面 $ABCD$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AB$，$PA\perp AD$，在正方形 $ABCD$ 中，$AD=AB$，O 是 BD 的中点，所以 $\triangle PBD$ 是等腰三角形，所以 $PO\perp BD$，又 $AO\perp BD$，$AO\subset$ 平面 PAO，$PO\subset$ 平面 PAO，$AO\cap PO=O$，所以 $BD\perp$ 平面 APO，所以二面角 $A-BD-P$ 的平面角为 $\angle POA$，又 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AO\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AO$，在正方形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$AO=\sqrt{2}$，又 $PA=\sqrt{5}$，在 $Rt\triangle PAO$ 中，$\tan\angle POA=\frac{PA}{AO}=\frac{\sqrt{10}}{2}$，故选 D.

6.B **提示**：因为 $SO=AB=4$，D 为 OS 的中点，所以 $OA=OD$，又 $AC=DC$，$OC=OC$，所以 $\triangle COD\cong\triangle COA$，所以 $\angle COA=\angle COD=90°$，所以 $OC\perp OA$，以 O 为坐标原点，OB，OC，OS 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，则 $B(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$S(0,0,4)$，$N(-1,0,1)$，则 $\overrightarrow{BS}=(-2,0,4)$，$\overrightarrow{BC}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{BN}=(-3,0,1)$，

设平面 SBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BS}=-2x+4z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-2x+2y=0,\end{cases}$ 令 $x=2$，则 $y=2$，$z=1$，所以平面 SBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,2,1)$，所以点 N 到平面 SBC 的距离为 $d=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BN}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{5}{3}$.故选 B.

7.D **提示**：以点 D 为坐标原点，DA，DC，DD_1 分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，设 $AB=3$，则 $D(0,0,0)$，$B(3,3,0)$，$E(0,3,1)$，$A_1(3,0,3)$，所以 $\overrightarrow{DB}=(3,3,0)$，$\overrightarrow{DE}=(0,3,1)$，$\overrightarrow{A_1B}=(0,3,-3)$，设平面 BDE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DB}=3x+3y=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DE}=3y+z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，则 $y=-1$，$z=3$，所以平面 BDE 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,-1,3)$，设直线 A_1B 与平面 BDE 所成角为 θ，所以 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{A_1B},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{12}{3\sqrt{2}\times\sqrt{11}}=\frac{2\sqrt{22}}{11}$.故选 D.

8.D **提示**：以 A 为坐标原点，在平面 ABC 中过 A 作 AC 的垂线为 x 轴，以 AC 为 y 轴，AA_1 为 z 轴，建立空间直角坐标系，设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中所在棱长都是 2，则 $B(\sqrt{3},1,0)$，$D(0,2,1)$，$E(0,0,x)$，$x\in[0,2]$，$\overrightarrow{BD}=(-\sqrt{3},1,1)$，$\overrightarrow{BE}=(-\sqrt{3},-1,x)$，设平面 BDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=-\sqrt{3}a+b+c=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=-\sqrt{3}a-b+xc=0,\end{cases}$ 令 $a=1$，得 $\boldsymbol{n}=\left(1,\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{x+1},\frac{2\sqrt{3}}{x+1}\right)$，易知平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，

设平面 BDE 与底面 ABC 所成锐二面角的平面角为 θ，则 $\cos\theta=\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-x+4}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}}$，所以随着 x 增大 $\cos\theta$ 先增大再减小，所以随着 x 增大 θ 先减小再增大.故选 D.

二、多项选择题

9.BC **提示**：因为向量 $\boldsymbol{a}=(1,\lambda,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,-1,2)$，$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{8}{9}$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{2-\lambda+4}{3\sqrt{5+\lambda^2}}=\frac{8}{9}$，解得 $\lambda=-2$ 或 $\lambda=\frac{2}{55}$.故选 BC.

10.BD **提示**：由题意，得 $\overrightarrow{AB}=(-2,1,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(2,1,0)$，$\overrightarrow{BC}=(4,0,1)$，所以 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{6}$，故 A 错误；$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(0,2,-1)$，$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{BC}=-1$，故 B 正确；$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-3$，所以 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 不垂直，故 C 错误；因为 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$，所以根据四点共面的充要条件，知 P,A,B,C 四点共面，故 D 正确.故选 BD.

11.BCD **提示**：以 D 为坐标原点，分别以 DA，DC，DD_1 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，则 $A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$C(0,1,0)$，$B_1(1,1,1)$，$C_1(0,1,1)$，$D_1(0,0,1)$.对于 A，$\overrightarrow{BC_1}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$，则 $\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{AC}=1$，所以 BC_1 与 AC 不垂直，故 A 错误；对于 B，设平面 ACD_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，因为 $\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=-x+z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-x+y=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，则 $y=1$，$z=1$，所以平面 ACD_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$，又 $\overrightarrow{AB_1}=(0,1,1)$，所以点 B_1 到平面 ACD_1 的距离为 $h=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故 C 正确；因为 AC，CD_1，AD_1 是正方体的面对角线，所以 $\triangle ACD_1$ 是边长为 $\sqrt{2}$ 的正三角形，则 $V_{B_1-ACD_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACD_1}\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{3}$，故 B 正确；对于 D，设 AB_1 与平面 ACD_1 所成角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AB_1},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AB_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AB_1}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，故 D 正确.故选 BCD.

12.BC **提示**：因为 P,Q 分别是 A_1D_1，D_1C_1 的中点，所以 $PQ\parallel A_1C_1$，又 $BC\parallel B_1C_1$，$A_1C_1\cap B_1C_1=C_1$，故 PQ 与 BC 异面，故 A 错误；由正方体的性质得 $PQ\perp B_1D_1$，$PQ\perp B_1B$，又 $B_1D_1\cap B_1B=B_1$，所以 $PQ\perp$ 平面 B_1D_1DB，因为 $B_1M\subset$ 平面 B_1D_1DB，所以 $PQ\perp B_1M$，故 B 正确；易知 M 到平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的距离 d 为定值，且 $d=2$，又 $S_{\triangle PQB_1}$ 为定值，所以 $V_{P-QMB_1}=V_{M-PQB_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle PQB_1}\cdot d$ 为定值，故 C 正确；以 D 为坐标原点，以 DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，则 $M(1,1,0)$，$P(1,0,2)$，$Q(0,1,2)$，所以 $\overrightarrow{PQ}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{QM}=(1,0,-2)$，设平面 PQM 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PQ}=-x+y=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{QM}=x-2z=0,\end{cases}$ 取 $z=1$，则 $x=y=2$，所以平面 PQM 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(2,2,1)$，易知平面 PQB_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，设二面角 $M-PQ-B_1$ 的平面角为 α，所以 $\cos\alpha=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{3}$，则 $\alpha\neq60°$，故 D 错误.故选 BC.

三、填空题

13.-1 **提示**：因为向量 $\boldsymbol{a}=(0,-2,2)$，$\boldsymbol{b}=(\sqrt{6},3,1)$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-4$，$|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=4$，所以向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影向量的模为 $|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=|\boldsymbol{a}|\cdot\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=-1$.

14.$\frac{3\sqrt{2}}{4}$ **提示**：以 D 为坐标原点，分别以 DA，DC，DD_1 为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，则 $A(1,0,0)$，$D_1(0,0,1)$，$E\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{AE}=\left(-1,1,\frac{1}{2}\right)$，所以 $\cos\angle D_1AE=\frac{\overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AD_1}||\overrightarrow{AE}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\sin\angle D_1AE=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以点 E 到直线 AD_1 的距离为 $|\overrightarrow{AE}|\sin\angle D_1AE=\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

15.$\frac{\sqrt{6}}{3}$ **提示**：因为 BD 是球 O 的直径，所以 O 是 BD 的中点，取 AC 的中点 O_1，连接 BO_1 并延长到点 E，使 $O_1E=BO_1$，连接 OO_1，DE，AE，CE，如图，则 $DE\parallel OO_1$，且四边形 $ABCE$ 是平行四边形，$AE=BC=2$，由 $AB\perp BC$，得 O_1 是平面 ABC 截球 O 所得截面小圆的圆心，所以 $OO_1\perp$ 平面 ABC，$DE\perp$ 平面 ABC，所以 $\angle DAE$ 是直线 AD 与平面 ABC 所成角，由球 O 的表面积为 16π，得球 O 半径 $OA=2$，因为 $AB=BC=2$，所以 $AO_1=\sqrt{2}$，又 $OO_1\perp AC$，所以 $OO_1=\sqrt{2}$，$DE=2OO_1=2\sqrt{2}$，所以在 $Rt\triangle ADE$ 中，$AD=\sqrt{AE^2+DE^2}=2\sqrt{3}$，$\sin\angle DAE=\frac{DE}{AD}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以直线 AD 与平面 ABC 所成角的正弦值是 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

16.$\frac{\sqrt{30}}{3}$ **提示**：因为 $CC_1\parallel AA_1$，$AA_1\perp$ 平面 ABC，所以 $CC_1\perp$ 平面 ABC，所以 $CC_1\perp CA$，$CC_1\perp CB$，又 $\angle ACB=90°$，即 $CA\perp CB$，所以 CA，CB_1，CC_1 两两垂直，以 C 为坐标原点，以 CA，CB，CC_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，则 $A_1(2,0,2)$，$E(0,0,1)$，$B(0,2,0)$，$A(2,0,0)$，点 P 在棱 CC_1 上，设 $P(0,0,t)$，$t\in(0,2]$.则 $\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{PA}=(2,0,-t)$，$\overrightarrow{A_1B}=(-2,2,-2)$，$\overrightarrow{A_1E}=(-2,0,-1)$，设平面 A_1BE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1E}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x+2y-2z=0,\\ -2x-z=0,\end{cases}$ 取 $x=1$，则 $y=-1$，$z=-2$，所以平面 A_1BE 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,-1,-2)$.设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PA}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2a+2b=0,\\ 2a-tc=0,\end{cases}$ 取 $a=1$，则 $b=1$，$c=\frac{2}{t}$，则平面 PAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(1,1,\frac{2}{t}\right)$，由题意可得 $\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\frac{4}{t}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{1+1+\frac{4}{t^2}}}=\cos60°=\frac{1}{2}$，解得 $t=\frac{\sqrt{30}}{3}$.所以 $CP=\frac{\sqrt{30}}{3}$.

