第 4 期

第 2~3 版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.B　**提示:**因为直线的方向向量为$(-1,3)$,所以直线的斜率为$\frac{3}{-1}=-3$,

所以所求的直线方程为$y-1=-3(x-1)$,即$3x+y-4=0$.

故选 B.

2.C　**提示:**设圆心坐标为(a,b),则$(a-1)^2+(b-1)^2=4$,所以该圆圆心的轨迹是以$(1,1)$为圆心,2 为半径的圆,

所以圆心到直线$3x+4y+13=0$的距离的最小值为$\frac{|3+4+13|}{\sqrt{3^2+4^2}}-2=2$.故选 C.

3.A　**提示:** 由两条直线$l_1:3x-4y+6=0$与$l_2:3x-By+C=0$平行,可得$\frac{3}{3}=\frac{-B}{-4}\neq\frac{C}{6}$,解得$B=4$,$C\neq6$,

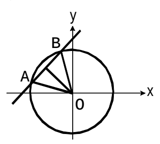
因为平行直线$l_1:3x-4y+6=0$与$l_2:3x-4y+C=0$间的距离为 3,所以$\frac{|C-6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$,所以$|C-6|=15$,所以$C=21$或$C=-9$,所以$B+C=25$或$-5$.故选 A.

4.A　**提示:**因为圆心为$(-2,1)$的圆与 y 轴相切,所以半径$r=2$,

所以该圆的标准方程为$(x+2)^2+(y-1)^2=4$.故选 A.

5.B　**提示:**圆$O:x^2+y^2=4$的圆心为$(0,0)$,半径$r=2$,若直线$x-y+a=0$与圆O交于A,B两点,且$\triangle AOB$为等边三角形,则圆心O到AB的距离为$\sqrt{3}$,又由圆心O到直线的距离公式可得,$\frac{|a|}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$,

解得$a=\pm\sqrt{6}$.故选B.



(第 5 题图)

6.A　**提示:**$|PM|=\sqrt{|OP|^2-4}$,求$|PM|$的最小值,即求出$|OP|$的最小值.$|OP|$的最小值为 O 到直线$2x+y-10=0$的距离,则$\frac{|-10|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2\sqrt{5}$.所以$|PM|_{min}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-4}=4$.故选 A.

7.D　**提示:**因为圆的方程为$(x-a)^2+(y-3)^2=20$,所以圆心为$(a,3)$,半径为$2\sqrt{5}$,

又圆$(x-a)^2+(y-3)^2=20$上有四个点到直线$2x-y+1=0$的距离为$\sqrt{5}$,

所以圆心到直线$2x-y+1=0$的距离$d<\sqrt{5}$,

所以$\frac{|2a-2|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}$,即$|2a-2|<5$,解得$-\frac{3}{2}<a<\frac{7}{2}$.

故选 D.

8.C　**提示:**圆$C_1:(x+1)^2+y^2=r^2$与$C_2:(x-3)^2+(y-3)^2=4$相外切,可得$r+2=\sqrt{(3+1)^2+3^2}$,解得$r=3$.因为点$P(x_0,y_0)$是圆C_1上的动点,圆C_1的方程为$(x+1)^2+y^2=9$,所以$x_0\in[-4,2]$,

则$x_0^2+y_0^2+6x_0=x_0^2+9-x_0^2-2x_0-1+6x_0=4x_0+8$,所以$-8\leqslant4x_0+8\leqslant16$,所以$x_0^2+y_0^2+6x_0$的最小值为$-8$.故选 C.

二、多项选择题

9.AC　**提示:**因为$\sin\theta=\frac{3}{5}$,$\theta\in[0,\pi)$,所以$\cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}=\pm\frac{4}{5}$,所以直线$l$的斜率$k=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\pm\frac{3}{4}$.

当$k=\frac{3}{4}$时,直线l的方程为$y-2=\frac{3}{4}(x+1)$,即$3x-4y+11=0$;

当$k=-\frac{3}{4}$时,直线l的方程为$y-2=-\frac{3}{4}(x+1)$,即$3x+4y-5=0$.故选 AC.

10.BC　**提示:**设圆心为$C(a,b)$,则圆心C在线段AB的垂直平分线$y=x$上,故有$a=b$,则圆心$C(a,a)$.

由$|CA|=2$,可得$(a-1)^2+(a+1)^2=4$,解得$a=\pm1$,故圆心$C(1,1)$或$C(-1,-1)$,

故圆的方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=4$或$(x+1)^2+(y+1)^2=4$.

故选 BC.

11.BC　**提示:**由$M:x^2+y^2-2x+4y+4=0$,得$(x-1)^2+(y+2)^2=1$,所以圆 M 的圆心为$(1,-2)$,半径为 1,故 A 错误;由圆$O:x^2+y^2=4$和圆$M:x^2+y^2-2x+4y+4=0$,两式相减,可得$x-2y-4=0$,即直线 AB 的方程为$x-2y-4=0$,故 B 正确;坐标原点 O 到直线$x-2y-4=0$的距离为$\frac{|-4|}{\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$,圆 O 的半径为 2,则线段 AB 的长为$2\sqrt{4-\frac{16}{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$,故 C 正确;圆心$M(1,-2)$,点 M 到$(5,1)$的距离为$\sqrt{(1-5)^2+(-2-1)^2}=5$,所以$(a-5)^2+(b-1)^2$的最大值为$(5+1)^2=36$,故 D 错误.故选 BC.

12.BC　**提示:**由题意知,直线 OA 的方程为$y=x$,设点 B(x_0,y_0),则由切点弦结论得直线 PQ:$(x_0-4)(x-4)+y_0y=4$,且$y_0=x_0$,

易得直线 PQ 过定点$M(3,1)$,故圆心 C 到直线 PQ的距离不是定值,$PC\perp CQ$不恒成立,故 A 错误;

因为直线 PQ 过定点$M(3,1)$,$|CM|=\sqrt{2}$,故当$PQ\perp CM$时,$|PQ|$最小,$|PQ|_{min}=2\sqrt{4-2}=2\sqrt{2}$,故最小半径为$\sqrt{2}$,

所以线段 PQ 为直径的圆的面积的最小值为2π,故B正确;四边形 BPCQ 的面积$S=|BP|\cdot|PC|=2|BP|=2\sqrt{|BC|^2-4}$,因为$|BC|_{min}$为点 C 到直线 OA 的距离$\frac{|4-0|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$,故$S_{min}=2\sqrt{8-4}=4$,故 C 正确;

当$x_0=3$时,直线 PQ:$-x+3y=0$过原点 O,两截距均为 0,故 D 错误.故选 BC.

三、填空题

13.(2,1)　**提示:**因为点$A(1,0)$和点 B 关于直线$x+y-2=0$对称,设点 B 的坐标为(a,b),

则$\begin{cases}\frac{b-0}{a-1}\times(-1)=-1,\\ \frac{a+1}{2}+\frac{b+0}{2}-2=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\ b=1,\end{cases}$

故点 B 的坐标为$(2,1)$.

14.$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-3)^2=10$,$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y+3)^2=10$

提示:由题意设圆心坐标为$(a,2a)$,可得$(2a)^2+1=10$,解得$a=\pm\frac{3}{2}$,所以圆心坐标为$\left(\frac{3}{2},3\right)$或$\left(-\frac{3}{2},-3\right)$,故圆的标准方程为$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-3)^2=10$或$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y+3)^2=10$.

15.11　**提示:**圆$C:(x-6)^2+(y-8)^2=1$的圆心$C(6,8)$,半径为 1,因为圆心C到$O(0,0)$的距离为$\sqrt{6^2+8^2}=10$,所以圆C上的点到点 O 的距离的最大值为$10+1=11$.

再由$\angle APB=90°$,可得以AB为直径的圆和圆C有交点,可得$|PO|=\frac{1}{2}|AB|=m$,故有$m\leqslant11$,

所以m的最大值为 11.

