解得$\lambda=-\frac{4}{3}$,故选D.

3.B 提示:由题意,向量$\boldsymbol{a}=(1,0,-1)$,$\boldsymbol{b}=(-2,1,0)$,可得$\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}=(1+2k,-k,-1)$,$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(-3,2,-1)$,

由$\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$互相垂直,得$-3\times(1+2k)+2\times(-k)+1=0$,即$-2-8k=0$,解得$k=-\frac{1}{4}$.故选B.

4.B 提示:因为A(1,0,2),B(-1,1,2),C(1,1,-2),

所以$\overrightarrow{AB}=(-2,1,0)$,$\overrightarrow{BC}=(2,0,-4)$,所以$\overrightarrow{AB}^2=4+1+0=5$,$\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{-4+0+0}{\sqrt{4+0+16}}=-\frac{2}{\sqrt{5}}$,

所以点A到直线BC的距离是$d=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2-\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}\right)^2}=\sqrt{5-\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{\sqrt{105}}{5}$.故选B.

5.A 提示:因为一个平面的单位法向量方向可以不同,所以有2个,故①错误;当一条直线的方向向量和一个平面的法向量平行时,则这条直线和这个平面垂直,故②错误;因为两个平面的法向量平行时,两平面平行,所以两个平面的法向量不平行,则这两个平面相交,故③正确;若一条直线的方向向量垂直于一个平面内两条相交直线的方向向量,则该直线和这个平面垂直,故④错误.故选A.

6.D 提示:以C为原点,以CA,CC_1,CB所在直线为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系.不妨取$CB=1$,则$CA=CC_1=\sqrt{2}CB=\sqrt{2}$.

所以$A(\sqrt{2},0,0)$,$B(0,0,1)$,$C_1(0,\sqrt{2},0)$,$B_1(0,\sqrt{2},1)$.所以$\overrightarrow{AB_1}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},1)$,$\overrightarrow{BC_1}=(0,\sqrt{2},-1)$,

所以$\cos\langle\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{BC_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{AB_1}||\overrightarrow{BC_1}|}=\frac{1}{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{15}$.

故选D.

7.B 提示:以D为原点,DC,DP,DA所在直线分别为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系,

则$A(0,0,2)$,$P(0,2,0)$,$C(2,0,0)$,$B(2,0,2)$,

$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$,$\overrightarrow{PA}=(0,-2,2)$,$\overrightarrow{CB}=(0,0,2)$.

设平面PAB的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PA}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}2x=0,\\-2y+2z=0,\end{cases}$令$y=1$,得$z=1$,故$\boldsymbol{n}=(0,1,1)$,

则点C到平面PAB的距离为$d=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$,故选B.

8.A 提示:设上底面圆心为O_1,下底面圆心为O,连接OO_1,OC,OB,O_1C_1,O_1B_1,

以O为坐标原点,OC,OB,OO_1所在直线分别为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系,

则$B(0,1,0)$,$A_1(0,2,2)$,$B_1(0,1,2)$,$D_1(2,0,2)$,

所以$\overrightarrow{A_1D_1}=(2,-2,0)$,$\overrightarrow{BA_1}=(0,1,2)$,$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,2)$,

设平面A_1BD_1的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1D_1}=2x-2y=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA_1}=y+2z=0,\end{cases}$取$x=2$,得$\boldsymbol{n}=(2,2,-1)$,

设直线BB_1与平面A_1BD_1所成角为θ,则$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{BB_1}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{BB_1}|}=\frac{2}{3\times2}=\frac{1}{3}$,故选A.

二、多项选择题

9.ABD 提示:对于A,$\overrightarrow{MP}=2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}$,$\overrightarrow{MP}$,$\overrightarrow{MA}$,$\overrightarrow{MB}$共面,且有公共顶点M,所以P,M,A,B四点共面;对于B,$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OM}$,满足$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$,所以P,M,A,B四点共面;

对于C,由$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,得$\overrightarrow{PM}\perp\overrightarrow{AB}$,不能确定P,M,A,B四点共面,也可以是异面垂直;

对于D,由$\overrightarrow{PM}/\!/\overrightarrow{AB}$,得PM与AB平行或重合,所以P,M,A,B四点共面.故选ABD.

10.BD 提示:对于A,当$\boldsymbol{a}=(1,0,0)$,$\boldsymbol{b}=(-1,0,0)$时,显然$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$,因为$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$,所以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角是平角,故A为假命题;对于B,因为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times(-1)+2\times(-1)+3\times1=0$,所以$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,因此B为真命题;

对于C,当$\boldsymbol{a}=(1,0,0)$,$\boldsymbol{b}=(0,2,0)$,$\boldsymbol{c}=(0,0,3)$时,显然$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$,但是$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{c}$,因此C为假命题;对于D,假设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$是共面向量,所以$c=xa+yb\Rightarrow(0,0,3)=x(1,0,0)+y(0,2,0)$,所以$\begin{cases}0=x,\\0=2y,\\3=0,\end{cases}$显然不可能,所以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$不是共面向量,因此$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$可以作为空间中的一组基,所以D为真命题.故选BD.

11.BCD 提示:因为$A(2,0,0)$,$C_1(0,2,2)$,$E(2,2,1)$,$F(1,0,2)$,所以$\overrightarrow{AC_1}=(-2,2,2)$,所以$|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}$,故A错误;$\cos\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}\rangle=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}}{|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{AF}|}=\frac{(0,2,1)\cdot(-1,0,2)}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{2}{5}$,故B正确;设$\boldsymbol{m}=(4,-1,2)$,则$\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=(4,-1,2)\cdot(0,2,1)=0$,$\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AF}=(4,-1,2)\cdot(-1,0,2)=-4+4=0$,而$AE\cap AF=A$,所以平面$AEF$的一个法向量是$(4,-1,2)$,故C正确;

$\overrightarrow{EF}=(-1,-2,1)$,$\overrightarrow{ED}=(-2,-2,-1)$,故点$D$到直线$EF$的距离为$\sqrt{\overrightarrow{ED}^2-\left(\frac{\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EF}}{|\overrightarrow{EF}|}\right)^2}=\sqrt{9-\frac{25}{6}}=\frac{\sqrt{174}}{6}$,故D正确.故选BCD.

