第 16 期

第2~3版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.B **提示**:由题设知,在$[0,360°)$内,$\alpha=120°-30°=90°$,则与α终边相同的角的集合为$\{\beta|\beta=k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$.故选 B.

2.A **提示**:因为$72°=72\times\frac{\pi}{180}\mathrm{rad}=\frac{2\pi}{5}\mathrm{rad}$,半径为2cm,所以72°的圆心角所对的弧长是$\frac{2\pi}{5}\times2=\frac{4\pi}{5}$cm.故选 A.

3.A **提示**:由已知,得$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$,所以$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha=-\frac{3}{5}$.故选 A.

4.B **提示**:对于 A,$f(2)=\sin\pi=0$,故直线$x=2$不是$f(x)$的对称轴,故 A 不符合题意;对于 B,$f(2)=\cos\pi=-1$,故直线$x=2$是$f(x)$的一条对称轴,又$T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$,故 B 符合题意;对于 C,$T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$,故 C 不符合题意;同理,D 也不符合题意.故选 B.

5.C **提示**:$f(x)=\cos^2x-\sin^2x=\cos2x$.由$2k\pi\leqslant2x\leqslant\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得$k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,所以$f(x)$的单调递减区间为$\left[k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.结合各选项,可知选 C.

6.C **提示**:当$0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$时,$y=\cos x\tan x=\sin x\geqslant0$,排除 B,D;当$\frac{\pi}{2}<x<\pi$时,$y=-\cos x\tan x=-\sin x<0$,排除 A.故选 C.

7.C **提示**:将已知两式分别平方然后相加,得$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{5}{16}$,即$2+2\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{16}$,解得$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{27}{32}$.故选 C.

8.B **提示**:根据题意,得$\begin{cases}A+B=8500,\\-A+B=500,\end{cases}$解得$A=4000$,$B=4500$.又$T=2\times(8-2)=12$,所以$\omega=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$.

所以$f(x)=4000\cos\left(\frac{\pi}{6}x+\varphi\right)+4500$.

因为$f(8)$是最大值,所以$\frac{\pi}{6}\times8+\varphi=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

得$\varphi=-\frac{4\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,又$|\varphi|<\pi$,所以$\varphi=\frac{2\pi}{3}$.

所以$f(x)=4000\cos\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{2\pi}{3}\right)+4500$.

令$f(x)\geqslant6500$,得$\cos\left(\frac{\pi}{6}x+\frac{2\pi}{3}\right)\geqslant\frac{1}{2}$,

所以$-\frac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant\frac{\pi}{6}x+\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得$-6+12k\leqslant x\leqslant-2+12k,k\in\mathbf{Z}$.

又$1\leqslant x\leqslant12,x\in\mathbf{N}$,所以$x=6,7,8,9,10$,即该超市冰激凌的销售数量不少于6500的月份共有5个月.故选 B.

二、多项选择题

9.BD **提示**:由$\sin\alpha\cos\alpha<0$,知$\sin\alpha$与$\cos\alpha$异号,所以α为第二象限角或第四象限角.故选 BD.

10.AC **提示**:因为$\tan\frac{3\pi}{5}<0,\tan\frac{\pi}{5}>0$,所以$\tan\frac{3\pi}{5}<\tan\frac{\pi}{5}$,故 A 正确;因为$y=\tan x$在$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递增,且$\frac{\pi}{2}<2<3<\pi$,所以$\tan2<\tan3$,故 B 错误;因为$\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\cos\left(-\frac{23\pi}{5}\right)=\cos\frac{3\pi}{5}<0$,所以$\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right)>\cos\left(-\frac{23\pi}{5}\right)$,故 C 正确;因为$y=\sin x$在$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,且$-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{10}<-\frac{\pi}{18}<\frac{\pi}{2}$,所以$\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)<\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)$,故 D 错误.故选 AC.

11.BD **提示**:由$5\sin2\alpha+5\cos2\alpha+1=0$,

得$5\times2\sin\alpha\cos\alpha+5(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=0$,

整理得$2\sin^2\alpha-5\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha=0$,显然$\cos\alpha\neq0$,所以$2\tan^2\alpha-5\tan\alpha-3=0$,解得$\tan\alpha=3$,或$\tan\alpha=-\frac{1}{2}$.故选 BD.

12.AD **提示**:由题意,得$g(x)=3\tan\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=3\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.当$x=\frac{5\pi}{12}$时,$g(x)$不存在,所以函数$y=g(x)$的图象关于$\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$对称,故 A 正确,C 错误;若$g(x_1)=g(x_2),x_1\neq x_2$,则$|x_1-x_2|$的最小值为一个周期,即$\frac{\pi}{2}$,故 B 错误;当$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$时,$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$,此时函数$g(x)$单调递增,故 D 正确.故选 AD.

三、填空题

13.一或三 **提示**:因为α是第二象限角,所以$\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得$\frac{\pi}{4}+k\pi<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

当k是偶数时,$\frac{\alpha}{2}$的终边在第一象限;当k是奇数时,$\frac{\alpha}{2}$的终边在第三象限.故$\frac{\alpha}{2}$的终边落在第一或三象限.

14.$-\frac{\pi}{10}$ **提示**:因为$\tan\left(3\alpha+\beta+\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\tan(\alpha+\beta)$,所以$3\alpha+\beta+\frac{\pi}{5}=\alpha+\beta+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

得$\alpha=-\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.当$k=0$时,$\alpha=-\frac{\pi}{10}$.

15.$\left\{x\middle|x\neq\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$;$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$ **提示**:由$y=\tan x+\frac{1}{\tan x}$,得$\tan x\neq0$,则$x\neq k\pi$,且$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,即$x\neq\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.故函数$y$的定义域为$\left\{x\middle|x\neq\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

当$\tan x>0$时,$y=\tan x+\frac{1}{\tan x}\geqslant2$,当且仅当$\tan x=1$时,等号成立;

当$\tan x<0$时,因为$-y=-\tan x-\frac{1}{\tan x}\geqslant2$,所以$y\leqslant-2$,当且仅当$\tan x=-1$时,等号成立.

所以该函数的值域为$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

16.$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **提示**:由题意,设$A\left(x_1,\frac{1}{2}\right),B\left(x_2,\frac{1}{2}\right)$,

因为$|AB|=\frac{\pi}{6}$,所以$x_2-x_1=\frac{\pi}{6}$.

由$\sin x=\frac{1}{2}$,得$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$或$x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

故由题图可得$\omega x_2+\varphi-(\omega x_1+\varphi)=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$,

解得$\omega=4$.

又$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{8\pi}{3}+\varphi\right)=0$,所以$\frac{8\pi}{3}+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

得$\varphi=-\frac{8\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

所以$f(x)=\sin\left(4x-\frac{8\pi}{3}+k\pi\right)=\sin\left(4x-\frac{2\pi}{3}+k\pi\right)=\pm\sin\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)$.又$f(0)<0$,所以$f(x)=\sin\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)$.