16.$5\sqrt{2}-3$　**提示:**根据题意,圆$C_1:x^2+(y-2)^2=1$的圆心C_1为$(0,2)$,半径$R=1$,

圆$C_2:(x-4)^2+y^2=4$,其圆心C_2为$(4,0)$,半径$r=2$,

设圆 N 与圆$C_1:x^2+(y-2)^2=1$关于直线$x+y+1=0$对称,其圆心 N 的坐标为(a,b),

则有$\begin{cases}\frac{b-2}{a-0}=1,\\ \frac{a}{2}+\frac{b+2}{2}+1=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-3,\\ b=-1,\end{cases}$即$N(-3,-1)$,

$|NC_2|=\sqrt{49+1}=5\sqrt{2}$,

当 P 是线段NC_2和直线$x+y+1=0$的交点时,$|PA|+|PB|$取得最小值,则$|PA|+|PB|$的最小值为$|NC_2|-R-r=5\sqrt{2}-3$.

四、解答题

17.**解:**(1)因为所求直线平行于 BC 所在的直线,所以可设所求直线方程为$x+3y+n=0$,

因为该直线过点$A(1,2)$,所以$1+6+n=0$,解得$n=-7$,故所求直线方程为$x+3y-7=0$.

(2)因为$A(1,2)$,$B(-1,0)$,所以$k_{AB}=\frac{2-0}{1-(-1)}=1$,线段 AB 的中点坐标为$(0,1)$,

所以线段 AB 的垂直平分线方程为$y-1=-(x-0)$,即$x+y-1=0$.

18.(1)**证明:**因为点$A(2,1)$,$B(5,-2)$,$C(4,3)$,

所以直线AC的斜率$k_{AC}=\frac{3-1}{4-2}=1$,

直线AB的斜率$k_{AB}=\frac{1+2}{2-5}=-1$,

所以$k_{AC}\cdot k_{AB}=-1$,故$AC\perp AB$,故$\triangle ABC$是直角三角形.

(2)**解:**因为$\triangle ABC$是直角三角形,$\angle A$为直角,所以 BC 是$\triangle ABC$外接圆的直径.

又线段BC的中点为$D\left(\frac{9}{2},\frac{1}{2}\right)$,

$\frac{|BC|}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{(5-4)^2+(-2-3)^2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$,

所以$\triangle ABC$的外接圆方程为$\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$.

19.**解:**(1)由圆$O:x^2+y^2=4$,圆$C:(x-3)^2+(y-1)^2=8$,两式作差,可得直线 PQ 的方程为$3x+y-3=0$,

点$O(0,0)$到直线 PQ 的距离$d=\frac{3}{\sqrt{10}}$,

则$|PQ|=2\sqrt{4-\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2}=\frac{\sqrt{310}}{5}$.

(2)由题意知,点$M(2,0)$,又$C(3,1)$,所以$|MC|=\sqrt{2}$,又$|NC|=2\sqrt{2}$,

所以$S_{\triangle MNC}=\frac{1}{2}|MC|\cdot|NC|\sin\angle MCN=2\sin\angle MCN$.

当$\angle MCN=90°$时,$S_{\triangle MCN}$取得最大值,此时$MC\perp NC$,又$k_{CM}=\frac{1-0}{3-2}=1$,所以直线 CN 的方程为$y-1=-(x-3)$,即$y=-x+4$.

由$\begin{cases}y=-x+4,\\ (x-3)^2+(y-1)^2=8,\end{cases}$解得$N(1,3)$或$N(5,-1)$.

当$N(1,3)$时,$k_{MN}=-3$,此时 MN 的方程为$3x+y-6=0$;

当$N(5,-1)$时,$k_{MN}=-\frac{1}{3}$,此时 MN 的方程为$x+3y-2=0$.

综上,$\triangle MNC$面积最大时的直线 MN 的方程为$3x+y-6=0$或$x+3y-2=0$.

20.(1)**解:**因为$OP=1$,$OQ=2$,所以圆 Q 的半径$PQ\in[1,3]$,

又圆 Q 与圆$x^2+y^2=r^2(r>0)$恒有公共点,且圆心之间的距离为$OQ=2$,

所以$|PQ-r|\leqslant2\leqslant PQ+r$对任意$PQ\in[1,3]$恒成立,

所以$\begin{cases}2\leqslant1+r,\\ |3-r|\leqslant2,\\ |1-r|\leqslant2,\end{cases}$解得$1\leqslant r\leqslant3$,所以$r$的取值范围为$[1,3]$.

(2)**证明:**设$Q(x_0,y_0)$,圆 Q 的半径$PQ=\sqrt{(x_0-1)^2+y_0^2}$,

则圆 Q 方程为$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=(x_0-1)^2+y_0^2$,

整理得$x^2-2x_0x+y^2-2y_0y=1-2x_0$,又圆$O:x^2+y^2=4$,

两圆方程相减,整理得直线 EF 的方程为$2x_0x+2y_0y-2x_0-3=0$,

所以 P 到直线 EF 的距离$d=\frac{|2x_0-2x_0-3|}{\sqrt{4x_0^2+4y_0^2}}=\frac{3}{2\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$,因为 Q 在圆 O 上,所以$x_0^2+y_0^2=4$,所以点 P 到直线 EF 的距离$d=\frac{3}{4}$,即点 P 到直线 EF 的距离为定值$\frac{3}{4}$.

21.(1)**解:**因为$k_{OP}=\frac{1}{2}$,所以$k_{AB}=-2$,所以直线AB的方程为$y-1=-2(x-2)$,

所以弦AB所在直线的方程为$2x+y-5=0$.

(2)**解:**易知直线l与圆 O 相离,令$Q(t,t-8)$,则线段 OQ 中点$K\left(\frac{t}{2},\frac{t-8}{2}\right)$,

因为O,C,Q,D四点位于直径是 OQ 的圆 K 上,所以圆 K 的方程为$\left(x-\frac{t}{2}\right)^2+\left(y-\frac{t-8}{2}\right)^2=\frac{t^2}{4}+\frac{(t-8)^2}{4}$,即$x^2-tx+y^2-(t-8)y=0$,因为$CD$是圆 O 与圆$K$的相交弦,

所以直线$CD:tx+(t-8)y-8=0$.

即$t(x+y)-8y-8=0$,由$x+y=0$且$8y+8=0$,解得$x=1$,$y=-1$,所以直线CD经过定点$(1,-1)$.

(3)**证明:**点$M(2,2)$在圆 O 上,ME,MF 是斜率互为倒数的两条互异直线,设直线$ME:y=k(x-2)+2$,

代入$x^2+y^2=8$,整理得$(1+k^2)x^2+(4k-4k^2)x+4k^2-8k-4=0$,

$2x_E=\frac{4k^2-8k-4}{1+k^2}$,$x_E=\frac{2k^2-4k-2}{1+k^2}$,$y_E=\frac{-2k^2-4k+2}{1+k^2}$,

所以$x_F=\frac{\frac{2}{k^2}-\frac{4}{k}-2}{1+\frac{1}{k^2}}=\frac{2-4k-2k^2}{k^2+1}$,$y_F=\frac{-2-4k+2k^2}{k^2+1}$,

$x_G=\frac{x_E+x_F}{2}=\frac{-4k}{1+k^2}$,$y_G=\frac{-4k}{1+k^2}$,故线段 EF 的中点$G$在直线$y=x$上.

22.(1)**证明:**直线$l:(3m+1)x+(1-m)y-4=0$化为$(3x-y)m+x+y-4=0$,

由$\begin{cases}3x-y=0,\\ x+y-4=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\ y=3,\end{cases}$所以直线 l 过定点$(1,3)$,将定点$(1,3)$代入圆 C 的方程左边,得$1+9-24+12=-2<0$,所以定点$M(1,3)$在圆 C 内,所以直线 l 与圆 C 相交,即直线 l 与圆 C 总有两个不同的交点.

(2)**解:**将圆 C 的方程化为$x^2+(y-4)^2=4$,则$C(0,4)$,半径$r=2$.

选①,因为$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$,所以$CA\perp CB$,所以$AB=2\sqrt{2}$,即弦 AB 的长为$2\sqrt{2}$,

所以圆心 C 到直线$l:(3m+1)x+(1-m)y-4=0$的距离$d=\sqrt{r^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$,

即$\frac{|4(1-m)-4|}{\sqrt{(3m+1)^2+(1-m)^2}}=\sqrt{2}$,解得$m=-1$,所以直线 l 的方程为$-2x+2y-4=0$,即$x-y+2=0$.