12.ACD 提示:由$AD/\!/BC$,$\angle ABC=90°$,得$AD\perp AB$,又$PA\perp$平面$ABCD$,故以A为原点,AB,AD,AP所在直线分别为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系.则$A(0,0,0)$,$B(2,0,0)$,$C(2,2,0)$,$D(0,4,0)$,$P(0,0,2)$.

对于A,由$\overrightarrow{BP}=(-2,0,2)$,$\overrightarrow{CD}=(-2,2,0)$,

得$\cos\langle\overrightarrow{BP},\overrightarrow{CD}\rangle=\frac{\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{BP}||\overrightarrow{CD}|}=\frac{4}{2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$,所以$\langle\overrightarrow{BP},\overrightarrow{CD}\rangle=60°$,所以$PB$与$CD$所成的角是$60°$,故A正确;对于B,由题意$\boldsymbol{n}=(0,1,0)$为平面$PAB$的一个法向量,

设$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$为平面PCD的法向量,$\overrightarrow{DP}=(0,-4,2)$,由$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}-2x+2y=0,\\-4y+2z=0,\end{cases}$令$x=1$,则$\boldsymbol{m}=(1,1,2)$,

所以$|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{1}{1\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$,所以平面$PCD$与平面$PAB$夹角的余弦值是$\frac{\sqrt{6}}{6}$,故B错误;对于C,$V_{P-ACD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}PA=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times AD\times AB\times PA=\frac{1}{6}\times4\times2\times2=\frac{8}{3}$,故C正确;

对于D,$\overrightarrow{BP}=(-2,0,2)$,设$PB$与平面$PCD$所成的角为$\theta$,则$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{BP},\boldsymbol{m}\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{BP}\cdot\boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{BP}||\boldsymbol{m}|}\right|=\frac{2}{2\sqrt{2}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$,故D正确.故选ACD.

三、填空题

13.(1,0,0) 提示:因为向量$\boldsymbol{a}=(1,0,3)$,所以$\boldsymbol{a}$在x轴上的投影向量为(1,0,0).

14.$\frac{7\sqrt{3}}{2}$ 提示:因为A(0,2,3),B(-2,1,6),C(1,-1,5),所以$\overrightarrow{AB}=(-2,-1,3)$,$\overrightarrow{AC}=(1,-3,2)$,由此可得$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{14}$,$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{14}$.设$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为$\theta$,则$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{-2+3+6}{\sqrt{14}\times\sqrt{14}}=\frac{1}{2}$,又因为$\theta\in[0,\pi]$,所以$\theta=\frac{\pi}{3}$,即$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$,即$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$,

所以$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\times\sqrt{14}\times\sqrt{14}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7\sqrt{3}}{2}$.

15.$\frac{\sqrt{65}}{5}$ 提示:因为PA⊥平面ABCD,底面ABCD为正方形,以点A为坐标原点,AB,AD,AP所在直线分别为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系,

则$E(1,2,0)$,$F(0,1,1)$,$M\left(0,0,\frac{2}{3}\right)$,

$\overrightarrow{FM}=\left(0,-1,-\frac{1}{3}\right)$,$\overrightarrow{FE}=(1,1,-1)$,

所以CD的中点E到直线MF的距离

$d=\sqrt{\overrightarrow{FE}^2-\left(\frac{\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FM}}{|\overrightarrow{FM}|}\right)^2}=\sqrt{3-\frac{\frac{4}{9}}{1+\frac{1}{9}}}=\frac{\sqrt{65}}{5}$.

16.$\frac{8}{5}$ 提示:以D为原点,DA,DC,DD_1所在直线分别为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系,

设$M(4,0,a)(0\leqslant a\leqslant4)$,$N(2,4,0)$,$D_1(0,0,4)$,则$\overrightarrow{MN}=(-2,4,-a)$,$\overrightarrow{D_1N}=(2,4,-4)$,

设平面D_1MN的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{D_1N}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-2x+4y-az=0,\\2x+4y-4z=0,\end{cases}$令$z=8$,$x=8-2a$,$y=a+4$,则$\boldsymbol{n}=(8-2a,a+4,8)$,易知平面$ABCD$的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(0,0,1)$,设平面$D_1MN$与平面$ABCD$的夹角为$\theta$,

所以$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{8}{\sqrt{(8-2a)^2+(a+4)^2+64}}=\frac{8}{\sqrt{5a^2-24a+144}}$,当$a=\frac{12}{5}$时,$\cos\theta$取得最大值,此时$\theta$取最小值,所以$A_1M=4-\frac{12}{5}=\frac{8}{5}$.

四、解答题

17.解:(1)因为$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6}$,所以$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}$或$\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{a}$,所以$\boldsymbol{c}=(2,4,-2)$或$\boldsymbol{c}=(-2,-4,2)$.

(2)因为$k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(k,2k,-k)+(-2,4,2)=(k-2,2k+4,2-k)$,$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(1,2,-1)-(-4,8,4)=(5,-6,-5)$.

由$(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$,得$(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$,

即$5(k-2)-6(2k+4)-5(2-k)=0$,解得$k=-22$.

