时，$f(x)_{min}=\frac{1}{2}a(1-\ln a)$，当$a\geqslant e^2$时，$f(x)_{min}=\frac{1}{2}e^2-a$.

(3)由(2)可知，当$0<a\leqslant 1$或$a\geqslant e^2$时，$f(x)$在$(1,e)$上单调递增或递减，不可能存在两零点；

当$1<a<e^2$时，要使得$f(x)$在区间$(1,e)$上恰有两个零点，

则$\begin{cases}\frac{1}{2}a(1-\ln a)<0,\\ f(1)=\frac{1}{2}>0,\\ f(e)=\frac{1}{2}e^2-a>0,\end{cases}$ 解得$e<a<\frac{1}{2}e^2$，所以a的取值范围为$\left(e,\frac{1}{2}e^2\right)$.

第12期

第2~3版综合测试(四)参考答案

一、单项选择题

1.D **提示**：函数$f(x)=x\ln x$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$，令$f'(x)<0$，得$0<x<\frac{1}{e}$，所以$f(x)$的单调递减区间为$\left(0,\frac{1}{e}\right)$，故选D.

2.C **提示**：在等差数列$\{a_n\}$中，由$a_{10}=2a_8-2$，得$a_1+9d=2a_1+14d-2$，所以$a_1+5d=a_6=2$，

所以$S_{11}=\frac{(a_1+a_{11})}{2}\times 11=11a_6=22$.故选C.

3.A **提示**：因为函数$f(x)=\sin x+\cos x-2x$，所以$f'(x)=\cos x-\sin x-2=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2<0$，

所以$f(x)$为**R**上的减函数，因为$-\pi<\ln 2<1=2^0$，所以$f(-\pi)>f(\ln 2)>f(2^0)$，即$a>c>b$.故选A.

4.A **提示**：$f'(x)=\frac{(2x+1)e^x-(x^2+x-2)e^x}{(e^x)^2}=\frac{-x^2+x+3}{e^x}$，所以$f'(0)=3$，又$f(0)=-2$，

所以曲线$f(x)$在$(0,f(0))$处的切线方程为$y-(-2)=3(x-0)$，即$y=3x-2$.故选A.

5.B **提示**：由题意知，$k_{OA}=\frac{AA_1+BB_1+CC_1+DD_1}{OD_1+DC_1+CB_1+BA_1}$，

因为$OD_1=DC_1=CB_1=BA_1$，

所以$k_{OA}=\frac{AA_1+BB_1+CC_1+DD_1}{4OD_1}=\frac{1}{4}\left(\frac{DD_1}{OD_1}+\frac{CC_1}{DC_1}+\frac{BB_1}{CB_1}+\frac{AA_1}{BA_1}\right)=\frac{1}{4}(1+k_1+k_2+k_3)=0.565$，

因为k_1,k_2,k_3是公差为-0.1的等差数列，所以$2k_2=k_1+k_3$，所以$\frac{1}{4}(1+3k_2)=0.565$，解得$k_2=0.42$，所以$k_3=0.42-0.1=0.32$.故选B.

6.C **提示**：因为$x_1<x_2$时，都有$\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\frac{3}{x_1x_2}$，所以$\ln x_1-\ln x_2<\frac{3(x_1-x_2)}{x_1x_2}=\frac{3}{x_2}-\frac{3}{x_1}$，

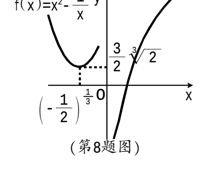
所以$\ln x_1+\frac{3}{x_1}<\ln x_2+\frac{3}{x_2}$，令$f(x)=\ln x+\frac{3}{x}$，则$f(x_1)<f(x_2)$，又因为对任意的$x_1,x_2\in(m,+\infty)$，都有$f(x_1)<f(x_2)$，

所以$f(x)$在$(m,+\infty)$上单调递增，$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}=\frac{x-3}{x^2}$，令$f'(x)>0$，得$x>3$，所以在$(3,+\infty)$上$f(x)$单调递增，所以$m\geqslant 3$，所以$m$的最小值为3.故选C.

7.C **提示**：设$\{a_n\}$的公比为q，$q>0$，因为正项等比数列$\{a_n\}$，$a_1=\frac{1}{8}$，$2a_2=S_3-3a_1$，所以$2\times\frac{1}{8}q=\frac{\frac{1}{8}(1-q^3)}{1-q}-3\times\frac{1}{8}$，整理得$q^2-q-2=0$，解得$q=2$或$q=-1$(舍去)，则$a_1=\frac{1}{8}$，$a_2=\frac{1}{4}$，$a_3=\frac{1}{2}$，$a_4=1$，$a_5=2$，则$T_n$的最小值为$\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{64}$.故选C.

8.B **提示**：由题设，知$x^3-1=mx$，$x\neq 0$，所以$x^2-\frac{1}{x}=m$.

令$f(x)=x^2-\frac{1}{x}(x\neq 0)$，$f'(x)=2x+\frac{1}{x^2}=\frac{2x^3+1}{x^2}$，令$f'(x)=0$，得$x=\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$，即$f(x)$在$\left(-\infty,\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$上单调递减，在$(0,+\infty)$，$\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}},0\right)$上单调递增，$f\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$，画出$f(x)$的大致图象，如图所示.



(第8题图)

因为$f(x)=m$有3个零点，所以$m\in\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{2},+\infty\right)$.故选B.

二、多项选择题

9.ACD **提示**：由函数$y=f(x)$的导函数$y=f'(x)$的图象，可得$x\in(-\infty,-4)$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减；$x\in(-4,+\infty)$时，$f'(x)\geqslant 0$，函数$f(x)$单调递增.所以-4是函数$f(x)$的极小值点，且$f(-4)$为最小值，$x=0$不是函数$f(x)$的极值点.根据导数的几何意义，$f(x)$在$x=1$处的导数大于0，因此切线的斜率大于零.

综上，只有ACD正确.故选ACD.

10.AD **提示**：因为等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$a_{10}=32a_5$，所以$a_1q^9=32a_1q^4$，解得$q=2$，所以数列$\{a_n\}$的公比为2，故A正确，B错误；

$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{\frac{a_1(1-2^{10})}{1-2}}{\frac{a_1(1-2^5)}{1-2}}=1+2^5=33$，故C错误，D正确.故选AD.

11.ABD **提示**：对于A，因为$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}(n\in N_+)$，所以当$n=1$时，$a_2=\frac{a_1}{1}=1$，故A正确；

对于B，因为$a_{n+1}=\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}$，①

所以当$n\geqslant 2$时，$a_n=\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n-1}$，②

由①-②得$a_{n+1}-a_n=\frac{a_n}{n}$，即$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}$，所以当$n\geqslant 2$时，$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$为常数列，所以当$n\geqslant 2$时，$\frac{a_n}{n}=\frac{a_2}{2}=\frac{1}{2}$，即$a_n=\frac{n}{2}$，

所以$a_n=\begin{cases}1,n=1,\\ \frac{n}{2},n\geqslant 2,\end{cases}$所以$a_{2024}=1012$，故B正确；

对于C，$S_n=1+1+\frac{3}{2}+\cdots+\frac{n}{2}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\cdots+\frac{n}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{n(n+1)}{4}$，故C错误；

对于D，由上面结论得$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{4}+\frac{1}{2}}<\frac{4}{n(n+1)}=4\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，故$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}<1+4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1+4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)<3$，故D正确.故选ABD.

12.BC **提示**：设$f(x)$在$[1,e]$上的值域为A，$g(x)$在$[-1,1]$上的值域为B，则$A\subseteq B$.

$g'(x)=(x+2)e^x$，当$x\in[-1,1]$时，$g'(x)>0$，所以$g(x)$在$[-1,1]$上单调递增，所以$B=[0,2e]$.若$A\subseteq B$，则$f(x)_{min}\geqslant 0$，令$x(\ln x-a)\geqslant 0$对$\forall x\in[1,e]$恒成立，则$a\leqslant\ln x$恒成立，即$a\leqslant(\ln x)_{min}=0$；当$a\leqslant 0$时，$f'(x)=\ln x-a+1>0$在$[1,e]$上恒成立，

所以$f(x)$在$[1,e]$上单调递增，所以$f(x)_{max}=f(e)=e\cdot(1-a)\leqslant 2e$，解得$a\geqslant -1$.