选②,当直线 l 所过定点$M(1,3)$为弦 AB 的中点时,$|\overrightarrow{AB}|$最小,

此时$CM\perp AB$,$k_{CM}=\frac{3-4}{1-0}=-1$,所以直线 l 的斜率为$k=1$,即$-\frac{3m+1}{1-m}=1$,解得$m=-1$,所以直线 l 的方程为$x-y+2=0$.

选③,因为过 A,B 两点分别作圆 C 的切线,切线交于点$P(2,2)$,所以$CP\perp AB$,又$k_{CP}=\frac{2-4}{2-0}=-1$,所以直线 l 的斜率为$k=1$,即$-\frac{3m+1}{1-m}=1$,解得$m=-1$,所以直线 l 的方程为$x-y+2=0$.

第 1 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B　**提示:**因为$C(8,4)$,$D(2,-2)$,所以$k_{CD}=\frac{4-(-2)}{8-2}=1$,故该直线的倾斜角为 45°.故选 B.

2.B　**提示:**因为直线$3x-2y-1=0$的斜率$k=\frac{3}{2}$,结合选项,可知直线$3x-2y-1=0$的一个方向向量为$(2,3)$.故选B.

3.B　**提示:**直线的斜率为$\tan135°=-1$,故该直线方程为$y-7=-(x+5)$,即$x+y-2=0$.故选 B.

4.A　**提示:**因为直线垂直于向量$(2,1)$,所以直线的斜率为$k=-2$,又直线经过点$A(3,-2)$,所以直线的方程为$y+2=-2(x-3)$,即$2x+y-4=0$.故选 A.

5.A　**提示:**若直线$l_1:mx+2y+1=0$与直线$l_2:\frac{1}{2}x+my+\frac{1}{2}=0$平行,则$m^2-2\times\frac{1}{2}=0$,所以$m=1$或$m=-1$.

当$m=1$时,直线$l_1:x+2y+1=0$与直线$l_2:\frac{1}{2}x+y+\frac{1}{2}=0$重合,舍去;

当$m=-1$时,直线$l_1:-x+2y+1=0$与直线$l_2:\frac{1}{2}x-y+\frac{1}{2}=0$,即$-x+2y-1=0$平行.

故"$m=-1$"是"直线$l_1:mx+2y+1=0$与直线$l_2:\frac{1}{2}x+my+\frac{1}{2}=0$平行"的充要条件.故选 A.

6.B　**提示:**直线$l_1:x-2y-2=0$的倾斜角为θ,则$\tan\theta=\frac{1}{2}$,因为直线l_2的倾斜角为2θ,

所以直线l_2的斜率为$\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{4}{3}$,因为直线$l_2$在 y 轴上的截距为 3,

所以直线l_2的方程为$y=\frac{4}{3}x+3$,即$4x-3y+9=0$.故选B.

7.B　**提示:**因为点 A 在直线$2x+y+5=0$上,所以设点$A(x,-2x-5)$,

由题意知,$\angle BAC=90°$,则$AB\perp AC$,且直线 AB,AC 的斜率都存在,所以$k_{AB}\cdot k_{AC}=-1$,

即$\frac{-2x-1}{x+2}\cdot\frac{-2x+1}{x-2}=-1$,解得$x=1$或$x=-1$,所以点$A$的坐标为$(1,-7)$或$(-1,-3)$.故选 B.

8.B　**提示:**由题意可设直线 l 的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a>0,b>0)$,则$\frac{3}{a}+\frac{2}{b}=1$,

由基本不等式,得$1=\frac{3}{a}+\frac{2}{b}\geqslant2\sqrt{\frac{6}{ab}}$,当且仅当$\frac{3}{a}=\frac{2}{b}=\frac{1}{2}$,即$a=6$,$b=4$时取等号,

此时$ab\geqslant24$,故$S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}ab\geqslant12$,此时直线$l$的方程为$\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$,即$2x+3y-12=0$.故选 B.

二、多项选择题

9.ABC　**提示:** 由斜率的定义可知,$k_2>k_1>k_3$.故选 ABC.

10.CD　**提示:**因为直线$l:(a-2)y=(3a-1)x-1$不过第二象限,

①当$a=2$时,直线$l:x=\frac{1}{5}$,符合题意;

②当$a\neq2$时,则$\begin{cases}\frac{3a-1}{a-2}>0,\\ -\frac{1}{a-2}<0,\end{cases}$解得$a>2$.

综上,a的取值范围为$[2,+\infty)$.故选 CD.

11.AB　**提示:**对于 A,直线$x+2y-3=0$的斜率为$k=-\frac{1}{2}$,所以$a=(2,-1)$是该直线的一个方向向量,故 A 正确;

对于 B,因为点$\left(\frac{0+1}{2},\frac{2+1}{2}\right)$,即$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$在直线$y=x+1$上,且$(0,2)$,$(1,1)$连线的斜率为$-1$,所以 B 正确;

对于 C,需要满足条件$y_1\neq y_2$,$x_1\neq x_2$,故 C 错误;

对于 D,因为两直线平行,所以$\frac{2}{b}=\frac{a}{2}\neq\frac{1}{2}$,可得$ab=4$,且$a\neq1$,$b\neq4$,所以"$ab=4$"不是"直线$2x+ay-1=0$与直线$bx+2y-2=0$平行"的充要条件,故 D 错误.故选 AB.

12.AC　**提示:** 因为直线 l 与直线l_1及 x 轴围成一个底边在 x 轴上的等腰三角形,

所以直线 l 与直线l_1的倾斜角互补,所以直线 l 与直线l_1的斜率相反,

又直线l_1的斜率为 2,所以直线 l 的斜率为-2,又直线 l 过点$P(-1,1)$,所以直线 l 的方程为$2x+y+1=0$,所以满足条件的直线只有一条,且直线 l 在 x 轴上的截距为$-\frac{1}{2}$,在 y 轴上的截距为-1,所以只有 A,C 正确.故选 AC.

三、填空题

13.$x-y=0$或$x+y-4046=0$　**提示:**①当直线过原点时,在两坐标轴上截距都为 0,符合题意,

此时直线方程为$y=x$,即$x-y=0$;

②当直线不过原点时,设直线方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$,因为过点$P(2023,2023)$,所以$\frac{2023}{a}+\frac{2023}{a}=1$,

解得$a=4046$,所以直线方程为$\frac{x}{4046}+\frac{y}{4046}=1$,整理得$x+y-4046=0$.

综上,直线的一般式方程为$x-y=0$或$x+y-4046=0$.

14.$3x+y+4=0$　**提示:**因为$A(1,3)$,$B(-5,1)$,所以 AB 的中点坐标$(-2,2)$,直线 AB 的斜率为$\frac{3-1}{1+5}=\frac{1}{3}$,所以 AB 的垂直平分线的斜率为$-3$,所以以$A(1,3)$,$B(-5,1)$为端点的线段的垂直平分线方程是$y-2=-3(x+2)$,即$3x+y+4=0$.

15.$\frac{1}{3}$　**提示:**因为直线$l_1:(a-1)x+2y+1=0$与直线$l_2:x+ay+3=0$垂直,所以$(a-1)+2a=0$,解得$a=\frac{1}{3}$.

16.$x-3y+1=0$　**提示:** 因为斜边上中线 CE 所在直线方程为$3x+y-7=0$,且点 C 的纵坐标大于点 E 的纵坐标,所以可设$C(a,-3a+7)$,$E(b,-3b+7)(a<b)$,

因为 AC 中点为$D(0,2)$,所以$A(-a,3a-3)$,所以$k_{AE}=\frac{-3b-3a+10}{b+a}=-3+\frac{10}{a+b}$,因为$\triangle ABC$为等腰直角三角形,CE 为中线,所以$CE\perp AB$,即$k_{AE}=-3+\frac{10}{a+b}=k_{AB}=\frac{1}{3}$,所以$a+b=3$.①

因为$CE=AE$,D 是 AC 的中点,所以$AC\perp DE$,

所以$k_{CD}\cdot k_{ED}=-1$,即$\frac{-3a+5}{a}\cdot\frac{-3b+5}{b}=-1$,

化简整理可得,$2ab=3(a+b)-5$.②

联立①②,解得$a=1$,$b=2$,所以$E(2,1)$,因为$k_{AB}=\frac{1}{3}$,

所以直线 AB 的方程为$y-1=\frac{1}{3}(x-2)$,即$x-3y+1=0$.

