第8期

第2~3版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.B **提示：** 因为直线的方向向量为$(-1,3)$，所以直线的斜率为$\frac{3}{-1}=-3$，

所以所求的直线方程为$y-1=-3(x-1)$，即$3x+y-4=0$.

故选B.

2.C **提示：** 设圆心坐标为(a,b)，则$(a-1)^2+(b-1)^2=4$，所以该圆圆心的轨迹是以$(1,1)$为圆心，2为半径的圆，

所以圆心到直线$3x+4y+13=0$的距离的最小值为$\frac{|3+4+13|}{\sqrt{3^2+4^2}}-2=2$.故选C.

3.A **提示：** 由两条直线$l_1:3x-4y+6=0$与$l_2:3x-By+C=0$平行，可得$\frac{3}{3}=\frac{-B}{-4}\neq\frac{C}{6}$，解得$B=4,C\neq6$，

因为平行直线$l_1:3x-4y+6=0$与$l_2:3x-4y+C=0$间的距离为3，所以$\frac{|C-6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$，所以$|C-6|=15$，所以$C=21$或$C=-9$，所以$B+C=25$或$-5$.故选A.

4.A **提示：** 因为圆心为$(-2,1)$的圆与y轴相切，所以半径$r=2$，

所以该圆的标准方程为$(x+2)^2+(y-1)^2=4$.故选A.

5.B **提示：** 设门洞的半径为R，则有$(2.5-R)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=R^2$，解得$R=1.3$.故选B.

6.A **提示：** $|PM|=\sqrt{|OP|^2-4}$，求$|PM|$的最小值，即求出$|OP|$的最小值.$|OP|$的最小值为O到直线$2x+y-10=0$的距离，则$\frac{|-10|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2\sqrt{5}$.所以$|PM|_{min}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-4}=4$.

故选A.

7.D **提示：** 因为圆的方程为$(x-a)^2+(y-3)^2=20$，所以圆心为$(a,3)$，半径为$2\sqrt{5}$，

又圆$(x-a)^2+(y-3)^2=20$上有四个点到直线$2x-y+1=0$的距离为$\sqrt{5}$，

所以圆心到直线$2x-y+1=0$的距离$d<\sqrt{5}$，

所以$\frac{|2a-2|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}$，即$|2a-2|<5$，解得$-\frac{3}{2}<a<\frac{7}{2}$.

故选D.

8.C **提示：** 圆$C_1:(x+1)^2+y^2=r^2$与$C_2:(x-3)^2+(y-3)^2=4$相外切，可得$r+2=\sqrt{(3+1)^2+3^2}$，解得$r=3$.因为点$P(x_0,y_0)$是圆C_1上的动点，圆C_1的方程为$(x+1)^2+y^2=9$，所以$x_0\in[-4,2]$，

则$x_0^2+y_0^2+6x_0=x_0^2+9-x_0^2-2x_0-1+6x_0=4x_0+8$，所以$-8\leqslant4x_0+8\leqslant16$，所以$x_0^2+y_0^2+6x_0$的最小值为$-8$.故选C.

二、多项选择题

9.AC **提示：** 因为$\sin\theta=\frac{3}{5}$，$\theta\in[0,\pi)$，所以$\cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}=\pm\frac{4}{5}$，所以直线$l$的斜率$k=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\pm\frac{3}{4}$.

当$k=\frac{3}{4}$时，直线l的方程为$y-2=\frac{3}{4}(x+1)$，即$3x-4y+11=0$；

当$k=-\frac{3}{4}$时，直线l的方程为$y-2=-\frac{3}{4}(x+1)$，即$3x+4y-5=0$.故选AC.

10.BC **提示：** 设圆心为$C(a,b)$，则圆心C在线段AB的垂直平分线$y=x$上，故有$a=b$，则圆心$C(a,a)$.

由$|CA|=2$，可得$(a-1)^2+(a+1)^2=4$，解得$a=\pm1$，故圆心$C(1,1)$或$C(-1,-1)$，

故圆的方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=4$或$(x+1)^2+(y+1)^2=4$.

故选BC.

11.BD **提示：** 由已知得圆C_1的圆心$C_1(0,0)$，半径$r_1=3$，圆C_2的圆心$C_2(3,4)$，半径$r_2=4$，

圆心距$|C_1C_2|=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=5$，$r_2-r_1<|C_1C_2|<r_1+r_2$，故两圆相交，所以$C_1$与$C_2$的公切线恰有2条，故A错误；圆$C_1$与圆$C_2$的方程作差，得$C_1$与$C_2$相交弦所在直线的方程为$x^2-6x+9+y^2-8y+16-x^2-y^2=16-9$，即$3x+4y-9=0$，故B正确；$C_1$到相交弦的距离为$\frac{|9|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{9}{5}$，故相交弦的弦长为$2\sqrt{9-\left(\frac{9}{5}\right)^2}=\frac{24}{5}$，故C错误；若P，Q分别是圆$C_1$，$C_2$上的动点，则$|PQ|_{max}=|C_1C_2|+r_1+r_2=12$，故D正确.

故选BD.

12.BC **提示：** 由题意知，直线OA的方程为$y=x$，设点$B(x_0,y_0)$，则由切点弦结论得直线$PQ:(x_0-4)(x-4)+y_0y=4$，且$y_0=x_0$，

易得直线PQ过定点$M(3,1)$，故圆心C到直线PQ的距离不是定值，$PC\perp CQ$不恒成立，故A错误；

因为直线PQ过定点$M(3,1)$，$|CM|=\sqrt{2}$，故当$PQ\perp CM$时，$|PQ|$最小，$|PQ|_{min}=2\sqrt{4-2}=2\sqrt{2}$，故最小半径为$\sqrt{2}$，

所以线段PQ为直径的圆的面积的最小值为2π，故B正确；四边形BPCQ的面积$S=|BP|\cdot|PC|=2|BP|=2\sqrt{|BC|^2-4}$，因为$|BC|_{min}$为点C到直线OA的距离$\frac{|4-0|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，故$S_{min}=2\sqrt{8-4}=4$，故C正确；

当$x_0=3$时，直线$PQ:-x+3y=0$过原点O，两截距均为0，故D错误.故选BC.

三、填空题

13.$\frac{3}{4}$ **提示：** 显然直线$ax+3y+2=0$与直线$(a-2)x-5y-1=0$的纵截距分别为$-\frac{2}{3}$，$-\frac{1}{5}$，

因此这两直线平行，当且仅当$-\frac{a}{3}=\frac{a-2}{5}$，解得$a=\frac{3}{4}$.

14.$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-3)^2=10$，$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y+3)^2=10$

提示： 由题意设圆心坐标为$(a,2a)$，可得$(2a)^2+1=10$，解得$a=\pm\frac{3}{2}$，所以圆心坐标为$\left(\frac{3}{2},3\right)$或$\left(-\frac{3}{2},-3\right)$，故圆的标准方程为$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-3)^2=10$或$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y+3)^2=10$.

15.11 **提示：** 圆$C:(x-6)^2+(y-8)^2=1$的圆心$C(6,8)$，半径为1，因为圆心C到$O(0,0)$的距离为$\sqrt{6^2+8^2}=10$，所以圆C上的点到点O的距离的最大值为$10+1=11$.

再由$\angle APB=90°$，可得以AB为直径的圆和圆C有交点，可得$|PO|=\frac{1}{2}|AB|=m$，故有$m\leqslant11$，

所以m的最大值为11.

16.$5\sqrt{2}-3$ **提示：** 根据题意，圆$C_1:x^2+(y-2)^2=1$的圆心C_1为$(0,2)$，半径$R=1$，

圆$C_2:(x-4)^2+y^2=4$，其圆心C_2为$(4,0)$，半径$r=2$，

设圆N与圆$C_1:x^2+(y-2)^2=1$关于直线$x+y+1=0$对称，其圆心N的坐标为(a,b)，

则有$\begin{cases}\frac{b-2}{a-0}=1,\\ \frac{a}{2}+\frac{b+2}{2}+1=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-3,\\ b=-1,\end{cases}$即$N(-3,-1)$，

$|NC_2|=\sqrt{49+1}=5\sqrt{2}$，

当P是线段NC_2和直线$x+y+1=0$的交点时，$|PA|+|PB|$取得最小值，则$|PA|+|PB|$的最小值为$|NC_2|-R-r=5\sqrt{2}-3$.

