{16})=0$，即 $a_{15}+a_{16}=0$，因为 $a_1>0$，所以 $a_{15}>0$，$a_{16}<0$，所以 $S_{30}=\frac{30(a_1+a_{30})}{2}=15(a_{15}+a_{16})=0$，

$S_{31}=\frac{31}{2}(a_1+a_{31})=31a_{16}<0$，所以当 $n\geqslant31$ 时，$S_n<0$，故 C 错误；

对于 D，因为数列$\{a_n\}$为等差数列，$S_{15}>0$，$S_{16}<0$，

所以 $S_{15}=\frac{15}{2}(a_1+a_{15})=15a_8>0$，即 $a_8>0$，$S_{16}=8(a_1+a_{16})=8(a_8+a_9)<0$，

即 $a_8+a_9<0$，所以 $a_9<0$，所以 n=8 时，S_n 最大，故 D 正确.故选 AD.

12.ACD

提示：对于 A，等差数列$\{a_n\}$，则 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，则 $\frac{S_n}{n}=\frac{n-1}{2}\times d+a_1$，易得 $\frac{S_n}{n}-\frac{S_{n-1}}{n-1}=\frac{d}{2}$，数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是等差数列，故 A 正确；

对于 B，若等差数列 $a_n=2n-1$，则前 n 项和 $S_n=n^2$，所以 $\frac{S_n}{n^2}=1$，此时数列$\left\{\frac{S_n}{n^2}\right\}$是等差数列，故 B 错误；

对于 C，因为$\{a_n\}$为等差数列，所以 S_3,S_6-S_3,S_9-S_6 也是等差数列，则 $S_9-S_6+S_3=2(S_6-S_3)$，变形可得 $S_9=3\cdot(S_6-S_3)$，故 C 正确；

对于 D，若公差 d>0，且 $3a_5=5a_8$，则 $3(a_1+4d)=5(a_1+7d)$，所以 $a_1=-\frac{23}{2}d$，

所以 $a_1<0$，所以 $a_{12}=a_1+11d=-\frac{1}{2}d<0$，$a_{13}=a_1+12d=\frac{1}{2}d>0$，所以当 n=12 时，$S_n$ 取得最小值，故 D 正确.故选 ACD.

三、填空题

13.2

提示：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，

因为 $S_5+2a_{17}=42$，所以 $S_5+2a_{17}=5a_1+10d+2a_1+32d=7(a_1+6d)=42$，

所以 $a_1+6d=a_7=6$，又 $a_6=4$，所以 $d=a_7-a_6=2$.

14.4

提示：设每一层的球数构成数列$\{a_n\}$.由题意得，$a_1=1$，$a_2-a_1=2$，$a_3-a_2=3$，…，$a_n-a_{n-1}=n$，以上 n 个式子累加得 $a_n=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}(n\geqslant2)$，又 $a_1=1$ 满足上式，所以 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$，所以 $S_7=a_1+a_2+\cdots+a_7=1+3+6+10+15+21+28=84$，

$S_6=a_1+a_2+\cdots+a_6=1+3+6+10+15+21=56$，所以剩余篮球的个数最少为 60-56=4.

15.-2024

提示：设等差数列$\{a_n\}$公差为 d，

因为 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$，所以 $\frac{S_n}{n}=\frac{a_1+a_n}{2}$，所以 $\frac{S_n}{n}-\frac{S_{n-1}}{n-1}=\frac{a_1+a_n}{2}-\frac{a_1+a_{n-1}}{2}=\frac{d}{2}$是常数，所以$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是等差数列，公差为$\frac{d}{2}$，因为 $a_1=2022$，所以 $\frac{S_1}{1}=2022$，因为 $\frac{S_{12}}{12}-\frac{S_{10}}{10}=-2=d$，所以 $\frac{S_{2024}}{2024}=2022+2023\times(-1)=-1$，所以 $S_{2024}=-2024$.