所以$f(\pi)=\sin\left(4\pi-\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

四、解答题

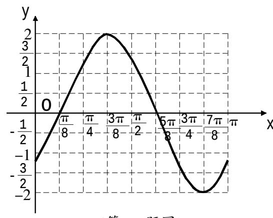
17.**解**:(1)设扇形所在圆的半径为r.由扇形的面积公式,得$\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}r=\frac{\pi}{6}$,解得$r=2$.所以$\alpha=\frac{l}{r}=\frac{\pi}{12}$.

(2)原式$=\frac{-\sin2\alpha\sin2\alpha}{-\sin2\alpha\cos2\alpha}=\tan2\alpha=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

18.**解**:(1)表格如下:

$2x-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$
$f(x)$	0	2	0	-2	0

描点,连线,可得图象如图所示.



(第 18 题图)

(2)由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得$-\frac{\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{8}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,所以函数$f(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{3\pi}{8}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.

(3)因为$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$,所以$2x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$,可得$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$,所以$f(x)\in[-2,\sqrt{2}]$.

19.**解**:(1)$f(x)$是偶函数.理由如下:$f(x)=\sin^2x+3\cos x+3=1-\cos^2x+3\cos x+3=-\cos^2x+3\cos x+4$.

因为$\forall x\in\mathbf{R}$,都有$-x\in\mathbf{R}$,且$f(-x)=-\cos^2(-x)+3\cos(-x)+4=-\cos^2x+3\cos x+4=f(x)$,所以$f(x)$是偶函数.

(2)令$t=\cos x$,则$-1\leqslant t\leqslant1$,且函数$f(x)$等价于$y=-t^2+3t+4=-\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$,

可知函数y在$[-1,1]$上单调递增,

所以当$t=-1$,即$\cos x=-1$时,函数y即$f(x)$取得最小值,为0,此时$x=\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

(3)由$f(x)=0$,得$\cos^2x-3\cos x-4=0$,即$(\cos x+1)(\cos x-4)=0$,解得$\cos x=-1$,或$\cos x=4$(舍去).又$x\in[0,2\pi]$,

所以$x=\pi$,即函数$f(x)$在$[0,2\pi]$上的零点为π.

20.**解**:(1)因为$\alpha\in(0,\pi),\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.所以$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{1}{5}-\frac{4}{5}=-\frac{3}{5}$,$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{4}{5}$.

(2)因为$\alpha\in(0,\pi),\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}>0$,所以$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

又$\beta\in(0,\pi)$,所以$\alpha+\beta\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$.

又$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{2}}{10}<0$,所以$\alpha+\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$.所以$\cos(\alpha+\beta)=-\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

所以$\sin(3\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta+2\alpha)=\sin(\alpha+\beta)\cos2\alpha+\cos(\alpha+\beta)\sin2\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{10}\times\left(-\frac{3}{5}\right)-\frac{7\sqrt{2}}{10}\times\frac{4}{5}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,得$2\alpha\in(0,\pi)$,又$\cos2\alpha=-\frac{3}{5}<0$,所以$2\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,又$\alpha+\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$,

所以$3\alpha+\beta\in\left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right)$.所以$3\alpha+\beta=\frac{7\pi}{4}$.

21.**解**:(1)$f(x)=2\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]\sin x+(\cos x+\sin x)\cdot(\cos x-\sin x)-1$

$=2(1+\sin x)\sin x+\cos^2x-\sin^2x-1=2\sin x+2\sin^2x+\cos2x-1$

$=2\sin x+2\times\frac{1-\cos2x}{2}+\cos2x-1=2\sin x$.

故函数$f(x)$的最小正周期$T=2\pi$.

(2)由(1)知$f(x)=2\sin x$,则$y=f(\omega x)=2\sin\omega x$.

因为此函数在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$上单调递增,$\omega>0$,

所以$\left[-\frac{\omega\pi}{2},\frac{2\omega\pi}{3}\right]\subseteq\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$,

得$-\frac{\omega\pi}{2}\geqslant-\frac{\pi}{2}+2k\pi$,且$\frac{2\omega\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$,

所以$\omega\leqslant1-4k$,且$\omega\leqslant\frac{3}{4}+3k,k\in\mathbf{Z}$.

又$\omega>0$,所以$0<\omega\leqslant\frac{3}{4}$.故$\omega$的取值范围是$\left(0,\frac{3}{4}\right]$.

(3)$g(x)=\frac{1}{2}\left[f(2x)+af(x)-af\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-a\right]-1$

$=\frac{1}{2}\left[2\sin2x+2a\sin x-2a\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-a\right]-1$

$=\sin2x+a\sin x-a\cos x-\frac{a}{2}-1$.

令$t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$,

则$\sin2x=2\sin x\cos x=1-t^2$,

所以函数$g(x)$等价于

$h(t)=1-t^2+at-\frac{a}{2}-1=-t^2+at-\frac{a}{2}=-\left(t-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}-\frac{a}{2}$.

当$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$时,$x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right]$,则$t\in[-\sqrt{2},1]$.

当$\frac{a}{2}<-\sqrt{2}$,即$a<-2\sqrt{2}$时,$h(t)_{\max}=h(-\sqrt{2})=-2-\sqrt{2}a-\frac{a}{2}=2$,解得$a=-\frac{8}{2\sqrt{2}+1}$(舍去);

当$-\sqrt{2}\leqslant\frac{a}{2}\leqslant1$,即$-2\sqrt{2}\leqslant a\leqslant2$时,$h(t)_{\max}=h\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}-\frac{a}{2}=2$,解得$a=-2$,或$a=4$(舍去);

当$\frac{a}{2}>1$,即$a>2$时,$h(t)_{\max}=h(1)=\frac{a}{2}-1=2$,解得$a=6$.

综上,$a=-2$或6.

22.**解**:(1)选①②:由①,得$f(0)=2\sqrt{2}$,即$2\cos\varphi+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$,所以$\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$.又$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=\frac{\pi}{4}$.

由②,得$\frac{1}{2}\omega+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,即$\omega=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.又$0<\omega<2$,所以$\omega=\frac{\pi}{2}$.所以$f(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}$.

选①③:由①,得$f(0)=2\sqrt{2}$,即$2\cos\varphi+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$,所以$\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$.又$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=\frac{\pi}{4}$.

由③,得$T=2\times2=4$,所以$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{2}$.

所以$f(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}$.

选②③:由③,得$T=2\times2=4$,所以$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{2}$.

由②,得$\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,即$\varphi=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,又$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=\frac{\pi}{4}$.所以$f(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}$.

(2)当$a\in(-2,0)$时,$2a+\frac{3}{2}\in\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$.

若$x\in\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$,则$\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}\in(-\pi,\pi)$.

记$m=\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}$,$m_1=\frac{\pi}{2}\left(2a+\frac{3}{2}\right)+\frac{\pi}{4}=\pi a+\pi\in(-\pi,\pi)$,$m_2=\frac{\pi}{2}a+\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.