四、解答题

17.**解：**(1)因为所求直线平行于BC所在的直线，所以可设所求直线方程为$x+3y+n=0$，

因为该直线过点$A(1,2)$，所以$1+6+n=0$，解得$n=-7$，故所求直线方程为$x+3y-7=0$.

(2)因为$A(1,2)$，$B(-1,0)$，所以$k_{AB}=\frac{2-0}{1-(-1)}=1$，线段AB的中点坐标为$(0,1)$，

所以线段AB的垂直平分线方程为$y-1=-(x-0)$，即$x+y-1=0$.

18.(1)**证明：** 因为点$A(2,1)$，$B(5,-2)$，$C(4,3)$，

所以直线AC的斜率$k_{AC}=\frac{3-1}{4-2}=1$，

直线AB的斜率$k_{AB}=\frac{1+2}{2-5}=-1$，

所以$k_{AC}\cdot k_{AB}=-1$，故$AC\perp AB$，故$\triangle ABC$是直角三角形.

(2)**解：** 因为$\triangle ABC$是直角三角形，$\angle A$为直角，所以BC是$\triangle ABC$外接圆的直径.

又线段BC的中点为$D\left(\frac{9}{2},\frac{1}{2}\right)$，

$\frac{|BC|}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{(5-4)^2+(-2-3)^2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$，

所以$\triangle ABC$的外接圆方程为$\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$.

19.**解：**(1)由圆$O:x^2+y^2=4$，圆$C:(x-3)^2+(y-1)^2=8$，两式作差，可得直线PQ的方程为$3x+y-3=0$，

点$O(0,0)$到直线PQ的距离$d=\frac{3}{\sqrt{10}}$，

则$|PQ|=2\sqrt{4-\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2}=\frac{\sqrt{310}}{5}$.

(2)由题意知，点$M(2,0)$，又$C(3,1)$，所以$|MC|=\sqrt{2}$，又$|NC|=2\sqrt{2}$，

所以$S_{\triangle MNC}=\frac{1}{2}|MC|\cdot|NC|\sin\angle MCN=2\sin\angle MCN$.

当$\angle MCN=90°$时，$S_{\triangle MCN}$取得最大值，此时$MC\perp NC$，又$k_{CM}=\frac{1-0}{3-2}=1$，所以直线CN的方程为$y-1=-(x-3)$，即$y=-x+4$.

由$\begin{cases}y=-x+4,\\(x-3)^2+(y-1)^2=8,\end{cases}$解得$N(1,3)$或$N(5,-1)$.

当$N(1,3)$时，$k_{MN}=-3$，此时MN的方程为$3x+y-6=0$；

当$N(5,-1)$时，$k_{MN}=-\frac{1}{3}$，此时MN的方程为$x+3y-2=0$.

综上，$\triangle MNC$面积最大时的直线MN的方程为$3x+y-6=0$或$x+3y-2=0$.

20.(1)**解：** 因为$OP=1$，$OQ=2$，所以圆Q的半径$PQ\in[1,3]$，

又圆Q与圆$x^2+y^2=r^2(r>0)$恒有公共点，且圆心之间的距离为$OQ=2$，

所以$|PQ-r|\leqslant2\leqslant PQ+r$对任意$PQ\in[1,3]$恒成立，

所以$\begin{cases}2\leqslant1+r,\\|3-r|\leqslant2,\\|1-r|\leqslant2,\end{cases}$解得$1\leqslant r\leqslant3$，所以$r$的取值范围为$[1,3]$.

(2)**证明：** 设$Q(x_0,y_0)$，圆Q的半径$PQ=\sqrt{(x_0-1)^2+y_0^2}$，

则圆Q方程为$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=(x_0-1)^2+y_0^2$，

整理得$x^2-2x_0x+y^2-2y_0y=1-2x_0$，又圆$O:x^2+y^2=4$，

两圆方程相减，整理得直线EF的方程为$2x_0x+2y_0y-2x_0-3=0$，

所以P到直线EF的距离$d=\frac{|2x_0-2x_0-3|}{\sqrt{4x_0^2+4y_0^2}}=\frac{3}{2\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$，因为Q在圆O上，所以$x_0^2+y_0^2=4$，所以点P到直线EF的距离$d=\frac{3}{4}$，即点P到直线EF的距离为定值$\frac{3}{4}$.

21.**解：**(1)选①.设圆心$C(x,5-x)$，$r=|CA|=\sqrt{(x-1)^2+(5-x)^2}$，因为圆C与直线$l_1$相切，所以圆心C到$l_1$的距离$d=\frac{|5-1|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}=r$，所以$r=|CA|=\sqrt{(x-1)^2+(5-x)^2}=2\sqrt{2}$，解得$x=3$.

所以圆心C的坐标为$(3,2)$，所以圆C的方程为$(x-3)^2+(y-2)^2=8$.

选②.设圆心$C(x,5-x)$，圆心C到l_2的距离$d=\frac{|5-3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

因为圆C截直线$l_2:x+y-3=0$所得的弦长为$2\sqrt{6}$，

所以$r=\sqrt{d^2+\left(\frac{2\sqrt{6}}{2}\right)^2}=2\sqrt{2}$，

又圆C经过点$A(1,0)$，所以$|CA|=\sqrt{(x-1)^2+(5-x)^2}=2\sqrt{2}$，解得$x=3$，

所以圆心C的坐标为$(3,2)$，所以圆C的方程为$(x-3)^2+(y-2)^2=8$.

(2)设圆心$(3,2)$关于l_1的对称点为$C'(x,y)$，

则$\begin{cases}\frac{x+3}{2}+\frac{y+2}{2}-1=0,\\ \frac{y-2}{x-3}=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-1,\\y=-2,\end{cases}$

所以C'的坐标为$(-1,-2)$，此时圆$C':(x+1)^2+(y+2)^2=8$，因为过原点O的直线m交圆C'于M，N两点，弦MN中点为Q，当Q与C'，O不重合时，有$OQ\perp C'Q$，所以Q在以$C'O$为直径的圆上，

设$Q(x,y)$，则弦MN中点Q的轨迹方程为$(x+1)x+(y+2)y=0$，即$x^2+y^2+x+2y=0$.

22.(1)**解：** 因为$k_{OP}=\frac{1}{2}$，所以$k_{AB}=-2$，所以直线AB的方程为$y-1=-2(x-2)$，

所以弦AB所在直线的方程为$2x+y-5=0$.

(2)**解：** 易知直线l与圆O相离，令$Q(t,t-8)$，则线段OQ中点$K\left(\frac{t}{2},\frac{t-8}{2}\right)$，

因为O，C，Q，D四点位于直径是OQ的圆K上，所以圆K的方程为$\left(x-\frac{t}{2}\right)^2+\left(y-\frac{t-8}{2}\right)^2=\frac{t^2}{4}+\frac{(t-8)^2}{4}$，即$x^2-tx+y^2-(t-8)y=0$，因为CD是圆O与圆K的相交弦，

所以直线$CD:tx+(t-8)y-8=0$.

即$t(x+y)-8y-8=0$，由$x+y=0$且$8y+8=0$，解得$x=1$，$y=-1$，所以直线CD经过定点$(1,-1)$.

(3)**证明：** 点$M(2,2)$在圆O上，ME，MF是斜率互为倒数的两条互异直线，设直线$ME:y=k(x-2)+2$，

代入$x^2+y^2=8$，整理得$(1+k^2)x^2+(4k-4k^2)x+4k^2-8k-4=0$，

$2x_E=\frac{4k^2-8k-4}{1+k^2}$，$x_E=\frac{2k^2-4k-2}{1+k^2}$，$y_E=\frac{-2k^2-4k+2}{1+k^2}$，

所以$x_F=\frac{\frac{2}{k^2}-\frac{4}{k}-2}{1+\frac{1}{k^2}}=\frac{2-4k-2k^2}{k^2+1}$，$y_F=\frac{-2-4k+2k^2}{k^2+1}$，

$x_G=\frac{x_E+x_F}{2}=\frac{-4k}{1+k^2}$，$y_G=\frac{-4k}{1+k^2}$，故线段EF的中点G在直线$y=x$上.

