设 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=4$，所以 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{x_1-1}{y_1-2}+\frac{x_2-1}{y_2-2}=\frac{\frac{y_1^2}{4}-1}{y_1-2}+\frac{\frac{y_2^2}{4}-1}{y_2-2}=\frac{y_1+2}{4}+\frac{y_2+2}{4}=\frac{y_1+y_2+4}{4}=2$.故选B.

5.D **提示**：由椭圆的焦距为 2，即 $|F_1F_2|=2c=2$，则 $c=1$，因为椭圆上的一点 P 与两个焦点 F_1,F_2 的距离的和等于 4，即 $|PF_1|+|PF_2|=2a=4$，所以 $a=2$，在 $\triangle PF_1F_2$ 中，$\angle PF_1F_2=120°$，由余弦定理，得 $|PF_2|^2=|PF_1|^2+|F_1F_2|^2-2|PF_1|\cdot|F_1F_2|\cos\angle PF_1F_2=(4-|PF_2|)^2+4+2(4-|PF_2|)$，得 $|PF_2|=\frac{14}{5}$，则 $|PF_1|=\frac{6}{5}$，所以 $\triangle PF_1F_2$ 的面积 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|F_1F_2|\sin\angle PF_1F_2=\frac{1}{2}\times\frac{6}{5}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{5}$.故选 D.

6.C **提示**：由双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=1(a>0)$，得其渐近线方程为 $y=\pm\frac{2}{a}x$，因为直线 $2x+y+m=0$ 与双曲线 C 至多有一个公共点，所以 $2x+y+m=0$ 与双曲线渐近线重合或平行，所以 $-\frac{2}{a}=-2$，解得 $a=1$，所以双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{4}=1$，则 $F_1(-\sqrt{5},0)$，$F_2(\sqrt{5},0)$，由双曲线定义知 $|AF_1|-|AF_2|=2a=2$，所以 $|AP|+|AF_2|=|AP|+|AF_1|-2\geqslant|PF_1|-2$，当且仅当 F_1,A,P 三点共线时，取等号，又 $P(\sqrt{5},2)$，所以 $|PF_1|=2\sqrt{6}$，所以 $(|AP|+|AF_2|)_{min}=|PF_1|-2=2\sqrt{6}-2$.故选 C.

7.D **提示**：依题意，得 $F(0,1)$，直线 $l:y=kx+1$，联立 $\begin{cases}y=kx+1,\\x^2=4y,\end{cases}$ 得 $x^2-4kx-4=0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4$，则 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2=4k^2+2$，所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{16k^2+16}=4k^2+4$，

所以以 AB 为直径的圆的圆心为 $(2k,2k^2+1)$，半径为 $2k^2+2$，所以该圆的方程为 $(x-2k)^2+(y-2k^2-1)^2=(2k^2+2)^2$，令 $y=0$，得 $(x-2k)^2+(2k^2+1)^2=(2k^2+2)^2$，得 $x=2k+\sqrt{4k^2+3}$ 或 $x=2k-\sqrt{4k^2+3}$，所以 $|PQ|=2\sqrt{4k^2+3}$，所以 $S_{\triangle FPQ}=\frac{1}{2}|PQ|\cdot1=\sqrt{4k^2+3}$，又 $S_{\triangle FPQ}\geqslant2$，即 $\sqrt{4k^2+3}\geqslant2$，解得 $k\leqslant-\frac{1}{2}$，或 $k\geqslant\frac{1}{2}$.故选 D.

8.A **提示**：连接 OP，当 P 不为椭圆的上、下顶点时，设直线 PA，PB 分别与圆 O 相切于点 A，B，设 $\angle OPA=\alpha$，由题意，得 $\angle APB\geqslant60°$，所以 $\alpha\geqslant30°$，所以 $\sin\alpha=\frac{|OA|}{|OP|}=\frac{b}{|OP|}\geqslant\sin30°=\frac{1}{2}$，则 $|OP|\leqslant2b$，又 $|OP|_{max}=a$，则 $a\leqslant2b$，所以 $\frac{b}{a}\geqslant\frac{1}{2}$，所以椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\leqslant\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $e\in\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.故选 A.

二、多项选择题

9.CD **提示**：因为双曲线 $C:\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{6}=1(m>0)$ 的一条渐近线的倾斜角为 120°，所以 $-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{m}}=\tan120°$，即 $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{m}}=\sqrt{3}$，解得 $m=2$，即 $a=\sqrt{m}=\sqrt{2}$，所以双曲线 C 的实轴长为 $2a=2\sqrt{2}$，故 A 错误；由 $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{6}$，得 $c=2\sqrt{2}$，所以离心率 $e=\frac{c}{a}=2$，故 B 错误；因为双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，双曲线 $\frac{y^2}{3}-x^2=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，故 C 正确；因为双曲线 C 的焦距为 $2c=4\sqrt{2}$，椭圆 $x^2+\frac{y^2}{9}=1$ 的焦距为 $2\sqrt{9-1}=4\sqrt{2}$，故 D 正确.故选 CD.

10.ACD **提示**：由 $\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{OQ}$，可知 P,Q 关于原点对称，则四边形 PF_1QF_2 是平行四边形.对于 A，$\triangle PQF_2$ 的周长为 $|PQ|+|PF_2|+|QF_2|=|PQ|+|PF_2|+|PF_1|=|PQ|+2a=|PQ|+8$，当 PQ 为椭圆 C 的的短轴时，$|PQ|$ 取得最小值 6，所以 $\triangle PQF_2$ 周长的最小值为 14，故 A 正确；对于 B，因为 $a=4$，$b=3$，$c=\sqrt{7}$，则 $\tan\angle F_1AO=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{7}}{3}$，所以 $\angle F_1AO<\frac{\pi}{4}$，则 $\angle F_1AF_2<\frac{\pi}{2}$，故椭圆 C 上不存在点 P，使得 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$，又四边形 PF_1QF_2 是平行四边形，所以四边形 PF_1QF_2 不可能是矩形，故 B 错误；对于 C，由题意，得 $B(4,0)$，设 $P(x,y)$，则 $Q(-x,-y)$，所以 $k_{PB}\cdot k_{QB}=\frac{y}{x-4}\cdot\frac{-y}{-x-4}=\frac{y^2}{x^2-16}=\frac{9\left(1-\frac{x^2}{16}\right)}{x^2-16}=-\frac{9}{16}$，故 C 正确；对于 D，$\triangle PQF_2$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot|OF_2|\cdot|y_P-y_Q|$，所以当 PQ 为椭圆 C 的短轴时，$|y_P-y_Q|$ 取得最大值 6，所以 $S=\frac{1}{2}\cdot|OF_2|\cdot|y_P-y_Q|\leqslant\frac{1}{2}\times\sqrt{7}\times6=3\sqrt{7}$，故 D 正确.故选ACD.

11.ABD **提示**：设直线 AB 的方程为 $x=my+1$，联立 $\begin{cases}y^2=4x,\\x=my+1,\end{cases}$ 得 $y^2-4my-4=0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$x_1\geqslant x_2>0$，则 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，故 A 正确；由抛物线的定义可知 $|AF|=x_1+1$，$|BF|=x_2+1$，则 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}=\frac{1}{my_1+2}+\frac{1}{my_2+2}=\frac{m(y_1+y_2)+4}{m^2y_1y_2+2m(y_1+y_2)+4}=\frac{4m^2+4}{-4m^2+8m^2+4}=1$，故 B 正确；$S_{\triangle TAB}=\frac{1}{2}\cdot|TF|\cdot|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{16m^2+16}\geqslant4$，当且仅当 $m=0$ 时，等号成立，故 $S_{\triangle TAB}$ 的最小值为 4，故 C 错误；由 $|AT|=2|BQ|$，得 $\angle TBF=90°$，即 $\overrightarrow{BT}\cdot\overrightarrow{BF}=0$，所以 $(-1-x_2,-y_2)\cdot(1-x_2,-y_2)=x_2^2-1+y_2^2=x_2^2+4x_2-1=0$，解得 $x_2=\sqrt{5}-2$ 或 $x_2=-\sqrt{5}-2$（舍去），又 $x_1x_2=\frac{y_1^2y_2^2}{16}=1$，所以 $x_1=\sqrt{5}+2$，所以 $|AF|-|BF|=x_1+1-(x_2+1)=4$，故 D 正确.故选 ABD.

12.BCD **提示**：由题意，得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\\2b=4,\\a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $a=4$，$b=2$，$c=2\sqrt{3}$，则椭圆 C 的方程为 $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1$，故 A 错误，B 正确；当点 P 与椭圆 C 的短轴端点重合时，$\triangle PF_1F_2$ 的面积最大，且最大值为 $S=\frac{1}{2}\cdot|F_1F_2|\cdot b=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times2=4\sqrt{3}$.设 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径的最大值为 r，则 $S=\frac{1}{2}(|F_1F_2|+|PF_1|+|PF_2|)\times r=4\sqrt{3}$，解得 $r=\frac{4\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}=4\sqrt{3}-6$，故 C 正确；若 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，即 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$.当点 P 与椭圆 C 的短轴端点重合时，$\angle F_1PF_2$ 最大，由余弦定理的推论，可得 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{a^2+a^2-(2c)^2}{2a^2}=\frac{a^2-2c^2}{a^2}=-\frac{1}{2}$，因为 $\angle F_1PF_2\in(0,\pi)$，所以 $\angle F_1PF_2=\frac{2\pi}{3}$，即 $\angle F_1PF_2$ 的最大值为 $\frac{2\pi}{3}$，所以满足条件的点 P 有且仅有四个，故 D 正确.故选 BCD.

三、填空题

13.$\sqrt{2}$ **提示**：由焦点坐标为 $(0,1)$ 知，椭圆的焦点在 y 轴上，且 $a^2-1=1$，$a>0$，解得 $a=\sqrt{2}$.