四、解答题

17.(1)**解**：以 D 为坐标原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴，y 辆，z 轴，建立空间直角坐标系，则 $D(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$B(2,2,0)$，$A_1(2,0,2)$，$D_1(0,0,2)$，由 E,F 分别为 AB，A_1C 的中点，得 $E(2,1,0)$，$F(1,1,1)$，则 $\overrightarrow{EF}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{CD_1}=(0,-2,2)$，所以 $\cos\langle\overrightarrow{EF},\overrightarrow{CD_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{CD_1}}{|\overrightarrow{EF}||\overrightarrow{CD_1}|}=\frac{2}{\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$，所以 $\langle\overrightarrow{EF},\overrightarrow{CD_1}\rangle=\frac{\pi}{3}$，所以异面直线 EF 与 CD_1 所成角为 $\frac{\pi}{3}$.

(2)**证明**：因为 $\overrightarrow{DA_1}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{EF}=(-1,0,1)$，所以 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DA_1}=0$，$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DC}=0$，则 $EF\perp DA_1$，$EF\perp DC$，因为 $DA_1\cap DC=D$，所以 $EF\perp$ 平面 A_1CD.

18.(1) **证明**：连接 BD 交 AC 于点 F，因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以点 F 是 BD 的中点，又 E 是 PD 的中点，所以 $EF\parallel PB$.又 $EF\subset$ 平面 AEC，$PB\not\subset$ 平面 AEC，所以 $PB\parallel$ 平面 AEC.

(2)**解**：因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AB$，$PA\perp AC$，又 $AB\perp AC$，所以 AC，AB，AP 两两垂直，以 A 为坐标原点，射线 AC，AB，AP 分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系 $Axyz$.则 $C(2,0,0)$，$P(0,0,3)$，$D(2,-3,0)$，则 $E\left(1,-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{CE}=\left(-1,-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$.平面 PAB 的一个法向量为 $\overrightarrow{AC}=(2,0,0)$.设直线 CE 与平面 PAB 所成角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{CE},\overrightarrow{AC}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CE}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{\sqrt{22}}{11}$.所以直线 CE 与平面 PAB 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{22}}{11}$.

19.(1)**证明**：连接 AE，与 BD 交于点 N，连接 MN.因为侧面 $ABED$ 是平行四边形，所以点 N 是 AE 的中点.因为点 M 是棱 EF 的中点，所以 $MN\parallel AF$.因为 $AF\not\subset$ 平面 BDM，$MN\subset$ 平面 BDM，所以 $AF\parallel$ 平面 BDM.

(2)**解**：因为三棱锥 $B-DEF$ 的体积为 4，所以三棱柱 $ABC-DEF$ 的体积为 12，所以四棱锥 $B-ADFC$ 的体积为 $12-4=8$.因为侧面 $ADFC$ 是边长为 2 的正方形，所以侧面 $ADFC$ 的面积为 $2\times2=4$.

设点 B 到平面 $ADFC$ 的距离为 h，则 $\frac{1}{3}\times4h=8$，解得 $h=6$.故点 B 到平面 $ADFC$ 的距离为 6.

20.(1)**证明**：在直角梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AB\perp AD$，则 $\angle ABC=90°$，因为 $AD=5$，$BC=2AB=4$，则 $AC=2\sqrt{5}$，$CD=\sqrt{5}$，所以 $AC^2+CD^2=AD^2$，所以 $CD\perp AC$，因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp CD$，又 $AC\cap PA=A$，AC，$PA\subset$ 平面 PAC，所以 $CD\perp$ 平面 PAC，又 $CD\subset$ 平面 PCD，所以平面 $PAC\perp$ 平面 PCD.

(2)**解**：因为 M 为 PC 的中点，$AM\perp PC$，所以 $PA=AC=2\sqrt{5}$.以 A 为坐标原点，AB，AD，AP 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，则 $B(2,0,0)$，$C(2,4,0)$，$D(0,5,0)$，$P(0,0,2\sqrt{5})$，$M(1,2,\sqrt{5})$，$D(0,5,0)$，$\overrightarrow{PB}=(2,0,-2\sqrt{5})$，$\overrightarrow{PD}=(0,5,-2\sqrt{5})$，$\overrightarrow{CD}=(-2,1,0)$.设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}=5y-2\sqrt{5}z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=-2x+y=0,\end{cases}$ 令 $y=2$，则 $x=1$，$z=\sqrt{5}$，所以平面 PCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,2,\sqrt{5})$，设直线 PB 与面 PCD 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{PB}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{8}{\sqrt{24}\times\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{15}}{15}$.

21.(1)**证明**：过点 A 作 $AE\perp PB$ 于点 E，因为平面 $PAB\perp$ 平面 PBC，平面 $PAB\cap$ 平面 $PBC=PB$，$AE\subset$ 平面 PAB，所以 $AE\perp$ 平面 PBC，又 $BC\subset$ 平面 PBC，所以 $AE\perp BC$，又 $PA\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 PBC，所以 $PA\perp BC$，又 $AE\cap PA=A$，AE，$PA\subset$ 平面 PAB，所以 $BC\perp$ 平面 PAB.

(2)**解**：假设在线段 PC 上（不含端点）存在点 D，使得二面角 $B-AD-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$，以 B 为坐标原点，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BA}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴的正方向，建立空间直角坐标系，则 $A(0,6,0)$，$B(0,0,0)$，$C(3,0,0)$，$P(0,6,6)$，$\overrightarrow{AC}=(3,-6,0)$，$\overrightarrow{AP}=(0,0,6)$，$\overrightarrow{PC}=(3,-6,-6)$，$\overrightarrow{BA}=(0,6,0)$，设平面 ACD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=3x-6y=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=6z=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，则平面 ACD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(2,1,0)$，因为 D 在线段 PC 上（不含端点），则可设 $\overrightarrow{PD}=\lambda\overrightarrow{PC}=(3\lambda,-6\lambda,-6\lambda)(0<\lambda<1)$，所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PD}=(3\lambda,-6\lambda,6-6\lambda)$，设平面 ABD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA}=6b=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=3\lambda a-6\lambda b+(6-6\lambda)c=0,\end{cases}$ 令 $c=\lambda$，可取平面 ABD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(2\lambda-2,0,\lambda)$，所以 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{|2(2\lambda-2)|}{\sqrt{5}\times\sqrt{(2\lambda-2)^2+\lambda^2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，解得 $\lambda=\frac{2}{3}$ 或 $\lambda=2$，又 $0<\lambda<1$，所以 $\lambda=\frac{2}{3}$，所以存在点 D，使得二面角 $B-AD-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$，此时点 D 是 PC 上靠近点 C 的三等分点.

22.(1) **证明**：由 $AC_1=2\sqrt{2}$，$AC=A_1C_1=AA_1=2$，得 $AC_1^2=AA_1^2+A_1C_1^2$，所以 $AA_1\perp A_1C_1$.又 $CC_1\parallel A_1A$，所以 $CC_1\perp A_1C_1$.因为 $\triangle BCC_1$ 是正三角形，所以 $\triangle BB_1C_1$ 是正三角形.因为 P 是 BB_1 的中点，所以 $C_1P\perp B_1B$，因为 $C_1C\parallel B_1B$，所以 $C_1P\perp C_1C$.因为 $C_1P\cap A_1C_1=C_1$，C_1P，$A_1C_1\subset$ 平面 A_1C_1P，所以 $CC_1\perp$ 平面 A_1C_1P.

(2)**解**：由(1)知 $C_1C\perp A_1C_1$，又 $AC\parallel A_1C_1$，所以 $AC\perp C_1C$，又 $AC\perp BC$，$BC\cap C_1C=C$，BC，$C_1C\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $AC\perp$ 平面 BCC_1B_1，又 $AC\subset$ 平面 ABC，所以平面 $ABC\perp$ 平面 BCC_1B_1.取 BC 的中点 O，由 $\triangle BCC_1$ 为正三角形，得 $C_1O\perp BC$，因为平面 $BCC_1B_1\cap$ 平面 $ABC=BC$，$C_1O\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $C_1O\perp$ 平面 ABC，以 O 为坐标原点，以 OB，OC_1 分别为 y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，则 $A(2,-1,0)$，$B(0,1,0)$，$C_1(0,0,\sqrt{3})$，$C(0,-1,0)$，$\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{BC_1}=(0,-1,\sqrt{3})$.设平面 ABC_1 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x+2y=0,\\ -y-\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 取 $z=1$，得平面 ABC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},\sqrt{3},1)$.由(1)知 $CC_1\perp$ 平面 A_1C_1P，所以平面 A_1C_1P 的一个法向量为 $\overrightarrow{CC_1}=(0,1,\sqrt{3})$，所以 $|\cos\langle\overrightarrow{CC_1},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{CC_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{CC_1}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{3}}{2\times\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.所以平面 ABC_1 与平面 A_1C_1P 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

扫码免费下载 习题讲解 ppt

第 13 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C **提示**：因为 $a_3a_4=\frac{1}{32}$，所以 $a_1q^2\cdot a_1q^3=\frac{1}{32}$，又 $q=\frac{1}{2}$，则 $a_1^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$，解得 $a_1^2=1$，又 $a_n>0$，所以 $a_1=1$，$a_6=a_1q^5=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$.故选 C.

2.D **提示**：根据等比数列的性质，得 $a_2a_3a_4=a_3^3=4$，$a_5a_6a_7=a_6^3=16$，又 $a_6^2=a_3a_9$，所以 $a_6^6=a_3^3a_9^3$，则 $16^2=4a_9^3$，得 $a_9^3=64$，所以 $a_8a_9a_{10}=a_9^3=64$.故选 D.

3.C **提示**：因为数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，所以 S_2，S_4-S_2，S_6-S_4 成等比数列，则 $(S_4-S_2)^2=S_2(S_6-S_4)$，又 $S_2=4$，$S_6=364$，则 $(S_4-4)^2=4(364-S_4)$，解得 $S_4=40$ 或 -36，又 $S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=(a_1+a_2)+(a_1+a_2)q^2=(1+q^2)S_2=4(1+q^2)>0$，所以 $S_4=40$.故选 C.

4.D **提示**：因为数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，$a_4=4$，所以 $a_2\cdot a_6=a_4^2=16$，① 又 $a_2+a_6=10$，②

由①②，解得 $a_2=2$，$a_6=8$，或 $a_2=8$，$a_6=2$，所以 $q^2=2$ 或 $q^2=\frac{1}{2}$，又 $a_n>0$，所以 $q=\sqrt{2}$ 或 $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$.故选 D.