四、解答题

17.**解:**(1)因为$A(-2,-4)$,$B(2,0)$,所以直线 AB 的斜率为$\frac{-4}{-2-2}=1$,所以直线 AB 的倾斜角为$\frac{\pi}{4}$.

(2)因为点 A,B,C,D 可以构成平行四边形,且点 D 在第一象限,所以$k_{AB}=k_{CD}$,$k_{AC}=k_{BD}$,

设点$D(x,y)$,则$\begin{cases}\frac{y-1}{x+1}=1,\\ \frac{y}{x-2}=\frac{1+4}{-1+2},\end{cases}$解得$\begin{cases}x=3,\\ y=5,\end{cases}$故点 D 的坐标为$(3,5)$.

18.**解:**(1)由题意知,BC 的中点为$D(4,-1)$,所以 BC 边上的中线,即 AD,其所在直线的方程为$\frac{y-4}{-1-4}=\frac{x-2}{4-2}$,整理可得$5x+2y-18=0$.

(2)因为$k_{BC}=\frac{1+3}{-1-9}=-\frac{2}{5}$,所以 BC 边上的高所在直线的斜率为$\frac{5}{2}$,

所以 BC 边上的高所在直线的方程为$y-4=\frac{5}{2}(x-2)$,整理得$5x-2y-2=0$.

(3)因为$k_{AB}=\frac{4-1}{2+1}=1$,$k_{AC}=\frac{4+3}{2-9}=-1$,所以$k_{AB}+k_{AC}=0$,

所以$\angle BAC$的平分线所在直线的斜率不存在,且过$A(2,4)$,则其方程为$x=2$.

19.**解:**(1)若$l_1/\!/l_2$,则$(m+2)\times1-m\times m=0$,解得$m=-1$或$m=2$.

若$m=-1$,则$l_1:x-y-8=0$,$l_2:x-y+4=0$,满足题意;

若$m=2$,则$l_1:2x+y-4=0$,$l_2:2x+y-4=0$,此时两直线重合,不满足题意.

综上所述,$m=-1$.

(2)若点$P(1,m)$在直线l_2上,则$m+m-4=0$,解得$m=2$,即$P(1,2)$,

由题意知,直线 l 的斜率存在且不为零,设为 k,则直线 l 的方程为$y-2=k(x-1)$,

可得直线 l 在 x,y 轴上的截距分别为$1-\frac{2}{k}$,$2-k$,

因为$1-\frac{2}{k}+2-k=0$,解得$k=2$或$k=1$,所以直线 l 的方程为$y=2x$或$x-y+1=0$.

20.**解:**设直线 l 的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a\in N_+,b\in N_+)$.

选①,因为$\triangle AOB$的周长为 12,所以$a+b+\sqrt{a^2+b^2}=12$,

又因为直线 l 过点$P\left(2,\frac{3}{2}\right)$,所以$\frac{2}{a}+\frac{\frac{3}{2}}{b}=1$,联立上述两个等式,且$a\in N_+$,$b\in N_+$,解得$a=4$,$b=3$,

所以直线 l 的一般式方程为$3x+4y-12=0$.

选②,因为$\triangle AOB$的面积是 6,且直线 l 过点$P\left(2,\frac{3}{2}\right)$,

所以$\begin{cases}\frac{2}{a}+\frac{\frac{3}{2}}{b}=1,\\ ab=12,\end{cases}$所以$\begin{cases}4b+3a=2ab,\\ ab=12,\end{cases}$所以$\begin{cases}a=4,\\ b=3,\end{cases}$

所以直线 l 的一般式方程为$3x+4y-12=0$.

21.(1)**证明:**直线$l:kx-y+2+k=0$,即$k(x+1)+(-y+2)=0$,

联立$\begin{cases}x+1=0,\\ -y+2=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-1,\\ y=2,\end{cases}$故直线$l:kx-y+2+k=0$过定点$(-1,2)$.

(2)**解:**因为直线l交 x 轴负半轴于 A,交 y 轴正半轴于 B,所以$k>0$,

直线$l:kx-y+2+k=0$中,令$y=0$,解得$x=-\frac{2+k}{k}$;令$x=0$,解得$y=2+k$,

所以$S=\frac{1}{2}\times|OA|\times|OB|=\frac{1}{2}\cdot\frac{2+k}{k}\cdot(2+k)=\frac{k^2+4k+4}{2k}=\frac{k}{2}+\frac{2}{k}+2\geqslant2\sqrt{\frac{k}{2}\cdot\frac{2}{k}}+2=4$,

当且仅当$\frac{k}{2}=\frac{2}{k}$,即$k=2$时,等号成立.

所以 S 的最小值为 4,此时直线 l 的方程为$2x-y+4=0$.

22.**解:**(1)由$\triangle ABC$的边 AB,AC 所在直线的方程分别为$y=-1$,$2x-y+7=0$,

可知角 A 不是直角,若角 B 是直角,由点$P(1,2)$在边 BC 上,得边 BC 所在直线的方程为$x=1$;

若角 C 是直角,由边 AC 所在直线的方程为$2x-y+7=0$,得边 BC 所在直线的斜率为$-\frac{1}{2}$,又点$P(1,2)$在边 BC 上,所以边 BC 所在直线的方程为$y-2=-\frac{1}{2}(x-1)$,即$x+2y-5=0$.

综上,边 BC 所在直线的方程为$x+2y-5=0$或$x=1$.

(2)由题意可设$B(m,-1)$,由 P 为 BC 的中点,得$C(2-m,5)$,将点 C 的坐标代入边 AC 所在直线的方程$2x-y+7=0$,得$2(2-m)-5+7=0$,所以$6-2m=0$,解得$m=3$,所以$C(-1,5)$,

得边 BC 所在直线的斜率为$\frac{5-2}{-1-1}=-\frac{3}{2}$,所以边 BC 所在直线的方程为$y-2=-\frac{3}{2}(x-1)$,即$3x+2y-7=0$.

① 第 2 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.D　提示：直线 $l_1:2x-3y+3=0$，直线 $l_2:2x+y-5=0$，联立 $\begin{cases}2x-3y+3=0,\\2x+y-5=0,\end{cases}$ 解得 $x=\frac{3}{2}$，$y=2$，

故 l_1 与 l_2 的交点坐标为 $\left(\frac{3}{2},2\right)$.故选 D.

2.A　提示：直线 $(\lambda+3)x+(\lambda+1)y+\lambda-1=0$ 可化为 $(x+y+1)\lambda+3x+y-1=0$，

令 $\begin{cases}x+y+1=0,\\3x+y-1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=-2,\end{cases}$ 所以所求定点为 $(1,-2)$.故选 A.

3.D　提示：因为点 $P(-2,1)$ 到直线 $l:3x-4y+m=0$ 的距离为 1，所以 $\frac{|3\times(-2)-4\times1+m|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$，化简得 $|m-10|=5$，解得 $m=15$ 或 5.故选 D.

4.B　提示：直线 $l_1:3x-4y+7=0$ 与直线 $l_2:6x-(m+1)\cdot y+1-m=0$ 平行，可得 $m=7$，

所以直线 $l_2:6x-(m+1)y+1-m=0$ 化为 $6x-8y-6=0$，即 $3x-4y-3=0$，

所以 l_1 与 l_2 之间的距离为 $\frac{7+3}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$.故选 B.

5.C　提示：由图形分析知，转化为原点到各圆周切线的距离为定值.

对于 A，$d=\frac{3}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}$，此时 d 不是固定值，故舍去；对于 B，$d=\frac{|3\sin\theta|}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}$，此时 d 不是固定值，故舍去；对于 C，$d=\frac{3}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=3$ 为定值；对于 D，$d=\frac{3}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}$，此时 d 不是固定值，故舍去.故选 C.