14.2 **提示**：抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 $F(1,0)$，可知 $t>1$，不妨设点 A 在第一象限，则 $A(t,2\sqrt{t})$，$B(t,-2\sqrt{t})$，则 $|AB|=4\sqrt{t}$，所以直线 AD 的方程为 $y=\frac{2\sqrt{t}}{t-1}(x-1)$，联立 $\begin{cases}y=\frac{2\sqrt{t}}{t-1}(x-1),\\y^2=4x,\end{cases}$ 得 $tx^2-(t^2+1)x+t=0$，所以 $x_1+x_2=\frac{t^2+1}{t}$，由 $A(t,2\sqrt{t})$，得 $x_D=\frac{t^2+1}{t}-t=\frac{1}{t}$，代入 $y^2=4x$，得 $y_D=-\frac{2}{\sqrt{t}}$，所以 $|DE|=\frac{4}{\sqrt{t}}$，所以 $S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{t}\times(t-1)=2\sqrt{t}(t-1)$，$S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{\sqrt{t}}\times\left(1-\frac{1}{t}\right)=\frac{2(t-1)}{t\sqrt{t}}$，所以 $\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle DEF}}=\frac{2\sqrt{t}(t-1)}{\frac{2(t-1)}{t\sqrt{t}}}=t^2=4$，又 $t>1$，所以 $t=2$.

15.$\frac{12}{13}$ **提示**：设 $F_1(-c,0)$ 关于直线 $y=2x$ 的对称为点 $P(x_1,y_1)$，则 $\begin{cases}\frac{y_1}{x_1+c}\cdot2=-1,\\\frac{y_1}{2}=2\frac{x_1-c}{2},\end{cases}$ 得 $P\left(\frac{3c}{5},-\frac{4c}{5}\right)$，可知 $|PF_1|=\frac{4\sqrt{5}}{5}c$，$|PF_2|=\frac{2\sqrt{5}}{5}c$，又 $|F_1F_2|=2c$，所以 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$，则 $\angle F_1PF_2$ 为直角，又点 P 恰好在椭圆 C 上，由椭圆的定义，得 $|PF_1|+|PF_2|=2a$，得 $a=\frac{3\sqrt{5}}{5}c$，又 $|QF_1|+|QF_2|=2a$，设 $|QF_1|=m$，则 $|QF_2|=2a-m=\frac{6\sqrt{5}}{5}c-m$，在 Rt$\triangle QPF_2$ 中，$\left(m+\frac{4\sqrt{5}}{5}c\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}c\right)^2=\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}c-m\right)^2$，解得 $m=\frac{4\sqrt{5}}{25}c$，所以 $|QF_2|=\frac{26\sqrt{5}}{25}c$，$|QP|=\frac{24\sqrt{5}}{25}c$，所以 $\cos\angle F_1QF_2=\frac{|QP|}{|QF_2|}=\frac{12}{13}$.

16. ①③④ **提示**：由题意知 $F(1,0)$，联立 $\begin{cases}y=\sqrt{3}(x-1),\\y^2=4x,\end{cases}$ 得 $3x^2-10x+3=0$，解得 $x=3$，或 $x=\frac{1}{3}$，因为点 A 在 x 轴上方，所以 $A(3,2\sqrt{3})$，所以 $\triangle OFA$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot|OF|\cdot y_A=\frac{1}{2}\times1\times2\sqrt{3}=\sqrt{3}$，故①正确；又 $y^2=4x$，可取 $y=2\sqrt{x}$，所以 $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}$，故点 A 处切线的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，切线方程为 $y-2\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3)$，即 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$，令 $y=0$，则 $x=-3$，所以点 $H(-3,0)$，故②错误；把 $x=-1$ 代入 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$ 中，得 $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，即 $P\left(-1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，设点 $Q(m,0)$，由 $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$，得 $(m-3,-2\sqrt{3})\cdot\left(m+1,-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)=0$，即 $m^2-2m+1=0$，解得 $m=1$，所以点 $Q(1,0)$，故③正确；因为 $H(-3,0)$，$F(1,0)$，所以以 HF 为直径的圆的方程为 $(x+1)^2+y^2=4$，所以点 $N(0,-\sqrt{3})$，所以 $\overrightarrow{AF}=(-2,-2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{FN}=(-1,-\sqrt{3})$，所以 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FN}$，故④正确.

四、解答题

17.**解**：(1)双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的焦点为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，因为 F_2 也为抛物线 $y^2=8x$ 的焦点，所以 $F_2(2,0)$，$c=2$，因为 $F_1,F_2,P(0,2b)$ 是等腰直角三角形的三个顶点，所以 $2b=c$，则 $b=1$，所以 $a^2=c^2-b^2=3$，所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$.

(2)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x-1,\\\frac{x^2}{3}-y^2=1,\end{cases}$ 得 $x^2+12x-24=0$，所以 $x_1+x_2=-12$，$x_1x_2=-24$，所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}}\times\sqrt{(-12)^2+4\times24}=10\sqrt{3}$.

18.(1)**解**：因为 $|PF|=y_P+\frac{p}{2}$，所以 $4=3+\frac{p}{2}$，解得 $p=2$，所以抛物线 C 的标准方程为 $x^2=4y$.

(2)**证明**：设切线 AN 的方程为 $y=k(x-a)$，$k\neq0$，联立 $\begin{cases}x^2=4y,\\y=k(x-a),\end{cases}$ 得 $x^2-4kx+4ka=0$，由题意可得 $\Delta=16k^2-16ka=0$，即 $a=k$，所以切点 $N(2a,a^2)$，又 $A(a,0)$，$F(0,1)$，所以 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AN}=(-a,1)\cdot(a,a^2)=0$.所以 $\angle FAN=90°$，所以以 FN 为直径的圆过点 A.

19.**解**：(1)椭圆 C 的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，短轴的一个端点到焦点的距离为 $\sqrt{b^2+c^2}=a=\sqrt{2}$，所以 $c=1$，所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=1$，所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)设直线 l 的方程为 $y=kx+m$，则直线 l 与 y 轴交点的纵坐标为 m，设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases}y=kx+m,\\x^2+2y^2=2,\end{cases}$ 化简得 $(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-2=0$，由韦达定理，得 $x_1+x_2=-\frac{4km}{2k^2+1}$，$\Delta=16k^2m^2-4(2k^2+1)(2m^2-2)>0$，化简得 $m^2<2k^2+1$. 由线段 AB 的中点在直线 $x=-\frac{1}{2}$ 上，得 $x_1+x_2=-1$，故 $-\frac{4km}{2k^2+1}=-1$，即 $4km=2k^2+1$，所以 $m=\frac{2k^2+1}{4k}=\frac{k}{2}+\frac{1}{4k}\geqslant2\sqrt{\frac{k}{2}\cdot\frac{1}{4k}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，当且仅当 $\frac{k}{2}=\frac{1}{4k}$，即 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号，此时 $m^2<2k^2+1$，满足 $\Delta>0$，所以直线 l 与 y 轴交点纵坐标的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

20.**解**：(1)由 $\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{FA}$，得焦点 $F(1,0)$ 是线段 PA 的中点，因为抛物线 $C:y^2=4x$ 关于 x 轴对称，所以 $PA\perp x$ 轴，所以直线 l 的方程为 $x=1$.

(2)设点 $P(x_0,y_0)(y_0\neq0)$，$A(x_1,y_1)(y_1\neq0)$，由 $\overrightarrow{PF}=\lambda\overrightarrow{FA}$，即 $(1-x_0,-y_0)=\lambda(x_1-1,y_1)$，得 $\lambda=-\frac{y_0}{y_1}$，①

设直线 l 的方程为 $x=my+1$，联立 $\begin{cases}y^2=4x,\\x=my+1,\end{cases}$ 得 $y^2-4my-4=0$，所以 $\Delta_1=16(m^2+1)>0$，$y_0y_1=-4$，②

由①②，得 $\lambda=\frac{y_0^2}{4}$，设点 $B(x_2,y_2)$，由 $\overrightarrow{PE}=\mu\overrightarrow{EB}$，即 $(a-x_0,-y_0)=\mu(x_2-a,y_2)$，得 $\mu=-\frac{y_0}{y_2}$，③

设直线 PE 的方程为 $x=ny+a$，联立 $\begin{cases}y^2=4x,\\x=ny+a,\end{cases}$ 得 $y^2-4ny-4a=0$，所以 $\Delta_2=16(n^2+a)$，$y_0y_2=-4a$，④

由③④，得 $\mu=\frac{y_0^2}{4a}$，又 $\lambda=4\mu$，所以 $\frac{y_0^2}{4}=4\cdot\frac{y_0^2}{4a}$，又 $y_0\neq0$，则 $a=4$，此时 $\Delta_2=16(n^2+a)=16(n^2+4)>0$.所以 a 的值为 4.

21.**解**：(1)由椭圆的焦距 $2c=2\sqrt{3}$，得 $c=\sqrt{3}$，根据椭圆的定义，得 $|MF_1|+|MF_2|=|NF_1|+|NF_2|=2a$，因为 $\triangle F_2MN$ 的周长为 8，所以 $|F_2M|+|F_2N|+|MN|=|F_1M|+|F_2M|+|F_1N|+|F_2N|=4a=8$，则 $a=2$，所以 $b^2=a^2-c^2=1$，所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)假设存在 x 轴上的定点 $T(t,0)$，使得 $\angle ETO=\angle HTG$，则 $\angle ETG+\angle HTG=\pi$，所以 $k_{ET}+k_{HT}=0$.由题意，得直线 EH 的斜率一定存在，设直线 EH 的方程为 $x=my+3$，$E(x_1,y_1)$，$H(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\x=my+3,\end{cases}$ 得 $(m^2+4)y^2+6my+5=0$，则 $\Delta=36m^2-20(m^2+4)=16(m^2-5)>0$，得 $m^2>5$，且 $y_1+y_2=-\frac{6m}{m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{5}{m^2+4}$，因为直线 ET 的斜率为 $k_{ET}=\frac{y_1}{x_1-t}$，直线 HT 的斜率为 $k_{HT}=\frac{y_2}{x_2-t}$，由 $k_{ET}+k_{HT}=0$，即 $\frac{y_1}{x_1-t}+\frac{y_2}{x_2-t}=0$，得 $y_1(x_2-t)+y_2(x_1-t)=0$，因为 $x_1=my_1+3$，$x_2=my_2+3$，所以 $y_1(my_2+3-t)+y_2(my_1+3-t)=0$，即 $2my_1y_2+(3-t)(y_1+y_2)=0$，所以 $\frac{10m}{m^2+4}-\frac{6(3-t)m}{m^2+4}=\frac{m(6t-8)}{m^2+4}=0$，解得 $t=\frac{4}{3}$，所以在 x 轴上存在一个定点 $T\left(\frac{4}{3},0\right)$，使得 $\angle ETO=\angle HTG$.