16.$\frac{1}{4}$；$\frac{2n-1}{4}$

提示：因为数列$\{a_n\}$各项均为正数，$a_2=3a_1$，又$\{\sqrt{S_n}\}$是公差为$\frac{1}{2}$的等差数列，所以 $\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}=\sqrt{a_1+a_2}-\sqrt{a_1}=2\sqrt{a_1}-\sqrt{a_1}=\sqrt{a_1}=\frac{1}{2}$，

所以 $a_1=\frac{1}{4}$，$\sqrt{S_1}=\frac{1}{2}$，所以 $\sqrt{S_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n}{2}$，所以 $S_n=\frac{n^2}{4}$，所以 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n^2}{4}-\frac{(n-1)^2}{4}=\frac{2n-1}{4}$，又 $a_1=\frac{1}{4}$ 适合上式，故 $a_n=\frac{2n-1}{4}$.

四、解答题

17.**解**：(1)由 $S_4-S_1=a_2+a_3+a_4=3a_3=3$，得 $a_3=1$，所以 $a_n=a_3+(n-3)d=1+2(n-3)=2n-5$.

(2)由(1)知，$a_3=1$，所以 $a_1=1-2d$，

$S_{10}=10a_1+\frac{10\times9}{2}d=10(1-2d)+45d=25d+10$，

因为$|S_{10}|<60$，所以$|25d+10|<60$，

所以 $-60<25d+10<60$，解得 $-\frac{14}{5}<d<2$，故 d 的取值范围为$\left(-\frac{14}{5},2\right)$.

18.**解**：(1)设数列$\{a_n\}$的公差为 d，由题意得，$\begin{cases}a_2+a_3=2a_1+3d=6,\\a_6+a_7=2a_1+11d=-10,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=6,\\d=-2,\end{cases}$

所以 $a_n=6+(n-1)\cdot(-2)=-2n+8$.

(2)由(1)可得，$S_n=\frac{[6+(-2n+8)]\cdot n}{2}=-n^2+7n$，

令 $S_n<0$，则 $-n^2+7n<0$，解得 n>7 或 n<0(舍去)，因为 $n\in N_+$，故 n 的最小值是 8.

19.**解**：因为 20=3×6+2，故卡车至少运送 7 趟，因为路线重复越少则行驶距离最少，所以最佳方案是从最远处开始往回返，第一趟走了 2×(500+50×20)=3000(米)，第二趟走了 3000−150×2=2700(米)，第三趟走了 2700−150×2=2400(米)，…，每次走的路程组成首项为 3000，公差为−300 的等差数列，各项的和为 3000×7+7×6×(−300)÷2=14 700(米).所以卡车送完这批水泥杆，并最终返回库房，至少运送 7 趟，最少行驶 14 700 米.

20.**解**：(1)由已知$\{a_n\}$为等差数列，记其公差为 d，

当 $n\geqslant2$ 时，由 $a_{n+1}+n=2a_n+8$，得 $a_n+n-1=2a_{n-1}+8$，

两式相减可得 d+1=2d，所以 d=1；

当 n=1 时，$a_2+1=2a_1+8$，所以 $a_1=-6$.

综上，$a_n=-6+(n-1)\times1=n-7$.

(2)由(1)知，$S_n=-6n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{1}{2}n^2-\frac{13}{2}n=\frac{1}{2}\left(n-\frac{13}{2}\right)^2-\frac{169}{8}$，

所以，当 n 取与$\frac{13}{2}$最接近的整数 6 或 7 时，$S_6=S_7$ 最小，最小值为-21.

21.**解**：设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，

若选择条件①：因为 $S_2=2S_1+S_{24}-2$，所以 $2a_1+d=2a_1+\left(24a_1+\frac{24\times23}{2}d\right)-2$，即 $24a_1+275d-2=0$，

又因为 $a_{12}=a_1+11d=1$，解得 $d=-2$，$a_1=23$，

当 $S_m=S_n$ 时，$ma_1+\frac{m(m-1)}{2}d=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，

即 $23m-m(m-1)=23n-n(n-1)$，即$(m-n)(m+n-24)=0$，

因为 $1\leqslant m<n$，所以 m+n=24，故存在正整数 m，n，当 m+n=24 时，使 $S_m=S_n$ 成立.