18.证明:(1)以C_1为原点,C_1A_1,C_1B_1,C_1C所在直线为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系,设$AC=BC=BB_1=2$,则$B(0,2,2)$,$C_1(0,0,0)$,$A(2,0,2)$,$B_1(0,2,0)$,$\overrightarrow{BC_1}=(0,-2,-2)$,$\overrightarrow{AB_1}=(-2,2,-2)$,$\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0$,所以$BC_1\perp AB_1$.

(2)$\overrightarrow{BC_1}=(0,-2,-2)$,$D(1,1,2)$,$A_1(2,0,0)$,$C(0,0,2)$,$\overrightarrow{DA_1}=(1,-1,-2)$,$\overrightarrow{A_1C}=(-2,0,2)$,设平面$A_1CD$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA_1}=x-y-2z=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}=-2x+2z=0,\end{cases}$令$x=1$,则$\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$,所以$\overrightarrow{BC_1}\cdot\boldsymbol{n}=0$,所以$BC_1/\!/$平面$A_1CD$.

19.(1)证明:因为三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧棱垂直于底面,$\angle BAC=90°$,

所以以A为原点,AB,AC,AA_1所在直线分别为x轴,y轴,z轴建立空间直角坐标系,

因为$AB=AC=AA_1=1$,E,F分别是棱C_1C,BC的中点,

所以$A(0,0,0)$,$B_1(1,0,1)$,$E\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$,$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$,

$\overrightarrow{B_1F}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)$,$\overrightarrow{AE}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{AF}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$,

因为$\overrightarrow{B_1F}\cdot\overrightarrow{AE}=0$,$\overrightarrow{B_1F}\cdot\overrightarrow{AF}=0$,所以$\overrightarrow{B_1F}\perp\overrightarrow{AE}$,$\overrightarrow{B_1F}\perp\overrightarrow{AF}$,因为$AE\cap AF=A$,$AE\subset$平面$AEF$,$AF\subset$平面$AEF$,所以$B_1F\perp$平面$AEF$.

(2)解:因为$A_1(0,0,1)$,所以$\overrightarrow{B_1A_1}=(-1,0,0)$,$\overrightarrow{B_1E}=\left(-1,1,-\frac{1}{2}\right)$,故点$A_1$到直线$B_1E$的距离为$d=\sqrt{\overrightarrow{B_1A_1}^2-\left(\frac{\overrightarrow{B_1A_1}\cdot\overrightarrow{B_1E}}{|\overrightarrow{B_1E}|}\right)^2}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{1+1+\frac{1}{4}}}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

20.(1)证明:因为$AB\perp BC$,$AB\perp BE$,$BC\cap BE=B$,所以$AB\perp$平面BCE,

以B为原点,BE,BC,BA所在直线分别为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系,

设$AB=AD=1$,则$D(1,1,1)$,$F(1,0,1)$,$B(0,0,0)$,$M(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$,

所以$\overrightarrow{BM}=(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$,$\overrightarrow{DF}=(1,-1,0)$,所以$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{DF}=\sqrt{2}-\sqrt{2}+0=0$,所以$BM\perp DF$.

(2)解:$E(2,0,0)$,所以$\overrightarrow{EF}=(-1,0,1)$,所以$|\cos\langle\overrightarrow{BM},\overrightarrow{EF}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{EF}|}{|\overrightarrow{BM}|\cdot|\overrightarrow{EF}|}=\frac{\sqrt{2}}{2\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$,所以异面直线$BM$与$EF$所成角为$\frac{\pi}{3}$.

21.(1)证明:连接AE,DE,因为DB=DC,E为BC中点,所以DE⊥BC,又因为DA=DB=DC,∠ADB=∠ADC=60°,所以△ACD与△ABD为全等的等边三角形,所以AC=AB,所以AE⊥BC,又AE∩DE=E,所以BC⊥平面ADE,因为DA⊂平面ADE,所以BC⊥DA.

(2)解:设DA=DB=DC=2,则BC=$2\sqrt{2}$,所以DE=AE=$\sqrt{2}$,所以$AE^2+DE^2=4=AD^2$,

所以AE⊥DE,又因为BC⊥平面ADE,所以EA,EB,ED两两垂直,

所以以E为原点,ED,EB,EA所在直线分别为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系,

则$D(\sqrt{2},0,0)$,$A(0,0,\sqrt{2})$,$B(0,\sqrt{2},0)$,$E(0,0,0)$,

因为$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}=(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$,所以$F(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$,

所以$\overrightarrow{AB}=(0,\sqrt{2},-\sqrt{2})$,$\overrightarrow{AF}=(-\sqrt{2},0,0)$,

设平面DAB与平面ABF的法向量分别为$\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,$\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$,

则$\begin{cases}-\sqrt{2}x_1+\sqrt{2}z_1=0,\\\sqrt{2}y_1-\sqrt{2}z_1=0,\end{cases}$令$x_1=1$,解得$y_1=z_1=1$;

$\begin{cases}\sqrt{2}y_2-\sqrt{2}z_2=0,\\-\sqrt{2}x_2=0,\end{cases}$令$y_2=1$,解得$x_2=0$,$z_2=1$,

故$\boldsymbol{n}_1=(1,1,1)$,$\boldsymbol{n}_2=(0,1,1)$,设二面角D-AB-F的平面角为θ,

则$|\cos\theta|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{2}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,

故$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以二面角D-AB-F的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

22.解:依题意,以D为原点,分别以$\overrightarrow{DA}$,$\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{DE}$的方向为x轴,y轴,z轴的正方向建立空间直角坐标系,可得$D(0,0,0)$,$A(2,0,0)$,$B(2,2,0)$,$C(0,2,0)$,$E(0,0,2)$,$F\left(2,2,\frac{1}{2}\right)$.