综上，$-1\leqslant a\leqslant 0$.故选BC.

三、填空题

13.-2 **提示**：由题意知，$f'(2)=2$，又$f(2)=2\times 2-8=-4$，所以$\frac{f(2)}{f'(2)}=\frac{-4}{2}=-2$.

14.$\frac{23}{35}$ **提示**：因为$\{a_n\}$是等差数列，所以$A_{11}=\frac{11}{2}\cdot(a_1+a_{11})=11a_6$，则$a_6=\frac{1}{11}A_{11}$，

同理，$b_6=\frac{1}{11}B_{11}$，所以$\frac{a_6}{b_6}=\frac{\frac{1}{11}A_{11}}{\frac{1}{11}B_{11}}=\frac{A_{11}}{B_{11}}=\frac{2\times 11+1}{3\times 11+2}=\frac{23}{35}$.

15.0 **提示**：由$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=\sin\frac{(n+1)\pi}{2}$，可得$a_2=a_1+\sin\pi=1$，$a_3=a_2+\sin\frac{3\pi}{2}=1-1=0$，$a_4=a_3+\sin 2\pi=0$，$a_5=a_4+\sin\frac{5\pi}{2}=0+1=1$，…，所以数列$\{a_n\}$的最小正周期为4，所以$a_{2023}=a_3=0$.

16.$b>a>c$ **提示**：对于$g(x)=e^x-x$，$g'(x)=e^x-1$，由“躺平点”定义可知$g(a)=g'(a)$，即可得$e^a-a=e^a-1$，解得$a=1$.

对于$h(x)=\ln x$，易知$h'(x)=\frac{1}{x}$，所以$h(b)=h'(b)$，即$\ln b=\frac{1}{b}$，令$f(b)=\ln b-\frac{1}{b}$，$b\in(0,+\infty)$，显然$f(b)$在$(0,+\infty)$上单调递增，易知$f(1)=\ln 1-1=-1<0$，$f(e)=\ln e-\frac{1}{e}=1-\frac{1}{e}>0$，所以可得$b\in(1,e)$，因此$b>a$.

对于$\varphi(x)=1024x+1024$，$\varphi'(x)=1024$，

所以$\varphi(c)=1024c+1024=\varphi'(c)=1024$，解得$c=0$.

综上，$b>a>c$.

四、解答题

17.**解**：(1)因为数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=n^2+2n$，所以$a_1=S_1=1+2=3$，

当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+2n-[(n-1)^2+2(n-1)]=1+2n$，对于$n=1$，也成立.

综上，可得数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=1+2n$.

(2)设$b_n=\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2n+1}$，则$b_1=\frac{1}{3}$，$b_2=\frac{1}{5}$，$b_3=\frac{1}{7}$，因为$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{10}{21}\neq 2\times\frac{1}{5}$，所以$\{b_n\}$不是等差数列.

18.**解**：(1)$f'(x)=-e^{1-x}+\frac{1}{m-x}$，因为$x=1$是$f(x)$的极值点，所以$f'(1)=0$，即$-e^{1-1}+\frac{1}{m-1}=0$，解得$m=2$.

(2)由(1)知，$f(x)=e^{1-x}-\ln(2-x)$，$x<2$，$f'(x)=-e^{1-x}-\frac{1}{x-2}$，令$h(x)=-e^{1-x}-\frac{1}{x-2}$，$x<2$，$h'(x)=e^{1-x}+\frac{1}{(x-2)^2}>0$，

所以$h(x)$在$(-\infty,2)$上单调递增，因为$h(1)=0$，

所以在$(1,2)$上，$h(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

在$(-\infty,1)$上，$h(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

所以$f(x)$的单调递增区间为$(1,2)$，单调递减区间为$(-\infty,1)$.

19.**解**：(1)设正项等比数列$\{a_n\}$的公比为q，显然$q\neq 1$，$q>0$，

由$S_2=6$，$S_4=30$，得$\begin{cases}a_1+a_1q=6,\\ \frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=30,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=2,\\ q=2,\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=-6,\\ q=-2\end{cases}$(舍去)，所以$a_n=2\times 2^{n-1}=2^n$.

(2)由(1)知，$a_n=2^n$.

所以$b_n=\frac{n+2}{n(n+1)\cdot 2^{n+1}}=\frac{1}{n\cdot 2^n}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}$，

所以$T_n=\left(\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{2\times 2^2}\right)+\left(\frac{1}{2\times 2^2}-\frac{1}{3\times 2^3}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{n\cdot 2^n}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}$.

20.**解**：(1)设数列$\{a_n\}$的公比为q，由题设得$2a_1=a_2+a_3$，即$2a_1=a_1q+a_1q^2$.所以$q^2+q-2=0$，解得$q=1$(舍去)或$q=-2$.故数列$\{a_n\}$的公比为-2.

(2)记S_n为$\{na_n\}$的前n项和.由(1)及题设可得$a_n=(-2)^{n-1}$，所以$S_n=1+2\times(-2)+\cdots+n\cdot(-2)^{n-1}$，

$-2S_n=-2+2\times(-2)^2+\cdots+(n-1)\cdot(-2)^{n-1}+n\cdot(-2)^n$.

两式相减，得$3S_n=1+(-2)+(-2)^2+\cdots+(-2)^{n-1}-n\cdot(-2)^n=\frac{1-(-2)^n}{3}-n\cdot(-2)^n$.

所以$S_n=\frac{1}{9}-\frac{(3n+1)(-2)^n}{9}$.

21.**解**：(1)需新建桥墩$\left(\frac{1200}{x}-1\right)$个，所以$y=500\cdot\left(\frac{1200}{x}-1\right)+\frac{1200}{x}\times 10x[\ln(x+12)-3]=\frac{600\ 000}{x}-500+12\ 000\ln(x+12)-36\ 000=12\ 000\left[\frac{50}{x}+\ln(x+12)\right]-36\ 500$，$x\in(0,1200]$.

(2)令$f(x)=\frac{50}{x}+\ln(x+12)$，$x\in(0,1200]$，$f'(x)=-\frac{50}{x^2}+\frac{1}{x+12}=\frac{x^2-50x-600}{x^2(x+12)}$.

令$f'(x)=0$，解得$x=60$或$x=-10$(舍去).

当$x\in(0,60)$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减，

当$x\in(60,1200]$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增，

所以$f(x)_{min}=f(60)$，所以$y_{min}=12\ 000\left(\frac{5}{6}+\ln 72\right)-36\ 500=12\ 000\times\frac{5}{6}+12\ 000(3\ln 2+2\ln 3)-36\ 500\approx 24\ 740$，

此时需新建$\frac{1200}{60}-1=19$个桥墩，

所以需新建19个桥墩才能使y最小，y的最小值为24 740万元.

22.(1)**解**：由题意知，$f'(x)=e^x(x^2+x-1)$，则$f'(1)=e$，$f(1)=0$，所以所求的切线方程为$y=ex-e$.

(2)**解**：由$f(x)>ax$对$x>0$恒成立，得$a<(x-1)e^x$对$x>0$恒成立，令$g(x)=(x-1)e^x$，则$g'(x)=xe^x$，

所以在$(0,+\infty)$上，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

所以$g(x)_{min}>g(0)=-1$，所以$a\leqslant -1$，所以实数a的取值范围为$(-\infty,-1]$.

(3)**证明**：$f'(x)=e^x(x^2+x-1)$，令$f'(x_0)=0$，解得$x_0=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$(负值舍去)，

所以$f(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，在$(x_0,1)$上单调递增，

由(1)知，$f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程为$y=ex-e$，

所以在$x\in(0,1)$时，$f(x)$的图象恒在切线$y=ex-e$上方，即$f(x_2)>e(x_2-1)\Rightarrow b>e(x_2-1)\Rightarrow\frac{b}{e}+1>x_2$，

要证$x_2-x_1<\left(\frac{1}{e}+1\right)b+1$，即证$x_2-x_1<\frac{b}{e}+b+1$，因为$x_2<\frac{b}{e}+1$，所以只要证明$-x_1<b$，因为$b=f(x_1)$，所以只要证明$f(x_1)+x_1>0$即可，

因为$x_1\in\left(0,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$，所以只需证$(x_1-1)e^{x_1}+1>0$.