若选择条件②：因为 $\frac{S_9}{9}=\frac{S_{15}}{15}+6$，所以 $a_5=a_8+6$，所以 d=-2，

又因为 $a_{12}=a_1+11d=1$，所以 $a_1=1-11d=23$，

当 $S_m=S_n$ 时，$ma_1+\frac{m(m-1)}{2}d=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，

即 $23m-m(m-1)=23n-n(n-1)$，即$(m-n)(m+n-24)=0$，

因为 $1\leqslant m<n$，所以 m+n=24，故存在正整数 m，n，当 m+n=24 时，使 $S_m=S_n$ 成立.

若选择条件③：因为 $\frac{a_{10}^2-a_6^2}{a_7^2-a_3^2}=\frac{3}{5}$，

所以 $\frac{(a_{10}+a_6)(a_{10}-a_6)}{(a_7+a_3)(a_7-a_3)}=\frac{3}{5}$，所以 $\frac{a_8}{a_5}=\frac{3}{5}$，

所以 $5(a_1+7d)=3(a_1+4d)$，即 $2a_1+23d=0$，又因为 $a_{12}=a_1+11d=1$，解得 d=-2，$a_1=23$，

当 $S_m=S_n$ 时，$ma_1+\frac{m(m-1)}{2}d=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，即 $23m-m(m-1)=23n-n(n-1)$，

即$(m-n)(m+n-24)=0$，

因为 $1\leqslant m<n$，所以 m+n=24，

故存在正整数 m，n，当 m+n=24 时，使 $S_m=S_n$ 成立.

22.(1)**证明**：当 n=1 时，$S_1+2T_1=1$，即 $a_1+2a_1=1$，解得 $a_1=\frac{1}{3}$；

当 $n\geqslant2$ 时，由 $S_n+2T_n=1$，得 $\frac{T_n}{T_{n-1}}+2T_n=1$，所以 $\frac{1}{T_n}-\frac{1}{T_{n-1}}=2$，

所以数列$\left\{\frac{1}{T_n}\right\}$是以 $\frac{1}{T_1}=\frac{1}{a_1}=3$ 为首项，2 为公差的等差数列.

(2)**解**：由(1)可知 $\frac{1}{T_n}=3+2(n-1)=2n+1$，所以 $T_n=\frac{1}{2n+1}$，当 $n\geqslant2$ 时，$S_n=\frac{T_n}{T_{n-1}}=\frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n-1}}=\frac{2n-1}{2n+1}$，

经检验，$S_1=a_1=\frac{1}{3}$，满足 $S_n=\frac{2n-1}{2n+1}$，所以 $S_n=\frac{2n-1}{2n+1}$ $(n\in\mathbf{N}_+)$.

当 $n\geqslant2$，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{2n-1}{2n+1}-\frac{2n-3}{2n-1}=\frac{4}{4n^2-1}$，由(1)可知 $a_1=\frac{1}{3}$.

综上，$a_n=\begin{cases}\frac{1}{3},n=1,\\\frac{4}{4n^2-1},n\geqslant2.\end{cases}$

第 3 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B **提示**：因为$\{a_n\}$是等比数列，所以 $S_6=(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)=S_3+q^3(a_1+a_2+a_3)=(1+q^3)S_3$，

由 $\frac{S_6}{S_3}=1+q^3=\frac{26}{27}$，解得 $q=-\frac{1}{3}$.故选B.

2.C **提示**：因为等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且 $a_1\cdot a_5\cdot a_9=8$，所以 $a_1\cdot a_9=a_5^2$，所以 $a_5^3=8$，所以 $a_5=2$，所以 $\log_2a_1+\log_2a_3+\log_2a_5+\log_2a_7+\log_2a_9=\log_2(a_1a_3a_5a_7a_9)=\log_2a_5^5=5\log_2a_5=5\log_22=5$.故选C.