(1)证明:$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$,$\overrightarrow{EF}=\left(2,2,-\frac{3}{2}\right)$,所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EF}=(-2)\times2+2\times2+0=0$,

所以$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{EF}$,所以$AC\perp EF$.

(2)解:依题意可得$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$,$\overrightarrow{AF}=\left(0,2,\frac{1}{2}\right)$,设$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为平面$ACF$的法向量,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}-2x+2y=0,\\2y+\frac{1}{2}z=0,\end{cases}$令$x=1$,可得$y=1$,$z=-4$,所以$\boldsymbol{n}=(1,1,-4)$,因为$\overrightarrow{EC}=(0,2,-2)$,设直线$EC$与平面$ACF$所成角为$\theta$,

则$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{EC},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{EC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{EC}||\boldsymbol{n}|}=\frac{10}{2\sqrt{2}\times3\sqrt{2}}=\frac{5}{6}$,

所以直线EC与平面ACF所成角的正弦值为$\frac{5}{6}$.

(3)解:设线段DE上存在一点$G(0,0,h)$,使得BG与AD所成角的余弦值为$\frac{2}{3}$,则$\overrightarrow{BG}=(-2,-2,h)$,又$\overrightarrow{AD}=(-2,0,0)$,所以$|\cos\langle\overrightarrow{BG},\overrightarrow{AD}\rangle|=\frac{4}{\sqrt{8+h^2}\times2}=\frac{2}{3}$,

解得$h=1$,所以存在$G(0,0,1)$满足条件,

所以$\overrightarrow{AG}=(-2,0,1)$,

由(2)可知平面ACF的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(1,1,-4)$,

所以点G到平面ACF的距离为$\frac{|\overrightarrow{AG}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|-2+0-4|}{3\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

第9期

第3~4版同步周测参考答案

扫码免费下载习题讲解ppt

一、单项选择题

1.C 提示:点(1,3,3)关于Oxy平面的对称点坐标为(1,3,-3).故选C.

2.A 提示:因为三棱锥$A-BCD$中,M是平面BCD内的点,且满足向量$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AD}$表示$\overrightarrow{AM}$,三个基向量的系数之和为1.故选A.

3.B 提示:向量$\boldsymbol{a}=(2,4,5)$,$\boldsymbol{b}=(3,x,y)$分别是直线l_1,l_2的方向向量,且$l_1/\!/l_2$,

所以$\frac{3}{2}=\frac{x}{4}=\frac{y}{5}$,解得$x=6$,$y=\frac{15}{2}$.故选B.

4.A 提示:因为$\boldsymbol{a}=(1,2,-3)$,$\boldsymbol{b}=(2,-1,1)$,$\boldsymbol{c}=(2,0,3)$,所以$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(4,-1,4)$,所以$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=1\times4+2\times(-1)+(-3)\times4=-10$.故选A.

5.B 提示:由$2\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}$,得$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP})+\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$,即$\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{AP}$,故$\overrightarrow{AP}$,$\overrightarrow{BP}$,$\overrightarrow{PC}$共面,又因为三个向量有同一公共点$P$,所以$P,A,B,C$共面.故选B.

6.A 提示:由题意可得$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AA_1}$,所以$x=1$,$y=-\frac{1}{2}$,$z=-\frac{1}{2}$,所以$(x,y,z)=\left(1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.故选A.

7.C 提示:因为E为CD的中点,F是AE的中点,$\overrightarrow{AB}=a$,$\overrightarrow{AC}=b$,$\overrightarrow{AD}=c$,所以$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$,$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{4}b+\frac{1}{4}c$,所以$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}b+\frac{1}{4}c-a$.故选C.

8.D 提示:因为$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$,

所以$|\overrightarrow{AC_1}|^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AA_1}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}=1+1+1+3\times2\times1\times1\times\cos60°=6$.所以$|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{6}$.故选D.

二、多项选择题

9.ABC 提示:对于A,在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,$AA_1=1$,则单位向量的模长为1,

则单位向量有$\overrightarrow{AA_1}$,$\overrightarrow{A_1A}$,$\overrightarrow{BB_1}$,$\overrightarrow{B_1B}$,$\overrightarrow{CC_1}$,$\overrightarrow{C_1C}$,$\overrightarrow{DD_1}$,$\overrightarrow{D_1D}$,共8个,故A正确;

对于B,由图可知,与$\overrightarrow{AB}$相等的向量有$\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{A_1B_1}$,$\overrightarrow{D_1C_1}$,共3个,故B正确;

对于C,由图可知,$\overrightarrow{AA_1}$的相反向量有$\overrightarrow{B_1B}$,$\overrightarrow{C_1C}$,$\overrightarrow{D_1D}$,$\overrightarrow{A_1A}$,共4个,故C正确;

对于D,由图易知,向量$\overrightarrow{A_1D_1}$,$\overrightarrow{A_1B_1}$,$\overrightarrow{CC_1}$不共面,故D错误.故选ABC.

10.BD 提示:对于A,若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$,则$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角$\theta$满足$\cos\theta<0$,所以$\theta$是钝角或$\theta=\pi$,故A错误;

对于B,因为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1-2+3=0$,所以$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,故B正确;

对于C,根据向量的数量积定义知,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$时,$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$不一定成立,故C错误;

对于D,因为$\boldsymbol{c}\neq\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$,所以向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$不共面,$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$可作为空间中的一组基底,故D正确.

故选BD.

11.ACD 提示:对于A,由于E,F分别是CD和PC的中点,则$2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AD}$,即$\overrightarrow{AP}-2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}$,故A正确;

对于B,$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}\neq\overrightarrow{BA}$,故B错误;

对于C,$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}$,故C正确;

对于D,因为$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})$,所以$\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DB})=\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB}$,故$\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DB})-\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{FB}$,故D正确.