设$h(x)=(x-1)e^x+1$，$x\in\left(0,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$，$h'(x)=xe^x$，

当$x\in\left(0,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，所以$h(x)>h(0)=0$，得证，所以可以证明$x_2-x_1<\left(\frac{1}{e}+1\right)\cdot b+1$.

扫码免费下载习题讲解ppt

第9期

第2~3版综合测试(一)参考答案

一、单项选择题

1.A **提示**：设$\{a_n\}$的公差为d，因为$a_4+a_8=2a_6=20$，所以$a_6=10$，又$a_7=12$，所以$d=2$，所以$a_{10}=a_7+3d=12+6=18$.故选A.

2.D **提示**：因为$f(x)=e^x+x^2-2x$，所以$f'(x)=e^x+2x-2$，所以$f'(0)=e^0+2\times 0-2=-1$，

所以函数$f(x)$在$(0,f(0))$处的切线的斜率$k=-1$，其倾斜角为$\frac{3\pi}{4}$.故选D.

3.B **提示**：设数列$\{a_n\}$的公差为d，由$S_5=5a_3=30$，得$a_3=6$，又$a_6=2$，所以$S_8=\frac{8(a_1+a_8)}{2}=\frac{8(a_3+a_6)}{2}=\frac{8\times(6+2)}{2}=32$.故选B.

4.D **提示**：$f'(x)=e^x-1$，令$f'(x)>0$，得$x>0$；令$f'(x)<0$，得$x<0$，

所以函数$f(x)$在$(-1,0)$内单调递减，在$(0,1)$内单调递增，又$f(-1)=e^{-1}+1$，$f(1)=e-1$，$f(-1)-f(1)=\frac{1}{e}+2-e<\frac{1}{2}+2-e<0$，所以$f(1)>f(-1)$.故所求的最大值为$e-1$.故选D.

5.C **提示**：由$a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，得$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{n+1}=\frac{2023}{2024}$，则$n=2023$.故选C.

6.D **提示**：设大夫、不更、簪裹、上造、公士所出的钱数依次排成一列，构成等差数列$\{a_n\}$.

设公差为$d(d>0)$，前n项和为S_n.由题意知，$a_2=16$，$S_5=100$，则$S_5=5a_3=100$，解得$a_3=20$，所以$d=a_3-a_2=4$，所以公士出的钱数为$a_5=a_3+2d=20+2\times 4=28$.故选D.

7.C **提示**：由题意知，$f(1)=10$，且$f'(1)=0$，

又$f'(x)=3x^2+2ax+b$，

所以$\begin{cases}1+a+b+a^2=10,\\ 3+2a+b=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-3,\\ b=3,\end{cases}$或$\begin{cases}a=4,\\ b=-11.\end{cases}$

而当$a=-3$，$b=3$时，$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2\geqslant 0$，函数$f(x)$在$x=1$处无极值，故舍去.

所以$f(x)=x^3+4x^2-11x+16$，所以$f(2)=18$.故选C.

8.D **提示**：设$g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，因为当$x>0$时，$xf'(x)-f(x)<0$，所以$g'(x)<0$.

所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.由$f(x)$为奇函数，知$g(x)$为偶函数，则$g(-3)=g(3)$，

又$a=g(e)$，$b=g(\ln 2)$，$c=g(-3)=g(3)$，所以$g(3)<g(e)<g(\ln 2)$，即$\frac{f(-3)}{-3}<\frac{f(e)}{e}<\frac{f(\ln 2)}{\ln 2}$，故$c<a<b$.故选D.

二、多项选择题

9.ABD **提示**：由$S_6=S_5+a_6>S_5$，得$a_6>0$，由$S_7=S_6+a_7=S_6$，得$a_7=0$，故B正确；$d=a_7-a_6<0$，故A正确；由$S_8=S_7+a_8<S_7$，得$a_8<0$，则$a_9<0$，又$a_6+a_8=a_5+a_9=2a_7=0$，所以$S_5>S_9$，故C错误；由$a_7=0$，$a_6>0$，知S_6，S_7是S_n中的最大值，故D正确.故选ABD.

10.ABC **提示**：令$f'(x)=-3x^2+3=0$，解得$x=-1$或$x=1$，

由$f'(x)>0$，得$-1<x<1$；

由$f'(x)<0$，得$x<-1$或$x>1$，

故$f(-1)=-1<0$是$f(x)$的极小值，$f(1)=3>0$是$f(x)$的极大值，

且$x\to-\infty$时，$f(x)\to+\infty$；$x\to+\infty$时，$f(x)\to-\infty$.

故$f(x)$有三个零点，故A，B正确；

将$f(x)$的图象向下平移1个单位得$g(x)=-x^3+3x$，显然$g(x)$为奇函数，$g(x)$的图象关于原点对称，

所以$f(x)$的图象关于$(0,1)$对称，故C正确；

令$f'(x)=2$，解得$x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$，故切点为$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{8}{3\sqrt{3}}+1\right)$或$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{8}{3\sqrt{3}}+1\right)$，

显然这两个点都不满足$y=2x$，故$y=2x$不是$y=f(x)$的切线，故D错误.故选ABC.

11.AB **提示**：因为$a_n-3a_{n+1}=2a_na_{n+1}$，所以$\frac{1}{a_{n+1}}+1=3\left(\frac{1}{a_n}+1\right)$，又$\frac{1}{a_1}+1=2$，

所以$\left\{\frac{1}{a_n}+1\right\}$是以2为首项，3为公比的等比数列，故$\frac{1}{a_n}+1=2\times 3^{n-1}$，

即$a_n=\frac{1}{2\times 3^{n-1}-1}$，所以$\{a_n\}$为递减数列，$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前$n$项和$T_n=(2\times 3^0-1)+(2\times 3^1-1)+\cdots+(2\times 3^{n-1}-1)=2(3^0+3^1+\cdots+3^{n-1})-n=2\times\frac{1-3^n}{1-3}-n=3^n-n-1$.故选AB.

12.AB **提示**：对于A，B，因为$\log_2a>\log_2b$，所以$a>b>0$，所以$2^a>2^b$，$a^2>b^2$，故A，B正确；

对于C，令$f(x)=\frac{1}{x}+x$，$x>0$，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+1=\frac{x^2-1}{x^2}$，令$f'(x)=0$，得$x=1$或$x=-1$(舍去)，在$(0,1)$内$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，在$(1,+\infty)$上$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

当$a>b>1$时，$f(a)>f(b)$，即$\frac{1}{a}+a>\frac{1}{b}+b$，当$1>a>b>0$时，$f(a)<f(b)$，即$\frac{1}{a}+a<\frac{1}{b}+b$，当$a>1>b>0$时，$f(a)$与$f(b)$大小无法确定，故C错误；

对于D，令$g(x)=\frac{\ln x}{x}$，$x>0$，$g'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$，令$g'(x)=0$，得$x=e$，在$(0,e)$内$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，在$(e,+\infty)$上$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，

当$a>b>e$时，$g(a)<g(b)$，即$\frac{\ln a}{a}<\frac{\ln b}{b}$，即$b\ln a<a\ln b$，当$e>a>b>0$时，$g(a)>g(b)$，即$\frac{\ln a}{a}>\frac{\ln b}{b}$，即$b\ln a>a\ln b$，当$a>e>b>0$时，$g(a)$与$g(b)$大小无法确定，故D错误.故选AB.

三、填空题

13.189 **提示**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，则$(a_1+a_4)q^2=a_3+a_6$，所以$q^2=3$，故$a_7+a_{10}=q^4(a_3+a_6)=9\times 21=189$.

14.$[-1,+\infty)$ **提示**：对任意$x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，不等式$\ln(2x-1)\leqslant x^2+a$恒成立，可得$a\geqslant\ln(2x-1)-x^2$恒成立，

设$f(x)=\ln(2x-1)-x^2$，

则$f'(x)=\frac{2}{2x-1}-2x=-\frac{2(x-1)(2x+1)}{2x-1}$，

可得$x>1$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；$\frac{1}{2}<x<1$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

即有$f(x)$在$x=1$处取得极大值，且为最大值-1，所以$a\geqslant -1$.所以a的取值范围是$[-1,+\infty)$.