22.**解**：(1)因为点 M 关于 y 轴对称的点为 P，所以 MP 平行于 x 轴，又 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}=0$，所以 MN 垂直于 x 轴，又直线 l 经过点 F，所以 $|MN|=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，又 $a^2+b^2=4$，所以 $a^2=3$，$b^2=1$，所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$.

(2)当直线 l 的斜率不存在时，$|MN|=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$|QF|=|OF|=c=2$，则 $\frac{|QF|}{|MN|}=\sqrt{3}$.

当直线 l 的斜率为 0 时，不符合题意.

当直线 l 的斜率存在且不为 0 时，设直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}y=k(x-2),\\\frac{x^2}{3}-y^2=1,\end{cases}$ 得 $(1-3k^2)x^2+12k^2x-12k^2-3=0$，因为直线 l 与双曲线 C 的右支相交于 M,N 两点，所以 $x_1+x_2=\frac{12k^2}{3k^2-1}>0$，得 $k^2>\frac{1}{3}$，又 $x_1x_2=\frac{12k^2+3}{3k^2-1}$，则 $|MN|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{2\sqrt{3}(1+k^2)}{3k^2-1}$，因为 $y_1+y_2=k(x_1+x_2-4)=\frac{4k}{3k^2-1}$，所以线段 MN 的中点 $R\left(\frac{6k^2}{3k^2-1},\frac{2k}{3k^2-1}\right)$，所以线段 MN 的垂直平分线的方程为 $y-\frac{2k}{3k^2-1}=-\frac{1}{k}\left(x-\frac{6k^2}{3k^2-1}\right)$，由题意，知 Q 为 MN 的垂直平分线与 y 轴的交点，令 $x=0$，得 $y=\frac{8k}{3k^2-1}$，即 $Q\left(0,\frac{8k}{3k^2-1}\right)$，又 $F(2,0)$ 所以 $|QF|=\sqrt{4+\left(\frac{8k}{3k^2-1}\right)^2}=\frac{2\sqrt{9k^4+10k^2+1}}{3k^2-1}$，所以 $\frac{|QF|}{|MN|}=\sqrt{\frac{9k^2+1}{3k^2+3}}=\sqrt{3-\frac{8}{3k^2+3}}$，又 $k^2>\frac{1}{3}$，所以 $1<\sqrt{3-\frac{8}{3k^2+3}}<\sqrt{3}$.

综上，$\frac{|QF|}{|MN|}$ 的取值范围为 $(1,\sqrt{3}]$.

扫码免费下载习题讲解 ppt

第 17 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B **提示**：因为直线 $4x+2y-1=0$ 与直线 $ax+4y=0$ 垂直，所以 $(-2)\times\left(-\frac{a}{4}\right)=-1$，解得 $a=-2$.故选 B.

2.D **提示**：因为点 $P(-2,1)$ 到直线 $l:3x-4y+m=0$ 的距离为 1，所以 $\frac{|3\times(-2)-4\times1+m|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$，解得 $m=15$ 或 5.故选 D.

3.A **提示**：因为 $A(3,2)$，$B(1,1)$，所以直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\frac{1}{2}$，则 AB 边上的高所在的直线的斜率为 -2，又 $C(2,3)$，所以所求直线方程是 $y-3=-2(x-2)$，即 $2x+y-7=0$.故选 A.

4.C **提示**：圆 $x^2+y^2-4x-4y-10=0$，即 $(x-2)^2+(y-2)^2=18$，则圆心坐标为 $(2,2)$，半径为 $3\sqrt{2}$，所以圆上的点到直线 $x+y+6=0$ 的最大距离是 $\frac{|2+2+6|}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}=8\sqrt{2}$.故选 C.

5.A **提示**：设点 M 的坐标为 $M(x,y)$，因为 $P(1,0)$，线段 PQ 的中点为 M，所以 $Q(2x-1,2y)$，又点 Q 在圆 $x^2+y^2=4$ 上，所以 $(2x-1)^2+(2y)^2=4$，即 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=1$.故选 A.

6.B **提示**：直线 $l:x+(\lambda-1)y-\lambda=0$，即 $(y-1)\lambda+(x-y)=0$，由 $\begin{cases}y-1=0,\\x-y=0,\end{cases}$ 解得 $x=y=1$，即直线 l 恒过定点 $C(1,1)$，又 $|OC|=\sqrt{2}<2$，所以点 $C(1,1)$ 在圆内，所以当 $OC\perp l$ 时，弦 $|MN|$ 取得最小值，因为 $k_{OC}=1$，所以直线 l 的斜率为 -1，即 $\frac{1}{1-\lambda}=-1$，解得 $\lambda=2$.故选 B.

7.B **提示**：由圆 $C_1:(x-4)^2+(y-1)^2=1$，得圆心为 $C_1(4,1)$，半径为 $r_1=1$，由圆 $C_2:(x-3)^2+(y-1)^2=1$，得圆心为 $C_2(3,1)$，半径为 $r_2=1$，设点 C_1 关于直线 $y=x+1$ 的对称点为 $C_3(x_0,y_0)$，则 $\begin{cases}\frac{y_0-1}{x_0-4}\cdot1=-1,\\\frac{y_0+1}{2}=\frac{x_0+4}{2}+1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=0,\\y_0=5,\end{cases}$ 即 $C_3(0,5)$，连接 C_2C_3，因为点 C_1,C_3 关于直线 $y=x+1$ 对称，所以 $|PC_1|=|PC_3|$，则 $|PM|+|PN|\geqslant(|PC_1|-|MC_1|)+(|PC_2|-|NC_2|)=(|PC_3|-1)+(|PC_2|-1)=|PC_3|+|PC_2|-2\geqslant|C_2C_3|-2$，当且仅当 P,C_2,C_3 在同一直线上时取等号，又 $|C_2C_3|=5$，所以 $|PM|+|PN|$ 的最小值为 3.故选 B.

8.A **提示**：由圆的性质，知 P,A,B,C 四点共圆，且 $PC\perp AB$，由圆 $C:(x-1)^2+(y+2)^2=4$，得圆心为 $C(1,-2)$，半径 $r=2$，所以 $|PC|\cdot|AB|=2S_{PACB}=4\times\frac{1}{2}|PA|\cdot r=4|PA|$，所以当 $|PC|\cdot|AB|$ 最小，即 $|PA|$ 最小时，因为 $|PA|=\sqrt{|PC|^2-4}$，当 $PC\perp l$ 时，此时 $|PC|$ 取得最小值，此时点 C 到 l 的距离 $d=|PC|=\frac{|1-2\times(-2)+5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5}$，所以 $|PA|=\sqrt{|PC|^2-4}=\sqrt{20-4}=4$.故选 A.

二、多项选择题

9.AC **提示**：对于 A，由 $y=ax-2a+4$，得 $y=a(x-2)+4$，当 $x=2$ 时，$y=4$，故 A正确；对于 B，将 $x=0$ 代入直线方程 $3x-y-1=0$，得 $y=-1$，故 B错误；对于 C，由直线方程 $x-2y+3=0$，则可设其垂线方程为 $2x+y+m=0$，将点 $(-2,3)$ 代入上式，得 $2\times(-2)+3+m=0$，解得 $m=1$，则垂线方程为 $2x+y+1=0$，故 C 正确；对于 D，由直线方程 $x+\sqrt{3}y+1=0$，可得其斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$，设其倾斜角为 θ，则 $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，得 $\theta=150°$，故 D 错误.故选 AC.

10.BD **提示**：因为圆 M 的方程为 $x^2+y^2+6x+8y=0$，即 $(x+3)^2+(y+4)^2=25$，所以圆 M 的圆心为 $M(-3,-4)$，半径为 5，故 A错误，B正确；因为 $(-6+3)^2+(-8+4)^2=25$，所以点 $(-6,-8)$ 在圆 M 上，故 C错误；易知圆心 $M(-3,-4)$ 在直线 $x-y-1=0$ 上，所以圆 M 关于直线 $x-y-1=0$ 对称，故 D 正确.故选 BD.

11.BD **提示**：圆 $O_1:x^2+y^2-2x-3=0$ 的圆心为 $O_1(1,0)$，半径为 $r_1=2$，圆 $O_2:x^2+y^2-2y-1=0$ 的圆心为 $O_2(0,1)$，半径为 $r_2=\sqrt{2}$.对于 A，两圆的圆心距 $|O_1O_2|=\sqrt{2}$，故 A 错误；对于 B，两个圆的方程作差，得 $-2x+2y-2=0$，即 $x-y+1=0$，故 B正确；对于 C，圆 O_1 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，所以 $|AB|=2\sqrt{2^2-2}=2\sqrt{2}$，故 C错误；对于 D，圆 O_1 上的点到直线 AB 的最大距离为 $r_1+d=2+\sqrt{2}$，故 D 正确.故选 BD.

12.ACD **提示**：对于 A，设圆心为 $C(-2,b)$，圆的半径为 r，由题设知 $\frac{|-2+\sqrt{3}b-2|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=\sqrt{(-2+1)^2+(b-\sqrt{3})^2}$，解得 $b=0$，所以 $r=\sqrt{(-2+1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$，故圆的方程为 $(x+2)^2+y^2=4$，故 A 正确；对于 B，当 AE 过圆心 C 时，弦 AE 的长度取得最大值 4，故 B 错误；对于 C，线段 AE，BF 的中点分别为 M,N，所以 $CM\perp AE$，$CN\perp BF$，又 $AE\perp BF$，所以四边形 $MDNC$ 为矩形，所以 MN 与 CD 互相平分，即 MN 过 CD 的中点 $\left(-\frac{3}{2},0\right)$，故 C 正确；对于 D，由直角三角形斜边上中线的性质知，得存在点 $G\left(-\frac{3}{2},0\right)$，使 $|NG|=\frac{1}{2}|CD|=\frac{1}{2}$，为定值，故 D 正确.故选 ACD.

三、填空题

13.$\frac{3\sqrt{5}}{5}$ **提示**：因为 $l_1/\!/l_2$，所以 $a(a+1)-2=0$，解得 $a=-2$ 或 $a=1$.当 $a=-2$ 时，直线 $l_1:x-2y+2=0$，直线 $l_2:x-2y-1=0$，则直线 l_1 与 l_2 之间的距离为 $d=\frac{|2-(-1)|}{\sqrt{1+4}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$；当 $a=1$ 时，直线 $l_1:x+y-1=0$，直线 $l_2:x+y-1=0$，两直线重合，不满足题意.