因为$f\left(2a+\frac{3}{2}\right)>f(a)$,$y=2\cos m+\sqrt{2}$在$m\in(-\pi,\pi)$上关于$y$轴对称,

所以$|m_1|<|m_2|$,即$|\pi a+\pi|<\left|\frac{\pi}{2}a+\frac{\pi}{4}\right|$,得$(a+1)^2<\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{4}\right)^2$,解得$-\frac{3}{2}<a<-\frac{5}{6}$.

所以存在实数a满足要求,且实数a的取值范围是$\left(-\frac{3}{2},-\frac{5}{6}\right)$.

扫码免费下载习题讲解 ppt

第 13 期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

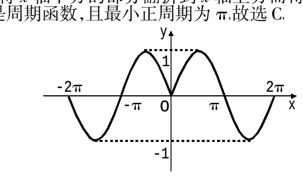
1.B **提示**:因为$\frac{\pi}{2}<2<\pi$,结合正弦曲线,可知正弦函数$y=\sin x(x\in[0,2))$的图象与直线$y=1$只有1个交点.故选 B.

2.B **提示**:由已知,得$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2\times\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=\cos\varphi=\frac{1}{2}$,又$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=\frac{\pi}{3}$.故选 B.

3.D **提示**:由$x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$,结合余弦曲线,可知$f(x)=\cos x$的最小值为$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$.故选 D.

4.A **提示**:由$x+\frac{\pi}{4}\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,得$x\neq k\pi+\frac{\pi}{4}$,$k\in\mathbf{Z}$.故选 A.

5.C **提示**:画出$y=\sin|x|$在$[-2\pi,2\pi]$上的图象,如图所示,可知该函数不是周期函数;函数$y=|\sin x|$的图象是将正弦曲线保留x轴上方的部分,并将x轴下方的部分翻折到x轴上方而得到的,故该函数是周期函数,且最小正周期是π;函数$y=\cos|x|=\cos x$是周期为2π的周期函数;$y=|\tan x|$的图象是将正切曲线保留x轴上方的部分,并将x轴下方的部分翻折到x轴上方而得到的,故该函数是周期函数,且最小正周期为π.故选 C.



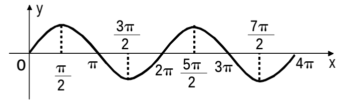
(第 5 题图)

6.B **提示**:因为$f(-x)=\cos(-x)-\cos^3(-x)=\cos x-\cos^3x=f(x)$,所以$f(x)$是偶函数,图象关于$y$轴对称,排除 A,D;因为$f(x)=\cos x-\cos^3x=\cos x(1-\cos^2x)$,而$1-\cos^2x\geqslant0$,所以,当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时,$f(x)\geqslant0$,当$x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$时,$f(x)\leqslant0$,排除 C,故选 B.

7.D **提示**:不妨设$\omega>0$.根据题意,可得$\frac{\pi}{6}\omega+\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$,且$\frac{2\pi}{3}\omega+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得$\omega=2,\varphi=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.所以$f(x)=\sin\left(2x-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)=\sin\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)$.

所以$f\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.故选 D.

8.D **提示**:由给定区间可知,$a>0$.又区间$[a,2a]$与区间$[2a,3a]$相邻,且区间长度相同,作出$y=\sin x$的部分图象如图所示.取$a=\frac{\pi}{6}$,则$2a=\frac{\pi}{3}$,$3a=\frac{\pi}{2}$,可知$s_a>0,t_a>0$,故 A 可能;取$a=\frac{5\pi}{12}$,则$2a=\frac{5\pi}{6}$,$3a=\frac{5\pi}{4}$,可知$s_a>0,t_a<0$,故 C 可能;取$a=\frac{7\pi}{6}$,则$2a=\frac{7\pi}{3}$,$3a=\frac{7\pi}{2}$,可知$s_a<0,t_a<0$,故 B 可能.则不可能的是$s_a<0,t_a>0$.故选 D.



(第 8 题图)

二、多项选择题

9.ABC **提示**:对于 A,$f(x-\pi)=\cos(x-\pi)=-\cos x$,此函数在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,故 A 正确;对于 B,$f(x+\pi)=\cos(x+\pi)=-\cos x$,此函数在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,故 B 正确;对于 C,$f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x$,此函数在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,故 C 正确;对于 D,$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$,此函数在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减,故 D 错误.故选 ABC.

10.AD **提示**:由正切函数的性质知,与函数$y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$的图象不相交的直线满足$2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得$x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.结合选项,可知选 AD.

11.CD **提示**:因为$0<\frac{1}{5}<\frac{1}{2}<\frac{\pi}{2}$,而$y=\sin x$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,所以$\sin\frac{1}{5}<\sin\frac{1}{2}$,故 A 错误;因为$0<\frac{3\pi}{5}<\frac{6\pi}{7}<\pi$,而$y=\cos x$在$(0,\pi)$上单调递减,所以$\cos\frac{3\pi}{5}>\cos\frac{6\pi}{7}$,故 B 错误;因为$\pi<\frac{7\pi}{6}<\frac{7\pi}{5}<\frac{3\pi}{2}$,而$y=\tan x$在$\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$上单调递增,所以$\tan\frac{7\pi}{6}<\tan\frac{7\pi}{5}$,故 C 正确;因为$\sin\frac{\pi}{5}>0,\cos\frac{3\pi}{5}<0$,所以$\sin\frac{\pi}{5}>\cos\frac{3\pi}{5}$,故 D 正确.故选 CD.

12.BC **提示**:若两个函数图象的对称轴相同,则两函数的周期必然相同,所以$\omega=2$,故 A 错误;$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,由$2x+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,得$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$,则直线$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$是$g(x)$图象的对称轴,所以$2\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+\theta=m\pi,m\in\mathbf{Z}$,得$\theta=(m-k)\pi-\frac{\pi}{3},m,k\in\mathbf{Z}$,当$m-k=1$时,$\theta=\frac{2\pi}{3}$,故 B 正确;由$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant2x+\frac{\pi}{6}\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,得$k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$,即函数$f(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$,故 C 正确;由$2x+\frac{\pi}{6}=k\pi$,得$x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$,即函数$f(x)$的所有零点的集合为$\left\{x\middle|x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12},k\in\mathbf{Z}\right\}$,故 D 错误.故选 BC.

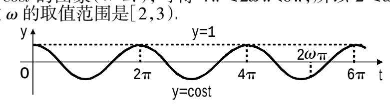
三、填空题

13.$\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$ **提示**:令$2x+\frac{\pi}{3}=2\pi$,解得$x=\frac{5\pi}{6}$,故最后一个关键点是$\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$.

14.1 **提示**:由题意,得$\frac{\pi}{2}=\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2\omega}$,解得$\omega=1$.