15.0 **提示**：因为函数$f(x)=e^x-e^{-x}+\sin 2x$，$x\in[0,\pi]$，所以$f'(x)=e^x+e^{-x}+2\cos 2x\geqslant 2\sqrt{e^xe^{-x}}+2\cos 2x=2+2\cos 2x$，

当且仅当$e^x=e^{-x}$，即$x=0$时，等号成立，又因为$2+2\cos 2x\geqslant 2+2\times(-1)=0$，当且仅当$2x=\pi$时，取等号，

所以$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$x\in[0,\pi]$时单调递增，其最小值为$f(0)=e^0-e^0+\sin 0=0$.

16.82 820 **提示**：由题意知，满足被3除余2，被5除余3，被7除余2的最小的数为23，

满足该条件的数从小到大构成以23为首项，$3\times 5\times 7=105$为公差的等差数列，

其通项公式为$a_n=105n-82$，令$a_n\leqslant 4200$，解得$n\leqslant 40\frac{82}{105}$，

则所有满足条件的数的和为$23\times 40+\frac{40\times 39}{2}\times 105=82\ 820$.

四、解答题

17.**解**：(1)等差数列$\{a_n\}$满足$a_3=6$，$\frac{S_5}{S_9}=\frac{1}{3}$，

所以$\begin{cases}a_1+2d=6,\\ S_9=3S_5,\end{cases}$即$\begin{cases}a_1+2d=6,\\ 9a_1+\frac{9\times 8}{2}d=3\left(5a_1+\frac{5\times 4}{2}d\right),\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=2,\\ d=2,\end{cases}$故$a_n=2+2(n-1)=2n$.

(2)由(1)得$c_n=a_n+b_n=2n+4^n$，

故$T_n=(2+4+\cdots+2n)+(4^1+4^2+\cdots+4^n)=\frac{n(2+2n)}{2}+\frac{4(1-4^n)}{1-4}=n^2+n+\frac{4^{n+1}-4}{3}$.

18.**解**：(1)$f'(x)=e^x-2ax$，

由题设得，$f'(1)=e-2a=b$，$f(1)=e-a=b+1$，解得$a=1$，$b=e-2$.

(2)由(1)知，$f(x)=e^x-x^2$，所以$f'(x)=e^x-2x$，

令$g(x)=e^x-2x$，则$g'(x)=e^x-2$，由$g'(x)>0$，得$x>\ln 2$；由$g'(x)<0$，得$x<\ln 2$.

所以$g(x)$在$(-\infty,\ln 2)$上单调递减，在$(\ln 2,+\infty)$上单调递增，

所以$g(x)\geqslant g(\ln 2)$，即$f'(x)\geqslant f'(\ln 2)=2-2\ln 2>0$，

所以$f(x)$在$[0,1]$上单调递增，所以$f(x)$在$[0,1]$上的最大值为$f(1)=e-1$.

19.**解**：(1)因为$S_n=2a_n-1$，所以$S_{n-1}=2a_{n-1}-1$，

当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-1-(2a_{n-1}-1)$，

化简得，$a_n=2a_{n-1}$，

当$n=1$时，$a_1=2a_1-1$，解得$a_1=1$，

所以数列$\{a_n\}$是首项为1，公比为2的等比数列，

所以$a_n=2^{n-1}$.

(2)因为数列$\{b_n\}$满足$a_nb_n=\log_2a_n$，所以$2^{n-1}b_n=\log_22^{n-1}$，所以$b_n=\frac{n-1}{2^{n-1}}$.

所以数列$\{b_n\}$的前n项和

$T_n=0+\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n-2}{2^{n-2}}+\frac{n-1}{2^{n-1}}$，

所以$\frac{1}{2}T_n=0+\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{n-2}{2^{n-1}}+\frac{n-1}{2^n}$，

两式相减，得$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n-1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n-1}{2^n}$，整理得$T_n=2-\frac{n+1}{2^{n-1}}$.

20.**解**：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，因为$S_7=28$，所以$7a_4=28$，解得$a_4=4$，又$a_1=1$，

所以公差$d=\frac{1}{3}(a_4-a_1)=1$，所以$a_n=n$，

因为$b_n=[\lg a_n]$，

所以$b_1=[\lg a_1]=0$，$b_{11}=[\lg a_{11}]=1$，$b_{101}=[\lg a_{101}]=2$.

(2)因为$b_1=b_2=\cdots=b_9=0$，

$b_{10}=b_{11}=b_{12}=\cdots=b_{99}=1$，

$b_{100}=b_{101}=b_{102}=\cdots=b_{999}=2$，

$b_{1000}=b_{1001}=b_{1002}=\cdots=b_{9999}=3$，

所以$S_{2023}=(b_1+b_2+\cdots+b_9)+(b_{10}+b_{11}+\cdots+b_{99})+(b_{100}+b_{101}+\cdots+b_{999})+(b_{1000}+b_{1001}+\cdots+b_{2023})=0\times 9+1\times 90+2\times 900+3\times 1024=4962$.

21.(1)**解**：因为$f'(x)=\frac{a}{x}-a=\frac{a(1-x)}{x}$，$x>0$，

①当$a>0$时，$x\in(0,1)$，$f'(x)>0$；$x\in(1,+\infty)$，$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减；

②当$a<0$时，$x\in(0,1)$，$f'(x)<0$；$x\in(1,+\infty)$，$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增.

综上，当$a>0$时，$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减；

当$a<0$时，$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增.

(2)**证明**：当$a=-1$时，令$g(x)=f(x)+2=-\ln x+x-1$，$x>1$，

所以$g'(x)=-\frac{1}{x}+1=\frac{x-1}{x}>0$，

所以$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

所以$g(x)>g(1)=0$，

故在$(1,+\infty)$上，$f(x)+2>0$.

22.**解**：(1)选择条件①.

因为$f'(x)=3x^2+2ax+b$，依题意有$\begin{cases}f'(1)=0,\\ f(1)=-5,\end{cases}$

所以$\begin{cases}3+2a+b=0,\\ 1+a+b=-5,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=3,\\ b=-9,\end{cases}$所以$f(x)=x^3+3x^2-9x$.

选择条件②.因为$f'(x)=3x^2+2ax+b$，函数$f(x)$的单调递减区间为$(-3,1)$，

所以-3和1为方程$3x^2+2ax+b=0$的两根，所以$\begin{cases}-\frac{2a}{3}=-3+1,\\ \frac{b}{3}=-3\times 1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=3,\\ b=-9,\end{cases}$所以$f(x)=x^3+3x^2-9x$.

检验：$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x^2+2x-3)=3(x+3)(x-1)$，

令$f'(x)<0$，得$-3<x<1$，所以$f(x)$的单调递减区间为$(-3,1)$，符合题意.

选择条件③.由题意知，$f(x)=x(x^2+ax+b)$，所以$\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$和$\frac{-3-3\sqrt{5}}{2}$为方程$x^2+ax+b=0$的两根，

所以$\begin{cases}-a=\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}+\frac{-3-3\sqrt{5}}{2},\\ b=\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}\times\frac{-3-3\sqrt{5}}{2},\end{cases}$解得$\begin{cases}a=3,\\ b=-9,\end{cases}$所以$f(x)=x^3+3x^2-9x$.

(2)$f(x)=x^3+3x^2-9x$的定义域是R，且$f'(x)=3x^2+6x-9$，令$f'(x)=0$，解得$x_1=-3$，$x_2=1$，

随着x的变化，$f(x)$与$f'(x)$在R上的情况如下：

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以$f(x)_{极大值}=f(-3)=27$，$f(x)_{极小值}=f(1)=-5$.

(3)由$f(-4)=20$及(2)中结论可知：

当$c\geqslant 1$时，函数$f(x)$在区间$[-4,c]$上的最小值为$f(1)=-5$，符合题意；

当$-4<c<1$时，函数$f(x)$在区间$[-4,c]$上的最小值大于$f(1)=-5$，不符合题意.

所以c的取值范围是$[1,+\infty)$.

第10期

第2~3版综合测试(二)参考答案

一、单项选择题

1.C

提示：设等差数列的首项为a_1，公差为d，根据题意可知，$\begin{cases}a_1+2d+3a_1+3d=22,\\ a_1+3d-(4a_1+6d)=-15,\end{cases}$解得$a_1=3$，$d=2$，

所以$S_9=9a_1+\frac{9\times 8}{2}d=27+72=99$.故选C.

2.D

提示：因为$f(x)=-x^3+3x+1$，所以$f'(x)=-3x^2+3$，

令$f'(x)=-3x^2+3=0$，解得$x=\pm 1$，

于是，当x变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

③

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

所以$f(x)$的极小值为$f(-1)=-1$，$f(x)$的极大值为$f(1)=3$.故选D.