6.B　提示：由题意知，直线 $l_1:x-my+1=0$ 过定点 $A(-1,0)$，

因为直线 $l_2:mx+y-m+3=0$ 化为 $m(x-1)+y+3=0$，令 $\begin{cases}x-1=0,\\y+3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=-3,\end{cases}$

所以直线 $l_2:mx+y-m+3=0$ 过定点 $B(1,-3)$，因为直线 l_1 和 l_2 的斜率之积为 $\frac{1}{m}\cdot(-m)=-1$，

所以 $l_1\perp l_2$，所以 $|PA|^2+|PB|^2=|AB|^2=(-1-1)^2+(0+3)^2=13$.故选 B.

7.D　提示：因为点 $A(1,0)$，$B(3,1)$，所以直线 AB 的斜率 $k=\frac{1-0}{3-1}=\frac{1}{2}$，

直线 AB 的方程为 $y=\frac{1}{2}(x-1)$，即 $x-2y-1=0$，所以 $l/\!/AB$，

所以 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的高就是两平行线之间的距离，所以 $d=\frac{|4+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$.

因为 $|AB|=\sqrt{(1-3)^2+(0-1)^2}=\sqrt{5}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\times d=\frac{5}{2}$.故选 D.

8.B　提示：设 $P(x,y)$ 为 $\angle BAC$ 的平分线上任意一点，则 P 到直线 AB，AC 的距离相等，

所以 $\frac{|4x-3y+10|}{\sqrt{16+9}}=\frac{|3x-4y-5|}{\sqrt{16+9}}$，所以 $4x-3y+10=3x-4y-5$ 或 $4x-3y+10=-(3x-4y-5)$，

即 P 所在直线的方程为 $x+y+15=0$ 或 $7x-7y+5=0$，又因为 $k_{AB}=\frac{4}{3}$，$k_{AC}=\frac{3}{4}$，

即 $\angle BAC$ 的平分线所在的直线的斜率在 $\frac{3}{4}$ 和 $\frac{4}{3}$ 之间，所以所求的直线方程为 $7x-7y+5=0$.故选 B.

二、多项选择题

9.BC　提示：联立 $\begin{cases}y=kx+2k+1,\\x+2y-4=0,\end{cases}$ 解得 $x=\frac{2-4k}{2k+1}$，$y=\frac{6k+1}{2k+1}$，

由两直线 $y=kx+2k+1$ 与 $x+2y-4=0$ 交点在第四象限，可得 $\frac{2-4k}{2k+1}>0$，$\frac{6k+1}{2k+1}<0$，

解得 $-\frac{1}{2}<k<-\frac{1}{6}$，结合选项知，k 的取值可以是 $-\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{4}$.故选 BC.

10.BC　提示：设直线 l_2 的方程为 $x-y+C=0$，因为两平行直线 l_1 和 l_2 间的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$，

所以由两平行线间距离公式，可知 $\frac{|C-1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

解得 $C=\frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$.

当 $C=\frac{3}{2}$ 时，直线 l_2 的方程为 $x-y+\frac{3}{2}=0$，即 $2x-2y+3=0$；

当 $C=\frac{1}{2}$ 时，直线 l_2 的方程为 $x-y+\frac{1}{2}=0$，即 $2x-2y+1=0$.

故直线 l_2 的方程为 $2x-2y+3=0$ 或 $2x-2y+1=0$.故选BC.

11.ABD　提示：对于 A，当 $x=0$ 时，$y=1$ 与 a 的取值无关，故直线 l 过定点 $(0,1)$，故 A 正确；

对于 B，当 $a=-1$ 时，直线 l 的方程为 $x-y+1=0$，其斜率为 1，而直线 $x+y=0$ 的斜率为 -1，所以当 $a=-1$ 时，直线 l 与直线 $x+y=0$ 垂直，故 B 正确；

对于 C，若直线 l 与直线 $x-y=0$ 平行，则 $a^2+a+1=1$，解得 $a=0$ 或 $a=-1$，故 C 错误；

对于 D，当 $a=0$ 时，直线 l 的方程为 $x-y+1=0$，横截距和纵截距分别是 -1，1，互为相反数，故 D 正确.故选 ABD.

12.BCD　提示：对于 A，若 $d_1=d_2=1$，则点 P_1，P_2 在直线 l 同侧且距离相等，所以直线 P_1P_2 与直线 l 平行，故 A 正确；对于 B，点 P_1，P_2 在直线 l 的两侧且到直线的距离相等，故 B 错误；

对于 C，当 $d_1=d_2=0$ 时，满足 $d_1+d_2=0$，但此时 $ax_1+by_1+C=ax_2+by_2+C=0$，

则点 P_1，P_2 都在直线 l 上，此时直线 P_1P_2 与直线 l 重合，故 C 错误；

对于 D，若 $d_1\cdot d_2\leqslant0$，即 $(ax_1+by_1+C)\cdot(ax_2+by_2+C)\leqslant0$，点 P_1，P_2 分别位于直线 l 的两侧或直线上，所以直线 P_1P_2 与直线 l 相交或重合，故 D 错误.故选 BCD.

三、填空题

13.-3　提示：因为直线 $l_1:ax+y+1=0$ 与 $l_2:2x-by-1=0$ 相交于点 $M(1,1)$，

所以 $\begin{cases}a+1+1=a+2=0,\\2-b-1=1-b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-2,\\b=1,\end{cases}$ 所以 $a-b=-3$.

14.$2\sqrt{13}$　提示：化直线方程 $(m-1)x+(2m-1)y=m-5$ 为 $m(x+2y-1)-x-y+5=0$，

联立 $\begin{cases}x+2y-1=0,\\-x-y+5=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=9,\\y=-4,\end{cases}$ 所以直线 $(m-1)x+(2m-1)y=m-5$ 过定点 $(9,-4)$，

所以点 $(5,2)$ 到直线 $(m-1)x+(2m-1)y=m-5$ 的距离的最大值为 $\sqrt{(5-9)^2+(2+4)^2}=2\sqrt{13}$.

15.$x+4y-2=0$　提示：因为直线 l 与直线 $l_1:2x-y+2=0$ 和 $l_2:x+y-4=0$ 的交点分别为 A，B，点 $P(2,0)$ 是线段 AB 的中点，设 $A(x_1,2x_1+2)$，$B(x_2,4-x_2)$，则 $x_1+x_2=4$，$2x_1+2+(4-x_2)=0$，解得 $x_1=-\frac{2}{3}$，$x_2=\frac{14}{3}$，故直线 AB 的斜率为 $\frac{4-x_2-2x_1-2}{x_2-x_1}=-\frac{1}{4}$，

则直线 AB 的方程为 $y-0=-\frac{1}{4}(x-2)$，即 $x+4y-2=0$.

16.$(2,-3)$　提示：作出点 A 关于直线 l 的对称点 A'，连接 $A'B$，交直线 l 于 M，

则 $|MA|=|MA'|$，所以 $|MA|+|MB|=|MA'|+|MB|=|A'B|$，此时 $|MA|+|MB|$ 最小，

设 $A'(a,b)$，则 $\begin{cases}\frac{b}{a+2}\cdot\frac{1}{2}=-1,\\\frac{a-2}{2}-2\cdot\frac{b}{2}-8=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=-8,\end{cases}$

即 $A'(2,-8)$，因为 $B(2,4)$，所以直线 $A'B$ 的方程为 $x=2$，由 $\begin{cases}x=2,\\x-2y-8=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2,\\y=-3,\end{cases}$ 即 $M(2,-3)$.

四、解答题

17.解：解方程组 $\begin{cases}3x+4y-2=0,\\x-y+4=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-2,\\y=2,\end{cases}$ 所以交点坐标为 $(-2,2)$.

(1)因为直线 l 的斜率为 1 且过交点 $(-2,2)$，所以直线 l 的方程为 $y-2=x+2$，即 $x-y+4=0$.

(2)由题意知，可设直线 l 的方程为 $2x+y+m=0$，

代入点 $(-2,2)$，得 $-4+2+m=0$，解得 $m=2$，所以直线 l 的方程为 $2x+y+2=0$.

18.解：(1)因为直线 $l_1:(m-1)x+(2m+1)y-3m=0$，直线 l_2 过点 $(-1,-1)$，且直线 $l_1/\!/l_2$，

当 $m=-1$ 时，直线 $l_1:-2x-y+3=0$，即 $2x+y-3=0$，

直线 l_1 的斜率为 -2，所以直线 l_2 的斜率也为 -2，

所以直线 l_2 的方程为 $y+1=-2(x+1)$，即 $2x+y+3=0$.