15.$-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **提示**:当$x\in(0,\pi)$时,$2x-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$,结合正弦函数在$\left(-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$上的图象,因为方程$f(x)=\frac{1}{3}$在区间$(0,\pi)$上的根为$x_1,x_2(x_1<x_2)$,令$2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$,得$x=\frac{5\pi}{12}$,所以$x_1,x_2$关于直线$x=\frac{5\pi}{12}$对称.所以$x_1+x_2=2\times\frac{5\pi}{12}=\frac{5\pi}{6}$.所以$\tan(x_1+x_2)=\tan\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

16.$[2,3)$ **提示**:由$x\in[0,2\pi]$,得$\omega x\in[0,2\omega\pi]$.因为$f(x)$在区间$[0,2\pi]$有且仅有3个零点,所以$\cos\omega x=1$在区间$[0,2\pi]$有且仅有3个实数根,令$t=\omega x$,则$\cos t=1$在区间$[0,2\omega\pi]$有且仅有3个实数根.即$y=\cos t$的图象与直线$y=1$在$[0,2\omega\pi]$上有且仅有3个交点.结合余弦函数$y=\cos t$的图象(如图),可得$4\pi\leqslant2\omega\pi<6\pi$,所以$2\leqslant\omega<3$.故$\omega$的取值范围是$[2,3)$.



(第 16 题图)

四、解答题

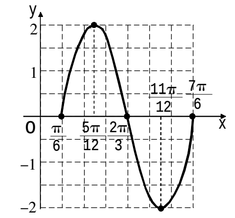
17.**解**:(1)由$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得$x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$.所以函数$f(x)$图象的对称中心为$\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},0\right)$,$k\in\mathbf{Z}$.

(2)由$2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得$-\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.故函数$f(x)$的单调递减区间为$\left[-\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.

18.**解**:(1)表格如下:

$2x-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$
$f(x)$	0	2	0	-2	0

由表格描点并将它们用光滑的曲线连接起来,可得$f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$上的图象如下图所示.



(第 18 题图)

(2)由$f(x)\geqslant1$,得$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\geqslant\frac{1}{2}$,即$\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得$\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

故原不等式的解集为$\left[\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.

19.**解**:(1)要使函数$y=\sqrt{\tan x-\frac{\sqrt{3}}{3}}$有意义,则需满足$\tan x-\frac{\sqrt{3}}{3}\geqslant0$,即$\tan x\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$,得$\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x<\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.所以该函数的定义域为$\left[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right),k\in\mathbf{Z}$.

(2)令$t=\tan x$,由$x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$,得$t\in[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$,则原函数化为$g(t)=t^2-2t+5=(t-1)^2+4$,其中$t\in[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$.

所以$g(t)$的最小值为$g(1)=4$,最大值为$g(-\sqrt{3})=8+2\sqrt{3}$.所以$f(x)$的值域为$[4,8+2\sqrt{3}]$.

20.**解**:(1)若选择条件①,则$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,解得$\omega=2$;

若选择条件②,则$1+\frac{\sqrt{3}}{2}+m+\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}+m\right)=0$,

解得$m=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

若选择条件③,则$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+m=2$,解得$m=2$.

根据题中要求,只能选择①②或①③作为已知条件.

若选择①②,则$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$,

此时$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$;

若选择①③,则$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+2$,

此时$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5+\sqrt{3}}{2}$.

(2)根据(1)中所求,不论选择①②还是①③,$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+m$,又其单调性与$h(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$相同,故函数$f(x)$在区间$[0,a]$上单调递增,可转化为$h(x)$在$[0,a]$上单调递增.又当$x\in[0,a]$时,$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},2a-\frac{\pi}{3}\right]$,要满足题意,只需$-\frac{\pi}{3}<2a-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}$,可得$0<a\leqslant\frac{5\pi}{12}$,故实数$a$的最大值为$\frac{5\pi}{12}$.

21.**解**:(1)因为函数$y=f(x)$的图象与x轴相邻两个交点的距离为$\frac{\pi}{2}$,所以$T=\frac{\pi}{2}$,即$\frac{\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}$,得$\omega=2$.

所以$f(x)=\tan(2x+\varphi)$.因为$y=f(x)$的图象关于点$M\left(-\frac{\pi}{8},0\right)$对称,所以$2\times\left(-\frac{\pi}{8}\right)+\varphi=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,得$\varphi=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,又$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,则$\varphi=\frac{\pi}{4}$.所以$f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

(2)由$-\frac{\pi}{2}+k\pi<2x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得$-\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}<x<\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.所以$f(x)$的单调递增区间为$\left(-\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right),k\in\mathbf{Z}$,无单调递减区间.

(3)由(1)知,$f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.由$-1\leqslant\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{3}$,得$-\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,解得$-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.所以原不等式的解集为$\left\{x\middle|-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

22.**解**:(1)由$BC=4,\angle OBC=\frac{2\pi}{3}$,可得$m=BC\sin(\pi-\angle OBC)=2\sqrt{3}$,$\frac{1}{4}T=BC\cos(\pi-\angle OBC)=2$,所以$T=8$.又$T=\frac{2\pi}{\omega}$,所以$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{4}$.所以$f(x)=2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{4}x+\varphi\right)$.

由$OA=\sqrt{6}$,得$A(0,\sqrt{6})$,则$f(0)=2\sqrt{3}\cos\varphi=\sqrt{6}$,得$\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$,又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,结合图象可得$\varphi=-\frac{\pi}{4}$.所以$f(x)=2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)$.

(2)由(1)得$g(x)=\sqrt{3}f(x)-3a=6\cos\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)-3a$.令$g(x)=0$,得$2\cos\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)=a$,则$g(x)$在$(0,13]$上的零点个数,即$y=2\cos\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)$的图象与直线$y=a$在$(0,13]$上的交点个数.

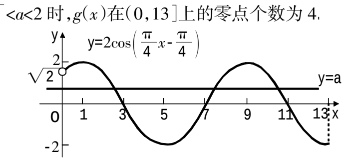
作出$y=2\cos\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)$的图象与直线$y=a$,如图所示,可知当$a<-2$或$a>2$时,两图象有0个交点;

当$a=-2$或$a=2$时,两图象有2个交点;

当$-2<a\leqslant\sqrt{2}$时,两图象有3个交点;

当$\sqrt{2}<a<2$时,两图象有4个交点.

所以,当$a<-2$或$a>2$时,$g(x)$在$(0,13]$上的零点个数为0;当$a=-2$或$a=2$时,$g(x)$在$(0,13]$上的零点个数为2;当$-2<a\leqslant\sqrt{2}$时,$g(x)$在$(0,13]$上的零点个数为3;当$\sqrt{2}<a<2$时,$g(x)$在$(0,13]$上的零点个数为4.



(第 22 题图)

第 14 期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B　**提示：** 由已知，得 $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{2-(-3)}{1+2\times(-3)}=-1$.故选 B.

2.D　**提示：** 因为 $\tan\alpha,\tan\beta$ 是方程 $x^2-5x-3=0$ 的两个实数根，所以 $\tan\alpha+\tan\beta=5,\tan\alpha\tan\beta=-3$.

所以 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{5}{1-(-3)}=\dfrac{5}{4}$.故选 D.

3.C　**提示：** 因为 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3},\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

所以 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\alpha\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{3}=\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$.故选 C.

4.C　**提示：** 原式 $=\cos54^\circ\cos24^\circ+\sin24^\circ\sin(180^\circ-54^\circ)$
$=\cos54^\circ\cos24^\circ+\sin24^\circ\sin54^\circ=\cos30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

故选 C.