3.C

提示：因为$a_{n+1}=a_n+n+1$，所以$a_{n+1}-a_n=n+1$，

所以$a_2-a_1=2,a_3-a_2=3,\cdots,a_n-a_{n-1}=n$，累加可得，

$a_n-a_1=2+3+\cdots+n$，又$a_1=1$，所以$a_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，所以$a_{10}=\frac{10\times11}{2}=55$.故选C.

4.B

提示：因为$y'=4x^3-3$，所以$y'|_{x=1}=1$，设切线的倾斜角为α，则$\tan\alpha=1$，因为$\alpha\in(0,\pi)$，所以$\alpha=\frac{\pi}{4}$.故选B.

5.B

提示：因为$-2,a,b,c,-8$是等比数列，所以$b^2=(-2)\times(-8)=16$，

又因为$-2,b,-8$均为该数列中的奇数项，所以$b<0$，所以$b=-4$.故选B.

6.B

提示：设数列的首项为a，公比为q，共n项，则前三项分别为a_1,a_1q,a_1q^2，

后三项分别为$a_1q^{n-3},a_1q^{n-2},a_1q^{n-1}$.

由题意得$a_1^3q^3=2,a_1^3q^{3n-6}=4$，两式相乘得$a_1^6q^{3(n-1)}=8$，即$a_1^2q^{n-1}=2$.

又因为$a_1\cdot a_1q\cdot a_1q^2\cdot\cdots\cdot a_1q^{n-1}=64$，所以$a_1^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}=64$，即$(a_1^2q^{n-1})^n=64^2$，解得$n=12$.故选B.

7.B

提示：根据等差数列的性质和前n项和公式，有$\frac{a_5}{b_5}=\frac{2a_5}{2b_5}=\frac{\frac{9(a_1+a_9)}{2}}{\frac{9(b_1+b_9)}{2}}=\frac{S_9}{T_9}=\frac{3\times9+2}{9+1}=\frac{29}{10}$.故选B.

8.C

提示：$f'(x)=3ax^2+4x+a$，因为$f(x)=ax^3+2x^2+ax+1$在$(-1,+\infty)$上存在极大值$f(x_1)$和极小值$f(x_2)$，且$x_1<x_2$，所以$f'(x)=3ax^2+4x+a=0$在$(-1,+\infty)$上有两个根$x_1,x_2,x_1<x_2$，且在$(-1,x_1)$内$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，在(x_1,x_2)内$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，在$(x_2,+\infty)$上$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

所以$\begin{cases}a>0,\\ \Delta=4^2-4\times3a\times a=16-12a^2>0,\\ f'\left(-\frac{2}{3a}\right)=3a\left(-\frac{2}{3a}\right)^2+4\times\left(-\frac{2}{3a}\right)+a<0,\\ f'(-1)=3a\times(-1)^2+4\times(-1)+a>0,\\ -\frac{2}{3a}>-1,\end{cases}$

解得$1<a<\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以a的取值范围为$\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

故选C.

二、多项选择题

9.AB

提示：由$f'(x)$图象可得，当$x<-2$时，$f'(x)<0$；当$-2<x<\frac{1}{2}$时，$f'(x)>0$；当$\frac{1}{2}<x<2$时，$f'(x)<0$；当$x>2$时，$f'(x)>0$.

所以$f(x)$在$(-\infty,-2)$和$\left(\frac{1}{2},2\right)$上单调递减，在$\left(-2,\frac{1}{2}\right)$和$(2,+\infty)$上单调递增，

所以函数$f(x)$在$x=-2$和$x=2$处取得极小值，在$x=\frac{1}{2}$处取得极大值.故选AB.

10.ABD

提示：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由$a_4=8,a_{12}=-8$，可得$\begin{cases}a_1+3d=8,\\a_1+11d=-8,\end{cases}$解得$\begin{cases}d=-2,\\a_1=14,\end{cases}$所以$a_8=a_1+7d=14-7\times2=0$，故A，B正确；$S_{15}=15\times14+\frac{15\times14}{2}\times(-2)=0$，故C错误；

$\frac{S_7}{7}=\frac{7\times14+\frac{7\times6}{2}\times(-2)}{7}=8$，$\frac{S_8}{8}=\frac{8\times14+\frac{8\times7}{2}\times(-2)}{8}=7$，

所以$\frac{S_7}{7}>\frac{S_8}{8}$，故D正确.故选ABD.

11.AB

提示：因为$a_{n+1}=2a_n+1$，所以$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，又$a_1+1=1+1=2$，所以数列$\{a_n+1\}$是首项为2，公比为2的等比数列，所以$a_n+1=2\times2^{n-1}=2^n$，所以$a_n=2^n-1$，故B正确，C错误；

又$a_3=2^3-1=7$，故A正确；$S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-n-2$，故D错误.故选AB.

12.BCD

提示：函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，设$F(x)=f(x)-\ln x$，则$F'(x)=f'(x)-\frac{1}{x}$，

因为$f'(x)<\frac{1}{x}$，所以$F'(x)<0$，所以函数$F(x)$是$(0,+\infty)$上的减函数，

因为$f(1)=1$，所以$F(1)=f(1)-\ln1=1$.

对于A，$F(1)>F(e)=f(e)-1$，可得$f(e)<2$，所以A错误；

对于B，$F\left(\frac{1}{e}\right)=f\left(\frac{1}{e}\right)+1>F(1)$，所以$f\left(\frac{1}{e}\right)>0$，故B正确；

对于C，当$x\in(1,e)$时，$F(x)<F(1)$，则$f(x)-\ln x<1$，所以$f(x)<\ln x+1$，因为$x\in(1,e)$，所以$\ln x\in(0,1)$，所以$\ln x+1\in(1,2)$，所以$f(x)<2$，故C正确；

对于D，$\forall x\in\left(\frac{1}{e},1\right)$，$\ln x\in(-1,0)$，可知$x<\frac{1}{x}$，

所以$F(x)>F\left(\frac{1}{x}\right)$，$f(x)-\ln x>f\left(\frac{1}{x}\right)-\ln\frac{1}{x}$，所以$f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)+2>2\ln x+2>0$.故D正确.故选BCD.

三、填空题

13.92

提示：根据题意，记第n个图形的点数为a_n，则$a_1=1,a_2-a_1=2\times3-2,a_3-a_2=3\times3-2,a_4-a_3=4\times3-2,\cdots,a_8-a_7=8\times3-2$，累加得$a_8=1+3\times(2+3+\cdots+8)-2\times7=92$.

14.30；23 000

提示：由题意知，利润等于销售额减去成本，

即$L(M)=MN-20N=(8300-170M-M^2)(M-20)=-M^3-150M^2+11\,700M-166\,000$，

所以$L'(M)=-3M^2-300M+11\,700$.

令$L'(M)=0$，解得$M=30$或$M=-130$(舍去).

此时，$L(30)=23\,000$.

因为当$0<M<30$时，$L'(M)>0$，当$M>30$时，$L'(M)<0$，所以$L(30)$是极大值，也是最大值，最大值为23 000.

故该批材料零售价定为30元时，利润最大为23 000元.

15.$-\frac{1}{2}$

提示：由$f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}$，可得$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}$，$f(1)=b=-2$，

又因为$x=1$是$f(x)$的极值点，所以$f'(1)=a-b=0$，所以$a=b=-2$，所以$f'(2)=\frac{-2}{2}-\frac{-2}{2^2}=-\frac{1}{2}$.

16.$\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$

提示：$f'(x)=[x^2+(m+2)x+m]e^x$，原问题等价于$f'(x)<0$在$\left[-\frac{1}{2},1\right]$上有解，

即$m<\frac{-x^2-2x}{x+1}$在$\left[-\frac{1}{2},1\right]$上有解，而$g(x)=\frac{-x^2-2x}{x+1}=-(x+1)+\frac{1}{x+1}$在$\left[-\frac{1}{2},1\right]$上单调递减，

所以$g(x)$的最大值为$g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$，所以$m<\frac{3}{2}$，所以$m$的取值范围是$\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$.

四、解答题

17.**解：**(1)由$y=x^3+x-2$，得$y'=3x^2+1$.