故选ACD.

12.BC 提示:对于A,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-16-10+6\neq0$,$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-24+0+24=0$,故$\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$不垂直,故A错误;

对于B,设$\boldsymbol{d}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$,则$m(2,-2,1)+n(3,0,4)=(1,-4,-2)$,所以$\begin{cases}2m+3n=1,\\-2m=-4,\\m+4n=-2,\end{cases}$解得$m=2$,$n=-1$,即$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}$,故B正确;

对于C,因为$\cos\langle a,b\rangle=\frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}=\frac{10}{3\times5}=\frac{2}{3}$,所以异面直线$l_1$与$l_2$的余弦值为$\frac{2}{3}$,故C正确;对于D,向量$\boldsymbol{a}$在向量$\boldsymbol{b}$上的投影向量为$|a|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\cdot\frac{b}{|b|}=3\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}\times(3,0,4)=\left(\frac{6}{5},0,\frac{8}{5}\right)$,故D错误.故选BC.

三、填空题

13.$\sqrt{11}$ 提示:因为$a=(-2,1,5)$,$b=(1,-3,m)$,且$a\perp b$,所以$-2-3+5m=0$,解得$m=1$.

故$b=(1,-3,1)$,所以$|b|=\sqrt{1^2+(-3)^2+1^2}=\sqrt{11}$.

14.2 提示:由题意知,$\begin{cases}x-3y+z=2,\\2x+y-z=-1,\\-x+2y-z=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-3,\\y=-5,\\z=-10,\end{cases}$

所以$x+y-z=2$.

15.$7\sqrt{3}$ 提示:因为$A(0,2,3)$,$B(-2,1,6)$,$C(1,-1,5)$,所以$\overrightarrow{AB}=(-2,-1,3)$,$\overrightarrow{AC}=(1,-3,2)$,$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{14}$,$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{14}$.

所以$\cos\angle BAC=\frac{(-2,-1,3)\cdot(1,-3,2)}{\sqrt{14}\times\sqrt{14}}=\frac{1}{2}$,

所以$\angle BAC=60°$,

所以$S=\sqrt{14}\times\sqrt{14}\sin60°=7\sqrt{3}$.

16.(0,1,1) 提示:由题意知,$D(0,0,0)$,$B(\sqrt{2},2,0)$,$A(\sqrt{2},0,0)$,$S(0,0,2)$,$C(0,2,0)$,则$\overrightarrow{BA}=(0,-2,0)$,$\overrightarrow{CS}=(0,-2,2)$,$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{2},0,0)$,

设$\overrightarrow{CM}=\lambda\overrightarrow{CS}=(0,-2\lambda,2\lambda)$,$0\leqslant\lambda\leqslant1$,则$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=(-\sqrt{2},-2\lambda,2\lambda)$.

因为$\angle ABM=60°$,所以$\cos\angle ABM=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BM}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BM}|}=\frac{4\lambda}{2\cdot\sqrt{2+(-2\lambda)^2+4\lambda^2}}=\frac{1}{2}$,解得$\lambda=\frac{1}{2}$.所以$\overrightarrow{CM}=(0,-1,1)$,又$C(0,2,0)$,所以$M(0,1,1)$.

四、解答题

17.解:(1)因为$\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GE}$,所以$\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}=2(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OG})$,所以$3\overrightarrow{OG}=2\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OA}$,

因为$2\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$,所以$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$.

(2)因为$OA=4$,$OB=6$,$OC=8$,$\angle AOC=\angle BOC=60°$,$\angle AOB=90°$,

所以$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\right)\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}^2-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{3}\times4^2+\frac{1}{3}\times6^2+\frac{1}{3}\times6\times8\times\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\times4\times8\times\frac{1}{2}=\frac{28}{3}$.

18.解:(1)$\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{A_1D_1}$,$\overrightarrow{BD_1}^2=(\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{A_1D_1})^2=\overrightarrow{BB_1}^2+\overrightarrow{B_1A_1}^2+\overrightarrow{A_1D_1}^2+2\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{B_1A_1}+2\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{A_1D_1}+2\overrightarrow{B_1A_1}\cdot\overrightarrow{A_1D_1}=16+4+4+2\times4\times2\cos60°+2\times4\times2\cos120°+0=24$,故$|\overrightarrow{BD_1}|=2\sqrt{6}$,

所以BD_1的长为$2\sqrt{6}$.

(2)$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD_1}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{A_1D_1})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{A_1D_1}=2\times4\cos120°-4+0+2\times4\cos120°+0+4=-8$,$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})^2}=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2}=2\sqrt{2}$,

由(1)知,$|\overrightarrow{BD_1}|=2\sqrt{6}$,设直线$BD_1$与$AC$所成角为$\theta$,所以$\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD_1}\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD_1}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD_1}|}\right|=\left|\frac{-8}{2\sqrt{2}\times2\sqrt{6}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以直线$BD_1$与$AC$所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

19.解:(1)连接ON,因为P是线段MN的中点,所以$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})$,

因为N是棱BC的中点,$\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{MA}$,即$\overrightarrow{OM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$,

所以$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB})\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}a+\frac{1}{2}(c+b)\right]=\frac{1}{3}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{4}c$.

(2)$|\overrightarrow{OP}|^2=\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{4}c\right)^2=\frac{1}{9}a^2+\left(\frac{1}{4}b\right)^2+\left(\frac{1}{4}c\right)^2+\frac{1}{6}a\cdot b+\frac{1}{6}a\cdot c+\frac{1}{8}c\cdot b$,

因为$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$,$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\rangle=\frac{\pi}{2}$,$\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\frac{2\pi}{3}$,

所以$|\overrightarrow{OP}|^2=\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{25}{144}$,

故$|\overrightarrow{OP}|=\frac{5}{12}$.