5.A **提示**：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，因为 $a_3=12$，$a_8=\frac{3}{8}$，所以 $q^5=\frac{a_8}{a_3}=\frac{1}{32}$，解得 $q=\frac{1}{2}$，所以 $a_1=\frac{a_3}{q^2}=48$，又 $S_n=93$，即 $\frac{a_1\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=96\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=93$，所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{32}$，解得 $n=5$.故选 A.

6.D **提示**：设第 n 个正方形的边长为 b_n，由题意，得 $b_{n+1}=\sqrt{\left(\frac{1}{4}b_n\right)^2+\left(\frac{3}{4}b_n\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{4}b_n$，则 $a_n=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}b_n\times\frac{3}{4}\cdot b_n=\frac{3}{32}b_n^2$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}b_{n+1}\times\frac{3}{4}b_{n+1}=\frac{3}{32}b_{n+1}^2=\frac{5}{8}a_n$，由题意，得 $b_1=4$，则 $a_1=\frac{3}{32}b_1^2=\frac{3}{2}$，所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $\frac{3}{2}$ 为首项，$\frac{5}{8}$ 为公比的等比数列，所以 $a_n=\frac{3}{2}\times\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$，所以 $a_2=\frac{15}{16}$，$a_3=\frac{75}{128}$，$a_4=\frac{375}{1024}$，所以 $a_2+a_3+a_4=\frac{1935}{1024}$.故选 D.

7.B **提示**：由等比数列 $\{a_n\}$ 各项为正，得 $a_1>0$，$q>0$，因为 $b_n=\lg a_n$，所以 $b_n-b_{n-1}=\lg\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lg q(n\geqslant2)$，所以数列 $\{b_n\}$ 为等差数列，由 $T_7>T_6>T_8>0$，得 $\frac{T_7}{T_6}=a_7>1$，$0<\frac{T_8}{T_7}=a_8<1$，$0<\frac{T_8}{T_6}=a_7a_8<1$，所以 $0<q<1$，$\lg q<0$，则数列 $\{b_n\}$ 为递减的等差数列，所以数列 $\{b_n\}$ 的前 7 项为正数，又 $b_7=\lg a_7>0$，$b_8=\lg a_8<0$，所以当 S_n 取得最大值时，$n=7$.故选 B.

8.B **提示**：由 $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n-10$，得 $a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)-10$，令 $a_{n+1}-a_n=b_n$，则 $b_{n+1}=2b_n-10$，则 $b_{n+1}-10=2(b_n-10)$，所以数列 $\{b_n-10\}$ 是以 $b_1-10=a_2-a_1-10=-2$ 为首项，2 为公比的等比数列，所以 $b_n-10=-2\times2^{n-1}=-2^n$，则 $b_n=-2^n+10$，即 $a_{n+1}-a_n=10-2^n$，由 $a_2-a_1=10-2^1$，$a_3-a_2=10-2^2$，$a_4-a_3=10-2^3$，…，$a_n-a_{n-1}=10-2^{n-1}(n\geqslant2)$，以上各式相加，得 $a_n-a_1=10(n-1)-\frac{2(1-2^{n-1})}{1-2}=10n-2^n-8$，所以 $a_n=10n-2^n-7(n\geqslant2)$，当 $n=1$ 时，$a_1=1$ 满足上式，所以 $a_n=10n-2^n-7(n\in\mathbf{N}_+)$.当 $n\leqslant3$ 时，$a_{n+1}-a_n=10-2^n>0$，则 $\{a_n\}$ 递增，当 $n\geqslant4$ 时，$a_{n+1}-a_n=10-2^n<0$，则 $\{a_n\}$ 递减，因为 $a_3=10\times3-2^3-7=15>0$，$a_4=10\times4-2^4-7=17>0$，$a_5=10\times5-2^5-7=11>0$，$a_6=10\times6-2^6-7=-11<0$，所以 $a_n<0(n\geqslant6)$，所以 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的最大值为 $S_5=1+9+15+17+11=53$.故选 B.

二、多项选择题

9.AB **提示**：由等比数列的性质，得 $a_1a_5a_9=a_5^3=64$，则 $a_5=4$，故 A 正确；当 $a_1=1$ 时，$a_5=a_1q^4=4$，则 $q=\pm\sqrt{2}$，故 B 正确；因为 $a_1a_9=a_5^2=16$，所以 a_1 和 a_9 的等比中项为 4 或 -4，故 C 错误；假设 $a_1=1$，由 $a_5=4$，$a_1a_5a_9=4a_9=64$，得 $a_9=16$，则 $a_1+a_9=17$，故 D 错误.故选 AB.

10.BCD **提示**：由 $S_2=\frac{3}{2}$，得 $a_1(1+q)=\frac{3}{2}$，由 $\frac{S_6}{S_3}=\frac{9}{8}$，得 $\frac{1-q^6}{1-q^3}=1+q^3=\frac{9}{8}$，解得 $q=\frac{1}{2}$，将 $q=\frac{1}{2}$ 代入 $a_1(1+q)=\frac{3}{2}$，得 $a_1=1$，故 A 错误，B 正确；$a_7=a_1q^6=\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$，故 C 正确；$S_5=\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}=\frac{31}{16}$，故 D 正确.故选 BCD.

11.BC **提示**：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，因为 $S_n+2a_{n+1}=18$，所以 $S_{n+1}+2a_{n+2}=18$，两式作差，得 $2a_{n+2}=a_{n+1}$，所以 $q=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{1}{2}$，当 $n=1$ 时，$S_1+2a_2=a_1+2a_2=a_1(1+2q)=2a_1=18$，解得 $a_1=9$，故 B 正确；$a_n=a_1q^{n-1}=9\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，所以数列 $\{a_n\}$ 是递减数列，故 A 错误；因为 $\frac{T_{n+1}}{T_n}=a_{n+1}=9\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$，所以当 $n\leqslant3$ 时，$a_{n+1}\geqslant1$，则 $T_{n+1}\geqslant T_n$，当 $n\geqslant4$ 时，$0<a_{n+1}<1$，则 $T_{n+1}<T_n$，所以 T_n 的最大值是 T_4，故 C 正确，D 错误.故选 BC.

12.ACD **提示**：因为数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$a_n+a_{n+1}=2^{n+1}(n\in\mathbf{N}_+)$，所以 $a_2=2$，$a_3=6$，$a_4=10$，故 A 正确，B 错误；由 $a_n+a_{n+1}=2^{n+1}$，得 $a_{n+1}+a_{n+2}=2^{n+2}$，两式相减，得 $a_{n+2}-a_n=2^{n+1}$，故 $a_{2024}=(a_{2024}-a_{2022})+(a_{2022}-a_{2020})+\cdots+(a_4-a_2)+a_2=2^{2023}+2^{2021}+\cdots+2^3+2=\frac{2\times(1-4^{1012})}{1-4}=\frac{2^{2025}-2}{3}$，故 C 正确；$a_1+a_2+\cdots+a_{2023}=a_1+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{2022}+a_{2023})=2+2^3+2^5+\cdots+2^{2023}=\frac{2\times(1-4^{1012})}{1-4}=\frac{2^{2025}-2}{3}$，故 D 正确.故选 ACD.

三、填空题

13.8 **提示**：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则 $a_5+a_6=(a_1+a_2)q^4$，因为 $a_1+a_2=2$，$a_5+a_6=4$，所以 $2q^4=4$，得 $q^4=2$，所以 $a_9+a_{10}=(a_5+a_6)q^4=4\times2=8$.

14.$3\times2^{n-1}-2$ **提示**：因为 $a_{n+1}=2a_n+2$，所以 $a_{n+1}+2=2\cdot(a_n+2)$，又 $a_1=1$，则 $a_1+2=3$，所以数列 $\{a_n+2\}$ 是首项为 3，公比为 2 的等比数列，则 $a_n+2=3\times2^{n-1}$，所以 $a_n=3\times2^{n-1}-2$.

15.12 **提示**：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，因为 $a_n>0$，所以 $q>0$，因为 $a_3+a_4=a_1+a_2+3$，所以 $a_3+a_4-(a_1+a_2)=(q^2-1)(a_1+a_2)=3$，因为 $a_n>0$，所以 $q>1$，所以 $a_1+a_2=\frac{3}{q^2-1}$，所以 $S_6-S_4=a_5+a_6=q^4(a_1+a_2)=q^4\cdot\frac{3}{q^2-1}=3\left[(q^2-1)+\frac{1}{q^2-1}+2\right]\geqslant6+3\times2\sqrt{(q^2-1)\cdot\frac{1}{q^2-1}}=12$，当且仅当 $q^2-1=\frac{1}{q^2-1}$，即 $q=\sqrt{2}$ 时，等号成立，所以 S_6-S_4 的最小值为 12.

16.$\frac{4}{3}$ **提示**：因为数列 $\{a_n\}$ 是正项等比数列，且 $a_2=6$，$a_1a_3+2a_2a_4+a_3a_5=900$，所以 $a_2^2+2a_2^2q^2+a_2^2q^4=900$，所以 $q^4+2q^2-24=0$，解得 $q=2$，所以 $a_1=3$，所以 $a_n=a_1q^{n-1}=3\times2^{n-1}$，$S_n=\frac{3(1-2^n)}{1-2}=3\times2^n-3$，因为不等式 $\lambda a_n\leqslant1+S_n$ 对一切 $n\in\mathbf{N}_+$ 恒成立，所以 $\lambda\leqslant\frac{1+S_n}{a_n}=\frac{3\times2^n-2}{3\times2^{n-1}}$ 恒成立，因为 $2-\frac{2}{3\times2^{n-1}}\geqslant2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$，所以 $\lambda\leqslant\frac{4}{3}$，即实数 λ 的最大值为 $\frac{4}{3}$.

四、解答题

17. **解**：(1)设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，因为 $a_3=4$，$a_6=-32$，所以 $\frac{a_6}{a_3}=q^3=-8$，解得 $q=-2$.

(2)由(1)得 $q=-2$，又 $a_3=4$，所以 $a_1=\frac{a_3}{q^2}=1$，

所以 $S_5=\frac{1\times[1-(-2)^5]}{1-(-2)}=11$.