扫码免费下载习题讲解ppt

第5期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B **提示：** 因为直线$3x-2y-1=0$的斜率$k=\frac{3}{2}$，结合选项，可知直线$3x-2y-1=0$的一个方向向量为$(2,3)$.故选B.

2.B **提示：** 由题意知，$|OP_{10}|=|OP_1|+9\times4=84+9\times4=120$，$|OB_{10}|=|OA_{10}|=|OA_1|+9\times18=78+9\times18=240$，

故$k_{B_{10}P_{10}}=\frac{120}{240}=\frac{1}{2}$，$k_{A_{10}P_{10}}=-\frac{120}{240}=-\frac{1}{2}$，所以最长拉索所在直线的斜率为$\pm\frac{1}{2}$.故选B.

3.B **提示：** 直线的斜率为$\tan135°=-1$，故该直线方程为$y-7=-(x+5)$，即$x+y-2=0$.故选B.

4.A **提示：** 因为直线垂直于向量$(2,1)$，所以直线的斜率为$k=-2$，又直线经过点$A(3,-2)$，所以直线的方程为$y+2=-2(x-3)$，即$2x+y-4=0$.故选A.

5.A **提示：** 若直线$l_1:mx+2y+1=0$与直线$l_2:\frac{1}{2}x+my+\frac{1}{2}=0$平行，则$m^2-2\times\frac{1}{2}=0$，所以$m=1$或$m=-1$.

当$m=1$时，直线$l_1:x+2y+1=0$与直线$l_2:\frac{1}{2}x+y+\frac{1}{2}=0$重合，舍去；

当$m=-1$时，直线$l_1:-x+2y+1=0$与直线$l_2:\frac{1}{2}x-y+\frac{1}{2}=0$，即$-x+2y-1=0$平行.

故"$m=-1$"是"直线$l_1:mx+2y+1=0$与直线$l_2:\frac{1}{2}x+my+\frac{1}{2}=0$平行"的充要条件.故选A.

6.B **提示：** 直线$l_1:x-2y-2=0$的倾斜角为θ，则$\tan\theta=\frac{1}{2}$，因为直线l_2的倾斜角为2θ，

所以直线l_2的斜率为$\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{4}{3}$，因为直线$l_2$在y轴上的截距为3，

所以直线l_2的方程为$y=\frac{4}{3}x+3$，即$4x-3y+9=0$.故选B.

7.B **提示：** 因为点A在直线$2x+y+5=0$上，所以设点$A(x,-2x-5)$，

由题意知，$\angle BAC=90°$，则$AB\perp AC$，且直线AB，AC的斜率都存在，所以$k_{AB}\cdot k_{AC}=-1$，

即$\frac{-2x-1}{x+2}\cdot\frac{-2x+1}{x-2}=-1$，解得$x=1$或$x=-1$，所以点A的坐标为$(1,-7)$或$(-1,-3)$.故选B.

8.B **提示：** 由题意可设直线l的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a>0,b>0)$，则$\frac{3}{a}+\frac{2}{b}=1$，

由基本不等式，得$1=\frac{3}{a}+\frac{2}{b}\geqslant2\sqrt{\frac{6}{ab}}$，当且仅当$\frac{3}{a}=\frac{2}{b}=\frac{1}{2}$，即$a=6,b=4$时取等号，

此时$ab\geqslant24$，故$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}ab\geqslant12$，此时直线$l$的方程为$\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$，即$2x+3y-12=0$.故选B.

二、多项选择题

9.ABC **提示：** 由斜率的定义可知，$k_2>k_1>k_3$.故选ABC.

10.CD **提示：** 因为直线$l:(a-2)y=(3a-1)x-1$不过第二象限，

①当$a=2$时，直线$l:x=\frac{1}{5}$，符合题意；

②当$a\neq2$时，则$\begin{cases}\frac{3a-1}{a-2}>0,\\-\frac{1}{a-2}<0,\end{cases}$解得$a>2$.

综上，a的取值范围为$[2,+\infty)$.故选CD.

11.ABC **提示：** 当直线在两坐标轴上的截距为0时，可设直线方程为$y=kx$，由直线过点$P(1,2)$，则$k=2$，故直线方程为$y=2x$，即$2x-y=0$，故C正确；

当直线在两坐标轴上的截距不为0时，可设直线方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$或$\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1$，若直线方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$，则$\frac{1}{a}+\frac{2}{a}=1$，解得$a=3$，即$x+y-3=0$，故B正确，若直线方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1$，则$\frac{1}{a}+\frac{2}{-a}=1$，解得$a=-1$，即$x-y+1=0$，故A正确.故选ABC.

12.AC **提示：** 因为直线l与直线l_1及x轴围成一个底边在x轴上的等腰三角形，

所以直线l与直线l_1的倾斜角互补，所以直线l与直线l_1的斜率相反，

又直线l_1的斜率为2，所以直线l的斜率为-2，又直线l过点$P(-1,1)$，所以直线l的方程为$2x+y+1=0$，所以满足条件的直线只有一条，且直线l在x轴上的截距为$-\frac{1}{2}$，在y轴上的截距为-1，所以只有A，C正确.故选AC.

三、填空题

13.1 **提示：** 过$A(-1,0)$，$B(1,2)$的直线的斜率为$\frac{2-0}{1+1}=1$.

14.$3x+y+4=0$ **提示：** 因为$A(1,3)$，$B(-5,1)$，所以AB的中点坐标为$(-2,2)$，直线AB的斜率为$\frac{3-1}{1+5}=\frac{1}{3}$，所以AB的垂直平分线的斜率为$-3$，所以以$A(1,3)$，$B(-5,1)$为端点的线段的垂直平分线方程是$y-2=-3(x+2)$，即$3x+y+4=0$.

15.$\frac{1}{3}$ **提示：** 因为直线$l_1:(a-1)x+2y+1=0$与直线$l_2:x+ay+3=0$垂直，所以$(a-1)+2a=0$，解得$a=\frac{1}{3}$.

16.$x-3y+1=0$ **提示：** 因为斜边上中线CE所在直线方程为$3x+y-7=0$，且点C的纵坐标大于点E的纵坐标，所以可设$C(a,-3a+7)$，$E(b,-3b+7)(a<b)$，

因为AC中点为$D(0,2)$，所以$A(-a,3a-3)$，所以$k_{AE}=\frac{-3b-3a+10}{b+a}=-3+\frac{10}{a+b}$，因为$\triangle ABC$为等腰直角三角形，CE为中线，所以$CE\perp AB$，即$k_{AE}=-3+\frac{10}{a+b}=k_{AB}=\frac{1}{3}$，所以$a+b=3$.①

因为$CE=AE$，D是AC的中点，所以$AC\perp DE$，

所以$k_{CD}\cdot k_{ED}=-1$，即$\frac{-3a+5}{a}\cdot\frac{-3b+5}{b}=-1$，

化简整理可得，$2ab=3(a+b)-5$.②

联立①②，解得$a=1,b=2$，所以$E(2,1)$，因为$k_{AB}=\frac{1}{3}$，

所以直线AB的方程为$y-1=\frac{1}{3}(x-2)$，即$x-3y+1=0$.

四、解答题

17.**解：**(1)因为$A(-2,-4)$，$B(2,0)$，所以直线AB的斜率为$\frac{-4}{-2-2}=1$，所以直线AB的倾斜角为$\frac{\pi}{4}$.

(2)因为点A，B，C，D可以构成平行四边形，且点D在第一象限，所以$k_{AB}=k_{CD}$，$k_{AC}=k_{BD}$，

设点$D(x,y)$，则$\begin{cases}\frac{y-1}{x+1}=1,\\ \frac{y}{x-2}=\frac{1+4}{-1+2},\end{cases}$解得$\begin{cases}x=3,\\y=5,\end{cases}$故点D的坐标为$(3,5)$.

18.**解：**(1)由题得直线BC的斜率为$\frac{6-2}{6-0}=\frac{2}{3}$，所以BC边上的高所在直线的斜率为$-\frac{3}{2}$，又该直线过点$A(4,0)$，

所以BC边上的高所在直线的方程为$y=-\frac{3}{2}(x-4)$，即$3x+2y-12=0$.