(2)因为直线 l_1 与 l_2 之间的距离是 2，所以点 $(-1,-1)$ 到直线 l_1 的距离为 2，所以 $d=\frac{|-m+1-2m-1-3m|}{\sqrt{(m-1)^2+(2m+1)^2}}=2$，解得 $m=1$ 或 $m=-\frac{1}{2}$.

19.解：(1)直线 l_1 的方程为 $2x+2y-5=0$，故它的斜率为 -1，

若直线 l_2 在 y 轴上的截距为 $\frac{1}{2}$，且 $l_1\perp l_2$，则直线 l_2 的斜率为 1，故直线 l_2 的方程为 $y=x+\frac{1}{2}$.

由 $\begin{cases}2x+2y-5=0,\\y=x+\frac{1}{2},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\y=\frac{3}{2},\end{cases}$ 可得直线 l_1 和 l_2 的交点坐标为 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

(2)由题意知，直线 l_3 的斜率存在，设为 k，则直线 l_3 的方程为 $y-\frac{3}{2}=k(x-1)$，

直线 l_3 与 y 轴，x 轴的交点分别为 $\left(0,\frac{3}{2}-k\right)$，$\left(1-\frac{3}{2k},0\right)$，且 $\frac{3}{2}-k>0$，$1-\frac{3}{2k}>0$，解得 $k<0$.

因为直线 l_3 与两坐标轴的正半轴围成的三角形的面积为 $\frac{25}{8}$，所以 $\frac{25}{8}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}-k\right)\cdot\left(1-\frac{3}{2k}\right)$，

解得 $k=-1$，或 $k=-\frac{9}{4}$.当 $k=-1$ 时，直线 l_3 的方程为 $y-\frac{3}{2}=-(x-1)$，即 $2x+2y-5=0$；当 $k=-\frac{9}{4}$ 时，直线 l_3 的方程为 $y-\frac{3}{2}=-\frac{9}{4}(x-1)$，即 $9x+4y-15=0$.

综上，直线 l_3 的方程为 $2x+2y-5=0$ 或 $9x+4y-15=0$.

20.(1)证明：直线 $l_1:ax+y+a+1=0$ 转化为 $a(x+1)+y+1=0$，当 $x+1=0$ 时，不论 a 为何值，$y+1=0$，

可得定点 $(-1,-1)$，即证直线 l_1 过定点，且该定点的坐标为 $(-1,-1)$.

(2)解：当 $a=0$ 时，直线 l_2 的方程为 $2x-y+3=0$.当直线 l 与直线 l_2 垂直时，设直线 l 的方程为 $x+2y+m=0$.

若选①，则 $m=0$，这时直线 l 的方程为 $x+2y=0$.

若选②，则原点到直线 l 的距离为 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|m|}{\sqrt{5}}=1$，解得 $m=\pm\sqrt{5}$，

此时直线 l 有两条，不满足要求，故不可选②.

若选③，直线 l_1 的方程为 $y=-1$，代入直线 l 的方程得 $x-2+m=0$，

可得 $x=2-m$，由题意知，$2=2-m$，解得 $m=0$，这时直线 l 的方程为 $x+2y=0$.

21.解：(1)联立 $\begin{cases}x+y-4=0,\\x-y+2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=3,\end{cases}$ 所以 l_1 和 l_2 的交点 A 的坐标为 $(1,3)$，

当 l_3 过点 A 时，$a-3+1-4a=0$，解得 $a=-\frac{2}{3}$，此时不存在三角形满足题意，为满足题意，必有 $a\neq-\frac{2}{3}$；

当 l_1，l_3 平行或 l_2，l_3 平行时，因为 l_1 的斜率为 -1，l_2 的斜率为 1，l_3 的斜率为 a，

所以 $a=1$ 或 $a=-1$，此时也不存在三角形满足题意，为满足题意，必有 $a\neq\pm1$.

综上所述，实数 a 的取值范围为 $\left\{a\middle|a\neq-\frac{2}{3}，且 a\neq\pm1\right\}$.

(2)直线 l 经过 l_1 和 l_2 的交点 $A(1,3)$，

当 $l\perp x$ 轴时，l 的方程为 $x=1$，

点 $M(-1,2)$ 到 l 的距离为 2，符合题意；

当 l 与 x 轴不垂直时，设 l 的方程为 $y-3=k(x-1)$，即 $kx-y+3-k=0$，

因为点 $M(-1,2)$ 到 l 的距离为 2，所以 $\frac{|-2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得 $k=-\frac{3}{4}$，此时 l 的方程为 $3x+4y-15=0$.

综上，直线 l 的方程为 $x=1$ 或 $3x+4y-15=0$.

22.解：(1)设直线 $MN:y=kx+b$，因为直线 MN 过点 $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$，所以 $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}k+b$，即 $b=\frac{1}{4}-\frac{k}{2}$，

所以直线 $MN:y=kx+\frac{1}{4}-\frac{k}{2}$，又因为 $A(1,1)$，$B(1,0)$，易得直线 $OA:y=x$，直线 $AB:x=1$，

联立 $\begin{cases}y=kx+\frac{1}{4}-\frac{k}{2},\\y=x,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{2k-1}{4(k-1)},\\y=\frac{2k-1}{4(k-1)}.\end{cases}$

联立 $\begin{cases}y=kx+\frac{1}{4}-\frac{k}{2},\\x=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=\frac{2k+1}{4}.\end{cases}$

故 $M\left(\frac{2k-1}{4(k-1)},\frac{2k-1}{4(k-1)}\right)$，$N\left(1,\frac{2k+1}{4}\right)$.

(2)因为 $k_{OP}=\frac{1}{2}$，$k_{BP}=-\frac{1}{2}$，所以 $-\frac{1}{2}\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}$，所以 $1-k\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$，

因为 $|AN|=1-\frac{2k+1}{4}=\frac{3-2k}{4}$，

设 M 到直线 AN 的距离为 d，则 $d=1-\frac{2k-1}{4(k-1)}=\frac{2k-3}{4(k-1)}$，

所以 $\triangle AMN$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|AN|\cdot d=\frac{1}{2}\cdot\frac{3-2k}{4}\cdot\frac{2k-3}{4(k-1)}=\frac{(2k-3)^2}{32(1-k)}=\frac{1+4(1-k)+4(1-k)^2}{32(1-k)}=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{4(1-k)}+(1-k)+1\right]\geqslant\frac{1}{8}\times\left(2\sqrt{\frac{1}{4}}+1\right)=\frac{1}{4}$，

当且仅当 $\frac{1}{4(1-k)}=1-k$，即 $k=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，所以锯成的 $\triangle AMN$ 的面积的最小值为 $\frac{1}{4}$.

第 3 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A

提示：由题意知，$|OA|=\sqrt{(0-2)^2+(0+2)^2}=2\sqrt{2}$，OA 的中点坐标为 $(1,-1)$，故以 OA 为直径的圆的方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$.故选 A.

2.C

提示：设圆的一般方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，则圆心坐标为 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$，

因为圆 C 经过两点 $A(0,2)$，$B(4,6)$，且圆心 C 在直线 $l:2x-y-3=0$ 上，

所以 $\begin{cases}2\times\left(-\frac{D}{2}\right)-\left(-\frac{E}{2}\right)-3=0,\\0+2^2+2E+F=0,\\4^2+6^2+4D+6E+F=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}D=-6,\\E=-6,\\F=8,\end{cases}$ 所以圆 C 的方程为 $x^2+y^2-6x-6y+8=0$.故选 C.

3.B　提示：设圆心为 M，点 A 的坐标为 $(5,12)$，

因为该圆经过点 $(5,12)$ 且半径为 2，所以圆心的轨迹是以 $A(5,12)$ 为圆心，半径为 2 的圆，

设 O 为原点，由 $|OA|=\sqrt{25+144}=13$，则圆心 M 到原点的距离的最小值为 $13-2=11$.故选 B.