18.**解**：(1)由题意，得 $q\neq1$，因为 $\frac{S_6}{S_3}=\frac{26}{27}$，所以 $\frac{1-q^6}{1-q^3}=1+q^3=\frac{26}{27}$，解得 $q=-\frac{1}{3}$，又 $a_1=-1$，所以 $a_n=a_1q^{n-1}=-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=(-1)^n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

(2)由(1)知 $a_n^2=\frac{1}{9^{n-1}}$，所以 $\frac{a_n^2}{a_{n-1}^2}=\frac{1}{9}(n\geqslant2)$，且 $a_1^2=1$，所以数列 $\{a_n^2\}$ 是首项为 1，公比为 $\frac{1}{9}$ 的等比数列，所以 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\frac{1\times\left(1-\frac{1}{9^n}\right)}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9}{8}-\frac{1}{8\times9^{n-1}}$.

19.**解**：(1)由已知，得 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2m}=\frac{3}{2}(a_2+a_4+\cdots+a_{2m})$，所以 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2m-1}=\frac{1}{2}(a_2+a_4+\cdots+a_{2m})$，所以 $q=2$.由 $a_5+2a_4=a_2a_4$，得 $a_3q^2+2a_3q=a_3^2$，即 $q^2+2q=a_3$，所以 $a_3=8$，所以 $a_n=a_3q^{n-3}=2^n$.

(2)因为 $\{b_n\}$ 是递增数列，所以 $b_{n+1}>b_n$ 对 $n\in\mathbf{N}_+$ 恒成立，即 $n\in\mathbf{N}_+$ 时，$(n+1-\lambda)2^{n+1}>(n-\lambda)2^n$，得 $\lambda<n+2$ 对 $n\in\mathbf{N}_+$ 恒成立，即 $\lambda<3$.所以实数 λ 的取值范围是 $(-\infty,3)$.

20.**解**：(1)设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则 $q>0$，因为 a_2，a_3，$15a_1$ 成等差数列，所以 $2a_3=a_2+15a_1$，即 $2a_1q^2=a_1q+15a_1$，又 $a_1>0$，则 $2q^2-q-15=0$，解得 $q=3$（舍去负值），又 $S_4+5=5a_3$，所以 $\frac{a_1(1-3^4)}{1-3}+5=5\times a_1\times3^2$，解得 $a_1=1$，所以 $a_n=1\times3^{n-1}=3^{n-1}$.

(2)由(1)得，$a_n=3^{n-1}$，所以 $b_n=\frac{1}{n(\log_3a_n+3)}=\frac{1}{n(\log_33^{n-1}+3)}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$，所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$.

21.(1)**解**：由 $S_n^2-(n^2+n-1)S_n-(n^2+n)=0$，得 $[S_n-(n^2+n)](S_n+1)=0$.因为 $\{a_n\}$ 是正项数列，所以 $S_n>0$，所以 $S_n-(n^2+n)=0$，即 $S_n=n^2+n$.所以 $a_1=S_1=2$，当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-(n-1)^2-(n-1)=2n$.当 $n=1$ 时，上式也成立，所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)**证明**：因为 $a_n=2n$，$b_n=\frac{n+1}{(n+2)^2a_n^2}$，所以 $b_n=\frac{n+1}{4n^2(n+2)^2}=\frac{1}{16}\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]$.$T_n=\frac{1}{16}\times\left[1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]=\frac{1}{16}\times\left[1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]<\frac{1}{16}\times\left(1+\frac{1}{2^2}\right)=\frac{5}{64}$.

22.**解**：(1)设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，因为 $b_3=2a_2$，$a_3=b_4+1$，$a_1=1$，$d=2$，所以 $b_1+4=2q$，$q^2=b_1+7$，解得 $b_1=2$，$q=3$，所以 $a_n=a_1q^{n-1}=3^{n-1}$，$b_n=2+(n-1)\times2=2n$.

(2)若选择①，$c_n=3a_n+(b_n-1)=3^n+(2n-1)$，所以 $S_n=(3^1+1)+(3^2+3)+(3^3+5)+\cdots+[3^n+(2n-1)]=(3^1+3^2+3^3+\cdots+3^n)+(1+3+5+\cdots+2n-1)=\frac{3(1-3^n)}{1-3}+\frac{(1+2n-1)n}{2}=\frac{1}{2}\cdot3^{n+1}+n^2-\frac{3}{2}$.

若选择②，$c_n=\frac{b_n-1}{3a_n}=\frac{2n-1}{3^n}$，所以 $S_n=\frac{1}{3^1}+\frac{3}{3^2}+\frac{5}{3^3}+\cdots+\frac{2n-1}{3^n}$，所以 $\frac{1}{3}S_n=\frac{1}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{5}{3^4}+\cdots+\frac{2n-3}{3^n}+\frac{2n-1}{3^{n+1}}$，两式作差，得 $\frac{2}{3}S_n=\frac{1}{3^1}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{2}{3^n}-\frac{2n-1}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}+2\times\frac{\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{3}}-\frac{2n-1}{3^{n+1}}=\frac{2}{3}-\frac{2n+2}{3^{n+1}}$，所以 $S_n=1-\frac{n+1}{3^n}$.

第 14 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A **提示**：设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d\neq0)$，因为 a_2，a_3，a_6 成等比数列，所以 $a_3^2=a_2a_6$，又 $a_1=1$，所以 $(1+2d)^2=(1+d)(1+5d)$，解得 $d=-2$，或 $d=0$（舍去），所以数列 $\{a_n\}$ 的前六项和 $S_6=6\times1+\frac{6\times5}{2}\times(-2)=-24$.故选 A.

2.A **提示**：因为 -6，q^2，14 成等差数列，所以 $2q^2=-6+14$，解得 $q=2$ 或 $q=-2$，又 $a_n>0$，则 $q>0$，所以 $q=2$，所以 $\log_2\frac{a_3+a_4}{a_1+a_2}=\log_2\frac{(a_1+a_2)q^2}{a_1+a_2}=\log_2q^2=\log_24=2$.故选 A.

3.A **提示**：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由 $\{a_n\}$ 为递增数列，得 $q>1$，因为 $a_3=a_1q^2=16$，且 a_2 与 a_4 的等差中项为 20，即 $a_2+a_4=a_1q+a_1q^3=40$，联立 $\begin{cases}a_1q^2=16,\\ a_1q+a_1q^3=40,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=4,\\ q=2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=64,\\ q=\frac{1}{2}\end{cases}$（舍去）.所以该数列的前 n 项和为 $S_n=\frac{4(1-2^n)}{1-2}=2^{n+2}-4$.故选 A.

4.D **提示**：由 $S_n=S_{n+1}-3a_n-2$，得 $S_{n+1}-S_n=3a_n+2$，即 $a_{n+1}=3a_n+2$，所以 $a_{n+1}+1=3(a_n+1)$，又 $a_1=2$，则 $a_1+1=3$，所以数列 $\{a_n+1\}$ 是以 3 为首项，3 为公比的等比数列，所以 $a_n+1=3\cdot3^{n-1}=3^n$，则 $a_n=3^n-1$，所以 $S_{20}=3+3^2+3^3+\cdots+3^{20}-20=\frac{3\times(1-3^{20})}{1-3}-20=\frac{3^{21}-43}{2}$.故选 D.

5.D **提示**：不妨设第 n 层的小球个数为 a_n，由题意，得 $a_2-a_1=3$，$a_3-a_2=5$，…，即相邻两层小球个数之差构成以 3 为首项，2 为公差的等差数列，所以 $a_n-a_{n-1}=3+2(n-2)=2n-1(n\geqslant2)$，所以 $a_{50}-a_{49}=99$，$a_{49}-a_{48}=97$，…，$a_2-a_1=3$，以上各式相加，得 $a_{50}-a_1=\frac{49\times(3+99)}{2}=2499$，又 $a_1=2$，所以 $a_{50}=2499+2=2501$.故选 D.

6.A **提示**：由题意，得 $a_n\neq0$，由 $a_{n+1}=\frac{(n+1)a_n}{a_n+n}$，取倒数，得 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+n}{(n+1)a_n}$，即 $\frac{n+1}{a_{n+1}}=\frac{n}{a_n}+1$，则 $\frac{n+1}{a_{n+1}}-\frac{n}{a_n}=1$，因为 $a_1=\frac{1}{3}$，所以数列 $\left\{\frac{n}{a_n}\right\}$ 是首项为 3，公差为 1 的等差数列，则 $\frac{n}{a_n}=3+(n-1)\times1=n+2$，所以 $a_n=\frac{n}{n+2}$，所以当 $n\geqslant2$ 时，$a_1a_2\cdots a_n=\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\cdots\cdot\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n}{n+2}=\frac{2}{(n+1)(n+2)}=2\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$，又 $a_1=\frac{1}{3}=2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$，上式成立，所以 $a_1+a_1a_2+\cdots+a_1a_2\cdots a_n=2\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right]=1-\frac{2}{n+2}<1$，又 $a_1+a_1a_2+\cdots+a_1a_2\cdots a_n<m$ 对任意实数 m 恒成立，所以 $m\geqslant1$，即 m 的最小值为 1.故选A.

7.D **提示**：因为 $S_{n+1}=2\left(a_n+\frac{1}{2}S_n\right)$，所以 $S_{n+1}=2a_n+S_n$，则 $S_{n+1}-S_n=2a_n$，即 $a_{n+1}=2a_n$，所以数列 $\{a_n\}$ 是公比 $q=2$ 的等比数列，又 $a_3a_5=64$，所以 $a_1\times2^2\times a_1\times2^4=64$，则 $a_1^2=1$，又 $a_n>0$，所以 $a_1=1$，所以 $a_n=2^{n-1}$，$S_{2n}=\frac{1\times(1-2^{2n})}{1-2}=4^n-1$，因为 $\lambda a_n-S_{2n}-65\leqslant0$，即 $\lambda\leqslant\frac{4^n+64}{2^{n-1}}=4\times2^{n-1}+\frac{64}{2^{n-1}}$ 对任意 $n\in$

④ $\mathbf{N}_+$恒成立，因为 $4\times2^{n-1}+\frac{64}{2^{n-1}}\geqslant2\sqrt{4\times2^{n-1}\times\frac{64}{2^{n-1}}}=32$，当且仅当 $4\times2^{n-1}=\frac{64}{2^{n-1}}$，即 $n=3$ 时，取等号，所以 $\lambda\leqslant32$. 故选 D.