令$3x^2+1=4$，解得$x=\pm1$.当$x=1$时，$y=0$；

当$x=-1$时，$y=-4$.又点P_0在第三象限，所以切点P_0的坐标为$(-1,-4)$.

(2)因为直线$l\perp l_1$，l_1的斜率为4，所以直线l的斜率为$-\frac{1}{4}$.

因为直线l过切点P_0，点P_0的坐标为$(-1,-4)$，

所以直线l的方程为$y+4=-\frac{1}{4}(x+1)$，即$x+4y+17=0$.

18.**解：**(1)由已知$b_1=1,b_2=3,a_1b_1+b_1=b_2$，得$a_1=2$，

所以数列$\{a_n\}$是以2为首项，3为公差的等差数列，

所以$a_n=2+3(n-1)=3n-1(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)由(1)知，$(3n-1)b_n+b_n=nb_{n+1}$，即$b_{n+1}=3b_n$，

所以数列$\{b_n\}$是以1为首项，3为公比的等比数列，

记$\{b_n\}$的前n项和为S_n，则$S_n=\frac{1-3^n}{1-3}=\frac{3^n-1}{2}$.

19.**解：**(1)因为$x=3$是$f(x)$的一个极值点，所以$f'(3)=0$.

因为$f'(x)=3x^2-2ax-9$，

所以$f'(3)=27-6a-9=0$，解得$a=3$.

(2)由(1)知，$f(x)=x^3-3x^2-9x+1$，所以$f'(x)=3(x-3)(x+1)$.

令$f'(x)>0$，解得$x<-1$或$x>3$；令$f'(x)<0$，解得$-1<x<3$.所以$f(x)$在$(-2,-1)$上单调递增，$(-1,0)$上单调递减，所以$f(x)_{max}=f(-1)=6$.又$f(-2)=-1,f(0)=1$，

所以$f(x)_{min}=f(-2)=-1$.故$f(x)$在区间$[-2,0]$上的最大值为6，最小值为-1.

20.(1)**证明：**显然$a_n\neq0$，将$a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}$两边同时取倒数得$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+1}{a_n}=\frac{1}{a_n}+2$，

即$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$，所以数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是公差为2的等差数列，所以$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_3}+(n-3)\times2=2n$，所以$a_n=\frac{1}{2n}$.

(2)**解：**选①.

由已知得$b_n=\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{4n(n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，

那么数列$\{b_n\}$的前n项和$T_n=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{4n+4}$.

选②.

由已知得$b_n=(-1)^n2n$，

那么数列$\{b_n\}$的前n项和$T_n=-2+4-6+8-\cdots+(-1)^n2n$，

当n为偶数时，$T_n=2\times\frac{n}{2}=n$；

当n为奇数时，$T_n=-2+(-2)\times\frac{n-1}{2}=-n-1$.

故$T_n=\begin{cases}n,n=2k,\\-n-1,n=2k-1\end{cases}(k\in\mathbf{N}_+)$.

选③.

由已知得$b_n=2n+\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}=2n+\left(\frac{1}{9}\right)^n$，

那么数列$\{b_n\}$的前n项和$T_n=(2+4+\cdots+2n)+\left[\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{9}\right)^n\right]$

$=\frac{(2+2n)n}{2}+\frac{\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{9^n}\right)}{1-\frac{1}{9}}=n^2+n+\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$.

21.**解：**(1)由题意，设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，等比数列$\{b_n\}$的公比为q，则$q>0$，因为$b_1=2$，

故$b_2+b_3=2q+2q^2=12$，解得$q=2$，或$q=-3$(舍去)，则$b_3=b_1q^2=2\times2^2=8,b_4=b_1q^3=2\times2^3=16$，

由题意得$\begin{cases}a_1+3d-2a_1=8,\\11a_1+\frac{11\times10}{2}d=11\times16,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=3,\end{cases}$

所以$a_n=1+3(n-1)=3n-2$，$b_n=2\times2^{n-1}=2^n$.

(2)由(1)得$a_n=3n-2$，$b_n=2^n$，则$a_n\cdot b_n=(3n-2)\cdot2^n$，

设$\{a_nb_n\}$的前n项和为T_n，

则$T_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=1\times2+4\times2^2+\cdots+(3n-2)\cdot2^n$，①

$2T_n=1\times2^2+4\times2^3+\cdots+(3n-5)\cdot2^n+(3n-2)\cdot2^{n+1}$，②

由①-②得$-T_n=1\times2+3\times2^2+3\times2^3+\cdots+3\cdot2^n-(3n-2)\cdot2^{n+1}$

$=2+12\times(1+2+\cdots+2^{n-2})-(3n-2)\cdot2^{n+1}$

$=2+12\times\frac{1-2^{n-1}}{1-2}-(3n-2)\cdot2^{n+1}=(5-3n)\cdot2^{n+1}-10$，

所以$T_n=10+(3n-5)\cdot2^{n+1}$.

22.(1)**解：**函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，且$f'(x)=1-\frac{m}{x}$，

当$m\leqslant0$时，$f'(x)>0$恒成立，此时函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

当$m>0$时，由$f'(x)=1-\frac{m}{x}>0$，解得$x>m$，由$f'(x)<0$，解得$0<x<m$，

所以函数$f(x)$在$(0,m)$内单调递减，在$(m,+\infty)$上单调递增.

综上，当$m\leqslant0$时，函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；当$m>0$时，函数$f(x)$在$(0,m)$内单调递减，在$(m,+\infty)$上单调递增.

(2)**证明：**由(1)可知，当$m\leqslant0$时，函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$f(x)$无最小值；

当$m>0$时，函数$f(x)$在$(0,m)$内单调递减，在$(m,+\infty)$上单调递增，

所以$f(x)_{min}=f(m)=-m\ln m$，即$g(m)=-m\ln m$，

则$g'(m)=-1-\ln m$，

由$g'(m)>0$，得$0<m<\frac{1}{e}$，由$g'(m)<0$，得$m>\frac{1}{e}$，

所以$g(m)$在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$内单调递增，在$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$上单调递减，

所以$g(m)\leqslant g\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}=\frac{1}{e}$，即$g(m)\leqslant\frac{1}{e}$在$(0,+\infty)$上恒成立.

第11期

第2~3版综合测试(三)参考答案

一、单项选择题

1.C **提示：**因为$S_3=15,a_3=5$，所以$\begin{cases}a_1+a_1q+a_1q^2=15,\\a_1q^2=5,\end{cases}$解得$q=1$或$-\frac{1}{2}$.故选C.

2.C **提示：**因为$y=\frac{1}{x}$，所以$y'=-\frac{1}{x^2}$，所以当$x=1$时，$k=\tan\alpha=-1$，

因为$\alpha\in[0,\pi)$，所以$\alpha=\frac{3\pi}{4}$.故选C.

3.B **提示：**在等差数列$\{a_n\}$中，由$a_3=2,a_{11}=6$，得$d=\frac{a_{11}-a_3}{11-3}=\frac{6-2}{8}=\frac{1}{2}$，

则$a_1=a_3-2d=2-2\times\frac{1}{2}=1$，所以$S_{13}=13a_1+\frac{13\times12}{2}\times d=13\times1+\frac{13\times12}{2}\times\frac{1}{2}=52$.故选B.

4.A **提示：**$(a^x)'=a^x\ln a$，$(\cos x)'=-\sin x$，$\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)'=0$，$(x^{-5})=-5x^{-6}$.故选A.

5.B **提示：**数列$\{a_n\}$是递增数列$\Rightarrow a_1<a_3<a_5$，反之不成立，例如$a_n=(-1)^{n+1}2^n$，$a_1=2,a_3=8,a_5=32$，

虽然$a_1<a_3<a_5$，但是该数列显然不是递增数列，所以“$a_1<a_3<a_5$”是“数列$\{a_n\}$是递增数列”的必要不充分条件.故选B.

6.B **提示：**由$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\approx\ln n+\gamma$，取$n=5$，则$\ln5\approx1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-(0.577\,215\,664\,901\cdots)\approx1.706$，

而$\ln5=\ln10-\ln2\approx2.303-0.693=1.610$，所以用上式估算出的$\ln5$与实际的$\ln5$的误差绝对值近似为$1.706-1.610=0.096$.故选B.