20.(1)解:因为$\boldsymbol{c}=(x,2,2)$,$|\boldsymbol{c}|=2\sqrt{2}$,所以$\sqrt{x^2+2^2+2^2}=2\sqrt{2}$,解得$x=0$,故$\boldsymbol{c}=(0,2,2)$,

又$a=(-2,-1,2)$,$b=(-1,1,2)$,所以$ka+b=(-2k-1,1-k,2k+2)$,因为向量$k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$垂直,

所以$(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$,所以$2-2k+4k+4=2k+6=0$,

解得$k=-3$.

(2)证明:当$x=-\frac{1}{2}$时,$\boldsymbol{c}=\left(-\frac{1}{2},2,2\right)$,

设$c=\lambda a+\mu b(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$,

则$\left(-\frac{1}{2},2,2\right)=\lambda(-2,-1,2)+\mu(-1,1,2)$,

所以$\begin{cases}-\frac{1}{2}=-2\lambda-\mu,\\2=\mu-\lambda,\\2=2\lambda+2\mu,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=-\frac{1}{2},\\\mu=\frac{3}{2},\end{cases}$即$c=-\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}b$,

所以向量$\boldsymbol{c}$与向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$共面.

21.解:(1)在四棱锥$P-ABCD$中,$\triangle PBC$为等腰直角三角形,且$\angle CPB=90°$,四边形$ABCD$为直角梯形,满足$AD/\!/BC$,$CD\perp AD$,$BC=CD=2AD=4$,$PD=2\sqrt{6}$,

所以$PC=\frac{\sqrt{2}}{2}BC=2\sqrt{2}$,所以$PD^2=PC^2+CD^2$,所以$CD\perp PC$,又$CD\perp BC$,$BC\cap PC=C$,所以$CD\perp$平面$PBC$.

以P为原点,PB,PC所在直线为x轴,y轴,过P平行于CD的直线为z轴,建立空间直角坐标系,则$P(0,0,0)$,$F(0,2\sqrt{2},2)$,$A(\sqrt{2},\sqrt{2},4)$,$B(2\sqrt{2},0,0)$,则$\overrightarrow{AP}=(-\sqrt{2},-\sqrt{2},-4)$,$\overrightarrow{BF}=(-2\sqrt{2},2\sqrt{2},2)$,

则$\cos\langle\overrightarrow{AP},\overrightarrow{BF}\rangle=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BF}}{|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{BF}|}=\frac{-8}{\sqrt{20}\times\sqrt{20}}=-\frac{2}{5}$.

(2)设$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$,$0\leqslant\lambda\leqslant1$,由(1)得$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{2},-\sqrt{2},-4)$,则$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PA}+\lambda\overrightarrow{AB}=(\sqrt{2}+\sqrt{2}\lambda,\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda,4-4\lambda)$,

因为$E(\sqrt{2},0,0)$,所以$\overrightarrow{PE}=(\sqrt{2},0,0)$,所以$\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PE}=(\sqrt{2}\lambda,\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda,4-4\lambda)$,又$\overrightarrow{EM}\perp\overrightarrow{BF}$,所以$\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{BF}=0$,

即$(\sqrt{2}\lambda)\times(-2\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda)\times2\sqrt{2}+(4-4\lambda)\times2=0$,解得$\lambda=\frac{3}{4}$,故$\frac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{AB}|}$的值为$\frac{3}{4}$.

22.解:(1)因为$\boldsymbol{a}=[1,2,3]$,$\boldsymbol{b}=[-1,1,2]$,所以$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})+(-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})=3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}=[0,3,5]$,

所以$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$的斜60°坐标为$[0,3,5]$.

(2)设$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$分别为与$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AA_1}$同方向的单位向量,则$\overrightarrow{AB}=2i$,$\overrightarrow{AD}=2j$,$\overrightarrow{AA_1}=3k$.

①因为$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EB_1}$,所以E为$BB_1$中点,

所以$\overrightarrow{ED_1}=\overrightarrow{AD_1}-\overrightarrow{AE}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})-\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}\right)=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}=-2i+2j+\frac{3}{2}k=\left[-2,2,\frac{3}{2}\right]$.

②由题意知,$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=2i+2j+3k$,因为$\overrightarrow{AM}=[2,t,0]$,所以$\overrightarrow{AM}=2i+tj$,

由$\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{AC_1}$,知$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{AM}=(2i+2j+3k)\cdot(2i+tj)=0$,

所以$4i^2+(4+2t)i\cdot j+2tj^2+6k\cdot i+3tk\cdot j=0$,

所以$4+(4+2t)\cdot\frac{1}{2}+2t+3+\frac{3t}{2}=0$,解得$t=-2$,

所以$|\overrightarrow{AM}|=|2i-2j|=\sqrt{(2i-2j)^2}=\sqrt{4i^2+4j^2-8i\cdot j}=\sqrt{4+4-4}=2$.

第10期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B 提示:因为点$A(2,0,0)$,$B(0,2,0)$,$C(0,0,2)$,所以$\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$,$\overrightarrow{AC}=(-2,0,2)$,设平面$ABC$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-2x+2y=0,\\-2x+2z=0,\end{cases}$令$x=1$,则$y=z=1$,即$\boldsymbol{n}=(1,1,1)$,由向量模公式可得,$|\boldsymbol{n}|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$,故平面$ABC$的单位法向量是$\pm\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}$,即$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$或$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.故选B.