(2)因为$A(4,0)$，$B(6,6)$，所以AB边的中点坐标为$(5,3)$，

因为AB所在直线的斜率$k=\frac{6-0}{6-4}=3$，所以AB边的垂直平分线的斜率为$-\frac{1}{3}$，

所以AB边的垂直平分线所在直线的方程是$y-3=-\frac{1}{3}(x-5)$，即$x+3y-14=0$.

19.**解：**(1)若$l_1/\!/l_2$，则$(m+2)\times1-m\times m=0$，解得$m=-1$或$m=2$.

若$m=-1$，则$l_1:x-y-8=0$，$l_2:x-y+4=0$，满足题意；

若$m=2$，则$l_1:2x+y-4=0$，$l_2:2x+y-4=0$，此时两直线重合，不满足题意.

综上所述，$m=-1$.

(2)若点$P(1,m)$在直线l_2上，则$m+m-4=0$，解得$m=2$，即$P(1,2)$，

由题意知，直线l的斜率存在且不为零，设为k，则直线l的方程为$y-2=k(x-1)$，

可得直线l在x，y轴上的截距分别为$1-\frac{2}{k}$，$2-k$，

因为$1-\frac{2}{k}+2-k=0$，解得$k=2$或$k=1$，所以直线l的方程为$y=2x$或$x-y+1=0$.

20.**解：** 设直线l的方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a\in N_+,b\in N_+)$.

选①，因为$\triangle AOB$的周长为12，所以$a+b+\sqrt{a^2+b^2}=12$，

又因为直线l过点$P\left(2,\frac{3}{2}\right)$，所以$\frac{2}{a}+\frac{\frac{3}{2}}{b}=1$，联立上述两个等式，且$a\in N_+,b\in N_+$，解得$a=4,b=3$，

所以直线l的一般式方程为$3x+4y-12=0$.

选②，因为$\triangle AOB$的面积是6，且直线l过点$P\left(2,\frac{3}{2}\right)$，

所以$\begin{cases}\frac{2}{a}+\frac{\frac{3}{2}}{b}=1,\\ab=12,\end{cases}$所以$\begin{cases}4b+3a=2ab,\\ab=12,\end{cases}$所以$\begin{cases}a=4,\\b=3,\end{cases}$

所以直线l的一般式方程为$3x+4y-12=0$.

21.(1)**证明：** 直线$l:kx-y+2+k=0$，即$k(x+1)+(-y+2)=0$，

联立$\begin{cases}x+1=0,\\-y+2=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-1,\\y=2,\end{cases}$故直线$l:kx-y+2+k=0$过定点$(-1,2)$.

(2)**解：** 因为直线l交x轴负半轴于A，交y轴正半轴于B，所以$k>0$，

直线$l:kx-y+2+k=0$中，令$y=0$，解得$x=-\frac{2+k}{k}$；令$x=0$，解得$y=2+k$，

所以$S=\frac{1}{2}\times|OA|\times|OB|=\frac{1}{2}\cdot\frac{2+k}{k}\cdot(2+k)=\frac{k^2+4k+4}{2k}=\frac{k}{2}+\frac{2}{k}+2\geqslant2\sqrt{\frac{k}{2}\cdot\frac{2}{k}}+2=4$，

当且仅当$\frac{k}{2}=\frac{2}{k}$，即$k=2$时，等号成立.

所以S的最小值为4，此时直线l的方程为$2x-y+4=0$.

22.**解：**(1)由$\triangle ABC$的边AB，AC所在直线的方程分别为$y=-1$，$2x-y+7=0$，

可知角A不是直角，若角B是直角，由点$P(1,2)$在边BC上，得边BC所在直线的方程为$x=1$；

若角C是直角，由边AC所在直线的方程为$2x-y+7=0$，得边BC所在直线的斜率为$-\frac{1}{2}$，又点$P(1,2)$在边BC上，所以边BC所在直线的方程为$y-2=-\frac{1}{2}(x-1)$，即$x+2y-5=0$.

综上，边BC所在直线的方程为$x+2y-5=0$或$x=1$.

(2)由题意可设$B(m,-1)$，由P为BC的中点，得$C(2-m,5)$，将点C的坐标代入边AC所在直线的方程$2x-y+7=0$，得$2(2-m)-5+7=0$，所以$6-2m=0$，解得$m=3$，所以$C(-1,5)$，

得边BC所在直线的斜率为$\frac{5-2}{-1-1}=-\frac{3}{2}$，所以边BC所在直线的方程为$y-2=-\frac{3}{2}(x-1)$，即$3x+2y-7=0$.

第6期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.D　**提示:** 直线 $l_1:2x-3y+3=0$,直线 $l_2:2x+y-5=0$,联立 $\begin{cases}2x-3y+3=0,\\2x+y-5=0,\end{cases}$ 解得 $x=\frac{3}{2}$, $y=2$,

故 l_1 与 l_2 的交点坐标为 $\left(\frac{3}{2},2\right)$.故选 D.

2.A　**提示:** 直线 $(\lambda+3)x+(\lambda+1)y+\lambda-1=0$ 可化为 $(x+y+1)\lambda+3x+y-1=0$,

令 $\begin{cases}x+y+1=0,\\3x+y-1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=-2,\end{cases}$ 所以所求定点为 $(1,-2)$.故选 A.

3.D　**提示:** 因为点 $P(-2,1)$ 到直线 $l:3x-4y+m=0$ 的距离为 1,所以 $\frac{|3\times(-2)-4\times1+m|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$,化简得 $|m-10|=5$,解得 $m=15$ 或 5.故选 D.

4.B　**提示:** 直线 $l_1:3x-4y+7=0$ 与直线 $l_2:6x-(m+1)\cdot y+1-m=0$ 平行,可得 $m=7$,

所以直线 $l_2:6x-(m+1)y+1-m=0$ 化为 $6x-8y-6=0$,即 $3x-4y-3=0$,

所以 l_1 与 l_2 之间的距离为 $\frac{7+3}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$.故选 B.

5.C　**提示:** 由题意可知,直线的斜率存在,故可设直线方程为 $y=kx+b$,因为过点 $P(1,2)$ 引直线,使 $A(1,3)$,$B(7,5)$ 两点到直线的距离相等,

所以 $\begin{cases}2=k+b,\\\frac{|k-3+b|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|7k-5+b|}{\sqrt{k^2+1}},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{1}{3},\\b=\frac{5}{3},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=\frac{2}{3},\\b=\frac{4}{3},\end{cases}$ 故直线 l 的方程为 $x-3y+5=0$ 或 $2x-3y+4=0$.故选 C.

6.B　**提示:** 由题意知,直线 $l_1:x-my+1=0$ 过定点 $A(-1,0)$,

因为直线 $l_2:mx+y-m+3=0$ 化为 $m(x-1)+y+3=0$,令 $\begin{cases}x-1=0,\\y+3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=-3,\end{cases}$

所以直线 $l_2:mx+y-m+3=0$ 过定点 $B(1,-3)$,因为直线 l_1 和 l_2 的斜率之积为 $\frac{1}{m}\cdot(-m)=-1$,

所以 $l_1\perp l_2$,所以 $|PA|^2+|PB|^2=|AB|^2=(-1-1)^2+(0+3)^2=13$.故选 B.

7.D　**提示:** 因为点 $A(1,0)$,$B(3,1)$,所以直线 AB 的斜率 $k=\frac{1-0}{3-1}=\frac{1}{2}$,

直线 AB 的方程为 $y=\frac{1}{2}(x-1)$,即 $x-2y-1=0$,所以 $l/\!/AB$,

所以 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的高就是两平行线之间的距离,所以 $d=\frac{|4+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$.

因为 $|AB|=\sqrt{(1-3)^2+(0-1)^2}=\sqrt{5}$,

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\times d=\frac{5}{2}$.故选 D.