综上，直线 l_1 与 l_2 之间的距离为 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

14.$(x-3)^2+(y+3)^2=20$ **提示**：因为该圆的圆心在直线 $y=-x$ 上，设圆心为 $C(a,-a)$，因为该圆与直线 $y=2x+1$ 相切于点 $M(-1,-1)$，所以圆心 C 到直线 $y=2x+1$ 的距离 $d=|MC|$，即 $\frac{|3a+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{(a+1)^2+(-a+1)^2}$，解得 $a=3$，则 $|MC|=2\sqrt{5}$，所以圆的方程为 $(x-3)^2+(y+3)^2=20$.

15.$\sqrt{2}+3$ **提示**：设 $P(x,y)$，由题意，可得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(3-x,-y)(-1-x,2-y)=(3-x)(-1-x)-y(2-y)=4$，整理得 $(x-1)^2+(y-1)^2=9$，即点 P 在以 $(1,1)$ 为圆心，3 为半径的圆上，又圆心与原点之间的距离为 $\sqrt{2}$，所以 $|OP|_{max}=\sqrt{2}+3$.

16.$(2-\sqrt{5},2+\sqrt{5})$ **提示**：由 $A(1,a)$，$B(3,a+4)$，得 $k_{AB}=\frac{a+4-a}{3-1}=2$，$|AB|=\sqrt{(3-1)^2+(a+4-a)^2}=2\sqrt{5}$，设 $\triangle ABC$ 的高为 h，因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{5}$，所以 $S=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot h=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}h=\sqrt{5}$，解得 $h=1$，直线 AB 的方程为 $y-a=2(x-1)$，即 $2x-y-2+a=0$，因为圆 $x^2+y^2=4$ 上有且仅有四个不同的点 C，使得 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{5}$，所以圆心 O 到直线 $2x-y-2+a=0$ 的距离 d 应该满足 $d<r-h=1$，且 $d=\frac{|a-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|a-2|}{\sqrt{5}}$，即 $\frac{|a-2|}{\sqrt{5}}<1$，解得 $2-\sqrt{5}<a<2+\sqrt{5}$.

四、解答题

17.**解**：(1)由 $B(1,4)$，$C(3,8)$，得直线 BC 的斜率 $k_{BC}=\frac{8-4}{3-1}=2$，BC 的中点为 $(2,6)$，所以 BC 边的垂直平分线的斜率为 $-\frac{1}{2}$，又该直线经过点 $(2,6)$，所以所求方程为 $y-6=-\frac{1}{2}(x-2)$，即 $x+2y-14=0$.

(2)由题意，得等腰三角形 ABC 的顶点在 BC 边的垂直平分线 $x+2y-14=0$ 上，且在直线 $x+y-6=0$ 上，联立两直线方程，解得 $x=-2$，$y=8$，则点 A 的坐标为 $(-2,8)$.

18.**解**：(1)因为圆 C 的圆心 C 在直线 $y=3x+2$ 上，所以可设 $C(a,3a+2)$，因为圆 C 过 $A(0,0)$，$B(2,2)$ 两点，所以 $|CA|=|CB|$，所以 $a^2+(3a+2)^2=(a-2)^2+(3a+2-2)^2$，解得 $a=0$，所以圆心为 $C(0,2)$，半径为 $|CA|=2$，所以圆 C 的标准方程为 $x^2+(y-2)^2=4$.

(2)由题意，得切线 l 的斜率存在，设为 k，则切线 l 的方程为 $y-0=k(x-3)$，即 $kx-y-3k=0$.所以圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{|0-2-3k|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得 $k=0$，或 $k=-\frac{12}{5}$，故切线 l 的方程为 $y=0$ 或 $12x+5y-36=0$.

19.**解**：(1)圆 $C:x^2+y^2=9$ 的圆心为 $C(0,0)$，半径 $r=3$，圆心 $C(0,0)$ 到直线 $ax-y+5=0$ 的距离 $d=\frac{5}{\sqrt{a^2+1}}$，因为直线 $ax-y+5=0$ 与圆 $C:x^2+y^2=9$ 相交于不同的两点 A，B，所以 $d<r$，即 $\frac{5}{\sqrt{a^2+1}}<3$，解得 $a>\frac{4}{3}$ 或 $a<-\frac{4}{3}$，所以实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)\cup\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$.

(2)因为 A，B 为圆上的点，所以 AB 的垂直平分线过圆心，所以直线 PC 与直线 $ax-y+5=0$ 垂直，又 $P(-2,1)$，则直线 PC 的斜率 $k_{PC}=-\frac{1}{2}$，所以 $-\frac{1}{2}a=-1$，解得 $a=2$，因为 $2\in\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)\cup\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$，所以存在 $a=2$，使得过点 $P(-2,1)$ 的直线 l 垂直平分弦 AB.

20.**解**：(1)由圆 $C:(x-2)^2+y^2=25$，得圆心为 $C(2,0)$，半径为 $r=5$.①当直线 l 的斜率不存在时，即 $l:x=-1$，代入圆的方程，得 $y=\pm4$，则 $|AB|=8$ 成立；②当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y-\frac{3}{2}=k(x+1)$，即 $2kx-2y+3+2k=0$，因为 $|AB|=8$，所以圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\sqrt{r^2-4^2}=3$，则 $d=\frac{|4k+3+2k|}{\sqrt{4+4k^2}}=3$，解得 $k=\frac{3}{4}$，所以直线 l 的方程为 $y-\frac{3}{2}=\frac{3}{4}(x+1)$，即 $3x-4y+9=0$.

(2)因为 $|PC|\cdot|EF|$ 的最小值，即四边形 $PECF$ 面积的最小值，且 $|PC|\cdot|EF|=2S_{PECF}=2\times2\times\frac{1}{2}|PE|\cdot r=10\cdot|PE|$，所以只需 $|PE|$ 取得最小值，又圆心 C 到直线 $x-y+8=0$ 的距离为 $\frac{|2-0+8|}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$，所以 $|PE|$ 的最小值为 $\sqrt{(5\sqrt{2})^2-5^2}=5$，所以 $|PC|\cdot|EF|$ 的最小值为 50.

21.**解**：(1)设点 $A\left(\frac{y_0^2}{4},y_0\right)$，则 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\cdot2y_0\cdot\frac{y_0^2}{4}=2$，解得 $y_0=2$，所以 $A(1,2)$，故 $r^2=1^2+2^2=5$.

所以圆 O 的方程是 $x^2+y^2=5$.

(2)由 $\begin{cases}y=k(x-1),\\x^2+y^2=5,\end{cases}$ 得 $(1+k^2)x^2-2k^2x+k^2-5=0$，且 $k<0$.设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{2k^2}{1+k^2}$，$x_1x_2=\frac{k^2-5}{1+k^2}$，

所以 $\frac{k_1k_2}{k}=\frac{y_1y_2}{k(x_1-3)(x_2-3)}=\frac{k^2(x_1-1)(x_2-1)}{k(x_1-3)(x_2-3)}=k\cdot\frac{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}{x_1x_2-3(x_1+x_2)+9}=\frac{-k}{1+k^2}$，又 $k<0$，所以 $\frac{-k}{1+k^2}=\frac{1}{-\frac{1}{k}-k}\leqslant\frac{1}{2}$，当且仅当 $k=-1$ 时，等号成立，所以 $\frac{k_1k_2}{k}$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$，此时直线 l 的方程为 $y=-x+1$.

22.**解**：(1)根据题意，圆 $C:x^2+y^2-6x-10y-6t=0$ 变形可得 $(x-3)^2+(y-5)^2=34+6t$，故圆心为 $C(3,5)$，半径 $r=\sqrt{34+6t}$，则圆心 C 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|3+15+12|}{\sqrt{10}}=3\sqrt{10}$，又弦长为 $2\sqrt{10}$，则 $r^2=(3\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2=100$，即 $34+6t=100$，解得 $t=11$.

(2)当 $t=1$ 时，圆 C 的方程为 $x^2+y^2-6x-10y-6=0$，①

变形可得 $(x-3)^2+(y-5)^2=40$，则圆心为 $C(3,5)$，半径 $r=2\sqrt{10}<3\sqrt{10}$，圆 C 与直线 l 相离.假设在直线 AB 上存在一个定点满足条件，设动点 $P(m,n)$.由已知得 $PA\perp AC$，$PB\perp BC$，则 A，B 在以 CP 为直径的圆 $(x-3)(x-m)+(y-5)(y-n)=0$ 上，该圆的方程可化为 $x^2+y^2-(3+m)x-(5+n)y+3m+5n=0$.②

由①-②得，直线 AB 的方程为 $(m-3)x+(n-5)\cdot y-3m-5n-6=0$.③

又点 $P(m,n)$ 在直线 l 上，则 $m+3n+12=0$，即 $m=-3n-12$，代入③式得 $(-3n-15)x+(n-5)y+4n+30=0$，即直线 AB 的方程为 $15x+5y-30+n\cdot(3x-y-4)=0$. 因为上式对任意 n 都成立，故 $\begin{cases}3x-y-4=0,\\15x+5y-30=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{5}{3},\\y=1,\end{cases}$ 故直线 AB 恒过一个定点，定点坐标为 $\left(\frac{5}{3},1\right)$.

第 18 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C **提示**：因为 $|PF_1|+|PF_2|=a+\frac{9}{a}\geqslant2\sqrt{a\cdot\frac{9}{a}}=6=|F_1F_2|(a>0)$，所以当 $a+\frac{9}{a}=6$，即 $a=3$ 时，点 P 的轨迹为线段；由椭圆的定义，当 $a+\frac{9}{a}>6$ 时，点 P 的轨迹为椭圆.故选 C.

2.C **提示**：当椭圆的焦点在 x 轴上时，根据题意，得 $\begin{cases}a=2,\\a=2b,\end{cases}$ 得 $a=2$，$b=1$，所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；当椭圆的焦点在 y 轴上时，根据题意，得 $\begin{cases}b=2,\\a=2b,\end{cases}$ 得 $a=4$，$b=2$，所以椭圆的标准方程为 $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1$.故选 C.