8.D　**提示**：因为 $F(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots+a_nx^{n-1}$，且 $F(1)=n^2$，所以 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=n^2$，①

当 $n=1$ 时，得 $a_1=1$，当 $n\geqslant2$ 时 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}=(n-1)^2$，②

由①-②，得 $a_n=n^2-(n-1)^2=2n-1$，当 $n=1$ 时，$a_1=1$，上式也成立，所以 $a_n=2n-1$，所以 $F\left(\frac{1}{2}\right)=1+3\times\frac{1}{2}+5\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+(2n-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，则 $\frac{1}{2}F\left(\frac{1}{2}\right)=1\times\frac{1}{2}+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+5\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(2n-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$，两式作差，得 $\frac{1}{2}F\left(\frac{1}{2}\right)=1+2\times\frac{1}{2}+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-(2n-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-(2n-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=3-(2n+3)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$，所以 $F\left(\frac{1}{2}\right)=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}$. 故选 D.

二、多项选择题

9.BC　**提示**：由题意，得 $a_1\neq0,d\neq0$，因为 a_3,a_5,a_8 成等比数列，所以 $a_5^2=a_3a_8$，即 $(a_1+4d)^2=(a_1+2d)(a_1+7d)$，得 $a_1=2d$，故 C 正确，D 错误；因为 $a_1+a_5+a_9=3a_5=3(a_1+4d)=18d$，$a_3+a_4=2a_1+5d=9d$，所以 $\frac{a_1+a_5+a_9}{a_3+a_4}=2$，故 B 正确，A 错误.故选 BC.

10.AC　**提示**：由题意，得 $a_1=-11$，当 $1\leqslant k\leqslant6$ 时，则 $S_k=\frac{k(-11+2k-13)}{2}=k^2-12k$，由 $S_k=-32$，即 $k^2-12k=-32$，解得 $k=4$ 或 $k=8$（舍去），故 A 正确；$S_6=\frac{-11+(-1)}{2}\times6=-36$，$a_7=(-3)^0-1=0$，$a_8=(-3)^1-1=-4$，$S_8=-36+0+(-4)=-40$，故 B 错误；$a_9=(-3)^2-1=8$，$S_9=-40+8=-32$，故 C 正确；$a_{10}=(-3)^3-1=-28$，$a_{11}=(-3)^4-1=80$，$a_{12}=(-3)^5-1=-244$，所以 $S_{12}=S_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}=-32-28+80-244=-224$，故 D 错误.故选 AC.

11.BCD　**提示**：因为对任意 $n\geqslant2$ 且 $n\in\mathbf{N}_+$恒有 $\frac{a_n+3^n}{a_{n-1}-3^{n-1}}=3$ 成立，即 $a_n+3^n=3a_{n-1}-3^n(n\geqslant2)$，所以 $a_n=3a_{n-1}-2\times3^n(n\geqslant2)$，变形可得 $\frac{a_n}{3^n}-\frac{a_{n-1}}{3^{n-1}}=-2(n\geqslant2)$，又 $a_1=3$，所以数列 $\left\{\frac{a_n}{3^n}\right\}$ 是首项为 $\frac{a_1}{3}=1$，公差为-2 的等差数列，故 B 正确；$\frac{a_n}{3^n}=-2n+3$，所以 $a_n=(3-2n)\cdot3^n$. 对于 A，$a_n=(3-2n)\cdot3^n$，则 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{3(3-2n)}{5-2n}$，所以数列 $\{a_n\}$ 不是等比数列，故 A 错误；对于 C，$a_n=(3-2n)3^n$，则 $a_n-a_{n-1}=(4-4n)\cdot3^{n-1}(n\geqslant2)$，所以 $a_n-a_{n-1}<0$，即 $a_n<a_{n-1}$，所以 $\{a_n\}$ 为递减数列，故 C 正确；对于 D，$a_n=(3-2n)\cdot3^n$，则 $S_n=1\times3+(-1)\times3^2+(-3)\times3^3+\cdots+(3-2n)\times3^n$，①

则 $3S_n=1\times3^2+(-1)\times3^3+(-3)\times3^4+\cdots+(3-2n)\times3^{n+1}$，②

由①-②，得 $-2S_n=3+(-2)\times(3^2+3^3+\cdots+3^n)-(3-2n)\times3^{n+1}=3+(-2)\times\frac{3^2(1-3^{n-1})}{1-3}-(3-2n)\times3^{n+1}=12-(4-2n)\times3^{n+1}$，所以 $S_n=(2-n)3^{n+1}-6$，故 D 正确.故选 BCD.

12.AD　**提示**：因为 $S_n=\frac{3}{2}a_n-n$，所以 $S_{n+1}=\frac{3}{2}a_{n+1}-(n+1)$，两式作差，得 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\frac{3}{2}a_{n+1}-\frac{3}{2}a_n-1$，即 $\frac{1}{2}\cdot a_{n+1}=\frac{3}{2}a_n+1$，则 $a_{n+1}+1=3(a_n+1)$，又 $S_1=a_1=\frac{3}{2}a_1-1$，解得 $a_1=2$，$a_1+1=3$，所以数列 $\{a_n+1\}$ 是以 3 为首项，3 为公比的等比数列，故 A 正确，B 错误；所以 $a_n+1=3\cdot3^{n-1}=3^n$，则 $a_n=3^n-1$，所以 $S_n=\frac{3}{2}a_n-n=\frac{3}{2}(3^n-1)-n=\frac{3^{n+1}}{2}-n-\frac{3}{2}$，故 C 错误；因为 $b_n=\frac{3^n}{a_na_{n+1}}=\frac{3^n}{(3^n-1)(3^{n+1}-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^n-1}-\frac{1}{3^{n+1}-1}\right)$，所以 $T_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{26}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3^n-1}-\frac{1}{3^{n+1}-1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3^{n+1}-1}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{16}<\frac{1}{5}$，故 D 正确.故选 AD.

三、填空题

13.2　**提示**：因为 $a_1=1$，且 $2a_1,\frac{1}{2}a_3,a_2$ 成等差数列，所以 $a_3=2a_1+a_2$，则 $q^2=2+q$，即 $q^2-q-2=0$，解得 $q=2$，或 $q=-1$，又 $q>0$，所以 $q=2$.

14.$a_n=\frac{2}{6n-5}$　**提示**：由 $a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+1}$，两边取倒数，得 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3a_n+1}{a_n}=3+\frac{1}{a_n}$，即 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=3$，又 $a_1=2$，则 $\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2}$，所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$，公差为 3 的等差数列，所以 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}+3(n-1)=\frac{6n-5}{2}$，所以 $a_n=\frac{2}{6n-5}$.

15.$[4,+\infty)$　**提示**：由 $n(a_{n+1}-a_n)=a_n$，得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n}$，则 $\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n-2}\times\frac{n}{n-1}$，所以 $\frac{a_n}{a_1}=n$，又 $a_1=\frac{1}{2}$，所以 $a_n=\frac{n}{2}$，所以 $\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{4}{n(n+1)}=4\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，所以 $S_n=4\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=4\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<4$，因为不等式 $S_n<t$ 恒成立，所以 $t\geqslant4$，即实数 t 的取值范围为 $[4,+\infty)$.

16.$\frac{3n-1}{3n-4}$，$-\frac{1}{3}$　**提示**：因为 $a_na_{n-1}=2a_{n-1}-1(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+)$，所以 $a_n=2-\frac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+)$，又 $b_n=\frac{1}{a_n-1}$，所以当 $n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+$时，$b_n-b_{n-1}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n-1}-1}=\frac{1}{2-\frac{1}{a_{n-1}}-1}-\frac{1}{a_{n-1}-1}=1$，所以数列 $\{b_n\}$ 为等差数列，又 $a_1=-2$，所以 $b_1=\frac{1}{a_1-1}=-\frac{1}{3}$，所以 $b_n=b_1+(n-1)\times1=n-\frac{4}{3}$，又 $b_n=\frac{1}{a_n-1}$，所以 $a_n=\frac{1}{n-\frac{4}{3}}+1=\frac{3n-1}{3n-4}$. 所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=-\frac{1}{3}n+\frac{n(n-1)}{2}\times1=\frac{1}{2}n^2-\frac{5}{6}n=\frac{1}{2}\left(n^2-\frac{5}{3}n\right)=\frac{1}{2}\left[\left(n-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}\right]$，所以当 $n=1$ 时，S_n 取得最小值 $-\frac{1}{3}$.

四、解答题

17.**解**：(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，且 $q\neq1$，由题意，得 $\begin{cases}2+d=2q,\\2+4d=2q^2,\end{cases}$ 解得 $q=3,d=4$，所以 $a_n=2+4(n-1)=4n-2$，$b_n=2\times3^{n-1}$.

(2)由 $b_m=a_k$，得 $2\times3^{m-1}=4k-2$，即 $3^{m-1}=2k-1$，因为 $1\leqslant k\leqslant100$，所以 $1\leqslant2k-1\leqslant199$，即 $1\leqslant3^{m-1}\leqslant199$，又 $3^4<199<3^5$，则 $0\leqslant m-1\leqslant4$，解得 $1\leqslant m\leqslant5$，所以集合 M 中所有元素之和为 $b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=\frac{2\times(1-3^5)}{1-3}=242$.

18.**解**：(1)因为 $a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n-n+1(n\in\mathbf{N}_+)$，所以 $a_2=2a_1-1+1=4$，$a_n-n=2a_{n-1}-(n-1)+1-n=2[a_{n-1}-(n-1)](n\geqslant2)$，又 $a_1-1=1$，所以数列 $\{a_n-n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列.

(2)由(1)得 $a_n-n=2^{n-1}$，所以 $a_n=n+2^{n-1}$，所以数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=(1+2+3+\cdots+n)+(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1})=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}=2^n-1+\frac{n(n+1)}{2}$.

19.**解**：(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d>0)$，由题意，得 $\begin{cases}a_1+d=2,\\(a_1+2d-1)(a_1+4d+5)=(a_1+3d)^2,\end{cases}$ 所以 $d^2-2d-3=0$，解得 $d=3$，或 $d=-1$，又 $d>0$，所以 $d=3$，又 $a_2=2$，所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2+3(n-2)=3n-4$.