2.A 提示:对于A,$\overrightarrow{PM}=(-1,-4,-1)$,$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PM}=-10+20-10=0$,所以$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{PM}$,又$M\in$平面$\alpha$,所以$P\in$平面$\alpha$,故A正确;对于B,$\overrightarrow{PM}=(3,-1,1)$,$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PM}=30+5+10=45$,所以$\boldsymbol{n}$与$\overrightarrow{PM}$不垂直,又$M\in$平面$\alpha$,所以$P\notin$平面$\alpha$;对于C,$\overrightarrow{PM}=(5,-5,2)$,$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PM}=50+25+20=95$,所以$\boldsymbol{n}$与$\overrightarrow{PM}$不垂直,又$M\in$平面$\alpha$,所以$P\notin$平面$\alpha$;对于D,$\overrightarrow{PM}=(-2,2,-2)$,$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PM}=-20-10-20=-50$,所以$\boldsymbol{n}$与$\overrightarrow{PM}$不垂直,又$M\in$平面$\alpha$,所以$P\notin$平面$\alpha$.故选A.

3.B 提示:因为$\boldsymbol{n}_1=(\sqrt{3},x,2)$,$\boldsymbol{n}_2=(-3,\sqrt{3},-2\sqrt{3})$分别是平面$\alpha,\beta$的法向量,且$\alpha/\!/\beta$,

所以$\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2$,即$\frac{\sqrt{3}}{-3}=\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{2}{-2\sqrt{3}}$,解得$x=-1$.

故选B.

4.C 提示:因为$\boldsymbol{n}$是直线l的方向向量,$\boldsymbol{m}$是平面α的法向量,$l\perp\alpha$,所以$\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$,

所以$\frac{2}{6}=\frac{-4x}{12}=\frac{1}{-3y}$,解得$x=-1$,$y=-1$,所以$x+y=-2$.

故选C.

5.A 提示:因为$\boldsymbol{v}=-2\boldsymbol{n}$,所以$\boldsymbol{v}$与$\boldsymbol{n}$共线,所以直线$l$与平面$\alpha$垂直.故选A.

6.D 提示:由题意知,$A(0,0,0)$,$B(0,1,0)$,$C(1,0,0)$,$P(0,0,2)$,

所以$\overrightarrow{BC}=(1,-1,0)$,$\overrightarrow{BP}=(0,-1,2)$,设$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,因为$\boldsymbol{n}$为平面$PBC$的法向量,

所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x-y=0,\\y=2z,\end{cases}$当$x=\frac{1}{2}$时,$y=\frac{1}{2}$,$z=\frac{1}{4}$.故$\boldsymbol{n}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.故选D.

7.D 提示:对于A,$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=1+0+5=6\neq0$,$\boldsymbol{n}$与$\overrightarrow{AB}$不垂直,即$l$与$AB$不垂直,所以直线$l$与平面ABC不垂直,故A错误;对于C,$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(1,1,1)$,因此,不存在实数k,使得$\boldsymbol{n}=k\overrightarrow{BC}$,所以$\boldsymbol{n}$与$\overrightarrow{BC}$不平行,即直线$l$与直线$BC$不平行,故C错误;

对于B,D,设$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$是平面ABC的法向量,

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=x-z=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=2x+y=0,\end{cases}$令$x=1$,则$\boldsymbol{m}=(1,-2,1)$,$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1+4-5=0$,所以$\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$,所以直线$l/\!/$平面$ABC$或$l\subset$平面$ABC$,故B错误,D正确.故选D.

8.D 提示:由题意可知,$B(0,0,0)$,$A(0,2,0)$,$C(2\sqrt{3},0,0)$,$P(0,2,2)$,

所以$\overrightarrow{PC}=(2\sqrt{3},-2,-2)$,$\overrightarrow{BP}=(0,2,2)$,设$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=2\sqrt{3}x-2y-2z=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BP}=2y+2z=0,\end{cases}$令$z=2$,则$y=-2$,$x=0$,所以$\boldsymbol{n}=(0,-2,2)$,因为$AB\perp BC$,$PA\perp BC$,且$AB\cap PA=A$,所以$BC\perp$平面$PAB$,又$BC\subset$平面$PBC$,所以平面$PBC\perp$平面$PAB$,所以$\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$,所以$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=0$.

综上所述,A,B,C错误,D正确.故选D.

③

二、多项选择题

9.AB　提示：因为 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-6-2+8=0$，所以 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB}$，所以 $AB\parallel\alpha$ 或 $AB\subset\alpha$.故选 AB.

10.BC　提示：对于 A，因为 $a=(1,0,2)$，$n_1=\left(1,-2,-\frac{1}{2}\right)$，且 $a\cdot n_1=1+0-1=0$，所以 $a\perp n_1$，所以 $l\parallel\alpha$ 或 $l\subset\alpha$，故 A 错误；对于 B，因为 $n_1=\left(1,-2,-\frac{1}{2}\right)$，$n_2=(-1,0,-2)$，所以 $n_1\cdot n_2=-1+0+1=0$，所以 $n_1\perp n_2$，所以 $\alpha\perp\beta$，故 B 正确；对于 C，因为 $a=(1,0,2)$，$b=(0,1,-2)$，a 与 b 不共线，所以直线 l 与 m 相交或异面，故 C 正确；对于 D，向量 a 在向量 b 方向上的投影向量为 $\frac{a\cdot b}{|b|^2}b=\frac{-4}{0^2+1^2+(-2)^2}(0,1,-2)=\left(0,-\frac{4}{5},\frac{8}{5}\right)$，故 D 错误.故选 BC.