8.B　**提示:** 设 $P(x,y)$ 为 $\angle BAC$ 的平分线上任意一点,则 P 到直线 AB,AC 的距离相等,

所以 $\frac{|4x-3y+10|}{\sqrt{16+9}}=\frac{|3x-4y-5|}{\sqrt{16+9}}$,所以 $4x-3y+10=3x-4y-5$ 或 $4x-3y+10=-(3x-4y-5)$,

即 P 所在直线的方程为 $x+y+15=0$ 或 $7x-7y+5=0$,又因为 $k_{AB}=\frac{4}{3}$,$k_{AC}=\frac{3}{4}$,

即 $\angle BAC$ 的平分线所在的直线的斜率在 $\frac{3}{4}$ 和 $\frac{4}{3}$ 之间,所以所求的直线方程为 $7x-7y+5=0$.故选 B.

二、多项选择题

9.BC　**提示:** 联立 $\begin{cases}y=kx+2k+1,\\x+2y-4=0,\end{cases}$ 解得 $x=\frac{2-4k}{2k+1}$,$y=\frac{6k+1}{2k+1}$,

由两直线 $y=kx+2k+1$ 与 $x+2y-4=0$ 交点在第四象限,可得 $\frac{2-4k}{2k+1}>0$,$\frac{6k+1}{2k+1}<0$,

解得 $-\frac{1}{2}<k<-\frac{1}{6}$,结合选项知,$k$ 的取值可以是 $-\frac{1}{3}$,$-\frac{1}{4}$.故选 BC.

10.BC　**提示:** 设直线 l_2 的方程为 $x-y+C=0$,因为两平行直线 l_1 和 l_2 间的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$,

所以由两平行线间距离公式,可知 $\frac{|C-1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$,

解得 $C=\frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$.

当 $C=\frac{3}{2}$ 时,直线 l_2 的方程为 $x-y+\frac{3}{2}=0$,即 $2x-2y+3=0$;

当 $C=\frac{1}{2}$ 时,直线 l_2 的方程为 $x-y+\frac{1}{2}=0$,即 $2x-2y+1=0$.

故直线 l_2 的方程为 $2x-2y+3=0$ 或 $2x-2y+1=0$.故选BC.

11.BCD　**提示:** 由题意知,$|AB|=\sqrt{5^2+12^2}=13$,则它们之间的距离 d 的取值范围为 $(0,13]$,故选 BCD.

12.BCD　**提示:** 对于 A,若 $d_1=d_2=1$,则点 P_1,P_2 在直线 l 同侧且距离相等,所以直线 P_1P_2 与直线 l 平行,故 A 正确;对于 B,点 P_1,P_2 在直线 l 的两侧且到直线的距离相等,故 B 错误;

对于 C,当 $d_1=d_2=0$ 时,满足 $d_1+d_2=0$,但此时 $ax_1+by_1+c=ax_2+by_2+c=0$,

则点 P_1,P_2 都在直线 l 上,此时直线 P_1P_2 与直线 l 重合,故 C 错误;

对于 D,若 $d_1\cdot d_2\leqslant0$,即 $(ax_1+by_1+c)\cdot(ax_2+by_2+c)\leqslant0$,点 P_1,P_2 分别位于直线 l 的两侧或直线上,所以直线 P_1P_2 与直线 l 相交或重合,故 D 错误.故选 BCD.

三、填空题

13.-2　**提示:** 由 $\begin{cases}2x+3y+7=0,\\x-y+1=0,\end{cases}$ 解得 $x=-2$,$y=-1$,因为直线 $2x+3y+7=0$,$x-y+1=0$ 和 $x+my=0$ 交于一点,所以点 $(-2,-1)$ 也满足直线 $x+my=0$,即 $-2-m=0$,解得 $m=-2$.

14.$2\sqrt{13}$　**提示:** 化直线方程 $(m-1)x+(2m-1)y=m-5$ 为 $m(x+2y-1)-x-y+5=0$,

联立 $\begin{cases}x+2y-1=0,\\-x-y+5=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=9,\\y=-4,\end{cases}$ 所以直线 $(m-1)x+(2m-1)y=m-5$ 过定点 $(9,-4)$,

所以点 $(5,2)$ 到直线 $(m-1)x+(2m-1)y=m-5$ 的距离的最大值为 $\sqrt{(5-9)^2+(2+4)^2}=2\sqrt{13}$.

15.$x+4y-2=0$　**提示:** 因为直线 l 与直线 $l_1:2x-y+2=0$ 和 $l_2:x+y-4=0$ 的交点分别为 A,B,点 $P(2,0)$ 是线段 AB 的中点,设 $A(x_1,2x_1+2)$,$B(x_2,4-x_2)$,则 $x_1+x_2=4$,$2x_1+2+(4-x_2)=0$,解得 $x_1=-\frac{2}{3}$,$x_2=\frac{14}{3}$,故直线 AB 的斜率为 $\frac{4-x_2-2x_1-2}{x_2-x_1}=-\frac{1}{4}$,

则直线 AB 的方程为 $y-0=-\frac{1}{4}(x-2)$,即 $x+4y-2=0$.

16.$(2,-3)$　**提示:** 作出点 A 关于直线 l 的对称点 A',连接 $A'B$,交直线 l 于 M,

则 $|MA|=|MA'|$,所以 $|MA|+|MB|=|MA'|+|MB|=|A'B|$,此时 $|MA|+|MB|$ 最小,

设 $A'(a,b)$,则 $\begin{cases}\frac{b}{a+2}\cdot\frac{1}{2}=-1,\\\frac{a-2}{2}-2\cdot\frac{b}{2}-8=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=-8,\end{cases}$

即 $A'(2,-8)$,因为 $B(2,4)$,所以直线 $A'B$ 的方程为 $x=2$,由 $\begin{cases}x=2,\\x-2y-8=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2,\\y=-3,\end{cases}$ 即 $M(2,-3)$.

四、解答题

17.**解:** 解方程组 $\begin{cases}3x+4y-2=0,\\x-y+4=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-2,\\y=2,\end{cases}$ 所以交点坐标为 $(-2,2)$.

(1)因为直线 l 的斜率为 1 且过交点 $(-2,2)$,所以直线 l 的方程为 $y-2=x+2$,即 $x-y+4=0$.

(2)由题意知,可设直线 l 的方程为 $2x+y+m=0$,

代入点 $(-2,2)$,得 $-4+2+m=0$,解得 $m=2$,所以直线 l 的方程为 $2x+y+2=0$.

18.**解:**(1)因为直线 $l_1:(m-1)x+(2m+1)y-3m=0$,直线 l_2 过点 $(-1,-1)$,且直线 $l_1/\!/l_2$,

当 $m=-1$ 时,直线 $l_1:-2x-y+3=0$,即 $2x+y-3=0$,

直线 l_1 的斜率为 -2,所以直线 l_2 的斜率也为 -2,

所以直线 l_2 的方程为 $y+1=-2(x+1)$,即 $2x+y+3=0$.

(2)因为直线 l_1 与 l_2 之间的距离是 2,所以点 $(-1,-1)$ 到直线 l_1 的距离为 2,所以 $d=\frac{|-m+1-2m-1-3m|}{\sqrt{(m-1)^2+(2m+1)^2}}=2$,解得 $m=1$ 或 $m=-\frac{1}{2}$.

19.**解:**(1)直线 l_1 的方程为 $2x+2y-5=0$,故它的斜率为 -1,

若直线 l_2 在 y 轴上的截距为 $\frac{1}{2}$,且 $l_1\perp l_2$,则直线 l_2 的斜率为 1,故直线 l_2 的方程为 $y=x+\frac{1}{2}$.

由 $\begin{cases}2x+2y-5=0,\\y=x+\frac{1}{2},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\y=\frac{3}{2},\end{cases}$ 可得直线 l_1 和 l_2 的交点坐标为 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

(2)由题意知,直线 l_3 的斜率存在,设为 k,则直线 l_3 的方程为 $y-\frac{3}{2}=k(x-1)$,

直线 l_3 与 y 轴,x 轴的交点分别为 $\left(0,\frac{3}{2}-k\right)$,$\left(1-\frac{3}{2k},0\right)$,且 $\frac{3}{2}-k>0$,$1-\frac{3}{2k}>0$,解得 $k<0$.