(2)由(1)知，$a_1=-1$，$S_n=\frac{n(-1+3n-4)}{2}=\frac{3n^2-5n}{2}$，$b_n=\frac{3}{a_na_{n+1}}=\frac{3}{(3n-4)(3n-1)}=\frac{1}{3n-4}-\frac{1}{3n-1}$，所以 $T_{11}=\left(\frac{1}{-1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{29}-\frac{1}{32}\right)=-1-\frac{1}{32}=-\frac{33}{32}$，所以 $\frac{S_n}{32}+\frac{125}{33}T_{11}>0$，即 $\frac{3n^2-5n}{64}-\frac{125}{32}>0$，即 $3n^2-5n-250>0$，解得 $n>10$，又 $n\in\mathbf{N}_+$，所以满足条件的 n 的最小值为 11.

20.(1)**解**：当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=a_2-3-2=2$，则 $a_2=7$，因为 $S_n=a_{n+1}-3n-2$，所以 $S_{n-1}=a_n-3(n-1)-2(n\geqslant2)$，两式相减，得 $a_{n+1}=2a_n+3(n\geqslant2)$，所以 $a_{n+1}+3=2(a_n+3)(n\geqslant2)$，又 $a_1=2$，则 $a_1+3=5$，$a_2+3=10$，则 $a_2+3=2(a_1+3)$，所以 $n=1$ 时，上式成立，所以数列 $\{a_n+3\}$ 是首项为 5，公比为 2 的等比数列，所以 $a_n+3=5\times2^{n-1}$，则 $a_n=5\times2^{n-1}-3$.

(2)**证明**：由(1)得，$b_n=\frac{2^n}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{2^n}{(5\times2^{n-1}-3)(5\times2^n-3)}=\frac{2}{5}\left(\frac{1}{5\times2^{n-1}-3}-\frac{1}{5\times2^n-3}\right)$，所以 $T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=\frac{2}{5}\cdot\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{17}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5\times2^{n-1}-3}-\frac{1}{5\times2^n-3}\right)\right]=\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5\times2^n-3}\right)$，当 $n\in\mathbf{N}_+$时，$\frac{1}{5\times2^n-3}>0$，所以 $T_n<\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$.

21.**解**：(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

若选择①，由 $2a_5-a_3=13$，$a_2=3$，得 $2(a_2+3d)-(a_2+d)=13$，解得 $d=2$，所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a_2+(n-2)d=2n-1$.

若选择②，由 $S_4=16$，$a_2=3$，得 $\begin{cases}4a_1+6d=16,\\a_1+d=3,\end{cases}$ 解得 $a_1=1$，$d=2$，所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$.

若选择③，由 $S_3+a_6=20$，$a_2=3$，得 $\begin{cases}3a_1+3d+a_1+5d=20,\\a_1+d=3,\end{cases}$ 解得 $a_1=1,d=2$，所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)\cdot d=2n-1$.

因为 $T_n=2b_n-2$，所以当 $n\geqslant2$ 时，$T_{n-1}=2b_{n-1}-2$，两式相减，得 $b_n=(2b_n-2)-(2b_{n-1}-2)$，即 $b_n=2b_{n-1}(n\geqslant2)$，在 $T_n=2b_n-2$ 中，令 $n=1$，得 $b_1=2$，所以数列 $\{b_n\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，所以数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$.

综上，$a_n=2n-1$，$b_n=2^n$.

(2)由(1)知，$\frac{a_n}{b_n}=\frac{2n-1}{2^n}$，所以 $R_n=\frac{1}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$，$\frac{1}{2}R_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$，两式相减，得 $\frac{1}{2}R_n=\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{2^{n+1}}$，所以 $R_n=3-\frac{2n+3}{2^n}$.

22.**解**：(1)因为数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，所以 $b_1+b_8=b_4+b_5$，$b_4+b_5+b_6=3b_5$，由 $\frac{b_5^2}{b_1+b_6+b_8}=1$，得 $\frac{b_5^2}{3b_5}=1$，所以 $b_5=3$，又 $b_3=2$，设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d，所以 $d=\frac{b_5-b_3}{5-3}=\frac{1}{2}$，所以 $b_n=b_3+(n-3)d=2+\frac{1}{2}(n-3)=\frac{n+1}{2}$. 所以 $b_1=1$，则 $S_n=b_1\cdot2^{n+2}-4=2^{n+2}-4$，当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=4$；当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n+2}-4-2^{n+1}+4=2^{n+1}$，当 $n=1$ 时，$a_1=4$，上式成立. 所以 $a_n=2^{n+1}(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)由(1)得 $a_nb_n=2^{n+1}\cdot\frac{n+1}{2}=(n+1)\cdot2^n$，

因为 $T_n=2\times2^1+3\times2^2+4\times2^3+\cdots+(n+1)\cdot2^n$，①

所以 $2T_n=2\times2^2+3\times2^3+4\times2^4+\cdots+(n+1)\cdot2^{n+1}$，②

由①-②，得 $-T_n=4+2^2+2^3+\cdots+2^n-(n+1)\cdot2^{n+1}=4+\frac{4(1-2^{n-1})}{1-2}-(n+1)\cdot2^{n+1}=-n\cdot2^{n+1}$，所以 $T_n=n\cdot2^{n+1}$. 因为 $\frac{kT_n}{a_n}>\frac{6n^2}{n^2-9n+36}$ 对一切 $n\in\mathbf{N}_+$恒成立，所以 $k>\frac{6n}{n^2-9n+36}$ 对一切 $n\in\mathbf{N}_+$恒成立，即 $k>\frac{6}{n+\frac{36}{n}-9}$ 对一切 $n\in\mathbf{N}_+$恒成立.令 $g(n)=\frac{6}{n+\frac{36}{n}-9}(n\in\mathbf{N}_+)$，则 $g(n)=\frac{6}{n+\frac{36}{n}-9}\leqslant\frac{6}{2\sqrt{36}-9}=2$，当且仅当 $n=6$ 时，等号成立.所以 $k>2$，所以实数 k 的取值范围是 $(2,+\infty)$.

第 15 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C　**提示**：对于①，当三点共线时，确定的平面有无数个，故①错误；对于②，当圆心和圆上的两点满足三点共线时，确定的平面有无数个，故②错误；对于③，若两个平面相交有一个交点，则必有经过该点的一条直线，该直线为两个平面的交线，故③正确；对于④，若两条直线没有交点，则这两条直线可能平行，也可能异面，故④错误.所以不正确的命题有 3 个.故选C.

2.D　**提示**：若 $m/\!/\alpha,n\subset\alpha$，则 m 与 n 可能平行，也可能异面，故 A 错误；若 $m/\!/n,n\subset\alpha$，则 m 与 α 可能平行，可能 $m\subset\alpha$，故 B 错误；若 $m\subset\alpha,n\subset\beta,m/\!/n$，则 α 与 β 可能平行，也可能相交，故 C 错误；若 $m\perp\alpha$，则 m 与 α 内的所有直线都垂直，又 $l/\!/m$，所以 l 与平面 α 内的所有直线都垂直，根据线面垂直的定义，得 $l\perp\alpha$，故 D 正确.故选 D.

3.B　**提示**：取 A_1C_1 的中点 E，连接 DE,CE，因为 D 是 A_1B_1 的中点，所以 $DE/\!/B_1C_1$，且 $DE=\frac{1}{2}B_1C_1$，又 $B_1C_1/\!/BC$，$B_1C_1=BC$，所以 $DE/\!/BC$，且 $DE=\frac{1}{2}BC$，所以过 B,C,D 三点的平面截该三棱柱所得的截面为梯形 $BCED$，所以所求体积为 $V_{三棱柱\ ABC-A_1B_1C_1}-V_{三棱台\ A_1DE-ABC}=\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times2-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4}\times\sqrt{3}}\right)\times2=2\sqrt{3}-\frac{7\sqrt{3}}{6}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$. 故选 B.

4.B　**提示**：连接 BD_1，因为 E,F 分别是 DD_1,DB 的中点，所以 $EF/\!/BD_1$，所以 $\angle AD_1B$ 为异面直线 EF 与 AD_1 所成角，设正方体的棱长为 1，在 $\triangle ABD_1$ 中，$AB=1$，$AD_1=\sqrt{2}$，$BD_1=\sqrt{3}$，由余弦定理的推论，得 $\cos\angle AD_1B=\frac{2+3-1}{2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，又 $\angle AD_1B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin\angle AD_1B=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\tan\angle AD_1B=\frac{\sin\angle AD_1B}{\cos\angle AD_1B}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.故选 B.

5.D　**提示**：因为 A_1N 与 C_1A 异面，故 A 错误；因为 A_1N 的延长线必过点 B，则直线 A_1N 与平面 BAM 相交，故 B 错误；因为 AB_1 与 AB 不垂直，所以 AB_1 与平面 ABM 不垂直，故 C 错误；取 BC 的中点 P，连接 PB_1，在正方形 BCC_1B_1 中，由 $\tan\angle MBP=\frac{1}{2}$，$\tan\angle BB_1P=\frac{1}{2}$，得 $\angle MBP=\angle BB_1P$，又 $\angle MBP+\angle B_1BM=90°$，则 $\angle BB_1P+\angle B_1BM=90°$，所以 $BM\perp B_1P$.连接 AP，由 $AB=AC$，P 是 BC 的中点，得 $AP\perp BC$，又平面 $BCC_1B_1\perp$平面 ABC，平面 $BCC_1B_1\cap$平面 $ABC=BC$，$AP\subset$平面 ABC，所以 $AP\perp$平面 BCC_1B_1，又 $BM\subset$平面 BCC_1B_1，所以 $AP\perp BM$，又 $AP\cap B_1P=P$，所以 $BM\perp$平面 B_1AP，又 $AB_1\subset$平面 B_1AP，所以 $BM\perp AB_1$，故 D 正确.故选 D.

6.B　**提示**：取 AA_1,CC_1 中点 G,M，连接 DG,GB_1,B_1M_1,MD，则 $DG/\!/A_1E$，$A_1E/\!/B_1M$，所以 $DG/\!/B_1M$，同理可得 $DM/\!/B_1G$，所以四边形 DMB_1G 是平行四边形，

则平面 DMB_1G 为过点 D 的正方体的截面. 因为 $DG/\!/A_1E$，$A_1E\subset$平面 AEC_1，$DG\not\subset$平面 AEC_1，所以 $DG/\!/$平面 AEC_1，因为 $DM/\!/C_1E$，$C_1E\subset$平面 AEC_1，$DM\not\subset$平面 AEC_1，所以 $DM/\!/$平面 AEC_1，又 $DM\cap DG=D$，所以平面 $DMB_1G/\!/$平面 AEC_1，易知 $DG=DM=\sqrt{5}$，则四边形 DMB_1G 是菱形，又 $GM=2\sqrt{2}$，$DB_1=2\sqrt{3}$，所以截面的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot GM\cdot DB_1=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{3}=2\sqrt{6}$.故选B.