3.D **提示**：由椭圆 $C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$，得 $|F_1F_2|=4$，因为

$|AF_2|=4$,由椭圆的定义,得$|AF_1|+|AF_2|=2a=6$,则$|AF_1|=2$,所以$\triangle AF_1F_2$是等腰三角形,则$\triangle AF_1F_2$的面积为$\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$.故选D.

4.A 提示:由椭圆C:$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$,得$a^2=9,b^2=5$,则$a=3,c=2$,所以右焦点为$F_2(2,0)$,所以$|AF_1|+|AF_2|=2a=6$,所以$|AF_1|=6-|AF_2|$,所以$|AB|+|AF_1|=|AB|+6-|AF_2|\leqslant6+|BF_2|=6+1=7$,当且仅当$B,A,F_2$在同一直线上,且$F_2$在$A,B$之间时,取等号,所以$|AB|+|AF_1|$的最大值为7.故选A.

5.C 提示:由点$P(2,-1)$,得OP的中点为$\left(1,-\frac{1}{2}\right)$,设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,由四边形$OAPB$为平行四边形,得$AB$的中点为$\left(1,-\frac{1}{2}\right)$,即$x_1+x_2=2,y_1+y_2=-1$,将$A,B$的坐标代入椭圆的方程,得$\begin{cases}\frac{x_1^2}{8}+\frac{y_1^2}{2}=1,\\\frac{x_2^2}{8}+\frac{y_2^2}{2}=1,\end{cases}$两式作差,得$\frac{x_1^2-x_2^2}{8}+\frac{y_1^2-y_2^2}{2}=0$,整理得$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=-\frac{1}{4}\times\frac{2}{-1}=\frac{1}{2}$,则直线$l$的斜率为$\frac{1}{2}$,所以直线$l$的方程为$y+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x-1)$,即$x-2y-2=0$.故选C.

6.C 提示:由椭圆C:$\frac{x^2}{m+3}+\frac{y^2}{m-1}=1$,得$a^2=m+3$,$b^2=m-1$,因为$P$是椭圆$C$短轴的一个端点,且$\angle F_1PF_2=90°$,所以$|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$,即$2a^2=4c^2=4(a^2-b^2)$,得$a^2=2b^2$,则$m+3=2(m-1)$,解得$m=5$,所以$a=2\sqrt{2}$,所以椭圆$C$的长轴长是$2a=4\sqrt{2}$.故选C.

7.A 提示:因为点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$在椭圆C:$\frac{x^2}{2}+y^2=1$上,所以$\frac{x_1^2}{2}+y_1^2=1$,$\frac{x_2^2}{2}+y_2^2=1$,又直线OA,OB的斜率之积为$-\frac{1}{2}$,则$\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=-\frac{1}{2}$,所以$(y_1y_2)^2=\frac{1}{4}(x_1x_2)^2=\left(1-\frac{x_1^2}{2}\right)\left(1-\frac{x_2^2}{2}\right)$,即$x_1^2+x_2^2=2$,则$x_1^2-y_1^2+x_2^2-y_2^2=x_1^2+x_2^2-\left(1-\frac{x_1^2}{2}\right)-\left(1-\frac{x_2^2}{2}\right)=\frac{3}{2}(x_1^2+x_2^2)-2=1$.故选A.

8.B 提示:不妨设点P位于第一象限,因为I为$\triangle PF_1F_2$的内心,所以PA为$\angle F_1PF_2$的角平分线,所以$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|F_1A|}{|AF_2|}$,因为$|\overrightarrow{OA}|=\frac{1}{4}c$,所以$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|F_1A|}{|AF_2|}=\frac{5}{3}$,设$|PF_1|=5t$,则$|PF_2|=3t$,由椭圆的定义,知$|PF_1|+|PF_2|=8t=2a$,得$t=\frac{a}{4}$,所以$|PF_1|=\frac{5a}{4}$,$|PF_2|=\frac{3a}{4}$,又$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=|PF_1|\cdot|PF_2|\cos\angle F_1PF_2=\frac{5a}{4}\cdot\frac{3a}{4}\cdot\cos\angle F_1PF_2=\frac{1}{16}a^2$,所以$\cos\angle F_1PF_2=\frac{1}{15}$,在$\triangle PF_1F_2$中,由余弦定理,得$\cos\angle PF_1F_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{\frac{17a^2}{8}-4c^2}{\frac{15a^2}{8}}=\frac{1}{15}$,所以$a^2=2c^2$,则离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.故选B.

二、多项选择题

9.ACD 提示:将椭圆方程化为标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,所以$a=2,b=\sqrt{3},c=1$,且焦点在$x$轴上,所以离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$,故A正确;长轴长是$2a=4$,故B错误;焦距为$2c=2$,故C正确;焦点坐标为$(-1,0)$,$(1,0)$,故D正确.故选ACD.

10.AD 提示:由题意,可设$P(-\sqrt{2},1)$,$|PF_1|=1$,$|PF_2|=2a-|PF_1|=3$,$\cos\angle F_1PF_2=\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$,所以$\angle F_1PF_2>60°$,故B错误;$\triangle PF_1Q$的周长为$4a=8$,故A正确;设$|F_2Q|=m$,$|F_1Q|=4-m$,在$\triangle PF_1Q$中,$|F_1P|^2+|PQ|^2-2|F_1P|\cdot|PQ|\cdot\frac{1}{3}=|F_1Q|^2$,得$1+(m+3)^2-2\times(m+3)\times\frac{1}{3}=(4-m)^2$,解得$m=\frac{3}{5}$,所以$|F_1Q|=\frac{17}{5}$,故D正确;由$|PF_2|=3$,$|QF_2|=\frac{3}{5}$,得$|QF_2|=\frac{1}{5}|PF_2|$,所以$S_{\triangle QF_1F_2}=\frac{1}{5}S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times1=\frac{\sqrt{2}}{5}$,故C错误.故选AD.

11.ABD 提示:因为直线AB过点$F(3,0)$和点$(1,-1)$,所以直线AB的方程为$y=\frac{1}{2}(x-3)$,代入椭圆方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,得$\left(\frac{a^2}{4}+b^2\right)x^2-\frac{3}{2}a^2x+\frac{9}{4}a^2-a^2b^2=0$,所以$AB$的中点的横坐标为$\frac{\frac{3}{2}a^2}{2\left(\frac{a^2}{4}+b^2\right)}=1$,即$a^2=2b^2$,又$a^2=b^2+c^2$,$c=3$,所以$b=c=3$,$a=3\sqrt{2}$,离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以圆$E$的方程为$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$.故选ABD.

12.BD 提示:由椭圆C:$\frac{x^2}{6}+y^2=1$,得$a^2=6,b^2=1$,则$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5}$,所以椭圆$C$的焦距为$2\sqrt{5}$,故A错误;离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{30}}{6}$,故B正确;设$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则$\frac{x_1^2}{6}+y_1^2=1$,$\frac{x_2^2}{6}+y_2^2=1$,两式作差,得$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{6}=-(y_1-y_2)(y_1+y_2)$,则$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{(x_1+x_2)}{6(y_1+y_2)}$,又$Q\left(1,\frac{1}{4}\right)$为$MN$的中点,所以$k_{MN}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{2}{6\times\frac{1}{2}}=-\frac{2}{3}$,故C错误;设$|PF_1|=m$,$|PF_2|=n$,由$\angle F_1PF_2=90°$,及椭圆的定义,得$\begin{cases}m+n=2\sqrt{6},\\m^2+n^2=(2c)^2=20,\end{cases}$则$mn=2$,所以$\triangle F_1PF_2$的面积$S=\frac{1}{2}mn=1$,故D正确.故选BD.

三、填空题

13.9或7 提示:椭圆$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{8}=1$的焦距为2,则$c=1$,所以$m-8=1$或$8-m=1$,解得$m=9$或7.

14.$\frac{\sqrt{6}}{3}$ 提示:由题意,知$2a=4\sqrt{3}$,解得$a=2\sqrt{3}$,将直线$x-y+6=0$沿着竖直方向向下移动2个单位,此时直线为$x-y+4=0$,且与椭圆C相切,联立$\begin{cases}\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\x-y+4=0,\end{cases}$得$(12+b^2)x^2+96x+12(16-b^2)=0$,所以$\Delta=96^2-48(12+b^2)(16-b^2)=0$,解得$b^2=4$,所以$c^2=a^2-b^2=8$,即$c=2\sqrt{2}$,所以椭圆$C$的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

15.$x+\sqrt{2}y-2\sqrt{2}=0$ 提示:设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,线段AB的中点为E,由$\frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{3}=1$,$\frac{x_2^2}{6}+\frac{y_2^2}{3}=1$,两式相减,得$\frac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}=-\frac{1}{2}$,则$k_{OE}\cdot k_{AB}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}=-\frac{1}{2}$.设直线$l$的方程为$y=kx+m$,$k<0$,$m>0$,则$M\left(-\frac{m}{k},0\right)$,$N(0,m)$,不妨设$x_1<x_2$,由$|MA|=|NB|$,得$|MB|=|NA|$,则$E$是$MN$的中点,所以$E\left(-\frac{m}{2k},\frac{m}{2}\right)$,所以$k_{OE}=-k$,所以$-k\cdot k=-\frac{1}{2}$,解得$k=-\frac{\sqrt{2}}{2}$(舍正),因为$|MN|=2\sqrt{3}$,所以$\sqrt{\frac{m^2}{k^2}+m^2}=2\sqrt{3}$,即$3m^2=12$,又$m>0$,解得$m=2$.所以$l$的方程为$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+2$,即$x+\sqrt{2}y-2\sqrt{2}=0$.