3.C **提示**：因为$\{a_n\}$为等比数列，$a_{n+1}=2S_n+2$，所以 $a_2=2S_1+2=2a_1+2$，$a_3=2S_2+2=2(a_1+2a_1+2)+2=6a_1+6$，由等比数列的性质，可得 $a_2^2=a_1\cdot a_3$，即$(2a_1+2)^2=(6a_1+6)\cdot a_1$，

所以 $a_1=2$ 或 $a_1=-1$(舍去)，所以 $a_2=6$，q=3，则 $a_4=a_1\cdot q^3=2\times3^3=54$.故选C.

4.C **提示**：等比数列$\{a_n\}$中，$S_4=-5$，$S_6=21S_2$，显然公比 $q\neq1$，设数列$\{a_n\}$的首项为 a_1，则 $\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=-5$，①

$\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{21a_1(1-q^2)}{1-q}$，②

化简②得 $q^4+q^2-20=0$，解得 $q^2=4$ 或 $q^2=-5$(舍去)，代入①得 $\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{3}$，所以 $S_8=\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}(1-q^4)(1+q^4)=\frac{1}{3}\times(-15)\times(1+16)=-85$.故选C.

5.B **提示**：由题意知，数列从第二项开始，构成以$\frac{1}{2}$为公比的等比数列，所以前6项和为 $1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=1+\frac{1-\frac{1}{2^5}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{47}{16}$.故选B.

6.D **提示**：因为 $a_n=(2n-1)\cos n\pi$，所以 $a_1=\cos\pi=-1$，$a_2=3\cos2\pi=3$，$a_3=5\cos3\pi=-5$，$a_4=7\cos4\pi=7$，所以 $a_1+a_2=2$，$a_3+a_4=2$，以此类推，$a_5+a_6=2$，…，$a_{2021}+a_{2022}=2$，

所以 $S_{2023}=2\times1011+a_{2023}=2022+4045\cos2023\pi=2022-4045=-2023$.故选D.

7.A **提示**：因为 $S_n=2^{n+1}+a$，所以 $a_1=S_1=4+a$，$a_2=S_2-S_1=(2^3+a)-(2^2+a)=4$，$a_3=S_3-S_2=(2^4+a)-(2^3+a)=8$，

又$\{a_n\}$是等比数列，所以 $a_2^2=a_1a_3$，即 $4^2=8(4+a)$，解得 $a=-2$，所以 $S_n=2^{n+1}-2$.

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^{n+1}-2)-(2^n-2)=2^n$，又 $a_1=2$ 满足 $a_n=2^n$，

对任意的 $n\in\mathbf{N}_+$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{n+1}}{2^n}=2$，故数列$\{a_n\}$是公比为2的等比数列，

所以 $\frac{a_{n+2}a_{n+1}}{a_{n+1}a_n}=\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{2^{n+2}}{2^n}=4$，故数列$\{a_na_{n+1}\}$是公比为4，首项为 $a_1a_2=2\times4=8$ 的等比数列，

所以 $a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{10}a_{11}=\frac{8(1-4^{10})}{1-4}=\frac{2^{23}-8}{3}$.故选A.

8.C **提示**：对于A，可列举公比 q=-1 的等比数列 1，-1，1，-1，…，显然满足 $a_3>0$，但 $a_{2023}=1>0$，故A错误；对于B，可列举公比 q=-1 的等比数列-1，1，-1，1，…，显然满足 $a_4=1>0$，但 $a_{2024}=1>0$，故B错误；对于C，因为 $a_3>0$，即 $a_1\cdot q^2>0$，所以 $a_1>0$，

当公比 q>0 时，任意 $a_n>0$，故有 $S_{2023}>0$，当公比 q<0 时，$q^{2023}<0$，故 1-q>0，$1-q^{2023}>0$，仍然有 $S_{2023}=\frac{a_1(1-q^{2023})}{1-q}>0$，故C正确；对于D，可列举公比 q=-1 的等比数列1，-1，1，-1，…，显然满足 $a_3>0$，但 $S_{2024}=0$，故D错误.故选C.