7.D　**提示**：作 $AE\perp BC$ 于点 E，连接 DE，因为 $CD\perp$底面 ABC，$AE\subset$底面 ABC，所以 $CD\perp AE$，又 $AE\perp BC$，$BC\cap CD=C$，$BC,CD\subset$平面 BCD，所以 $AE\perp$平面 BCD，所以 AD 与平面 BCD 所成的角为 $\angle ADE$.在 $\triangle ABC$ 中，$AB=\sqrt{3}$，$AC=1$，$\angle BAC=\frac{5\pi}{6}$，由余弦定理，得 $BC^2=1^2+(\sqrt{3})^2-2\times1\times\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=7$，则 $BC=\sqrt{7}$，$CD=\sqrt{7}$，又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AE=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\frac{5\pi}{6}$，即 $\frac{1}{2}\times\sqrt{7}\times AE=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1\times\frac{1}{2}$，解得 $AE=\frac{\sqrt{21}}{14}$，因为 $CD\perp$底面 ABC，$AC\subset$底面 ABC，所以 $CD\perp AC$，在 $\text{Rt}\triangle DCA$ 中，$AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=2\sqrt{2}$，所以 $\sin\angle ADE=\frac{AE}{AD}=\frac{\sqrt{42}}{56}$.故选 D.

8.C　**提示**：连接 AC,BD 交于点 O_1，取 AD 中点 E，连接 O_1E,SE，由题意知，$O_1E\perp AD$，$SE\perp AD$，O_1 为正方形 $ABCD$ 外接圆的圆心，又平面 $SAD\perp$平面 $ABCD$，平面 $SAD\cap$平面 $ABCD=AD$，$O_1E\subset$平面 $ABCD$，所以 $O_1E\perp$平面 SAD，同理可得 $SE\perp$平面 $ABCD$. 设等边 $\triangle SDA$ 的外接圆的圆心为 O_2，过 O_2 作 O_1E 的平行线交过 O_1 作 SE 的平行线于点 O，则 $OO_1\perp$平面 $ABCD$，$OO_2\perp$平面 SAD，所以点 O 为四棱锥 $S-ABCD$ 外接球的球心，设外接球的半径为 R，在等边 $\triangle SDA$ 中，由正弦定理，得 $\frac{AD}{\sin\angle ASD}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2SO_2$，解得 $SO_2=2$，又 $OO_2=O_1E=\frac{1}{2}AB=\sqrt{3}$，所以外接球的半径 $R=OS=\sqrt{O_2S^2+O_2O^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$，所以四棱锥 $S-ABCD$ 外接球的表面积为 $4\pi R^2=28\pi$.故选 C.

二、多项选择题

9.ACD　**提示**：对于 A，若 $m\perp\alpha,m\perp\beta$，由线面垂直的性质，得 $\alpha/\!/\beta$，故 A 正确；对于 B，若 $\alpha\perp\beta,\alpha\cap\beta=n,m\perp n$，则 $m\subset\alpha$ 或 $m/\!/\alpha$，或 m 与 α 相交，相交也不一定垂直，故 B 错误；对于 C，若 $\alpha/\!/\beta,m/\!/\alpha$，当 $m\not\subset\beta$ 时，可得 $m/\!/\beta$，所以 $m/\!/\beta$ 或 $m\subset\beta$，故 C 正确；对于 D，若 $m/\!/n,m\subset\alpha$，根据线面平行的判定定理，得 $n/\!/\alpha$ 或 $n\subset\alpha$，故 D 正确.故选 ACD.

10.ABD　**提示**：对于 A，因为 G,E 分别是 $\triangle BCD$，$\triangle ACD$ 的重心，连接 BG,AE，并延长交 CD 于点 F，则 F 是 CD 的中点，所以必有直线 BG,AE 共面，故 A 正确；对于 B，连接 GE，由 G,E 分别是 $\triangle BCD$，$\triangle ACD$ 的重心，得 $BG=2GF$，$AE=2EF$，则 $GE/\!/AB$，所以直线 AG 与 BE 相交，故 B 正确；对于 C，由 G 是 $\triangle BCD$ 的重心，得 $S_{\triangle GBC}=\frac{1}{3}S_{\triangle DBC}$，则 $V_{A-GBC}=\frac{1}{3}V_{A-DBC}$，故 C 错误；对于 D，因为 $GE/\!/AB$，且 $BG=2GF$，$AE=2EF$，由平行线的性质，得 $AB=3GE$，故 D 正确.故选 ABD.

11.ABD　**提示**：对于 A，由题意，得点 P 到平面 BCD 的距离为 4，$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times4\times4=8$，因为 $V_{B-DCP}=V_{P-BCD}=\frac{1}{3}\times4\times8=\frac{32}{3}$，所以三棱锥 $B-DCP$ 的体积是定值，故 A 正确；对于 B，连接 BD,DF,B_1D_1，因为 $EF/\!/B_1D_1/\!/BD$，且 $EF=\frac{1}{2}B_1D_1=\frac{1}{2}BD$，所以四边形 $BDFE$ 是梯形，即平面 BEF 截正方体所得的截面是梯形，故 B 正确；对于 C，$CE=CF=2\sqrt{5}$，$EF=2\sqrt{2}$，则 $\triangle CEF$ 是等腰三角形，所以当 P 为 EF 的中点时，$CP\perp EF$，CP 的长度最小，最小值为 $\sqrt{(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$，故C错误；对于 D，$AF=\sqrt{AD_1^2+D_1F^2}=6$，$AE=\sqrt{AB_1^2+B_1E^2}=6$，$EF=2\sqrt{2}$，所以 $\triangle AEF$ 是等腰三角形，$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{36-2}=2\sqrt{17}$，故 D 正确.故选 ABD.

12.ABD　**提示**：对于 A，因为 $AB=2$，$\angle BAD=120°$，E 为边 BC 的中点，所以 $\angle B=60°$，且 $BE=1$，所以 $AE\perp EC$，$AE\perp B_1E$，因为 $EC\cap B_1E=E$，所以 $AE\perp$平面 B_1EC，又 $AE\subset$平面 AB_1E，所以平面 $AB_1E\perp$平面 B_1EC，故 A 正确；对于 B，取 AB_1 的中点 G'，连接 $G'F$，由 F 为 B_1D 的中点，得 $G'F/\!/AD$，且 $G'F=\frac{1}{2}AD$，又 $EC/\!/AD$，且 $EC=\frac{1}{2}AD$，所以 $G'F/\!/EC$，且 $G'F=EC$，所以 $FG'EC$ 为平行四边形，所以 $CF/\!/EG'$，所以 AB_1 与 CF 所成的角为 $\angle AG'E$（或其补角）. 取 AB 的中点 G，即 $\angle AG'E=\angle AGE$，由 A 项得 $\angle AGE=\frac{2\pi}{3}$，所以 AB_1 与 CF 所在的角为 $\frac{\pi}{3}$，故 B 正确；对于 C，在翻折过程中，当 $B_1E\perp$平面 $ABCD$ 时，V_{B_1-AED} 取得最大值，此时 $V_{B_1-AED}=\frac{1}{3}\times B_1E\times S_{\triangle AED}=\frac{1}{3}\times1\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times2=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 C 错误；对于 D，由 B 项知，$EG'=CF$，且 $EG'/\!/CF$，则点 F 的轨迹与点 G 到 G' 的轨迹相同，由 A 项知点 B 到 B_1 的轨迹为以 E 为圆心，BE 为半径的半圆，又 G 为 AB 中点，所以点 G 到 G' 的轨迹为以 AE 的中点为圆心，$\frac{BE}{2}$ 为半径的半圆，所以点 F 的轨迹长度为 $\frac{1}{2}\times2\pi\times\frac{BE}{2}=\frac{\pi}{2}$，故 D 正确.故选 ABD.

三、填空题

13.3π　**提示**：设圆锥的母线为 l，底面半径 $r=1$，则圆锥的侧面展开图扇形的半径为 l，由已知，得扇形的弧长为 $2\pi r=2\pi$，又扇形的圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$，则 $2\pi=\frac{2\pi}{3}l$，解得 $l=3$，所以圆锥的侧面积 $S=\pi rl=3\pi$.

14. ①②③④　**提示**：在 $\triangle ABC$ 中，$AB=1$，$BC=2$，$\angle ABC=60°$，由余弦定理，得 $AC^2=1+4-2\times1\times2\times\frac{1}{2}=3$，所以 $AB^2+AC^2=BC^2$，则 $AB\perp AC$，故①正确；因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，$AB\subset$平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AB$，又 $PA\cap AC=A$，所以 $AB\perp$平面 PAC，故②正确；又 $PC\subset$平面 PAC，得 $AB\perp PC$，又 $AE\perp PC$，$AB\cap AE=A$，$AB,AE\subset$平面 ABE，所以 $PC\perp$平面 ABE，故③正确；又 $BE\subset$平面 ABE，所以 $PC\perp BE$，故④正确.

15.4　**提示**：连接 AC,A_1C_1，取 AC 的中点 E，过点 M 作 $MF\perp$平面 $A_1B_1C_1D_1$，则 F 为 A_1C_1 上一点，易知 $\triangle APM\cong\triangle AEM$，则 $PM=EM$，对于点 M，当 $MN\perp B_1C_1$ 时，MN 最小，此时由 $MF\perp$平面 $A_1B_1C_1D_1$，可知 $\triangle MFN$ 为等腰直角三角形，则 $MF=\frac{\sqrt{2}}{2}MN$，所以 $2PM+\sqrt{2}MN=2\cdot\left(PM+\frac{\sqrt{2}}{2}MN\right)=2(EM+MF)\geqslant2EF\geqslant2AA_1=4$，当且仅当 E,F,M 三点共线，且点 F 为 A_1C_1 的中点时，等号成立，则 $2PM+\sqrt{2}MN$ 的最小值为 4.