因为直线 l_3 与两坐标轴的正半轴围成的三角形的面积为 $\frac{25}{8}$,所以 $\frac{25}{8}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}-k\right)\cdot\left(1-\frac{3}{2k}\right)$,

解得 $k=-1$,或 $k=-\frac{9}{4}$.当 $k=-1$ 时,直线 l_3 的方程为 $y-\frac{3}{2}=-(x-1)$,即 $2x+2y-5=0$;当 $k=-\frac{9}{4}$ 时,直线 l_3 的方程为 $y-\frac{3}{2}=-\frac{9}{4}(x-1)$,即 $9x+4y-15=0$.

综上,直线 l_3 的方程为 $2x+2y-5=0$ 或 $9x+4y-15=0$.

20.**解:**(1)直线 $l_2:4x-2y-1=0$ 可化为 $2x-y-\frac{1}{2}=0$,因为 l_1 和 l_2 的距离是 $\frac{7\sqrt{5}}{10}$,

所以 $\frac{\left|a-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{7\sqrt{5}}{10}$,解得 $a=3$ 或 $a=-4$,因为 $a>0$,所以 $a=3$.

(2)设存在点 $P(x_0,y_0)$ 满足题意,因为点 P 到 l_1 的距离是点 P 到 l_2 的距离的 $\frac{1}{2}$,

所以点 P 在与 l_1,l_2 平行的直线 l' 上,设直线 $l':2x-y+c=0$,则 $\frac{|c-3|}{\sqrt{5}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left|c+\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{5}}$,解得 $c=\frac{13}{2}$ 或 $c=\frac{11}{6}$,

所以点 P 满足 $2x_0-y_0+\frac{13}{2}=0$ 或 $2x_0-y_0+\frac{11}{6}=0$.又点 P 到 l_1 的距离与点 P 到 l_3 的距离之比是 $\sqrt{2}:\sqrt{5}$,

所以 $\frac{\frac{|2x_0-y_0+3|}{\sqrt{5}}}{\frac{|x_0+y_0-1|}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$,即 $|2x_0-y_0+3|=|x_0+y_0-1|$,

化简得 $x_0-2y_0+4=0$ 或 $3x_0+2=0$,因为点 P 在第一象限,所以 $3x_0+2=0$ 不成立.由 $\begin{cases}2x_0-y_0+\frac{13}{2}=0,\\x_0-2y_0+4=0,\end{cases}$ 解得 $x_0=-3$,$y_0=\frac{1}{2}$,

此时点 P 不在第一象限,舍去;由 $\begin{cases}2x_0-y_0+\frac{11}{6}=0,\\x_0-2y_0+4=0,\end{cases}$ 解得 $x_0=\frac{1}{9}$,$y_0=\frac{37}{18}$,符合题意,故能找到一点 P 满足题意,且点 $P\left(\frac{1}{9},\frac{37}{18}\right)$.

21.**解:**(1)联立 $\begin{cases}x+y-4=0,\\x-y+2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=3,\end{cases}$ 所以 l_1 和 l_2 的交点 A 的坐标为 $(1,3)$,

当 l_3 过点 A 时,$a-3+1-4a=0$,解得 $a=-\frac{2}{3}$,此时不存在三角形满足题意,为满足题意,必有 $a\neq-\frac{2}{3}$;

当 l_1,l_3 平行或 l_2,l_3 平行时,因为 l_1 的斜率为 -1,l_2 的斜率为 1,l_3 的斜率为 a,

所以 $a=1$ 或 $a=-1$,此时也不存在三角形满足题意,为满足题意,必有 $a\neq\pm1$.

综上所述,实数 a 的取值范围为 $\left\{a\,\middle|\,a\neq-\frac{2}{3}\text{,且 }a\neq\pm1\right\}$.

(2)直线 l 经过 l_1 和 l_2 的交点 $A(1,3)$,

当 $l\perp x$ 轴时,l 的方程为 $x=1$,

点 $M(-1,2)$ 到 l 的距离为 2,符合题意;

当 l 与 x 轴不垂直时,设 l 的方程为 $y-3=k(x-1)$,即 $kx-y+3-k=0$,

因为点 $M(-1,2)$ 到 l 的距离为 2,所以 $\frac{|-2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=2$,

解得 $k=-\frac{3}{4}$,此时 l 的方程为 $3x+4y-15=0$.

综上,直线 l 的方程为 $x=1$ 或 $3x+4y-15=0$.

22.**解:**(1)设直线 $MN:y=kx+b$,因为直线 MN 过点 $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$,所以 $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}k+b$,即 $b=\frac{1}{4}-\frac{k}{2}$,

所以直线 $MN:y=kx+\frac{1}{4}-\frac{k}{2}$,又因为 $A(1,1)$,$B(1,0)$,易得直线 $OA:y=x$,直线 $AB:x=1$,

联立 $\begin{cases}y=kx+\frac{1}{4}-\frac{k}{2},\\y=x,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{2k-1}{4(k-1)},\\y=\frac{2k-1}{4(k-1)}.\end{cases}$

联立 $\begin{cases}y=kx+\frac{1}{4}-\frac{k}{2},\\x=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=\frac{2k+1}{4}.\end{cases}$

故 $M\left(\frac{2k-1}{4(k-1)},\frac{2k-1}{4(k-1)}\right)$,$N\left(1,\frac{2k+1}{4}\right)$.

(2)因为 $k_{OP}=\frac{1}{2}$,$k_{BP}=-\frac{1}{2}$,所以 $-\frac{1}{2}\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}$,所以 $1-k\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$,

因为 $|AN|=1-\frac{2k+1}{4}=\frac{3-2k}{4}$,

设 M 到直线 AN 的距离为 d,则 $d=1-\frac{2k-1}{4(k-1)}=\frac{2k-3}{4(k-1)}$,

所以 $\triangle AMN$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|AN|\cdot d=\frac{1}{2}\cdot\frac{3-2k}{4}\cdot\frac{2k-3}{4(k-1)}=\frac{(2k-3)^2}{32(1-k)}=\frac{1+4(1-k)+4(1-k)^2}{32(1-k)}=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{4(1-k)}+(1-k)+1\right]\geqslant\frac{1}{8}\times\left(2\sqrt{\frac{1}{4}}+1\right)=\frac{1}{4}$,

当且仅当 $\frac{1}{4(1-k)}=1-k$,即 $k=\frac{1}{2}$ 时,等号成立,所以锯成的 $\triangle AMN$ 的面积的最小值为 $\frac{1}{4}$.

第7期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A

提示: 由题意知,$|OA|=\sqrt{(0-2)^2+(0+2)^2}=2\sqrt{2}$,$OA$ 的中点坐标为 $(1,-1)$,故以 OA 为直径的圆的方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$.故选 A.

2.C

提示: 设圆的一般方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,则圆心坐标为 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$,

因为圆 C 经过两点 $A(0,2)$,$B(4,6)$,且圆心 C 在直线 $l:2x-y-3=0$ 上,

所以 $\begin{cases}2\times\left(-\frac{D}{2}\right)-\left(-\frac{E}{2}\right)-3=0,\\0+2^2+2E+F=0,\\4^2+6^2+4D+6E+F=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}D=-6,\\E=-6,\\F=8,\end{cases}$ 所以圆 C 的方程为 $x^2+y^2-6x-6y+8=0$.故选 C.

3.B　**提示:** 设圆心为 M,点 A 的坐标为 $(5,12)$,

因为该圆经过点 $(5,12)$ 且半径为 2,所以圆心的轨迹是以 $A(5,12)$ 为圆心,半径为 2 的圆,

设 O 为原点,由 $|OA|=\sqrt{25+144}=13$,则圆心 M 到原点的距离的最小值为 $13-2=11$.故选 B.

4.D　**提示:** 由 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$,得 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|^2$,化简可得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$,则 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$,

故 $\triangle AOB$ 为等腰直角三角形,又圆的半径为 2,则圆心 $(0,0)$ 到直线 $x+y=a$ 的距离为 $\sqrt{2}$,即 $\frac{|a|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$,得 $a=2$(负值舍去).故选 D.