4.D　提示：圆 $C:x^2+y^2-4x+2=0$ 可化为 $(x-2)^2+y^2=2$，所以圆心 $C(2,0)$，半径为 $\sqrt{2}$，

所以圆心 C 到直线 $y=mx$ 的距离 $d=\frac{|2m|}{\sqrt{m^2+1}}$，因为 $|AB|=2$，所以 $1^2+\left(\frac{|2m|}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2=2$，解得 $m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.故选 D.

5.D　提示：因为所求直线与直线 $x+2y+1=0$ 垂直，所以所求直线斜率 $k=2$，

可设所求直线方程为 $y=2x+b$，因为直线 $y=2x+b$ 与圆 $x^2+y^2=5$ 相切，所以圆心到直线 $y=2x+b$ 的距离 $d=\frac{|2\times0-0+b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$，解得 $b=\pm5$，故所求直线方程为 $2x-y+5=0$ 或 $2x-y-5=0$.故选 D.

6.B　提示：因为直线 $l:y=kx$ 与圆 $C:(x-2)^2+(y-2)^2=4$ 有公共点，所以圆心到直线 l 的距离 $d=\frac{|2k-2|}{\sqrt{1+k^2}}\leqslant2$，可得 $k\geqslant0$，则“直线 l 与圆 C 有公共点”是“$k>0$”的必要不充分条件.故选 B.

7.A

提示：由圆 $C_1:x^2+y^2-2x+4y+m=0\Rightarrow(x-1)^2+(y+2)^2=5-m$，得 $5-m>0$，即 $m<5$，圆心 $C_1(1,-2)$，半径为 $\sqrt{5-m}$；圆 $C_2:x^2+y^2+2x-1=0\Rightarrow(x+1)^2+y^2=2$，圆心 $C_2(-1,0)$，半径为 $\sqrt{2}$，

因为圆 $C_1:x^2+y^2-2x+4y+m=0$ 与圆 $C_2:x^2+y^2+2x-1=0$ 恰有两条公共的切线，所以这两个圆相交，于是有 $|\sqrt{5-m}-\sqrt{2}|<\sqrt{(1+1)^2+(-2)^2}<|\sqrt{5-m}+\sqrt{2}|$，

解得 $-13<m<3$，所以 m 的取值范围为 $(-13,3)$.故选A.

8.A

提示：设圆 $C_1:x^2+y^2-8x-8y+28=0$，可得圆心 $C_1(4,4)$，半径 $r_1=2$；

设圆 $C_2:x^2+y^2+8x-4y+19=0$，可得圆心 $C_2(-4,2)$，半径 $r_2=1$，圆 C_2 关于 x 轴对称圆的圆心 $C_2'(-4,-2)$，半径 $r_2'=r_2=1$，

连接 C_1C_2' 分别交两圆于 P，Q'，交 x 轴于点 A，连接 AC_2 交圆 C_2 于 Q 点，由对称性可得 $|AQ|=|AQ'|$，此时 $|AP|+|AQ|$ 取得最小值，最小值为 $|AP|+|AQ|=|AP|+|AQ'|=|C_1C_2'|-r_1-r_2'=\sqrt{(4+4)^2+(4+2)^2}-2-1=7$.故选A.

二、多项选择题

9.AC

提示：由圆 $C:x^2+y^2-2x+4y+m=0$，得 $(x-1)^2+(y+2)^2=5-m$，

所以圆 C 的圆心为 $(1,-2)$，其半径为 $\sqrt{5-m}$，因为圆 C 的直径为 4，所以 $\sqrt{5-m}=2$，解得 $m=1$.故选 AC.

10.ABC　提示：圆 $x^2+y^2=4$ 的圆心坐标为 $(0,0)$，半径为 2；圆 $x^2+y^2-4x-2my+m^2=0$，即 $(x-2)^2+(y-m)^2=4$，圆心坐标为 $(2,m)$，半径为 2.两圆的圆心距为 $\sqrt{4+m^2}$，半径和为 4，半径差为 0.

因为 $2\leqslant\sqrt{4+m^2}$，所以圆 $x^2+y^2=4$ 与圆 $x^2+y^2-4x-2my+m^2=0$ 的位置关系可能是相交，外切，外离.故选 ABC.

11.AC

提示：因为 AB 的中点坐标为 $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$，直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\frac{1-0}{2-1}=1$，

所以线段 AB 的垂直平分线的方程为 $y-\frac{1}{2}=-\left(x-\frac{3}{2}\right)$，即 $x+y-2=0$.

联立方程组 $\begin{cases}x+y-2=0,\\y=x+2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\y=2,\end{cases}$ 即圆心 $O(0,2)$，半径 $r=|OA|=\sqrt{(1-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{5}$，

所以⊙O 的方程为 $x^2+(y-2)^2=5$，故 A 正确；因为直线 l 过定点 $P(3,1)$，当直线 $l\perp OP$ 时，圆心 O 到直线 l 的距离最大，且最大值为 $|OP|=\sqrt{10}$，故 B 错误；

圆心 $O(0,2)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|-1-3a|}{\sqrt{1+a^2}}$，当直线 l 与⊙O 相切时，$d=\frac{|-1-3a|}{\sqrt{1+a^2}}=\sqrt{5}$，解得 $a=-2$ 或 $a=\frac{1}{2}$，故 C 正确；若直线 l 被⊙O 所截得的弦长为 4，则 $\left(\frac{|-1-3a|}{\sqrt{1+a^2}}\right)^2=(\sqrt{5})^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2$，解得 $a=0$ 或 $a=-\frac{3}{4}$，故 D 错误.故选 AC.

12.BCD　提示：两圆方程相减可得直线 AB 的方程为 $a^2+b^2-2ax-2by=0$，即 $2ax+2by-a^2-b^2=0$，

因为圆 C_1 的圆心为 $C_1(0,0)$，半径为 1，且公共弦 AB 的长为 1，则 $C_1(0,0)$ 到直线 $2ax+2by-a^2-b^2=0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\frac{a^2+b^2}{\sqrt{4a^2+4b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $a^2+b^2=3$，所以直线 AB 的方程为 $2ax+2by-3=0$，故 A 错误，B 正确；由圆的性质可知直线 C_1C_2 垂直平分线段 AB，所以 $C_1(0,0)$ 到直线 $2ax+2by-a^2-b^2=0$ 的距离，即为 AB 中点与点 C_1 的距离，设 AB 中点坐标为 (x,y)，因此 $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即为 $x^2+y^2=\frac{3}{4}$，故 C 正确；

因为 $AB=C_1A=C_1B=1$，所以 $\angle BC_1A=\frac{\pi}{3}$，即圆 C_1 中 $\overparen{AB}$ 所对的圆心角为 $\frac{\pi}{3}$，所以所求的公共面积为 $2(S_{扇形AC_1B}-S_{\triangle AC_1B})=2\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times1-\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 D 正确.

故选 BCD.

三、填空题

13.1

提示：由圆 C 的一般方程为 $x^2+2x+y^2=0$，得圆 C 的标准方程为 $(x+1)^2+y^2=1$，故圆 C 的半径为 1.

14.$(x+3)^2+(y-2)^2=5$　提示：圆 $C:x^2+y^2-2x+4y=0$，即 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$ 表示圆心在 $(1,-2)$，半径为 $\sqrt{5}$ 的圆.

设点 $C(1,-2)$ 关于直线 $x-y+1=0$ 对称的点为 $C'(x,y)$，则 $\begin{cases}\frac{y+2}{x-1}=-1,\\\frac{x+1}{2}-\frac{y-2}{2}+1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-3,\\y=2,\end{cases}$ 即 $C'(-3,2)$，故所求圆的标准方程是 $(x+3)^2+(y-2)^2=5$.

15.$2\sqrt{7}$　提示：由圆 $C_1:x^2+y^2-2x-6y-1=0$ 和圆 $C_2:x^2+y^2-10x-12y+45=0$，

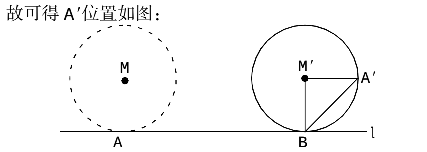
两式相减得，公共弦所在直线的方程为 $4x+3y-23=0$，

因为圆心 $C_1(1,3)$，半径 $r_1=\sqrt{11}$，

所以圆心 C_1 到公共弦的距离为 $d=\frac{|4+9-23|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$，所以公共弦长为 $2\sqrt{r_1^2-d^2}=2\sqrt{11-4}=2\sqrt{7}$.