16.$\frac{2\sqrt{5}}{5}$；$\frac{20\sqrt{5}}{3}\pi$　**提示**：因为 $\angle DAB=\angle DAC=\frac{\pi}{2}$，所以 $DA\perp AB$，$DA\perp AC$，又 $AB\cap AC=A$，所以 $DA\perp$平面 ABC，由 $AB=AC=AD=2$，可得 $BD=CD=2\sqrt{2}$，$BC=2\sqrt{3}$，取 BC 的中点 E，连接 AE 和 DE，则 $DE\perp BC$，且 $DE=\sqrt{BD^2-BE^2}=\sqrt{5}$.设点 A 到平面 BCD 的距离为 h，又 $V_{D-ABC}=V_{A-BCD}$，即 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\sin\frac{2\pi}{3}\times2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\sqrt{5}\cdot h$，解得 $h=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，即点 A 到平面 BCD 的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.在 $\triangle ABC$ 中，$BC=2\sqrt{3}$，$\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$，设 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心为 O_1，半径为 r，则外接圆的直径为 $2r=\frac{BC}{\sin\angle BAC}=4$，可得 $r=2$，即 $AO_1=2$，设外接球的球心为 O，半径为 R，因为 $AD\perp$平面 ABC，且 $AD=2$，$AO=DO=R$，所以 $OO_1=\frac{1}{2}AD=1$，在 $\text{Rt}\triangle AOO_1$ 中，$R=AO=\sqrt{AO_1^2+OO_1^2}=\sqrt{5}$，所以外接球的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times(\sqrt{5})^3=\frac{20\sqrt{5}}{3}\pi$.

四、解答题

17.**证明**：(1)连接 BC_1 交 CB_1 于点 O，连接 OD，因为 O,D 分别是 BC_1,AB 的中点，则 OD 是 $\triangle ABC_1$ 的中位线，所以 $AC_1/\!/OD$，因为 $AC_1\not\subset$平面 CDB_1，$OD\subset$平面 CDB_1，所以 $AC_1/\!/$平面 CDB_1.

(2)因为 $AA_1\perp$平面 ABC，$CD\subset$平面 ABC，所以 $AA_1\perp CD$，因为 $AC=BC$，D 是 AB 中点，所以 $CD\perp AB$，因为 $AA_1\cap AB=A$，所以 $CD\perp$平面 ABB_1A_1.

18.**证明**：(1)因为 $AD/\!/BC$，F 为 AD 中点，E 在 BC上，所以 $DF/\!/CE$，$AF/\!/BE$，因为 $BE\subset$平面 BCE，$AF\not\subset$平面 BCE，所以 $AF/\!/$平面 BCE，又 $CE\subset$平面 BCE，$DF\not\subset$平面 BCE，所以 $DF/\!/$平面 BCE，因为 $AF\cap DF=F$，所以平面 $ADF/\!/$平面 BCE.

(2)在图 10 中，因为 $AD/\!/BC$，$EF/\!/AB$，$AB\perp AD$，所以 $EF\perp BC$，所以在图 11 中，$EF\perp CE$，$EF\perp BE$，又 $CE\cap BE=E$，所以 $EF\perp$平面 BCE，因为 $EF/\!/AB$，所以 $AB\perp$平面 BCE，因为 $AB\subset$平面 ABC，所以平面 $ABC\perp$平面 BCE.

19.(1)**证明**：连接 AB_1,AC_1，因为四边形 ABB_1A_1 是矩形，所以 E 为 AB_1 的中点，又 F 为 B_1C_1 的中点，所以 $EF/\!/AC_1$，因为 $EF\not\subset$平面 ACC_1A_1，$AC_1\subset$平面 ACC_1A_1，所以 $EF/\!/$平面 ACC_1A_1.

(2)**解**：由(1)知 $EF/\!/AC_1$，所以异面直线 EF 与 BC_1 的夹角是 $\angle BC_1A$（或其补角），因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱，所以 $CC_1\perp AC$，$CC_1\perp CB$，又 $CA=2$，$CB=3$，$CC_1=AA_1=1$，所以 $AC_1=\sqrt{5}$，$BC_1=\sqrt{10}$，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=120°$，由余弦定理，得 $AB=\sqrt{CA^2+CB^2-2CA\cdot CB\cos\angle ACB}=\sqrt{19}$，在 $\triangle AC_1B$ 中，由余弦定理的推论，得 $\cos\angle BC_1A=\frac{AC_1^2+BC_1^2-AB^2}{2AC_1\cdot BC_1}=-\frac{\sqrt{2}}{5}$，所以异面直线 EF 与 BC_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{5}$.

20.(1)**证明**：因为 $SB=SC$，M 是 BC 的中点，所以 $SM\perp BC$，因为平面 $ABCD\perp$平面 SBC，平面 $ABCD\cap$平面 $SBC=BC$，所以 $SM\perp$平面 $ABCD$.因为 $AM\subset$平面 $ABCD$，所以 $SM\perp AM$. 因为四边形 $ABCD$ 是矩形，M 是 BC 的中点，$AB=1$，$BC=2$，所以 $AM^2+MD^2=AD^2$，所以 $AM\perp MD$，又 $SM\cap MD=M$，所以 $AM\perp$平面 SMD，又 $SD\subset$平面 SMD，所以 $AM\perp SD$.

(2)**解**：由(1)知 $\triangle AMS$ 为直角三角形，$\angle AMS=90°$，$AM=\sqrt{2}$，因为 $SM=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $SA=SD=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，因为 $AM=MD=\sqrt{2}$，所以 $S_{\triangle AMD}=\frac{1}{2}AM\cdot MD=1$，所以 $V_{S-ADM}=\frac{1}{3}\cdot SM\cdot S_{\triangle AMD}=\frac{\sqrt{6}}{9}$. 在 $\triangle ADS$ 中，$SA=SD=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$AD=2$，设 AD 边上的高为 h，则 $h=\sqrt{SD^2-\left(\frac{AD}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{3}$，所以 $S_{\triangle ADS}=\frac{1}{2}h\cdot AD=\frac{\sqrt{15}}{3}$. 设点 M 到平面 ADS 的距离为 d，由 $V_{S-ADM}=V_{M-ADS}$，得 $V_{M-ADS}=\frac{1}{3}d\cdot S_{\triangle ADS}=\frac{1}{3}d\cdot\frac{\sqrt{15}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{9}$，所以 $d=\frac{\sqrt{10}}{5}$，故点 M 到平面 ADS 的距离为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

21.(1)**证明**：连接 BD，由题意得 $AC\cap BD=H$，$BH=DH$，又 $BG=PG$，所以 $GH/\!/PD$，因为 $GH\not\subset$平面 PAD，$PD\subset$平面 PAD，所以 $GH/\!/$平面 PAD.

(2)**证明**：取棱 PC 中点 N，连接 DN，则 $DN\perp PC$，又因为平面 $PAC\perp$平面 PCD，平面 $PAC\cap$平面 $PCD=PC$，所以 $DN\perp$平面 PAC，又 $PA\subset$平面 PAC，所以 $DN\perp PA$，又 $PA\perp CD$，$CD\cap DN=D$，所以 $PA\perp$平面 PCD.

(3)**解**：连接 AN，由(2)中 $DN\perp$平面 PAC，知 $\angle DAN$ 是直线 AD 与平面 PAC 所成角. 因为 $\triangle PCD$ 是等边三角形，$CD=2$，且 N 为 PC 中点，所以 $DN=\sqrt{3}$.又 $DN\perp AN$，在 $\text{Rt}\triangle AND$ 中，$\sin\angle DAN=\frac{DN}{DA}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.所以直线 AD 与平面 PAC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

22.(1)**证明**：取 BC 中点 H，分别连接 EH,FH，因为 F 为 B_1C_1 的中点，所以 $FH/\!/BB_1$，因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直棱柱，所以 $BB_1\perp$平面 ABC，所以 $FH\perp$平面 ABC，又 $BC\subset$平面 ABC，所以 $FH\perp BC$，又 E 为 AB 的中点，所以 $EH/\!/AC$，又 $AC\perp BC$，所以 $EH\perp BC$，又 $EH,FH\subset$平面 EFH，$EH\cap FH=H$，所以 $BC\perp$平面 EFH，又 $EF\subset$平面 EFH，所以 $EF\perp BC$.

(2)**解**：由(1)知，$\angle FEH$ 为直线 EF 与平面 ABC 所成的角，由题意，得 $\angle FEH=\frac{\pi}{3}$，由 $AC=BC=2$，得 $EH=1$，$AB=2\sqrt{2}$，$CE=\sqrt{2}$，且 $CE\perp AB$，$\tan\angle FEH=\frac{FH}{EH}=\sqrt{3}$，则 $FH=\sqrt{3}$，因为 $AA_1\perp$平面 ABC，$CE\subset$平面 ABC，则 $AA_1\perp CE$，又 $AA_1\cap AB=A$，$AA_1,AB\subset$平面 ABB_1A_1，所以 $CE\perp$平面 ABB_1A_1，又 $AA_1=FH=\sqrt{3}$，所以 $V_{B_1-A_1EC}=V_{C-A_1B_1E}=\frac{1}{3}\cdot CE\cdot S_{\triangle A_1B_1E}=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

第 16 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B　**提示**：因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，又向量 $\boldsymbol{a}=(1,1,0)$，$\boldsymbol{b}=(2,x,y)$，所以 $(2,x,y)=\lambda(1,1,0)$，得 $x=\lambda=2$，$y=0$，则 $\boldsymbol{b}=(2,2,0)$，所以 $|\boldsymbol{b}|=2\sqrt{2}$.故选B.

2.D　**提示**：由题意，得 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-k+1,k,2)$，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(-3,1,-4)$，因为 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 垂直，所以 $(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=-3(-k+1)+k-8=0$，解得 $k=\frac{11}{4}$.故选 D.

3.D　**提示**：因为向量 $\boldsymbol{a}=(0,-1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,2,y)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3$，所以 $-2+y=-3$，得 $y=-1$，所以 $\boldsymbol{b}=(1,2,-1)$，则 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{6}$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{-3}{\sqrt{2}\times\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 150°.故选 D.

4.D　**提示**：因为 A,B,C,D 四点共面，所以存在唯一一对实数 x,y，使得 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，所以 $2\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{c}=x(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})+y(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})=(2x+y)\boldsymbol{a}-3x\boldsymbol{b}-y\boldsymbol{c}$，因为 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 是空间的一组基底，所以 $\begin{cases}2x+y=0,\\-3x=2,\\-y=\lambda,\end{cases}$ 解得 $\lambda=-\frac{4}{3}$.故选 D.

5.D　**提示**：连接 AC,BD，交于点 O，因为 $PA\perp$平