7.C **提示：**函数$f(x)=2ax-\ln(x+1)$，$x\in(-1,+\infty)$，$f'(x)=2a-\frac{1}{x+1}$，

所以$f'(0)=2a-1$，因为函数$f(x)$的图象在原点处的

切线方程为$2x-y=0$，所以$2a-1=2$，解得$a=\frac{3}{2}$，

所以$f(x)=3x-\ln(x+1)$，$x\in(-1,+\infty)$，所以$f'(x)=3-\frac{1}{x+1}=\frac{3x+2}{x+1}$，所以$x\in\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$时，$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减；$x\in\left(-\frac{2}{3},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增.

所以$x=-\frac{2}{3}$时，函数$f(x)$取得极小值$f\left(-\frac{2}{3}\right)=-2+\ln3<0$.

又$x\to-1$时，$f(x)\to+\infty$；$x\to+\infty$时，$f(x)\to+\infty$，

所以函数$f(x)$的零点个数为2.故选C.

8.C **提示：**因为$f(x)=-x^3-2x^2+4x$，所以$f'(x)=-3x^2-4x+4$，令$f'(x)=0$，得$x=\frac{2}{3}$或$x=-2$，因为该函数在闭区间$[-3,3]$上连续可导，且极值点处的导数为零，所以最小值一定在端点处或极值点处取得，而$f(-3)=-3,f(-2)=-8,f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{40}{27},f(3)=-33$，

所以该函数在$[-3,3]$上的最小值为-33，因为当$x\in[-3,3]$时，有$f(x)\geqslant a$恒成立，只需$a\leqslant f(x)_{min}$，即$a\leqslant-33$.故选C.

二、多项选择题

9.CD **提示：**对于A，$f(x)=x-\frac{1}{x}$，有$f(-1)=f(1)=0$，则$f(x)$在其定义域上不是单调函数，不符合题意；对于B，$f(x)=xe^x$，其导数$f'(x)=xe^x+e^x=(x+1)e^x$，在区间$(-\infty,-1)$上，$f'(x)<0$，则$f(x)$单调递减，不符合题意；对于C，$f(x)=x+\sin x$，其导数$f'(x)=1+\cos x\geqslant0$，则$f(x)$在定义域上为增函数，符合题意；对于D，$f(x)=e^x-e^{-x}-2x$，其导数$f'(x)=e^x+e^{-x}-2\geqslant2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-2=0$，则$f(x)$在定义域上为增函数，符合题意.故选CD.

10.AD **提示：**定义域为$\{x|x\neq1\}$，由$f(x)=\frac{2x-1}{x-1}\cdot e^x$，得$f'(x)=\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)'\cdot e^x+\frac{2x-1}{x-1}\cdot(e^x)'=\frac{-1}{(x-1)^2}e^x+\frac{2x-1}{x-1}\cdot e^x=\frac{2x^2-3x}{(x-1)^2}e^x=\frac{x(2x-3)}{(x-1)^2}e^x$，

当$x<0$或$x>\frac{3}{2}$时，$f'(x)>0$，当$0<x<1$或$1<x<\frac{3}{2}$时，$f'(x)<0$，所以函数$f(x)$在$(-\infty,0)$和$\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$上单调递增，在$(0,1)$和$\left(1,\frac{3}{2}\right)$上单调递减，

所以$x=0$时，$f(x)$有极大值，当$x=\frac{3}{2}$时，$f(x)$有极小值，

所以$x=0$为极大值点，$x=\frac{3}{2}$为极小值点，所以A，D正确，B，C错误.故选AD.

11.AC **提示：**由题意知，$a_1+a_2+\cdots+a_k=2^k-1$，①

$k\geqslant2$，$a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}=2^{k-1}-1$，②

①-②得$a_k=2^{k-1}$，$k\geqslant2$，同理，$b_k=2\times3^{k-1}$，$k\geqslant2$.

对于A，$a_1+a_2=2^2-1=3$，$a_2=2$，所以$a_1=1$，故A正确；

对于B，因为$b_1+b_2=3^2-1=8$，$b_2=2\times3=6$，所以$b_1=2$，$b_n=2\times3^{n-1}>2$，故B错误；

对于C，D，$\frac{b_k}{a_k}=2\times\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$，所以当$k\geqslant2$时，$\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$是以$\frac{3}{2}$为公比的等比数列，故C正确，D错误.故选AC.

12.ABD **提示：**对于A，由数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_2=2,a_{n+1}=4a_n-3a_{n-1}$，则$a_{n+1}-a_n=3(a_n-a_{n-1})$，又$a_2-a_1=1$，则数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是以1为首项，3为公比的等比数列，故A正确；

对于B，由数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_2=2,a_{n+1}=4a_n-3a_{n-1}$，则$(a_{n+1}-3a_n)-(a_n-3a_{n-1})=0$，即数列$\{a_{n+1}-3a_n\}$为等差数列，故B正确；

对于C，由题意得，数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是以1为首项，3为公比的等比数列，则数列$\{a_{n+1}-a_n\}$的前n项和为$\frac{1\times(1-3^n)}{1-3}=\frac{3^n-1}{2}$，故C错误；

对于D，当$n\geqslant2$时，$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=\frac{1-3^{n-1}}{1-3}+1=\frac{3^{n-1}+1}{2}$，当$n=1$时，满足上式，即$a_n=\frac{3^{n-1}+1}{2}$，故D正确.故选ABD.

三、填空题

13.20 **提示：**由题意知，$a_6^2=a_2\cdot a_{10}$，即$100=5\cdot a_{10}$，得$a_{10}=20$.

14.$(n-3)^2$(答案不唯一) **提示：**根据题意，要求数列$\{a_n\}$满足：①先单调递减后单调递增；②当$n=3$时取得最小值.可以结合二次函数的性质分析，如$a_n=(n-3)^2(n\in\mathbf{N}_+)$，当$1\leqslant n\leqslant2$时，$a_{n+1}-a_n=2n-5<0$，数列单调递减，当$n\geqslant3$时，$a_{n+1}-a_n=2n-5>0$，数列单调递增，即$a_1>a_2>a_3<a_4<\cdots$，可得当$n=3$时，该数列取得最小值，符合题意.故$a_n=(n-3)^2(n\in\mathbf{N}_+)$.

15.$(\sqrt{e},+\infty)$ **提示：**不妨设$g(x)=f(x)-\ln x$，则定义域为$(0,+\infty)$，可得$g'(x)=f'(x)-\frac{1}{x}=\frac{xf'(x)-1}{x}$，

因为当$x>0$时，$xf'(x)<1$，所以$g'(x)<0$在$(0,+\infty)$上恒成立，所以函数$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，由$f(x^2)-2\ln x<2$，可得$f(x^2)-\ln x^2<f(e)-\ln e$，即$g(x^2)<g(e)$，所以$x^2>e$，又$x>0$，解得$x>\sqrt{e}$，则不等式$f(x^2)-2\ln x<2$的解集为$(\sqrt{e},+\infty)$.

16.$\frac{1}{2e}$ **提示：**设$g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，则$g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}=\frac{e^{2x}}{e^x}=e^x$，故$g(x)=e^x+c$($c$为常数)，则$f(x)=(e^x+c)e^x$，又因为$f(0)=1$，即$1+c=1$，所以$c=0$，$f(x)=e^{2x}$，

则对任意$x>0$，不等式$2af(x)-\ln x+\ln a\geqslant0$恒成立，

即对任意$x>0$，不等式$2ae^{2x}\geqslant\ln\frac{x}{a}$恒成立，

即对任意$x>0$，不等式$2xe^{2x}\geqslant\frac{x}{a}\ln\frac{x}{a}$恒成立，即对任意$x>0$，不等式$\ln(2x)+2x\geqslant\ln\frac{x}{a}+\ln\left(\ln\frac{x}{a}\right)$恒成立.

令$h(x)=x+\ln x$，$x>0$，所以$h'(x)=1+\frac{1}{x}>0$，所以$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

由$h(2x)\geqslant h\left(\ln\frac{x}{a}\right)$，得$2x\geqslant\ln\frac{x}{a}$，即$2x\geqslant\ln x-\ln a$，所以$\ln a\geqslant-2x+\ln x=\ln e^{-2x}+\ln x=\ln(x\cdot e^{-2x})$，

所以$a\geqslant x\cdot e^{-2x}$，令$t(x)=x\cdot e^{-2x}$，$x>0$，

$t'(x)=\frac{e^{2x}-2x\cdot e^{2x}}{(e^{2x})^2}=\frac{1-2x}{e^{2x}}$，令$t'(x)>0$，得$0<x<\frac{1}{2}$，$t(x)$单调递增，令$t'(x)<0$，得$x>\frac{1}{2}$，$t(x)$单调递减，

所以$t(x)\leqslant t\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{e}=\frac{1}{2e}$，

所以$a\geqslant\frac{1}{2e}$，所以a的最小值为$\frac{1}{2e}$.