16.$\frac{2}{11}$ 提示:设$|AF_2|=2|AF_1|=4$,则$|AF_1|=2$,因为$AF_1\perp AF_2$,所以$|F_1F_2|=\sqrt{|AF_1|^2+|AF_2|^2}=2\sqrt{5}$,设$|BF_1|=m$,$|BF_2|=n$,根据椭圆的定义,知$|BF_1|+|BF_2|=|AF_1|+|AF_2|=6$,所以$m+n=6$,①

又在$\triangle BF_1F_2$与$Rt\triangle BAF_2$中,由余弦定理的推论,得$\cos B=\frac{m^2+n^2-20}{2mn}=\frac{m+2}{n}$,所以$m^2-n^2+4m+20=0$,②

由①②,解得$m=1,n=5$,所以在$\triangle BF_1F_2$中,由余弦定理的推论,得$\cos\angle BF_2F_1=\frac{(2\sqrt{5})^2+5^2-1^2}{2\times2\sqrt{5}\times5}=\frac{11}{5\sqrt{5}}$,

所以$\sin\angle BF_2F_1=\sqrt{1-\cos^2\angle BF_2F_1}=\sqrt{1-\left(\frac{11}{5\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{2}{5\sqrt{5}}$,所以$\tan\angle BF_2F_1=\frac{\sin\angle BF_2F_1}{\cos\angle BF_2F_1}=\frac{2}{11}$.

四、解答题

17.**解**:(1)由椭圆的焦点在y轴上,设椭圆的标准方程为$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$,由椭圆的定义,知$2a=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}+2\right)^2}+\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}-2\right)^2}=2\sqrt{10}$,即$a=\sqrt{10}$,又$c=2$,所以$b^2=a^2-c^2=6$,所以椭圆的标准方程为$\frac{y^2}{10}+\frac{x^2}{6}=1$.

(2)设椭圆的方程为$mx^2+ny^2=1(m>0,n>0$,且$m\neq n)$.因为点$P(-\sqrt{3},2)$,$Q(\sqrt{6},-\sqrt{2})$在椭圆上,所以$\begin{cases}3m+4n=1\\6m+2n=1,\end{cases}$解得$m=\frac{1}{9}$,$n=\frac{1}{6}$,所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$.

18.**解**:(1)由题意,设椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$,因为$2a=8$,离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以$a=4$,$c=2\sqrt{3}$,则$b^2=a^2-c^2=4$,所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)设$E(x_1,y_1)$,$F(x_2,y_2)$,设直线l的方程为$y=kx$,联立$\begin{cases}y=kx,\\\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$得$(1+4k^2)x^2-16=0$,所以$x^2=\frac{16}{1+4k^2}$,$|EF|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\frac{8\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{1+4k^2}}$,

又点$D(2,-1)$到直线l的距离$d=\frac{|2k+1|}{\sqrt{1+k^2}}$,所以$\triangle DEF$的面积$S=\frac{1}{2}|EF|\cdot d=\frac{1}{2}\times\frac{8\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{1+4k^2}}\times\frac{|2k+1|}{\sqrt{1+k^2}}=4\sqrt{1+\frac{4}{4k+\frac{1}{k}}}$,因为$k>0$,所以$4k+\frac{1}{k}\geqslant2\sqrt{4k\cdot\frac{1}{k}}=4$,当且仅当$4k=\frac{1}{k}$,即$k=\frac{1}{2}$时,等号成立,所以$S\leqslant4\sqrt{2}$,即$\triangle DEF$面积的最大值为$4\sqrt{2}$.

19.**解**:(1)由$MF_2\perp x$轴,$M\left(\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$,得$c=\sqrt{3}$,由椭圆的性质,得$|MF_2|=\frac{b^2}{a}=\frac{1}{2}$,即$a=2b^2$,又$a^2=b^2+c^2$,则$4b^4=b^2+3$,解得$b^2=1$,则$a=2$,

所以椭圆E的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)由题意,得直线l的斜率存在,设直线l的方程为$y=kx+2$,$C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$,联立$\begin{cases}y=kx+2,\\\frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$得$(1+4k^2)x^2+16kx+12=0$,则$\Delta=(16k)^2-4\times(1+4k^2)\times12>0$,得$k^2>\frac{3}{4}$,由韦达定理,得$x_1+x_2=-\frac{16k}{1+4k^2}$,① $x_1x_2=\frac{12}{1+4k^2}$,②

又$\overrightarrow{AC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$,得$x_1=\frac{3}{5}x_2$,③

将③代入①②,得$x_2=-\frac{10k}{1+4k^2}$,④ $x_2^2=\frac{20}{1+4k^2}$,⑤

再将④代入⑤,化简得$k^2=1$,即$k=\pm1$,因为$k^2=1$满足$k^2>\frac{3}{4}$,即$\Delta>0$的条件,所以直线l的方程为$y=\pm x+2$.

20.**解**:(1)由椭圆的方程,得$a=2$,$b=\sqrt{3}$,则$c=1$,所以$F_1(-1,0)$,$F_2(1,0)$,$A(0,\sqrt{3})$,则直线F_1A的方程为$y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$,即$\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}=0$,所以点F_2到直线F_1A的距离$d=\frac{|\sqrt{3}-0+\sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}}=\sqrt{3}$.

(2)由题意,可得直线l的方程为$y=kx+3$,联立$\begin{cases}y=kx+3,\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$得$(3+4k^2)x^2+24kx+24=0$,则$\Delta=24^2k^2-4\times24\times(3+4k^2)>0$,即$k^2>\frac{3}{2}$,且$x_1+x_2=-\frac{24k}{3+4k^2}$,$x_1x_2=\frac{24}{3+4k^2}$,因为$F_1C\perp F_1D$,所以$\overrightarrow{F_1C}\cdot\overrightarrow{F_1D}=0$,即$(x_1+1,y_1)\cdot(x_2+1,y_2)=0$,可得$(x_1+1)(x_2+1)+(kx_1+3)(kx_2+3)=0$,所以$(1+k^2)x_1x_2+(1+3k)(x_1+x_2)+10=0$,即$\frac{24(1+k^2)}{3+4k^2}-\frac{24k(1+3k)}{3+4k^2}+10=0$,整理得$4k^2+12k-27=0$,解得$k=\frac{3}{2}$或$-\frac{9}{2}$,都满足$\Delta>0$,所以实数$k$的值为$\frac{3}{2}$或$-\frac{9}{2}$.

21.(1)**解**:由椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$,得$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,得$a=\sqrt{2}c$,$b=c$,所以椭圆$C$的方程为$x^2+2y^2=2c^2$,由$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}y+1,\\x^2+2y^2=2c^2,\end{cases}$得$5y^2+2\sqrt{2}y+2-4c^2=0$,设$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则$y_1+y_2=-\frac{2\sqrt{2}}{5}$,$y_1y_2=\frac{2-4c^2}{5}$.由$OM\perp ON$,得$x_1x_2+y_1y_2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y_1+1\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y_2+1\right)+y_1y_2=\frac{3}{2}y_1y_2+\frac{\sqrt{2}}{2}(y_1+y_2)+1=\frac{3}{2}\cdot\frac{2-4c^2}{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{5}+1=0$,解得$c=1$,则$a=\sqrt{2}$,$b=1$,所以椭圆$C$的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)**证明**:点$N(x_2,y_2)$关于x轴的对称点为$Q(x_2,-y_2)$,联立$\begin{cases}x=my+1,\\x^2+2y^2=2,\end{cases}$得$(2+m^2)y^2+2my-1=0$,又$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则$y_1+y_2=-\frac{2m}{2+m^2}$,$y_1y_2=-\frac{1}{2+m^2}$,则$k_{PM}=\frac{y_1}{x_1-2}$,$k_{QM}=\frac{y_2+y_1}{x_1-x_2}$,$k_{PM}-k_{MQ}=\frac{x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2-x_1y_1+2y_2+2y_1}{(x_1-2)(x_1-x_2)}=\frac{-y_1(my_2+1)-(my_1+1)y_2+2y_1+2y_2}{(x_1-2)(x_1-x_2)}=\frac{y_1+y_2-2my_1y_2}{(x_1-2)(x_1-x_2)}=\frac{-\frac{2m}{2+m^2}+\frac{2m}{2+m^2}}{(x_1-2)(x_1-x_2)}=0$,即$k_{PM}=k_{MQ}$,

所以P,M,Q三点共线.

22.(1)**解**:由题意,得$\begin{cases}2c=4\sqrt{2},\\\frac{6}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1,\\a^2=b^2+c^2,\end{cases}$解得$a=2\sqrt{3}$,$b=2$,$c=2\sqrt{2}$.所以椭圆$C$的方程为$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)①当过点P且与圆O:$x^2+y^2=3$相切的切线斜率不存在时,由对称性,不妨设切线方程为$x=\sqrt{3}$,则$P(\sqrt{3},0)$,将$x=\sqrt{3}$代入$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$,得$y=\pm\sqrt{3}$,可取$E(\sqrt{3},\sqrt{3})$,$F(\sqrt{3},-\sqrt{3})$,所以$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=-3$.

②当过点P且与圆O:$x^2+y^2=3$相切的切线斜率存在时,设切线方程为$y=kx+m$,设点$E(x_1,y_1)$,$F(x_2,y_2)$,$P(x_0,y_0)$,联立$\begin{cases}y=kx+m,\\x^2+y^2=3,\end{cases}$得$(1+k^2)x^2+2kmx+m^2-3=0$,因为直线与圆相切,所以$\Delta=4k^2m^2-4(1+k^2)(m^2-3)=0$,即$m^2=3(1+k^2)$,则$x_0=-\frac{km}{k^2+1}$.联立$\begin{cases}y=kx+m,\\\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$得$(1+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-12=0$,则$\Delta=36k^2m^2-4(1+3k^2)\cdot(3m^2-12)=9k^2+1>0$,$x_1+x_2=-\frac{6km}{1+3k^2}$,$x_1x_2=\frac{3m^2-12}{1+3k^2}$,所以$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=(x_1-x_0,y_1-y_0)\cdot(x_2-x_0,y_2-y_0)=(x_1-x_0)(x_2-x_0)+(y_1-y_0)(y_2-y_0)=(k^2+1)\cdot(x_1-x_0)(x_2-x_0)=(1+k^2)[x_1x_2-x_0\cdot(x_1+x_2)+x_0^2]=(k^2+1)\cdot\left[\frac{3m^2-12}{1+3k^2}-\frac{6km}{1+3k^2}\cdot\frac{km}{k^2+1}+\left(\frac{km}{k^2+1}\right)^2\right]=\frac{-9k^2-3}{1+3k^2}=-3$.

综上,$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$为定值$-3$.

第19期

第2~3版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.D 提示:直线$4x-5y+10=0$与坐标轴的交点为$\left(-\frac{5}{2},0\right)$,$(0,2)$,当抛物线的焦点为$\left(-\frac{5}{2},0\right)$时,其标准方程为$y^2=-10x$;当抛物线的焦点为$(0,2)$时,其标准方程为$x^2=8y$.故选D.