二、多项选择题

9.ABC **提示**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，

由 $a_1+a_2=\frac{1}{4}(a_3+a_4)$，得 $a_1+a_2=\frac{q^2}{4}(a_1+a_2)$.

当 $a_1+a_2=0$ 时，q=-1，符合题意；

当 $a_1+a_2\neq0$ 时，必有 $\frac{q^2}{4}=1$，解得 $q=\pm2$.

综上，q=-1 或 $q=\pm2$.故选ABC.

10.AC

提示：对于A，$a_3+a_7=\frac{a_5}{q^2}+a_5q^2=\frac{1}{q^2}+q^2\geqslant2\sqrt{\frac{1}{q^2}\times q^2}=2$，当且仅当 $q=\pm1$ 时，等号成立，故A正确；对于B，$a_4+a_6=\frac{a_5}{q}+a_5q$，当 q<0 时，$a_4+a_6\geqslant2$ 不成立，故B错误；

对于C，$a_5=1$，则 $a_7-2a_6+1=q^2-2q+1=(q-1)^2\geqslant0$，故C正确；对于D，$a_5=1$，则 $a_3-2a_4-1=\frac{1}{q^2}-\frac{2}{q}-1=\left(\frac{1}{q}-1\right)^2-2$，则 $a_3-2a_4-1\geqslant0$ 不恒成立，故D错误.故选AC.

11.ACD

提示：因为 $a_1=1$，数列$\left\{\frac{1}{a_n}+1\right\}$是公比为2的等比数列，所以 $\frac{1}{a_n}+1=2\cdot2^{n-1}=2^n$，所以 $a_n=\frac{1}{2^n-1}$，故A正确，B错误；根据指数函数的性质及反比例函数性质，可知$\{a_n\}$为递减数列，故C正确；

$S_3=a_1+a_2+a_3=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}>\frac{7}{8}$，故D正确.故选ACD.

12.BD **提示**：对于B，因为 $a_1>0$，q>1，所以 $a_n=a_1q^{n-1}>0$，

又 $T_{2023}=a_1a_2\cdots a_{2023}<1$，$T_{2024}=a_1a_2\cdots a_{2024}>1$，所以 $a_{2024}>1$，故B正确；

对于A和D，由等比数列的性质，$a_1a_{2023}=a_2a_{2022}=\cdots=a_{1012}a_{1012}=a_{1012}^2$，所以 $a_1a_2\cdots a_{2023}=a_{1012}^{2023}<1$，即 $a_{1012}<1$，

因为 $a_1a_{2024}=a_2a_{2023}=\cdots=a_{1012}a_{1013}$，

所以 $a_1a_2\cdots a_{2024}=(a_{1012}a_{1013})^{1012}>1$，即 $a_{1012}a_{1013}>1$，所以 $a_{1013}>1$，

故当 n=1012 时，$T_n=a_1a_2\cdots a_n$ 最小，故A错误，D正确；

对于C，因为 $a_1>0$，q>1，所以数列$\{a_n\}$是单调递增数列，

所以当 n<1012 时，$a_n<a_{1012}<1$，故 $a_na_{n+1}<a_{n+2}$，故C错误.故选BD.

三、填空题

13.-2 **提示**：因为等比数列$\{a_n\}$，所以 $a_2a_4a_5=a_2a_3a_6=a_3a_6$，解得 $a_2=1$，

由 $a_9a_{10}=a_2q^7a_2q^8=(a_2)^2q^{15}=-8$，可得 $q^{15}=(q^5)^3=-8$，即 $q^5=-2$，故 $a_7=a_2\cdot q^5=1\times(-2)=-2$.

14.2^n(答案不唯一，满足题意即可)

提示：因为 $a_1>0$，$\{a_n\}$是递增数列，所以 q>1，

由 $S_3<13a_1$，得 $\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}<13a_1$，解得 -4<q<3，且 $q\neq1$，而 q>1，所以 1<q<3，即只需满足 $a_1>0$，1<q<3，取 $a_1=2$，q=2，则 $a_n=2^n$.