四、解答题

17.**解：**(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$4d=a_5-a_1=18-2=16$，解得$d=4$，

故$a_n=a_1+(n-1)d=2+4(n-1)=4n-2$.

(2)$S_n=\frac{n[2+(4n-2)]}{2}=2n^2$，令$2n^2>60n+800$，即$n^2-30n-400>0$，解得$n>40$或$n<-10$(舍去)，故使得$S_n>60n+800$成立的n的取值范围是$(40,+\infty)$，$n\in\mathbf{N}_+$.

18.**解：**(1)因为函数$f(x)=2x-\ln x+\frac{3}{x}$，所以$f'(x)=2-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}=\frac{2x^2-x-3}{x^2}$，

所以$f'(1)=-2$，又$f(1)=5$，所以切点坐标为$(1,5)$，所以所求的切线方程为$y-5=-2(x-1)$，即$2x+y-7=0$.

(2)定义域为$(0,+\infty)$，由(1)可知，$f'(x)=\frac{2x^2-x-3}{x^2}$，

令$f'(x)=0$，即$2x^2-x-3=0$，解得$x=\frac{3}{2}$或$x=-1$(舍去)，

当$0<x<\frac{3}{2}$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$\left(0,\frac{3}{2}\right)$上单调递减；当$x>\frac{3}{2}$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$上单调递增.所以当$x=\frac{3}{2}$时，$f(x)$有极小值为$5-\ln\frac{3}{2}$，无极大值.

19.**解：**(1)若$\{T_n\}$为等比数列，设公比为q，则公比$q=\frac{T_3}{T_2}=\frac{8}{2}=4$，因为$T_3=8$，所以$T_1=\frac{T_3}{q^2}=\frac{1}{2}=a_1$.

所以当$n\geqslant2$时，$T_n=T_1\cdot q^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot4^{n-1}=\frac{4^n}{8}$，所以$T_{n-1}=\frac{4^{n-1}}{8}$，所以$a_n=\frac{T_n}{T_{n-1}}=4$.

综上，$a_n=\begin{cases}\frac{1}{2},n=1,\\4,n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+.\end{cases}$

(2)因为$T_n=a_1a_2\cdots a_n$，且$T_2=a_1a_2=2$，$T_3=a_1a_2a_3=8$，所以$a_3=4$.因为$\{a_n\}$为等比数列，设公比为q，所以$T_3=a_1a_2a_3=a_2^3=8$，所以$a_2=2$，所以$q=\frac{a_3}{a_2}=2$，所以$a_1=\frac{a_2}{q}=1$，所以$a_n=a_1\cdot q^{n-1}=2^{n-1}$，

可得$T_n=a_1a_2\cdots a_n=1\times2\times2^2\times2^3\times\cdots\times2^{n-1}=2^{(1+2+3+\cdots+n-1)}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

20.(1)**证明：**当$a=-1$时，$f(x)=\frac{\sin x+1}{e^\pi}+\frac{1}{e^x}$，

得$f'(x)=\frac{\cos x}{e^\pi}-\frac{1}{e^x}$，易知函数$y=\frac{\cos x}{e^\pi}$在$[-\pi,0]$上单调递增，$y=-\frac{1}{e^x}$在$[-\pi,0]$上单调递增，

所以$f'(x)$在$[-\pi,0]$上单调递增，又$f'(0)=\frac{1}{e^\pi}-1<0$，

所以$f'(x)<0$在$[-\pi,0]$上恒成立，所以$f(x)$在$[-\pi,0]$上单调递减，所以$f(x)\geqslant f(0)=\frac{1}{e^\pi}+1>1$，

即$f(x)>1$在$[-\pi,0]$上恒成立.

(2)**解：**当$a=1$时，$f(x)=\frac{\sin x+1}{e^\pi}-\frac{1}{e^x}$，

令$\frac{\sin x+1}{e^\pi}-\frac{1}{e^x}=0$，整理得$e^{x-\pi}(\sin x+1)-1=0$，

不妨设$g(x)=e^{x-\pi}(\sin x+1)-1$，可得$g'(x)=e^{x-\pi}(\sin x+\cos x+1)$，

易知当$x\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$时，$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[-\sqrt{2},-1]$，$g'(x)\leqslant0$，$g(x)$单调递减，

当$x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$时，$\cos x\geqslant0$，$\sin x+\cos x+1\geqslant0$，$g'(x)\geqslant0$，$g(x)$单调递增，

又$g(\pi)=e^{\pi-\pi}(\sin\pi+1)-1=0$，所以$\pi$是$g(x)$的零点，

因为$g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\frac{3\pi}{2}+1\right)-1=-1<0$，$g(2\pi)=e^\pi(\sin2\pi+1)-1=e^\pi-1>0$，

所以函数$g(x)$在$\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$上存在一个零点，

故函数$f(x)$在$[\pi,2\pi]$上的零点个数为2.

21.(1)**解：**若选①，$2a_1+2^2a_2+2^3a_3+\cdots+2^na_n=\frac{4^{n+1}-4}{3}$，

则$2a_1+2^2a_2+2^3a_3+\cdots+2^{n-1}a_{n-1}=\frac{4^n-4}{3}(n\geqslant2)$，

两式相减，得$2^na_n=4^n$，所以$a_n=2^n(n\geqslant2)$，又$a_1=2$，也满足上式，所以$a_n=2^n$.

若选②，$S_n=2a_n-2$，则$S_{n-1}=2a_{n-1}-2(n\geqslant2)$，两式相减，得$a_n=2a_n-2a_{n-1}$，

所以$a_n=2a_{n-1}(n\geqslant2)$，又$a_1=2$，所以数列$\{a_n\}$是以2为首项，2为公比的等比数列，所以$a_n=2^n$.

若选③，$S_{n+1}-2S_n=2$，所以$S_n-2S_{n-1}=2(n\geqslant2)$，两式相减，得$a_{n+1}-2a_n=0$，

所以$a_{n+1}=2a_n(n\geqslant2)$，又$S_2-2S_1=a_2-a_1=2$，$a_1=2$，所以$a_2=4$，所以$a_2=2a_1$，

所以$a_{n+1}=2a_n(n\in\mathbf{N}_+)$，又$a_1=2$，所以数列$\{a_n\}$是以2为首项，2为公比的等比数列，所以$a_n=2^n$.

(2)**证明：**由(1)可得$b_n=n(n+1)$，所以$\frac{2n+1}{b_n^2}=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$，

所以$T_n=\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]=1-\frac{1}{(n+1)^2}<1$，又易知$f(n)=1-\frac{1}{(n+1)^2}(n\in\mathbf{N}_+)$单调递增，

所以$f(n)\geqslant f(1)=\frac{3}{4}$，所以$\frac{3}{4}\leqslant T_n<1$.

22.**解：**(1)$f(x)$定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=x-\frac{a}{x}=\frac{x^2-a}{x}$，令$f'(x)>0$，得$x>\sqrt{a}$，令$f'(x)<0$，得$0<x<\sqrt{a}$，

所以$f(x)$在$(0,\sqrt{a})$上单调递减，在$(\sqrt{a},+\infty)$上单调递增.

(2)①若$\sqrt{a}\leqslant1$，即$0<a\leqslant1$，在$(1,e)$上，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

所以$f(x)$在$[1,e]$上的最小值为$f(1)=\frac{1}{2}$；

②若$1<\sqrt{a}<e$，即$1<a<e^2$，

在$(1,\sqrt{a})$上，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，在$(\sqrt{a},e)$上，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

所以在$[1,e]$上，$f(x)_{min}=f(\sqrt{a})=\frac{1}{2}a(1-\ln a)$；

③若$\sqrt{a}\geqslant e$，即$a\geqslant e^2$，在$(1,e)$上，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

所以在$[1,e]$上，$f(x)_{min}=f(e)=\frac{1}{2}e^2-a$.

综上所述，当$0<a\leqslant1$时，$f(x)_{min}=\frac{1}{2}$，当$1<a<e^2$