2.D 提示:双曲线C:$\frac{x^2}{m^2}-y^2=1(m>0)$的渐近线方程为$y=\pm\frac{1}{\sqrt{m}}x$,因为双曲线$C$的一条渐近线为$\sqrt{3}x+my=0$,即$y=-\frac{\sqrt{3}}{m}x$,所以$\frac{1}{\sqrt{m}}=\frac{\sqrt{3}}{m}$,则$m=3$.故选D.

3.C 提示:由题意,得$F(1,0)$,则$|AF|=|BF|=3$,由抛物线的定义,得点A到准线$x=-1$的距离为3,所以$x_A+1=3$,则$x_A=2$,不妨设点A在x轴上方,将$x_A=2$代入$y^2=4x$,得$y_A=2\sqrt{2}$,则$A(2,2\sqrt{2})$,又$B(4,0)$,所以AB的中点坐标为$(3,\sqrt{2})$,其到y轴的距离是3.故选C.

4.D 提示:设双曲线的左、右焦点为$F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$,因为$\overrightarrow{PF_2}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=0$,所以$PF_2\perp F_1F_2$,令$x=c$,得$y=\pm\frac{b^2}{a}$,不妨设$P\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$,则$|PF_2|=\frac{b^2}{a}=\frac{9}{2}$,①

又离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$,即$\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{4}$,②

联立①②,解得$a=6$,$b=3\sqrt{3}$,则虚轴长为$2b=6\sqrt{3}$.故选D.

5.B 提示:由题意,得$F\left(\frac{p}{2},0\right)$,$l$:$x=-\frac{p}{2}$,因为$|AF|=|AO|$,所以点$A$的横坐标为$\frac{p}{4}$.因为点$A$到准线$l$的距离为3,所以$\frac{p}{4}-\left(-\frac{p}{2}\right)=3$,解得$p=4$,所以抛物线$C$的方程为$y^2=8x$.不妨设点$A$在$x$轴的上方,则$A(1,2\sqrt{2})$,所以$S_{\triangle AOF}=\frac{1}{2}|OF|\cdot y_A=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.故选B.

6.C 提示:设$P(x,y)$在第一象限,则$y>0$,因为F_1,F_2分别为双曲线C:$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$的左、右焦点,所以$F_1(-3,0)$,$F_2(3,0)$,因为$PF_2\perp x$轴,所以将$x=3$代入双曲线$C$:$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$,得$y=\pm\frac{5}{2}$,则$P\left(3,\frac{5}{2}\right)$,因为点$P$关于原点$O$的对称点为$Q$,所以$Q\left(-3,-\frac{5}{2}\right)$,$QF_1\perp x$轴,所以$S_{F_1PF_2Q}=2\times\frac{1}{2}\cdot|F_1F_2|\cdot y=2\times\frac{1}{2}\times6\times\frac{5}{2}=15$.故选C.

7.A 提示:过点P作$PA\perp l$,垂足为点A,过点P作直线$3x+4y+7=0$的垂线段PB,垂足为点B,抛物线$y^2=4x$的准线为l:$x=-1$,焦点为$F(1,0)$,点F到直线$3x+4y+7=0$的距离为$d=\frac{|3+7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$,由抛物线的定义,可知$|PA|=|PF|$,所以$|PA|+|PB|=|PF|+|PB|\geqslant d=2$,当且仅当$B$,$P$,$F$三点共线时,等号成立,所以$P$到准线$l$的距离与$P$到直线$3x+4y+7=0$的距离之和的最小值是2.故选A.

8.A 提示:设坐标原点为O,点M在第一象限,则$|OF|=c$,渐近线l_1的方程为$bx-ay=0$,$F(c,0)$,所以$|\overrightarrow{MF}|=\frac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=b$,所以$|OM|=\sqrt{|OF|^2-|MF|^2}=a$,因为$5\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MN}$,所以$|NF|=4|MF|=4b$,所以$4S_{\triangle OMF}=S_{\triangle ONF}$,又$S_{\triangle OMF}=\frac{1}{2}|OM|\cdot|OF|\sin\angle MOF$,$S_{\triangle ONF}=\frac{1}{2}|ON|\cdot|OF|\sin\angle NOF$,因为$x$轴平分$\angle MON$,所以$|ON|=4|OM|=4a$,又$OM\perp MN$,所以$OM^2+MN^2=ON^2$,即$a^2+25b^2=16a^2$,得$\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{5}$,所以$e=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$.故选A.

二、多项选择题

9.BD 提示:由题意,得$\frac{p}{2}=2$,则$p=4$,抛物线方程为$y^2=8x$,直线AB的方程$y=\sqrt{3}(x-2)$,代入$y^2=8x$,得$3x^2-20x+12=0$,设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则$x_1=6$,$x_2=\frac{2}{3}$,$x_1+x_2=\frac{20}{3}$,$x_1x_2=4$,$y_1y_2=-\sqrt{64x_1x_2}=-16$.对于A,$A,B$关于$x$轴不对称,则$\angle AOF\neq\angle BOF$,故A错误;对于B,因为$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=-12<0$,所以$\angle AOB>90°$,故B正确;对于C,$|AB|=\sqrt{1+3}|x_1-x_2|=\frac{32}{3}$,故C错误;对于D,$\frac{|AF|}{|FB|}=\left|\frac{y_1}{y_2}\right|=\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}=3$,故D正确.故选BD.

10.BD 提示:对于A,抛物线$y^2=-4\sqrt{7}x$的准线方程为$x=\sqrt{7}$,故A错误;对于B,依题意,得$a^2+3=7$,$a>0$,解得$a=2$,故双曲线的实轴长为4,故B正确;对于C,由选项B可知,双曲线方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$,其渐近线方程为$\sqrt{3}x\pm2y=0$,故C错误;对于D,由双曲线的定义知,$||PF_1|-|PF_2||=2a=4$,即$\left|\frac{9}{2}-|PF_2|\right|=4$,解得$|PF_2|=\frac{1}{2}$或$|PF_2|=\frac{17}{2}$,又$|PF_2|\geqslant c-a=\sqrt{7}-2$,$\frac{1}{2}<\sqrt{7}-2$,所以$|PF_2|=\frac{17}{2}$,故D正确.故选BD.

11.ABD 提示:若$p=2$,则抛物线$x^2=4y$的焦点为$F(0,1)$,过点F且斜率为$\sqrt{3}$的直线l:$y=\sqrt{3}x+1$,代入抛物线方程,得$x^2-4\sqrt{3}x-4=0$,则$x_1x_2=-4$,故A正确;由A项,得$x^2-4\sqrt{3}x-4=0$,解得$x_1=2\sqrt{3}+4$,$x_2=2\sqrt{3}-4$,$y_1=7+4\sqrt{3}$,$y_2=7-4\sqrt{3}$,$|MN|=y_1+y_2+p=16$,点O到直线MN的距离$d=\frac{1}{\sqrt{1+3}}=\frac{1}{2}$,则$S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times16=4$,故C错误;由$M(2\sqrt{3}+4,7+4\sqrt{3})$,$F(0,1)$,得$|MF|=\sqrt{(4+2\sqrt{3})^2+(7+4\sqrt{3}-1)^2}=8+4\sqrt{3}$,故D正确;设直线$l$的方程为$y=\sqrt{3}x+\frac{p}{2}$,代入$x^2=2py$,得$y^2-7py+\frac{p^2}{4}=0$,则$y_1y_2=\frac{p^2}{4}$,若$y_1y_2=1$,则$\frac{p^2}{4}=1$,得$p=2$,故B正确.故选ABD.

12.BC 提示:设点$F_2(c,0)$,由双曲线的对称性,不妨令直线l垂直于渐近线$y=\frac{b}{a}x$,即$bx-ay=0$,则$|AF_2|=\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}=b$,直线$l$的方程为$y=-\frac{a}{b}(x-c)$,由$\begin{cases}y=-\frac{a}{b}(x-c),\\bx-ay=0,\end{cases}$得点$A$的横坐标$x_1=\frac{a^2}{c}$,由$\begin{cases}y=-\frac{a}{b}(x-c),\\bx+ay=0,\end{cases}$得点$B$的横坐标$x_2=\frac{a^2c}{a^2-b^2}$.当$0<a<b$时,点$B$在线段$F_2A$的延长线上,由$3|F_2A|=|F_2B|$,得$|AB|=2b$,所以$|AB|=\sqrt{1+\left(-\frac{a}{b}\right)^2}|x_1-x_2|=\frac{c}{b}\left(\frac{a^2}{c}-\frac{a^2c}{a^2-b^2}\right)=2b$,化简得$c^2=3a^2$,所以离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$.当$a>b>0$时,点$B$在线段$AF_2$的延长线上,由$3|F_2A|=|F_2B|$,得$|AB|=4b$,所以$|AB|=\sqrt{1+\left(-\frac{a}{b}\right)^2}|x_2-x_1|=\frac{c}{b}\left(\frac{a^2c}{a^2-b^2}-\frac{a^2}{c}\right)=4b$,化简得$c^2=\frac{3}{2}a^2$,则离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

综上,双曲线C的离心率为$\sqrt{3}$或$\frac{\sqrt{6}}{2}$.故选BC.

三、填空题

13.0 提示:由题意,得$b^2=1$,由双曲线C的离心率为$\sqrt{2}$,得$\frac{b^2}{a^2}=1$,则$a^2=1$,则双曲线C:$x^2-y^2=1$的渐近线为$y=\pm x$,所以m可能取的值为±1,其和为0.

14.9 提示:由抛物线定义,知$|AF|=|AM|$,又$|AF|=|FM|$,所以$\triangle AMF$为等边三角形,$\angle MAF=60°$,所以直线l_1的倾斜角为$60°$,所以直线l_1的方程为$y=\sqrt{3}\left(x-\frac{p}{2}\right)$.由$\begin{cases}y=\sqrt{3}\left(x-\frac{p}{2}\right),\\y^2=2px,\end{cases}$得$12x^2-20px+3p^2=0$,即$(6x-p)(2x-3p)=0$,则$x_A=\frac{3p}{2}$,$x_B=\frac{p}{6}$,所以$\frac{x_A}{x_B}=9$.