5.D　**提示:** 因为所求直线与直线 $x+2y+1=0$ 垂直,所以所求直线斜率 $k=2$,

可设所求直线方程为 $y=2x+b$,因为直线 $y=2x+b$ 与圆 $x^2+y^2=5$ 相切,所以圆心到直线 $y=2x+b$ 的距离 $d=\frac{|2\times0-0+b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$,解得 $b=\pm5$,故所求直线方程为 $2x-y+5=0$ 或 $2x-y-5=0$.故选 D.

6.B　**提示:** 因为直线 $l:y=kx$ 与圆 $C:(x-2)^2+(y-2)^2=4$ 有公共点,所以圆心到直线 l 的距离 $d=\frac{|2k-2|}{\sqrt{1+k^2}}\leqslant2$,可得 $k\geqslant0$,则"直线 l 与圆 C 有公共点"是"$k>0$"的必要不充分条件.故选 B.

7.A

提示: 由圆 $C_1:x^2+y^2-2x+4y+m=0\Rightarrow(x-1)^2+(y+2)^2=5-m$,得 $5-m>0$,即 $m<5$,圆心 $C_1(1,-2)$,半径为 $\sqrt{5-m}$;圆 $C_2:x^2+y^2+2x-1=0\Rightarrow(x+1)^2+y^2=2$,圆心 $C_2(-1,0)$,半径为 $\sqrt{2}$,

因为圆 $C_1:x^2+y^2-2x+4y+m=0$ 与圆 $C_2:x^2+y^2+2x-1=0$ 恰有两条公共的切线,所以这两个圆相交,于是有 $|\sqrt{5-m}-\sqrt{2}|<\sqrt{(1+1)^2+(-2)^2}<|\sqrt{5-m}+\sqrt{2}|$,

解得 $-13<m<3$,所以 m 的取值范围为 $(-13,3)$.故选A.

8.A

提示: 设圆 $C_1:x^2+y^2-8x-8y+28=0$,可得圆心 $C_1(4,4)$,半径 $r_1=2$;

设圆 $C_2:x^2+y^2+8x-4y+19=0$,可得圆心 $C_2(-4,2)$,半径 $r_2=1$,圆 C_2 关于 x 轴对称圆的圆心 $C_2'(-4,-2)$,半径 $r_2'=r_2=1$,

连接 C_1C_2' 分别交两圆于 P,Q',交 x 轴于点 A,连接 AC_2 交圆 C_2 于 Q 点,由对称性可得 $|AQ|=|AQ'|$,此时 $|AP|+|AQ|$ 取得最小值,最小值为 $|AP|+|AQ|=|AP|+|AQ'|=|C_1C_2'|-r_1-r_2'=\sqrt{(4+4)^2+(4+2)^2}-2-1=7$.故选A.

二、多项选择题

9.AC

提示: 由圆 $C:x^2+y^2-2x+4y+m=0$,得 $(x-1)^2+(y+2)^2=5-m$,

所以圆 C 的圆心为 $(1,-2)$,其半径为 $\sqrt{5-m}$,因为圆 C 的直径为 4,所以 $\sqrt{5-m}=2$,解得 $m=1$.故选 AC.

10.BC　**提示:** 由题意可知,圆 M 的圆心 $M(0,1)$,半径 $r_1=2$,圆 N 的圆心 $N(a,0)$,半径 $r_2=|a|$,

圆心距 $|MN|=\sqrt{a^2+1}$,易知两圆外离或两圆内含,可得 $\sqrt{a^2+1}>r_1+r_2=|a|+2$ 或 $\sqrt{a^2+1}<|r_1-r_2|=|2-|a||$,解得 $-\frac{3}{4}<a<\frac{3}{4}$,又 $a^2>0$,所以 $-\frac{3}{4}<a<\frac{3}{4}$ 且 $a\neq0$.故选 BC.

11.AC

提示: 因为 AB 的中点坐标为 $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$,直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\frac{1-0}{2-1}=1$,

所以线段 AB 的垂直平分线的方程为 $y-\frac{1}{2}=-\left(x-\frac{3}{2}\right)$,即 $x+y-2=0$.

联立方程组 $\begin{cases}x+y-2=0,\\y=x+2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\y=2,\end{cases}$ 即圆心 $O(0,2)$,半径 $r=|OA|=\sqrt{(1-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{5}$,

所以 $\odot O$ 的方程为 $x^2+(y-2)^2=5$,故 A 正确;因为直线 l 过定点 $P(3,1)$,当直线 $l\perp OP$ 时,圆心 O 到直线 l 的距离最大,且最大值为 $|OP|=\sqrt{10}$,故 B 错误;

圆心 $O(0,2)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|-1-3a|}{\sqrt{1+a^2}}$,当直线 l 与 $\odot O$ 相切时,$d=\frac{|-1-3a|}{\sqrt{1+a^2}}=\sqrt{5}$,解得 $a=-2$ 或 $a=\frac{1}{2}$,故 C 正确;若直线 l 被 $\odot O$ 所截得的弦长为 4,则 $\left(\frac{|-1-3a|}{\sqrt{1+a^2}}\right)^2=(\sqrt{5})^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2$,解得 $a=0$ 或 $a=-\frac{3}{4}$,故 D 错误.故选 AC.

12.BCD　**提示:** 两圆方程相减可得直线 AB 的方程为 $a^2+b^2-2ax-2by=0$,即 $2ax+2by-a^2-b^2=0$,

因为圆 C_1 的圆心为 $C_1(0,0)$,半径为 1,且公共弦 AB 的长为 1,则 $C_1(0,0)$ 到直线 $2ax+2by-a^2-b^2=0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $\frac{a^2+b^2}{\sqrt{4a^2+4b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,解得 $a^2+b^2=3$,所以直线 AB 的方程为 $2ax+2by-3=0$,故 A 错误,B 正确;由圆的性质可知直线 C_1C_2 垂直平分线段 AB,所以 $C_1(0,0)$ 到直线 $2ax+2by-a^2-b^2=0$ 的距离,即为 AB 中点与点 C_1 的距离,设 AB 中点坐标为 (x,y),因此 $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,即为 $x^2+y^2=\frac{3}{4}$,故 C 正确;

因为 $AB=C_1A=C_1B=1$,所以 $\angle BC_1A=\frac{\pi}{3}$,即圆 C_1 中 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角为 $\frac{\pi}{3}$,所以所求的公共面积为 $2(S_{扇形AC_1B}-S_{\triangle AC_1B})=2\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times1-\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$,故 D 正确.

故选 BCD.

三、填空题

13.1

提示: 由圆 C 的一般方程为 $x^2+2x+y^2=0$,得圆 C 的标准方程为 $(x+1)^2+y^2=1$,故圆 C 的半径为 1.

14.$(x-1)^2+(y-3)^2=5$ 或 $(x-1)^2+(y-3)^2=13$(答案不唯一,写出一个即可)　**提示:** 设 $M(a,3a)$,若 y 轴被圆 M 所截弦长为 4,则圆 M 的半径 $r_1=\sqrt{a^2+4}$,

则此时圆 M 的标准方程为 $(x-a)^2+(y-3a)^2=a^2+4$;

若 x 轴被圆 M 所截弦长为 4,则圆 M 的半径 $r_2=\sqrt{9a^2+4}$,

则此时圆 M 的标准方程为 $(x-a)^2+(y-3a)^2=9a^2+4$.

令 $a=1$,则圆 M 的标准方程为 $(x-1)^2+(y-3)^2=5$ 或 $(x-1)^2+(y-3)^2=13$.

故答案为:$(x-1)^2+(y-3)^2=5$ 或 $(x-1)^2+(y-3)^2=13$(答案不唯一,写出一个即可).

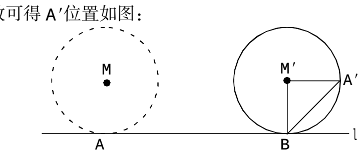
15.$2\sqrt{7}$　**提示:** 由圆 $C_1:x^2+y^2-2x-6y-1=0$ 和圆 $C_2:x^2+y^2-10x-12y+45=0$,

两式相减得,公共弦所在直线的方程为 $4x+3y-23=0$,因为圆心 $C_1(1,3)$,半径 $r_1=\sqrt{11}$,

所以圆心 C_1 到公共弦的距离为 $d=\frac{|4+9-23|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$,所以公共弦长为 $2\sqrt{r_1^2-d^2}=2\sqrt{11-4}=2\sqrt{7}$.