5.B　**提示：** 由 $\cos^2x-\sin^2x=1$，得 $\cos2x=1$，所以 $2x=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $x=k\pi,k\in\mathbf{Z}$.故选 B.

6.B　**提示：** 因为 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{3}$，

且 $\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{6}$，所以 $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}$.

所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{3}$.

所以 $\cos(2\alpha+2\beta)=1-2\sin^2(\alpha+\beta)=1-2\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{1}{9}$.

故选 B.

7.C　**提示：** 因为 $y=\sin^2x-\sin^4x=\sin^2x(1-\sin^2x)=\sin^2x\cos^2x=\dfrac{\sin^22x}{4}=\dfrac{1-\cos4x}{8}$，所以该函数的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$.故选C.

8.D　**提示：** 令 $f(x)=0$，得 $a=\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，即 $\dfrac{a}{2}=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.因为 $x\in[0,\pi]$，所以 $x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right]$.所以函数 $f(x)$ 在 $x\in[0,\pi]$ 上有两个不同的零点，等价于直线 $y=\dfrac{a}{2}$ 与 $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象在 $x\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right]$ 上有两个不同的交点.结合余弦函数在 $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right]$ 上的图象，可知 $-1<\dfrac{a}{2}\leqslant-\dfrac{1}{2}$，解得 $-2<a\leqslant-1$.故选 D.

二、多项选择题

9.BC　**提示：** $f(x)=1-\sin2x\tan x=1-2\sin x\cos x\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}=1-2\sin^2x=\cos2x\left(x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right)$.

所以函数 $f(x)$ 图象的对称轴方程满足 $2x=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即对称轴方程为 $x=\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.结合选项可知选 BC.

10.BC　**提示：** 由已知，得 $\tan\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=2$，故 A 错误；$\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=\dfrac{2-1}{1+2}=\dfrac{1}{3}$，故 D 错误；又 α 是第三象限角，将 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2$ 与 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 联立，解得 $\sin\alpha=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)\times\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)=\dfrac{4}{5}$，故 B,C 正确.故选 BC.

11.BCD　**提示：** $\sin5\theta+\sin3\theta=\sin(4\theta+\theta)+\sin(4\theta-\theta)=2\sin4\theta\cos\theta$，故 A 正确；$\cos3\theta-\cos5\theta=\cos(4\theta-\theta)-\cos(4\theta+\theta)=2\sin4\theta\sin\theta$，故 B 错误；$\sin3\theta-\sin5\theta=\sin(4\theta-\theta)-\sin(4\theta+\theta)=-2\cos4\theta\sin\theta$，故 C 错误；$\sin5\theta+\cos3\theta=\sin(4\theta+\theta)+\cos(4\theta-\theta)=\sin4\theta\cos\theta+\cos4\theta\sin\theta+\cos4\theta\cos\theta+\sin4\theta\sin\theta=(\cos4\theta+\sin4\theta)\cdot(\cos\theta+\sin\theta)=2\sin\left(4\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$，故 D 错误.故选 BCD.

12.BD　**提示：** $f(\theta)=\sin\left[a\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]+\cos\left(a\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin a\theta\cos\dfrac{a\pi}{4}+\cos a\theta\sin\dfrac{a\pi}{4}-\sin a\theta=\left(\cos\dfrac{a\pi}{4}-1\right)\sin a\theta+\sin\dfrac{a\pi}{4}\cdot\cos a\theta$，则其最大值为 $\sqrt{\left(\cos\dfrac{a\pi}{4}-1\right)^2+\left(\sin\dfrac{a\pi}{4}\right)^2}=\sqrt{2}$，可得 $\cos\dfrac{a\pi}{4}=0$，所以 $\dfrac{a\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $a=2+4k,k\in\mathbf{Z}$.所以该函数的周期为 $\dfrac{2\pi}{|a|}=\dfrac{\pi}{|1+2k|},k\in\mathbf{Z}$.结合选项可知选BD.

三、填空题

13.$-\dfrac{3}{4}$　**提示：** 因为 $\tan\alpha=3$，所以 $\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2\times3}{1-3^2}=-\dfrac{3}{4}$.

14.$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　**提示：** $\sin12\ 345^\circ=\sin(34\times360^\circ+105^\circ)=\sin105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)=\sin60^\circ\cos45^\circ+\cos60^\circ\sin45^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

15.$\dfrac{33}{65}$，$\dfrac{56}{33}$　**提示：** 在 $\triangle ABC$ 中，$A,B\in(0,\pi)$，则 $\sin A>0,\sin B>0$.

因为 $\cos A=\dfrac{3}{5},\cos B=\dfrac{5}{13}$，所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\dfrac{4}{5}$，$\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\dfrac{12}{13}$.

所以 $\cos C=\cos(\pi-A-B)=-\cos(A+B)=-\cos A\cos B+\sin A\sin B=-\dfrac{3}{5}\times\dfrac{5}{13}+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{12}{13}=\dfrac{33}{65}$.

若在 $\triangle ABC$ 中，$\sin A=\dfrac{4}{5},\cos B=\dfrac{5}{13}$，则 $\cos A=\pm\dfrac{3}{5}$，$\sin B=\dfrac{12}{13}$.所以 $\tan A=\pm\dfrac{4}{3},\tan B=\dfrac{12}{5}$.

当 $\tan A=\dfrac{4}{3}$ 时，$\tan C=\tan(\pi-A-B)=-\tan(A+B)=-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\dfrac{\frac{4}{3}+\frac{12}{5}}{1-\frac{4}{3}\times\frac{12}{5}}=\dfrac{56}{33}$；

当 $\tan A=-\dfrac{4}{3}$ 时，同理，得 $\tan C=-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\dfrac{-\frac{4}{3}+\frac{12}{5}}{1+\frac{4}{3}\times\frac{12}{5}}=-\dfrac{16}{63}$，则 $\tan A<0,\tan C<0$，得 A,C 均为钝角，这在三角形中是不可能的，应舍去.综上，$\tan C=\dfrac{56}{33}$.

16.$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

提示： $f(x)=\sin x+2\cos x=\sqrt{5}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\sin x+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\cos x\right)=\sqrt{5}\sin(x+\varphi)$，其中 $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{5}},\sin\varphi=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.结合题意，可知当 $f(x)$ 取得最大值时，$x_0+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $x_0=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi-\varphi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $\sin x_0=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi-\varphi\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

四、解答题

17.**解：**(1)根据题意，得 $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3},\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$.

所以 $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2-\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2=-\dfrac{7}{9}$，

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$.

(2)因为 $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$，且 $\sin\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

所以 $\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}=-\dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

所以 $\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{14}}{4}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{4-\sqrt{14}}{12}$.

18.**解：**(1)因为 β 为锐角，$\cos\beta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

因为 α,β 为锐角，即 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $-\dfrac{\pi}{2}<-\beta<0$，得 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$，又 $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$，所以 $\cos(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha-\beta)}=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$.