16.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

提示：由题意知，圆周长为 2π，因为 $BA=\frac{3\pi}{2}=\frac{3}{4}\times2\pi$，故可得 A' 位置如图：



(第 16 题图)

则 $\angle A'M'B=90°$，$\triangle A'M'B$ 是等腰直角三角形，所以 M' 到 BA' 的距离 $d=\frac{\sqrt{2}}{2}r=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

四、解答题

17.解：(1)因为圆 C 的圆心 C 在直线 $y=3x+2$ 上，所以可设 $C(a,3a+2)$，

因为圆 C 过 $A(0,0)$，$B(2,2)$ 两点，所以 $|CA|=|CB|$，所以 $(a-0)^2+(3a+2)^2=(a-2)^2+(3a+2-2)^2$，解得 $a=0$，圆心 $C(0,2)$，故半径 $|CA|=2$，

所以圆 C 的标准方程为 $x^2+(y-2)^2=4$.

(2)由题意，切线的斜率存在，设为 k，则切线方程为 $y-0=k(x-3)$，即 $kx-y-3k=0$.

由圆心到直线的距离等于半径，得 $2=\frac{|0-2-3k|}{\sqrt{k^2+1}}$，解得 $k=0$ 或 $k=-\frac{12}{5}$，

故切线 l 的方程为 $y=0$ 或 $12x+5y-36=0$.

18.(1)证明：直线 $l:(m-1)x+2my-5m+3=0$ 变形为 $m(x+2y-5)-x+3=0$，

由 $\begin{cases}x+2y-5=0,\\-x+3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\y=1,\end{cases}$ 故直线 l 过定点 $A(3,1)$.

将点 $A(3,1)$ 代入圆 C 的方程 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$ 的左边，

得 $(3-2)^2+(1-1)^2=1<4$，故点 $A(3,1)$ 在圆 C 内，故圆 C 与直线 l 恒相交.

(2)解：因为直线 l 过定点 $A(3,1)$，且 $A(3,1)$ 在圆 C 内，故当直线 l 与 AC 垂直时，直线 l 被圆 C 截得的弦长最小，因为圆 $C:(x-2)^2+(y-1)^2=4$ 的圆心为 $C(2,1)$，半径为 2，所以 $|AC|=\sqrt{(3-2)^2+(1-1)^2}=1$，

故弦长最小值为 $2\sqrt{2^2-1^2}=2\sqrt{3}$.

19.解：(1)由题意，结合中点坐标公式，可得 $M(4,0)$，$N(0,-4)$，

圆 C 的半径 $r=\frac{1}{2}|MN|=2\sqrt{2}$.

所以圆 C 的方程为 $(x-2)^2+(y+2)^2=8$.

(2)由题设，直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y-2=k(x-2)$，即 $kx-y-2k+2=0$，

由题意可知，$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，因为圆 C 的半径 $r=2\sqrt{2}$，所以圆心 C 到直线 l 的距离为 2，

故 $\frac{|2k+2-2k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得 $k=\pm\sqrt{3}$，所以直线 l 的方程为 $\sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}+2=0$ 或 $\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}-2=0$.

20.(1)解：设 $P(3m,m)$，连接 MP，MA，MB.因为圆 M 的方程为 $x^2+y^2-4y+3=0$，即 $x^2+(y-2)^2=1$，所以圆心 $M(0,2)$，半径 $r=1$，因为过点 P 作圆 M 的切线 PA，PB，切点分别为 A，B，

所以 $PA\perp MA$，$PB\perp MB$，且 $MA=MB=r=1$，易得 $\triangle APM\cong\triangle BPM$，

因为 $\angle APB=60°$，所以 $\angle APM=30°$，$MP=2MA=2$，所以 $(3m)^2+(m-2)^2=4$，解得 $m=0$ 或 $m=\frac{2}{5}$，

即点 P 的坐标为 $(0,0)$ 或 $\left(\frac{6}{5},\frac{2}{5}\right)$.

(2)证明：根据题意，PA 是圆 M 的切线，则 $PA\perp MA$，则过 A，P，M 三点的圆为以 MP 为直径的圆，

设 $P(3m,m)$，$M(0,2)$，则以 MP 为直径的圆的方程为 $(x-0)(x-3m)+(y-m)(y-2)=0$，

变形可得 $x^2+y^2-3mx-(m+2)y+2m=0$，

即 $x^2+y^2-2y-m(3x+y-2)=0$，

由 $\begin{cases}x^2+y^2-2y=0,\\3x+y-2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\y=2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{3}{5},\\y=\frac{1}{5},\end{cases}$

则当 $x=0$，$y=2$ 和 $x=\frac{3}{5}$，$y=\frac{1}{5}$ 时，$x^2+y^2-2y-m(3x+y-2)=0$ 恒成立，

因为 $M(0,2)$，所以经过 A，P，M 三点的圆必经过异于 M 的某个定点，定点的坐标为 $\left(\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right)$.

21.解：(1)选条件①.

设圆 G 的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$，

则 $\begin{cases}F=0,\\2+D+E+F=0,\\4+2D+F=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}D=-2,\\E=0,\\F=0,\end{cases}$

则圆 G 的一般方程为 $x^2+y^2-2x=0$.

选条件②.

直线 $mx-y-m=0$ 恒过点 $(1,0)$.因为圆 G 恒被直线 $mx-y-m=0(m\in R)$ 平分，所以 $mx-y-m=0$ 恒过圆心，所以圆 G 的圆心坐标为 $(1,0)$，又圆 G 经过点 $A(0,0)$，所以圆 G 的半径 $r=1$，所以圆 G 的方程为 $(x-1)^2+y^2=1$，即圆 G 的一般方程为 $x^2+y^2-2x=0$.

选条件③.

设圆 G 的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$，

由题意知 $\begin{cases}|a|=r,\\a^2+b^2=r^2,\\(1-a)^2+(1-b)^2=r^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=0,\\r=1,\end{cases}$

则圆 G 的方程为 $(x-1)^2+y^2=1$，即圆 G 的一般方程为 $x^2+y^2-2x=0$.

(2)设 $M(x,y)$，因为 M 为线段 AP 的中点，所以 $P(2x,2y)$，

因为点 P 是圆 G 上的动点，所以 $(2x)^2+(2y)^2-2\times2x=0$，即 $x^2+y^2-x=0$，

所以线段 AP 的中点 M 的轨迹方程为 $x^2+y^2-x=0$.

22.解：(1)由已知，有 $\frac{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}=\frac{1}{2}$，

化简可得 $(x+2)^2+y^2=4$，

所以动点 M 的轨迹方程为 $(x+2)^2+y^2=4$，轨迹 C 是以 $(-2,0)$ 为圆心，2 为半径的圆.

(2)设过点 B 的圆 C 的切线为 $y=k\cdot(x-2)$，则圆心到切线的距离 $d=\frac{|-4k|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，所以 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，

数形结合可知斜率的最小值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(3)假设存在满足条件的圆，联立方程 $\begin{cases}y=x+m,\\(x+2)^2+y^2=4,\end{cases}$ 得 $2x^2+2(m+2)x+m^2=0$.所以 $\Delta=4(m+2)^2-8m^2>0$，

解得 $2-2\sqrt{2}<m<2+2\sqrt{2}$.

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=-m-2$，$x_1x_2=\frac{m^2}{2}$.

由题意知 $PA\perp QA$，因为 $\overrightarrow{PA}=(-1-x_1,-y_1)$，$\overrightarrow{QA}=(-1-x_2,-y_2)$，

所以 $(x_1+1)(x_2+1)+y_1y_2=(x_1+1)(x_2+1)+(x_1+m)(x_2+m)=0$，

即 $2x_1x_2+(m+1)(x_1+x_2)+m^2+1=0$，代入得 $m^2-3m-1=0$，

解得 $m=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$ 且满足 $2-2\sqrt{2}<m<2+2\sqrt{2}$，

所以存在以线段 PQ 为直径的圆经过 A，此时 $m=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.