16.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

提示: 由题意知,圆周长为 2π,因为 $BA=\frac{3\pi}{2}=\frac{3}{4}\times2\pi$,故可得 A' 位置如图:



(第16题图)

则 $\angle A'M'B=90°$,$\triangle A'M'B$ 是等腰直角三角形,所以 M' 到 BA' 的距离 $d=\frac{\sqrt{2}}{2}r=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

四、解答题

17.**解:**(1)因为圆 C 的圆心 C 在直线 $y=3x+2$ 上,所以可设 $C(a,3a+2)$,

因为圆 C 过 $A(0,0)$,$B(2,2)$ 两点,所以 $|CA|=|CB|$,所以 $(a-0)^2+(3a+2)^2=(a-2)^2+(3a+2-2)^2$,解得 $a=0$,圆心 $C(0,2)$,故半径 $|CA|=2$,

所以圆 C 的标准方程为 $x^2+(y-2)^2=4$.

(2)由题意,切线的斜率存在,设为 k,则切线方程为 $y-0=k(x-3)$,即 $kx-y-3k=0$.

由圆心到直线的距离等于半径,得 $2=\frac{|0-2-3k|}{\sqrt{k^2+1}}$,解得 $k=0$ 或 $k=-\frac{12}{5}$,

故切线 l 的方程为 $y=0$ 或 $12x+5y-36=0$.

18.(1)**证明:** 直线 $l:(m-1)x+2my-5m+3=0$ 变形为 $m(x+2y-5)-x+3=0$,

由 $\begin{cases}x+2y-5=0,\\-x+3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\y=1,\end{cases}$ 故直线 l 过定点 $A(3,1)$.

将点 $A(3,1)$ 代入圆 C 的方程 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$ 的左边,

得 $(3-2)^2+(1-1)^2=1<4$,故点 $A(3,1)$ 在圆 C 内,故圆 C 与直线 l 恒相交.

(2)**解:** 因为直线 l 过定点 $A(3,1)$,且 $A(3,1)$ 在圆 C 内,故当直线 l 与 AC 垂直时,直线 l 被圆 C 截得的弦长最小,因为圆 $C:(x-2)^2+(y-1)^2=4$ 的圆心为 $C(2,1)$,半径为 2,所以 $|AC|=\sqrt{(3-2)^2+(1-1)^2}=1$,

故弦长最小值为 $2\sqrt{2^2-1^2}=2\sqrt{3}$.

19.**解:**(1)由题意,结合中点坐标公式,

可得 $M(4,0)$,$N(0,-4)$,

圆 C 的半径 $r=\frac{1}{2}|MN|=2\sqrt{2}$.

所以圆 C 的方程为 $(x-2)^2+(y+2)^2=8$.

(2)由题设,直线 l 的斜率存在,设直线 l 的方程为 $y-2=k(x-2)$,即 $kx-y-2k+2=0$,

由题意可知,$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,因为圆 C 的半径 $r=2\sqrt{2}$,所以圆心 C 到直线 l 的距离为 2,

故 $\frac{|2k+2-2k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$,解得 $k=\pm\sqrt{3}$,所以直线 l 的方程为 $\sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}+2=0$ 或 $\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}-2=0$.

20.(1)**解:** 设 $P(3m,m)$,连接 MP,MA,MB.因为圆 M 的方程为 $x^2+y^2-4y+3=0$,即 $x^2+(y-2)^2=1$,所以圆心 $M(0,2)$,半径 $r=1$,因为过点 P 作圆 M 的切线 PA,PB,切点分别为 A,B,

所以 $PA\perp MA$,$PB\perp MB$,且 $MA=MB=r=1$,易得 $\triangle APM\cong\triangle BPM$,

因为 $\angle APB=60°$,所以 $\angle APM=30°$,$MP=2MA=2$,所以 $(3m)^2+(m-2)^2=4$,解得 $m=0$ 或 $m=\frac{2}{5}$,

即点 P 的坐标为 $(0,0)$ 或 $\left(\frac{6}{5},\frac{2}{5}\right)$.

(2)**证明:** 根据题意,PA 是圆 M 的切线,则 $PA\perp MA$,则过 A,P,M 三点的圆为以 MP 为直径的圆,

设 $P(3m,m)$,$M(0,2)$,则以 MP 为直径的圆的方程为 $(x-0)(x-3m)+(y-m)(y-2)=0$,

变形可得 $x^2+y^2-3mx-(m+2)y+2m=0$,

即 $x^2+y^2-2y-m(3x+y-2)=0$,

由 $\begin{cases}x^2+y^2-2y=0,\\3x+y-2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\y=2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{3}{5},\\y=\frac{1}{5},\end{cases}$

则当 $x=0$,$y=2$ 和 $x=\frac{3}{5}$,$y=\frac{1}{5}$ 时,$x^2+y^2-2y-m(3x+y-2)=0$ 恒成立,

因为 $M(0,2)$,所以经过 A,P,M 三点的圆必经过异于 M 的某个定点,定点的坐标为 $\left(\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right)$.

21.**解:**(1)选条件①.

设圆 G 的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$,

则 $\begin{cases}F=0,\\2+D+E+F=0,\\4+2D+F=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}D=-2,\\E=0,\\F=0,\end{cases}$

则圆 G 的一般方程为 $x^2+y^2-2x=0$.

选条件②.

直线 $mx-y-m=0$ 恒过点 $(1,0)$.因为圆 G 恒被直线 $mx-y-m=0(m\in\mathbf{R})$ 平分,所以 $mx-y-m=0$ 恒过圆心,所以圆 G 的圆心坐标为 $(1,0)$,又圆 G 经过点 $A(0,0)$,所以圆 G 的半径 $r=1$,所以圆 G 的方程为 $(x-1)^2+y^2=1$,即圆 G 的一般方程为 $x^2+y^2-2x=0$.

选条件③.

设圆 G 的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$,

由题意知 $\begin{cases}|a|=r,\\a^2+b^2=r^2,\\(1-a)^2+(1-b)^2=r^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=0,\\r=1,\end{cases}$

则圆 G 的方程为 $(x-1)^2+y^2=1$,即圆 G 的一般方程为 $x^2+y^2-2x=0$.

(2)设 $M(x,y)$,因为 M 为线段 AP 的中点,所以 $P(2x,2y)$,

因为点 P 是圆 G 上的动点,所以 $(2x)^2+(2y)^2-2\times2x=0$,即 $x^2+y^2-x=0$,

所以线段 AP 的中点 M 的轨迹方程为 $x^2+y^2-x=0$.

22.(1)**证明:** 直线 $l:x=my-1$ 过定点 $(-1,0)$,代入圆 $C:x^2+y^2+4x=0$ 的左边,得 $1+0-4<0$,

故点 $(-1,0)$ 在圆 C 内,故直线 l 与圆 C 相交.

(2)**解:** 圆 $C:x^2+y^2+4x=0$ 的圆心为 $C(-2,0)$,直线 l 与圆 C 的两个交点分别为 A,B,弦 AB 的中点为 M,设点 $M(x,y)$,定点 $(-1,0)$ 为 D,则由垂径定理,得 $CM\perp AB$,所以 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{DM}=0$,因为 $\overrightarrow{CM}=(x+2,y)$,$\overrightarrow{DM}=(x+1,y)$,所以 $(x+1)(x+2)+y^2=0$,化简得 $x^2+y^2+3x+2=0$,

所以点 M 的轨迹方程为 $x^2+y^2+3x+2=0$.

(3)**解:** 设点 $Q(x_0,y_0)$,由题意得,Q,A,B,C 四点共圆,且圆的方程为 $(x-x_0)(x+2)+(y-y_0)y=0$,即 $x^2+y^2+(2-x_0)\cdot x-y_0y-2x_0=0$,与圆 C 的方程 $x^2+y^2+4x=0$ 联立,消去二次项,得 $(x_0+2)x+y_0y+2x_0=0$,即为直线 l 的方程,因为直线 $l:x=my-1$ 过定点 $(-1,0)$,所以 $2x_0=x_0+2$,解得 $x_0=2$,所以当 m 变化时,点 Q 恒在直线 $x=2$ 上.