15.$y=\pm(x-1)$ 提示:由抛物线$y^2=4x$,得焦点F为$(1,0)$,易知直线l斜率存在,设直线l的方程为$y=k(x-1)$,点$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,由题意,得$P'(2-x_1,y_1)$,$Q'(x_2,-y_2)$,所以$k_{P'Q'}=\frac{y_1+y_2}{2-x_1-x_2}$,又$P'Q'\perp PQ$,所以$\frac{y_1+y_2}{2-x_1-x_2}=-\frac{1}{k}$,联立$\begin{cases}y^2=4x,\\y=k(x-1),\end{cases}$整理得$k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$,所以$\Delta=16k^2+16>0$恒成立,且$x_1+x_2=\frac{2k^2+4}{k^2}$,$y_1+y_2=k(x_1+x_2-2)=k\cdot\left(\frac{2k^2+4}{k^2}-2\right)=\frac{4}{k}$,所以$\frac{\frac{4}{k}}{2-\frac{2k^2+4}{k^2}}=-\frac{1}{k}$,解得$k=\pm1$,所以直线$l$的方程为$y=\pm(x-1)$.

16.$\frac{\sqrt{2}}{4}$;$\sqrt{2}$ 提示:设圆$\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2=\frac{c^2}{4}$的圆心为$B$,则$B$的坐标为$\left(\frac{c}{2},0\right)$,半径为$\frac{c}{2}$,则$|F_1B|=\frac{3c}{2}$,设过左焦点$F_1$的直线和圆$\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2=\frac{c^2}{4}$相切于点$C$,连接$BC$,则$BC\perp PF_1$,$|BC|=\frac{c}{2}$,所以$|F_1C|=\sqrt{\left(\frac{3c}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}=\sqrt{2}c$,得$\tan\angle BF_1C=\frac{|BC|}{|F_1C|}=\frac{\frac{c}{2}}{\sqrt{2}c}=\frac{\sqrt{2}}{4}$,所以直线的斜率是$\frac{\sqrt{2}}{4}$.因为$PF_2\perp x$轴,所以将$x=c$代入$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,得$y=\pm\frac{b^2}{a}$,则$|PF_2|=\frac{b^2}{a}$,所以$\tan\angle BF_1C=\frac{|PF_2|}{|F_1F_2|}=\frac{\frac{b^2}{a}}{2c}=\frac{\sqrt{2}}{4}$,即$2e^2-\sqrt{2}e-2=0$,解得$e=\sqrt{2}$.

四、解答题

17.**解**:(1)因为抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点为$F(2,0)$,所以$\frac{p}{2}=2$,解得$p=4$.

(2)由(1)知抛物线方程为$y^2=8x$,因为直线AB与抛物线交于两点,则直线斜率不为0,所以设直线AB的方程为$x=ty+2$,联立$\begin{cases}y^2=8x,\\x=ty+2,\end{cases}$得$y^2-8ty-16=0$,设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,所以$y_1+y_2=8t$,$y_1y_2=-16$,又$|AB|=16$,所以$|AB|=\sqrt{1+t^2}|y_1-y_2|=\sqrt{1+t^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=8(1+t^2)=16$,解得$t=\pm1$,所以直线$AB$的方程为$x\pm y-2=0$.

18.(1)**解**:由题意,得$-\frac{p}{2}=-1$,则$p=2$,所以抛物线的方程为$y^2=4x$.

(2)**证明**:联立$\begin{cases}x=my+4,\\y^2=4x,\end{cases}$整理得$y^2-4my-16=0$,由韦达定理,得$y_1y_2=-16$,$x_1x_2=\frac{y_1^2y_2^2}{16}=16$,所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=0$,所以$OA\perp OB$.

19.**解**:(1)由题意,得$\begin{cases}\frac{b}{a}=\tan30°=\frac{\sqrt{3}}{3},\\2a=2\sqrt{3},\end{cases}$所以$a=\sqrt{3}$,$b=1$,所以双曲线$C$的标准方程为$\frac{x^2}{3}-y^2=1$.

(2)设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,联立$\begin{cases}y=x+m,\\x^2-3y^2=3,\end{cases}$得$2x^2+6mx+3m^2+3=0$,则$\Delta=36m^2-8(3m^2+3)=12m^2-24>0$,所以$m^2>2$,又$m>0$,所以$m>\sqrt{2}$,又$x_1+x_2=-3m$,$x_1x_2=\frac{3m^2+3}{2}$,所以$|AB|=\sqrt{1+1^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{6}\times\sqrt{m^2-2}$,又点$O$到直线$l$的距离$d=\frac{|m|}{\sqrt{2}}$,所以$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times|AB|\times d=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{m^2-2}\times\frac{|m|}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}$,所以$m^4-2m^2-8=0$,解得$m^2=4$,又$m>\sqrt{2}$,所以$m=2$.

20.**解**:(1)由抛物线C:$y^2=2px(p>0)$,可得其准线方程为$x=-\frac{p}{2}$,由题意,得$\frac{p}{2}+4=5$,解得$p=2$.所以抛物线C的方程为$y^2=4x$.

(2)设直线AB的方程为$x=m(y-1)+2$,联立$\begin{cases}y^2=4x,\\x=m(y-1)+2,\end{cases}$得$y^2-4my+4m-8=0$.设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则$y_1+y_2=4m$,$y_1y_2=4m-8$.所以$|y_1-y_2|=\sqrt{(4m)^2-4(4m-8)}=4\sqrt{m^2-m+2}$.由题意,得$|MH|=2$,所以$S_{\triangle ABM}=\frac{1}{2}\times|y_1-y_2|\times|MH|=4\sqrt{m^2-m+2}$.因为$m^2-m+2=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$,所以$S_{\triangle ABM}\geqslant2\sqrt{7}$,即$\triangle ABM$面积的最小值为$2\sqrt{7}$.

21.**解**:(1)因为$(-2,0)$是双曲线的一个焦点,所以双曲线的焦点在x轴上.设双曲线C的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,焦距为$2c$,则$\begin{cases}c=2,\\\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3},\\c^2=a^2+b^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\sqrt{3},\\b=1,\end{cases}$所以双曲线$C$的方程为$\frac{x^2}{3}-y^2=1$.

(2)设$P(x,y)$,则$Q(-x,-y)$,所以$\overrightarrow{NP}=(x-1,y-1)$,$\overrightarrow{MQ}=(-x,-y-1)$,所以$\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{MQ}=-x^2+x+1-y^2=-x^2+x+1-\left(\frac{x^2}{3}-1\right)=-\frac{4}{3}x^2+x+2=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{35}{16}$,因为$x\leqslant-\sqrt{3}$或$x\geqslant\sqrt{3}$,所以当$x=\sqrt{3}$时,$\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{MQ}$取得最大值$\sqrt{3}-2$.所以$\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{MQ}$的取值范围是$(-\infty,\sqrt{3}-2]$.

22.(1)**解**:由已知,得$a=2$,双曲线C的渐近线方程为$bx\pm2y=0$,因为点A到C的渐近线的距离为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$,所以$\frac{2b}{\sqrt{b^2+4}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,解得$b=\sqrt{2}$,所以双曲线$C$的方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$.

(2)**证明**:由题意可知,直线MN的斜率不为0,设直线MN的方程为$x=my+t$,联立$\begin{cases}x=my+t,\\\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$可得$(m^2-2)y^2+2mty+t^2-4=0$,设$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则$\Delta=(2mt)^2-4(m^2-2)\cdot(t^2-4)=8(t^2+2m^2-4)>0$,且$m^2-2\neq0$,所以$m^2\neq2$,$t^2+2m^2>4$,$y_1+y_2=\frac{-2mt}{m^2-2}$,$y_1y_2=\frac{t^2-4}{m^2-2}$.又直线$MA$:$y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$,令$x=0$,得$y=\frac{2y_1}{x_1+2}$,直线$NB$:$y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$,令$x=0$,得$y=\frac{-2y_2}{x_2-2}$.因为直线$NB$在$y$轴上的截距是直线$MA$在$y$轴上截距的2倍,所以$2\times\frac{2y_1}{x_1+2}=\frac{-2y_2}{x_2-2}$,即$2y_1(x_2-2)+y_2(x_1+2)=0$,得$3my_1y_2+2(t-2)y_1+(t+2)y_2=0$,将$y_1y_2=\frac{t^2-4}{m^2-2}$,$y_2=\frac{-2mt}{m^2-2}-y_1$代入,整理得$\frac{m}{m^2-2}(t^2-4t-12)+(t-6)y_1=0$,所以要使上式恒成立,必有$\begin{cases}t^2-4t-12=0,\\t-6=0,\end{cases}$解得$t=6$,所以直线$MN$过定点$(6,0)$.

第20期

第2~3版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B 提示:因为抛物线的方程为$y^2=4x$,所以其准线方程为l:$x=-1$,设点$P(x_0,y_0)$到其准线的距离为d,则$d=|PF|$,即$|PF|=d=x_0+1$,因为点P到y轴的距离是2,所以$x_0=2$,所以$|PF|=2+1=3$.故选B.

2.C 提示:双曲线$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的焦距为$2c(c>0)$,由$\frac{2\sqrt{3}}{3}a$,$c$,$c$成等比数列,得$\frac{2\sqrt{3}}{3}ac=c^2$,所以$\frac{c^2}{a^2}=\frac{4}{3}$,则$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{3}$,所以$a=\sqrt{3}b$,所以双曲线的渐近线方程为$y=\pm\frac{a}{b}x=\pm\sqrt{3}x$.故选C.

3.C 提示:由题意,得$F_1(-c,0)$,$B(-c,b)$,$A\left(-c,\frac{1}{2}b\right)$,则$|AF_1|=\frac{b^2}{a}=\frac{1}{2}b$,所以$a=2b$,$c=\sqrt{3}b$,所以$\tan\angle F_1PO=\sqrt{3}$,则$\angle F_1PO=60°$,$\angle F_1PF_2=120°$.故选C.

4.B 提示:由点$A(1,2)$在抛物线$y^2=2px$上,得$4=2p$,解得$p=2$,即抛物线的方程为$y^2=4x$,设直线BC的方程为$y=x+t$,由$\begin{cases}y=x+t,\\y^2=4x,\end{cases}$得$y^2-4y+4t=0$,$\Delta=16-16t>0$,