所以 $\sin\alpha=\sin[(\alpha-\beta)+\beta]=\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\cdot\sin\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{10}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}+\dfrac{7\sqrt{2}}{10}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

(2)由(1)知 $\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，又 α 为锐角，所以 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

由 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，得 $0<\alpha+\beta<\pi$，所以 $\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{4}$.

19.**解：**(1)由 $\tan60^\circ=\tan(10^\circ+50^\circ)$
$=\dfrac{\tan10^\circ+\tan50^\circ}{1-\tan10^\circ\ \tan50^\circ}=\sqrt{3}$，
得 $\tan10^\circ+\tan50^\circ=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan10^\circ\tan50^\circ$，
所以 $\tan10^\circ+\tan50^\circ+\sqrt{3}\tan10^\circ\tan50^\circ=\sqrt{3}$.

(2)原式 $=\sin10^\circ\left(1+\dfrac{\sqrt{3}\sin50^\circ}{\cos50^\circ}\right)$
$=\sin10^\circ\cdot\dfrac{\cos50^\circ+\sqrt{3}\sin50^\circ}{\cos50^\circ}$
$=\sin10^\circ\cdot\dfrac{2\sin(30^\circ+50^\circ)}{\cos50^\circ}=\sin10^\circ\cdot\dfrac{2\sin80^\circ}{\cos50^\circ}$
$=\sin10^\circ\cdot\dfrac{2\cos10^\circ}{\cos50^\circ}$
$=\dfrac{\sin20^\circ}{\sin40^\circ}=\dfrac{\sin20^\circ}{2\sin20^\circ\cos20^\circ}=\dfrac{1}{2\cos20^\circ}$.

20.**解：**(1)由 $7\sin\alpha=2\cos2\alpha=2(1-2\sin^2\alpha)$，化简，得 $4\sin^2\alpha+7\sin\alpha-2=0$，即 $(4\sin\alpha-1)(\sin\alpha+2)=0$，解得 $\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$，或 $\sin\alpha=-2$.因为 $\sin\alpha\in[-1,1]$，所以 $\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$.

(2)由(1)知 $\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$，因为 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

由 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}<\beta<-\dfrac{\pi}{3}$，得 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{6}$，

又 $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{\sqrt{5}}{3}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{6}$，

所以 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<0$，

所以 $\sin(\alpha+\beta)=-\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=-\dfrac{2}{3}$.

故 $\sin\beta=\sin(\alpha+\beta-\alpha)=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\times\dfrac{1}{4}=-\dfrac{2\sqrt{15}+\sqrt{5}}{12}$.

21.(1) **解：** $f(x)=2\sqrt{2}\sin x\cos x+\sqrt{2}\cos^2x-\sqrt{2}\cdot\sin^2x=\sqrt{2}\sin2x+\sqrt{2}\cos2x=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，

故 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.由 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $-\dfrac{3\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{8}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\dfrac{3\pi}{8}+k\pi,\dfrac{\pi}{8}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.

(2)**证明：** 当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ 时，$2x+\dfrac{\pi}{4}\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$，则 $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)\in\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，所以 $f(x)\leqslant2$，当且仅当 $2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{\pi}{8}$ 时，等号成立.又 $x^2-2x+3=(x-1)^2+2\geqslant2$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立，因为 $f(x)\leqslant2$ 与 $x^2-2x+3\geqslant2$ 中等号成立的条件不同，所以 $f(x)<x^2-2x+3$，得证.

22.**解：** 若选①：$f(x)=[h(x)]^2+[g(x)]^2$
$=\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$
$=\dfrac{1-\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)}{2}+\dfrac{1+\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)}{2}$
$=1+\dfrac{1}{2}\left[\cos\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)-\cos\left(2x-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right]$
$=1-\dfrac{1}{2}\times2\sin2x\sin\dfrac{2\pi}{3}=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin2x$.

(1) $f(x)$ 的最小正周期为 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{8},\dfrac{3\pi}{8}\right]$ 时，$2x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$，

$\sin2x\in\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，故 $f(x)\in\left[1-\dfrac{\sqrt{3}}{2},1+\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right]$.

若选②：$f(x)=[h(x)]^2-[g(x)]^2=\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$
$=\dfrac{1-\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)}{2}-\dfrac{1+\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)}{2}$
$=-\dfrac{1}{2}\left[\cos\left(2x-\dfrac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right]$
$=-\dfrac{1}{2}\times2\cos2x\cos\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\cos2x$.

(1) $f(x)$ 的最小正周期为 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{8},\dfrac{3\pi}{8}\right]$ 时，$2x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$，

$\cos2x\in\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，故 $f(x)\in\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{1}{2}\right]$.

若选③：$f(x)=h(x)g(x)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$
$=\left(\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)\left(\dfrac{1}{2}\cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)$
$=\dfrac{1}{4}\sin x\cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cos^2x-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin^2x+\dfrac{3}{4}\sin x\cos x$
$=\sin x\cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1}{2}\sin2x-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

(1) $f(x)$ 的最小正周期为 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{8},\dfrac{3\pi}{8}\right]$ 时，$2x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$，$\sin2x\in\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，

故 $f(x)\in\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4},\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right]$.

第 15 期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C　**提示：** 根据“左加右减”的原则，得 $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.故选 C.

2.D　**提示：** 将函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍，所得图象的函数解析式为 $y=\sin\left(2\times\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.故选 D.

3.A　**提示：** 为了得到函数 $y=4\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sin\left[2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$ 的图象，只需把函数 $y=2\sin2x$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位.故选 A.

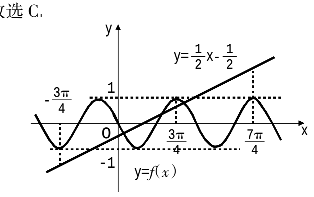
4.C　**提示：** 由题意，得 $f(x)=2\cos\left[2\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)\right]=2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.令 $2x-\dfrac{\pi}{6}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，当 $k=-1$ 时，$x=-\dfrac{5\pi}{12}$.故选C.

5.C　**提示：** 由题意，平移后图象的解析式为 $y=\tan\left[\omega\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)+\dfrac{\pi}{3}\right]=\tan\left(\omega x-\dfrac{\omega\pi}{12}+\dfrac{\pi}{3}\right)$，因为此函数图象与函数 $y=\tan\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象重合，所以 $-\dfrac{\omega\pi}{12}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $\omega=-12k+2,k\in\mathbf{Z}$.代入 $\omega>0$ 中，解得 $k<\dfrac{1}{6}$.所以 $k=0$ 时，ω 取得最小值2.故选C.

6.C　**提示：** 令 $H(t)\geqslant10$，得 $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t-\dfrac{2\pi}{3}\right)\geqslant-\dfrac{1}{2}$.① 因为 $0\leqslant t<24$，所以 $-\dfrac{2\pi}{3}\leqslant\dfrac{\pi}{12}t-\dfrac{2\pi}{3}<\dfrac{4\pi}{3}$，所以由①，可得 $-\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{\pi}{12}t-\dfrac{2\pi}{3}\leqslant\dfrac{7\pi}{6}$，解得 $6\leqslant t\leqslant22$.所以该港口一天内水深不小于10m的时长为22-6=16h.故选C.