15.$\frac{31}{16}$ **提示**：设$\{a_n\}$的公比为q，因为 $a_5-a_3=12$，$a_6-a_4=24$，

所以 $a_6-a_4=(a_5-a_3)q$，所以 q=2，所以 $a_1q^4-a_1q^2=12$，解得 $a_1=1$，所以 $a_n=2^{n-1}$，$S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，所以 $\frac{S_n}{a_n}=\frac{2^n-1}{2^{n-1}}$，所以 $\frac{S_5}{a_5}=\frac{2^5-1}{2^4}=\frac{31}{16}$.

16.48；384 **提示**：因为数列$\{a_n\}$的后7项成等比数列，$a_n>0$，

所以 $a_7=\sqrt{a_5a_9}=\sqrt{12\times192}=48$，所以 $a_3=\frac{a_5^2}{a_7}=\frac{12^2}{48}=3$，所以公比 $q=\sqrt{\frac{a_5}{a_3}}=\sqrt{\frac{12}{3}}=2$.

所以 $a_4=3\times2=6$，又该数列的前3项成等差数列，

所以数列$\{a_n\}$的所有项的和为 $\frac{3(a_1+a_3)}{2}+\frac{6\times(2^6-1)}{2-1}=\frac{3\times(1+3)}{2}+378=384$.

四、解答题

17.**解**：(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，因为 $S_2-3a_1=0$，所以 $a_2=2a_1=2$，所以 q=2，$a_1=1$，所以 $a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$.

(2)因为 $S_n=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，所以 $S_n+a_n=2^n-1+2^{n-1}=3\cdot2^{n-1}-1>48$，所以 $3\cdot2^{n-1}>49$，所以 $2^{n-1}>\frac{49}{3}$，又 $n\in\mathbf{N}_+$，所以 $n\geqslant6$，故n的最小值为6.

18.**解**：(1)由题意可知 $q\neq1$，因为 $\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{31}{32}$，所以 $\frac{\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}}=1+q^5=\frac{31}{32}$，解得 $q=-\frac{1}{2}$.

(2)由(1)可得 $a_n=-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，则 $a_n^2=\frac{1}{4^{n-1}}$，所以 $\frac{a_n^2}{a_{n-1}^2}=\frac{1}{4}$，所以数列$\{a_n^2\}$是首项为1，公比为$\frac{1}{4}$的等比数列，

所以 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\frac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}-\frac{1}{3\cdot4^{n-1}}$.

19.**解**：(1)当 n=1 时，$2S_1=a_1$，解得 $a_1=0$，又 $a_2=1$，

当 $n\geqslant2$ 时，$2S_n=na_n$，$2S_{n-1}=(n-1)a_{n-1}$，

两式相减得 $2a_n=na_n-(n-1)a_{n-1}$，所以$(n-1)a_{n-1}=(n-2)a_n$，①

当 $n\geqslant3$ 时，$(n-3)a_{n-1}=(n-2)a_{n-2}$，②

由①+②得 $a_n+a_{n-2}=2a_{n-1}$，且 $a_3+a_1=2a_2$，所以数列$\{a_n\}$是首项为0，公差为1的等差数列，所以$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=n-1$.

(2)由(1)可得 $\frac{a_n+1}{2^n}=\frac{n}{2^n}$，

所以 $T_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}$，

所以 $\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^{n+1}}$，

两式相减得 $\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$，所以 $T_n=2-\frac{n+2}{2^n}$.

20.(1)**解**：$a_1=1.5\times16\%+0.5\times(1-4\%)=0.72$，

$a_n=(2-a_{n-1})\times16\%+a_{n-1}\times(1-4\%)=0.8a_{n-1}+0.32$，所以 $a_n=0.8a_{n-1}+0.32(n\geqslant2)$.

(2)**证明**：$a_n-1.6=0.8a_{n-1}+0.32-1.6=0.8(a_{n-1}-1.6)$，

所以 $\frac{a_n-1.6}{a_{n-1}-1.6}=0.8$，且 $a_1-1.6=-0.88\neq0$，所以数列$\{a_n-1.6\}$是以0.8为公比的等比数列，

所以 $a_n-1.6=-0.88\times0.8^{n-1}$，故 $a_n=1.6-1.1\times0.8^n$.