7.B　**提示：** 由题意知，$A=1,T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2,\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，则 $\omega=\pi$，故噪音的声波曲线为 $y=\sin\left(\pi x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\pi x$.由图可知，降噪的声波曲线与噪音的声波曲线关于 x 轴（即两者叠加后的位置）对称，故降噪的声波曲线为 $y=-\cos\pi x$.故选 B.

8.C　**提示：** 由题知 $f(x)=\cos\left[2\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{\pi}{6}\right]=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin2x$，作出 $y=f(x)$ 的大致图象如图中曲线所示.而直线 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$ 显然过点 $\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$ 与点 $(1,0)$，又当 $x=-\dfrac{3\pi}{4}$ 时，$y=-\dfrac{3\pi+4}{8}<-1$；当 $x=\dfrac{3\pi}{4}$ 时，$y=\dfrac{3\pi-4}{8}<1$；当 $x=\dfrac{7\pi}{4}$ 时，$y=\dfrac{7\pi-4}{8}>1$，故在同一平面直角坐标系中作出直线 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$（如图所示），由图可知 $y=f(x)$ 与 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$ 的交点个数为 3.故选 C.



（第 8 题图）

二、多项选择题

9.ABD　**提示：** $g(x)=2\sin\left(8x+\dfrac{3\pi}{2}\right)=-2\cos8x$，又 $f(x)=2\cos4x$，对于 A，向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度，得到 $y=2\cos\left[4\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]=2\cos(4x+\pi)=-2\cos4x$ 的图象，再将横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$，得到 $y=-2\cos8x$ 的图象，故 A 正确；对于 B，向右平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度，得到 $y=2\cos\left[4\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]=2\cos(4x-\pi)=-2\cos4x$ 的图象，再将横坐标缩短到原来的 $\dfrac{1}{2}$，得到 $y=-2\cos8x$ 的图象，故 B 正确；对于 C，变换后得到 $y=2\cos\left[2\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)\right]=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象，故 C 错误；对于 D，变换后得到 $y=2\cos\left[8\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)\right]=2\cos(8x+\pi)=-2\cos8x$ 的图象，故 D 正确.故选 ABD.

10.BD　**提示：** 把函数 $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到 $y=\sin\left[2\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)-\dfrac{\pi}{3}\right]=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象，再把所得图象上所有点的纵坐标伸长到原来的 2倍（横坐标不变），得到 $y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象，最后把所得图象上所有点的横坐标伸长到原来的 3 倍（纵坐标不变），得到 $f(x)=2\sin\left(2\cdot\dfrac{1}{3}x-\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\dfrac{2}{3}x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象，又 $f(x)=2\sin\left(\dfrac{2}{3}x-\dfrac{\pi}{6}\right)=2\cos\left[\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{2}{3}x-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]=2\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{2}{3}x\right)=-2\cos\left(\dfrac{2}{3}x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，故选 BD.

11.AC　**提示：** 令 $s=1$，得 $\sin(\omega t+\varphi)=\dfrac{1}{2}$，可得 $t=\dfrac{2k\pi+\frac{\pi}{6}-\varphi}{\omega}$，或 $t=\dfrac{2k\pi+\frac{5\pi}{6}-\varphi}{\omega},k\in\mathbf{Z}$，所以两相邻时刻差为 $\dfrac{2\pi}{3\omega}$ 或 $\dfrac{4\pi}{3\omega}$.当 $\dfrac{2\pi}{3\omega}=\dfrac{\pi}{3}$ 时，解得 $\omega=2$；当 $\dfrac{4\pi}{3\omega}=\dfrac{\pi}{3}$ 时，解得 $\omega=4$.故选AC.

12.AC　**提示：** 由题意知曲线 I,E,P 的周期分别为 33，28，23，则 $\omega_I=\dfrac{2\pi}{33},\omega_E=\dfrac{2\pi}{28}=\dfrac{\pi}{14},\omega_P=\dfrac{2\pi}{23}$，所以三种曲线对应的解析式分别为 $f(x)=\sin\dfrac{2\pi x}{33},g(x)=\sin\dfrac{\pi x}{14},h(x)=\sin\dfrac{2\pi x}{23}$.对于 A，$g(35)=\sin\dfrac{\pi\times35}{14}=\sin\dfrac{5\pi}{2}=1$，故 A 正确；

对于 B，设 $F(x)=f(x)-g(x)=\sin\dfrac{2\pi x}{33}-\sin\dfrac{\pi x}{14}$，因为 $F(33)=-\sin\dfrac{33\pi}{14}=-\sin\dfrac{5\pi}{14}<0,F(42)=\sin\dfrac{84\pi}{33}=\sin\dfrac{6\pi}{11}>0$，所以 $F(x)$ 在 $(33,42)$ 上存在零点，即存在 $x_0\in(33,42)$，使得 $f(x_0)=g(x_0)$，故 B 错误；

对于 C，由 $x\in[46,50]$，得 $\dfrac{2\pi x}{23}\in\left[4\pi,\dfrac{100\pi}{23}\right]\subseteq\left[4\pi,\dfrac{9\pi}{2}\right]$，结合正弦曲线，可知 C 正确；

对于 D，$h(320)=\sin\dfrac{2\pi\times320}{23}=\sin\left(27\pi+\dfrac{19\pi}{23}\right)\neq0$，故 D 错误.故选 AC.

三、填空题

13.3，$\dfrac{\pi}{6}$　**提示：** 振幅 $A=3$；令 $x=0$，得初相 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

14.3　**提示：** 由题意，当 ω 最小时，有 $2\times\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}T=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=3$.

15.20.5℃　**提示：** 据题意得 $\begin{cases}a+A=28,\\a-A=18,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=23,\\A=5.\end{cases}$

所以 $y=23+5\cos\left[\dfrac{\pi}{6}(x-6)\right]$.

令 $x=10$，得 $y=23+5\cos\dfrac{2\pi}{3}=20.5$℃.

16.$y=-4\cos\dfrac{5\pi t}{2}(t\geqslant0)$　**提示：** 由题意，设 $y=A\sin(\omega t+\varphi)(A>0,\omega>0)$，则从题表中可得 $A=4,\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{0.8}=\dfrac{5\pi}{2}$，$4\sin\varphi=-4\Rightarrow\sin\varphi=-1\Rightarrow\varphi=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $y=4\sin\left(\dfrac{5\pi t}{2}-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)=4\sin\left(\dfrac{5\pi t}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)=-4\cos\dfrac{5\pi t}{2}(t\geqslant0)$.

四、解答题

17.**解：**(1)步骤 1，把 $y=\sin x$ 图象上所有点向左平移 $\dfrac{2\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $y=\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 的图象；

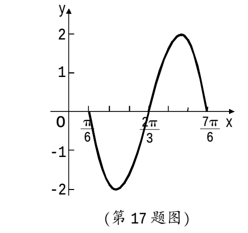
步骤 2，把 $y=\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 图象上所有点的横坐标变为原来的 $\dfrac{1}{2}$（纵坐标不变），得到函数 $y=\sin\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 的图象；

步骤 3，把 $y=\sin\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 图象上所有点的纵坐标变为原来的 2 倍（横坐标不变），得到函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 的图象.