(3)**解**：由(2)可知，$a_n=1.6-1.1\times0.8^n\geqslant1.2$，

整理得，$0.8^n\leqslant\frac{4}{11}$，

当 n=4 时，$0.8^4=0.4096>\frac{4}{11}$，当 n=5 时，$0.8^5=0.32768<\frac{4}{11}$，

故经过5年，该地当年末的林区面积首次超过1.2千平方公里.

21.**解**：(1)设数列$\{a_n\}$的公比为 q，由题意可得 $a_3=a_1q^2>0$，因为 a_1,a_5 的等比中项为 16，所以 $a_3=16$，

因为 $a_3-a_2=8$，所以 $a_2=8$，所以 $q=2$，所以 $a_n=a_3\cdot q^{n-3}=2^{n+1}$.

(2)因为 $b_n=\log_22^n=n$，

所以 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

因为 $\frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，

所以 $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}=2\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\times\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<2$，

所以存在满足要求的正整数 k，且 k 的最小值为2.

22.**证明**：选择①②为条件，③为结论：

设等比数列$\{a_n+1\}$的公比为$q(q>0$，且$q\neq1)$，则 $a_n+1=(a_1+1)q^{n-1}$，

由 $a_2=2a_1+1$，得 $a_2+1=2(a_1+1)$，所以 $q=2$，

则 $a_n+1=(a_1+1)2^{n-1}$，即 $a_n=(a_1+1)2^{n-1}-1$，

所以 $S_n=\frac{(a_1+1)(1-2^n)}{1-2}-n=(a_1+1)(2^n-1)-n$，

所以 $S_n+n+a_1+1=2(a_1+1)\cdot2^{n-1}$，

所以$\{S_n+n+a_1+1\}$是以 $2(a_1+1)$ 为首项，2为公比的等比数列.

选择①③为条件，②为结论：

设等比数列$\{a_n+1\}$的公比为$q(q>0$，且$q\neq1)$，

则 $a_n+1=(a_1+1)q^{n-1}$，

所以 $a_2+1=(a_1+1)q$，(＊)

因为$\{S_n+n+a_1+1\}$是等比数列，所以$(S_2+2+a_1+1)^2=(S_1+1+a_1+1)(S_3+3+a_1+1)$，

即$[2(a_1+1)+a_2+1]^2=2(a_1+1)[2(a_1+1)+a_2+1+a_3+1]$，

所以$[2(a_1+1)+(a_1+1)q]^2=2(a_1+1)[2(a_1+1)+(a_1+1)\cdot q+(a_1+1)q^2]$.

因为 $a_1+1\neq0$，所以化简整理得$(2+q)^2=2(2+q+q^2)$，

即 $q^2-2q=0$，因为 $q>0$，所以 $q=2$，

代入(＊)式，得 $a_2+1=2(a_1+1)$，即 $a_2=2a_1+1$.

选择②③为条件，①为结论：

设数列$\{S_n+n+a_1+1\}$的公比为 $q_1(q_1>0$，且 $q_1\neq1)$，

则 $S_n+n+a_1+1=(S_1+a_1+2)q_1^{n-1}=2(a_1+1)q_1^{n-1}$，

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2(a_1+1)(q_1^{n-1}-q_1^{n-2})-1$，所以 $a_2=2(a_1+1)(q_1-1)-1$，

又 $a_2=2a_1+1$，所以 $2(a_1+1)(q_1-1)-1=2a_1+1$，即 $2(a_1+1)(q_1-1)=2(a_1+1)$，

因为 $a_1+1\neq0$，所以 $q_1=2$，$a_n=2(a_1+1)\cdot2^{n-2}-1=(a_1+1)\cdot2^{n-1}-1$，

所以 $1+a_n=(a_1+1)\cdot2^{n-1}$，当 n=1 时，上式恒成立，故$\{a_n+1\}$是首项为 a_1+1，公比为2的等比数列.