(2)由 $x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}\right]$，得 $2x+\dfrac{2\pi}{3}\in[\pi,3\pi]$，列表如下：

$2x+\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π
x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$
$f(x)$	0	-2	0	2	0

描点，连线，得 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}\right]$ 上的简图如图所示.



（第 17 题图）

18.**解：**(1)由最小正周期 T=2，得 $\omega=\dfrac{\pi}{T}=\dfrac{\pi}{2}$，故 $f(x)=2\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x+\varphi\right)$.因为函数 $f(x)$ 的图象过点 $(1,2\sqrt{3})$，

所以 $f(1)=2\sqrt{3}$，得 $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\varphi\right)=\sqrt{3}$，

所以 $\dfrac{\pi}{2}+\varphi=\dfrac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $\varphi=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

又 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$，故 $f(x)=2\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

令 $\dfrac{\pi}{2}x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=k+\dfrac{1}{3},k\in\mathbf{Z}$，

故 $f(x)$ 的对称中心为 $\left(k+\dfrac{1}{3},0\right),k\in\mathbf{Z}$.

(2) 先将函数 $y=\tan x$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，然后将所得图象上各点的横坐标变为原来的 $\dfrac{2}{\pi}$（纵坐标不变），最后将图象上各点的纵坐标变为原来的2倍（横坐标不变），就可得到函数 $f(x)=2\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象.

19.**解：**(1)由题图可知，$A=1,T=2\times\left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\pi$，所以 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$.又 $f(x)$ 的图象过点 $\left(\dfrac{\pi}{6},1\right)$，所以 $\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{6}+\varphi\right)=1$，得 $\dfrac{\pi}{3}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

又 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.所以 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

(2)将 $y=f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 图象上所有点先向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到 $y=\sin\left[2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{\pi}{6}\right]=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象，再将所得图象的纵坐标变为原来的 2 倍，得到 $y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象，所以 $g(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x-\dfrac{\pi}{6}\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$，则 $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$，所以 $g(x)\in[-1,2]$，即 $y=g(x)$ 的值域为 $[-1,2]$.

20.**解：**(1)因为在一次振动中，小球从最高点运动至最低点所用时间为1s，所以 $T=2=\dfrac{2\pi}{\omega}$，得 $\omega=\pi$.

因为最高点与最低点的距离为10cm，所以 $A=\dfrac{10}{2}=5$.

所以 $h=5\sin\left(\pi t+\dfrac{\pi}{4}\right),t\in[0,+\infty)$.

(2)由题意，当 $t=\dfrac{1}{4}$ 时，小球第一次到达最高点，以后每隔一个周期都到达一次最高点，因为小球在 t_0s内经过最高点的次数恰为50次，所以 $\dfrac{1}{4}+49T\leqslant t_0<\dfrac{1}{4}+50T$，其中 $T=2$，所以 $98\dfrac{1}{4}\leqslant t_0<100\dfrac{1}{4}$.

故 t_0 的取值范围为 $\left[98\dfrac{1}{4},100\dfrac{1}{4}\right)$.

21.**解：**(1)由题图可知，$y=A\cos(\omega t+\varphi)+b$ 的最大值为 26，最小值为 14，所以 $\begin{cases}A+b=26,\\-A+b=14,\end{cases}$ 解得 $A=6,b=20$.

又由题图可知，函数 y 的周期 $T=2\times(15-3)=24$，所以 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{\pi}{12}$.因为 $t=3$ 时，y 取得最小值，所以 $\dfrac{\pi}{12}\times3+\varphi=\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $\varphi=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，又 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\dfrac{3\pi}{4}$.

所以 $y=6\cos\left(\dfrac{\pi}{12}t+\dfrac{3\pi}{4}\right)+20,t\in[0,24]$.

(2) 令 $y\geqslant23$，得 $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}t+\dfrac{3\pi}{4}\right)\geqslant\dfrac{1}{2}$，所以 $-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant\dfrac{\pi}{12}t+\dfrac{3\pi}{4}\leqslant\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $-13+24k\leqslant t\leqslant-5+24k,k\in\mathbf{Z}$.又 $t\in[0,24]$，所以当 $k=1$ 时，$11\leqslant t\leqslant19$，即一个 24 小时营业的商家想获得最大利润，应在 $t\in[11,19]$ 时间段将该种商品放在室外销售，且单日室外销售时间最长不能超过 19-11=8(小时).

22.**解：**(1)以地面所在直线为 x 轴，过摩天轮的圆心且与 x 轴垂直的直线为 y 轴，建立平面直角坐标系，设 1 号座舱与地面的距离 h 与时间 t 的函数关系式为 $h(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+b(A>0,\omega>0,0\leqslant\varphi<\pi,t\geqslant0)$，则 $A=30,b=32$，所以 $h(t)=30\sin(\omega t+\varphi)+32$.又 $T=24$，所以 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{\pi}{12}$.

而 $h(0)=30\sin\varphi+32=32$，得 $\sin\varphi=0$，所以 $\varphi=0$.

所以 $h(t)=30\sin\dfrac{\pi}{12}t+32(t\geqslant0)$.

所以 $h(6)=30\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\times6\right)+32=62$.故当 $t=6$ 时，1 号座舱与地面的距离为 62 米.

(2)令 $h(t)=17$，得 $\sin\dfrac{\pi}{12}t=-\dfrac{1}{2}$.因为 $0\leqslant t\leqslant24$，所以 $0\leqslant\dfrac{\pi}{12}t\leqslant2\pi$，所以 $\dfrac{\pi}{12}t=\dfrac{7\pi}{6}$ 或 $\dfrac{\pi}{12}t=\dfrac{11\pi}{6}$，解得 $t=14$ 或 $t=22$. 所以在前 24 分钟内，1 号座舱与地面的距离为 17 米时，$t=14$ 或 $t=22$.

(3)依题意，1 号座舱与地面的距离 $h_1=30\sin\dfrac{\pi}{12}t+32$，5 号座舱与地面的距离 $h_5=30\sin\left[\dfrac{\pi}{12}(t+8)\right]+32$，

所以 $H=|h_1-h_5|=30\left|\sin\dfrac{\pi}{12}t-\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right|$
$=30\left|\dfrac{3}{2}\sin\dfrac{\pi}{12}t-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\dfrac{\pi}{12}t\right|$
$=30\sqrt{3}\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{12}t-\dfrac{\pi}{6}\right)\right|$.

若 H 取得最大值，则 $\dfrac{\pi}{12}t-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $t=8+12k,k\in\mathbf{N}$.故若满足题意，则 $8+12\times2\leqslant t_0<8+12\times3$，即 $32\leqslant t_0<44$.所以 t_0 的取值范围是 $[32,44)$.