11.AC　提示：因为 $\boldsymbol{a}=(2,3,-1)$，$b=(-2,-3,1)$，所以 $\boldsymbol{a}=-b$，又因为 l_1,l_2 不重合，所以 $l_1\parallel l_2$，故 A 正确；

因为 $\boldsymbol{a}=(1,-1,2)$，$\boldsymbol{u}=(6,4,-1)$，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 不平行，所以 l 不垂直于 α，故 B 错误；

因为 $\boldsymbol{u}=(2,2,-1)$，$\boldsymbol{v}=(-3,4,2)$，所以 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=2\times(-3)+2\times4+(-1)\times2=0$，所以 $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}$，所以 $\alpha\perp\beta$，故 C 正确；

因为 $\boldsymbol{a}=(0,3,0)$，$\boldsymbol{u}=(0,-5,0)$，所以 $\boldsymbol{a}=-\frac{3}{5}\boldsymbol{u}$，所以 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{u}$，所以 $l\perp\alpha$，故 D 错误.

故选 AC.

12.BCD　提示：由题意知，$D(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$B(2,2,0)$，$C(0,2,0)$，$A_1(2,0,2)$，$B_1(2,2,2)$，$C_1(0,2,2)$，$D_1(0,0,2)$，

因为 E 为 BB_1 的中点，F 为 A_1D_1 的中点，

所以 $E(2,2,1)$，$F(1,0,2)$.

对于 A，$\overrightarrow{DB_1}=(2,2,2)$，所以 $|\overrightarrow{DB_1}|=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$，故 A 错误；

对于 B，因为 $\overrightarrow{AE}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{AC_1}=(-2,2,2)$，所以 $|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{AC_1}|=2\sqrt{3}$，

故 $\cos\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AC_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{AC_1}|}=\frac{4+2}{\sqrt{5}\times2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，故 B 正确；

对于 C，设平面 AEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，因为 $\overrightarrow{AE}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{AF}=(-1,0,2)$，

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}2y+z=0,\\ -x+2z=0,\end{cases}$ 令 $z=2$，则 $\boldsymbol{n}=(4,-1,2)$，故 C 正确；

对于 D，因为 $\overrightarrow{A_1D}=(-2,0,-2)$，$\overrightarrow{BD_1}=(-2,-2,2)$，所以 $\overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{BD_1}=4+0-4=0$，故 $A_1D\perp BD_1$，故 D 正确.故选 BCD.

三、填空题

13.垂直　提示：因为直线 l 的一个方向向量为 $a=(-1,2,1)$，平面 α 的一个法向量为 $b=(1,-2,-1)$，

容易发现 $a=-b$，所以 a 与 b 共线，所以直线 l 与平面 α 垂直.

14.$-\frac{2}{7}$　提示：因为平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(-2,1,-3x)$，平面 β 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,-x,2)$，且 $\alpha\perp\beta$，

所以 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}=0$，即 $-2-x-6x=0$，解得 $x=-\frac{2}{7}$.

15.①②③　提示：对于①，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=-2-2+4=0$，则 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{AB}$，所以 $AP\perp AB$，故①正确；对于②，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD}=-4+4+0=0$，则 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{AD}$，所以 $AP\perp AD$，故②正确；对于③，因为 $AP\perp AB$，$AP\perp AD$，且 $AB\cap AD=A$，所以 $AP\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $\overrightarrow{AP}$ 是平面 $ABCD$ 的法向量，故③正确；

对于④，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=(2,3,4)$，假设存在实数 k，使得 $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{BD}$，则 $\begin{cases}-1=2k,\\ 2=3k,\\ -1=4k,\end{cases}$ 无解，所以 $\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 不平行，故④错误.

16.2　提示：因为 $AB\perp$ 平面 $BP_1P_2P_3$，所以 $AB\perp BP_1$，$AB\perp BP_2$，$AB\perp BP_3$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_1}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AP_1}|\cos\angle BAP_1=|\overrightarrow{AB}|^2=1$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_4}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AP_4}|\cos\angle BAP_4=|\overrightarrow{AB}|\cdot\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{2}$，

同理可得，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_2}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_3}=|\overrightarrow{AB}|^2=1$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_5}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_6}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=\frac{1}{2}$.所以不同值的个数为 2.

四、解答题

17.**解**：以 A 为原点，AB，AD，AP 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$C(1,\sqrt{3},0)$，$D(0,\sqrt{3},0)$，$P(0,0,1)$，所以 $\overrightarrow{PC}=(1,\sqrt{3},-1)$，$\overrightarrow{PD}=(0,\sqrt{3},-1)$.

设平面 PCD 的法向量为 $n=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{PC}\cdot n=0,\\ \overrightarrow{PD}\cdot n=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+\sqrt{3}y-z=0,\\ \sqrt{3}y-z=0,\end{cases}$

令 $z=\sqrt{3}$，则 $y=1$，$x=0$，所以平面 PCD 的一个法向量为 $n=(0,1,\sqrt{3})$.

18.**证明**：因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，所以 $AA_1\perp$ 平面 ABC，又 $AB,AC\subset$ 平面 ABC，故 $AA_1\perp AB$，$AA_1\perp AC$.因为 $\angle BAC=\frac{\pi}{2}$，所以 $AB\perp AC$，所以 AA_1,AC,AB 两两垂直，故以 A 为原点，AC，AB，AA_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$E(2,0,1)$，$F(1,1,0)$，$D(0,1,2)$，故 $\overrightarrow{AE}=(2,0,1)$，$\overrightarrow{DF}=(1,0,-2)$，所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DF}=2+0-2=0$，所以 $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{DF}$，故 $AE\perp DF$.

19.**证明**：(1)因为在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp AC$，所以以 A_1 为原点，分别以 A_1C_1，A_1B_1，A_1A 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，设 $AB=AC=AA_1=2$，

则 $A_1(0,0,0)$，$B(0,2,2)$，$A(0,0,2)$，$C(2,0,2)$，$D(1,1,2)$，$C_1(2,0,0)$，

所以 $\overrightarrow{A_1B}=(0,2,2)$，$\overrightarrow{AD}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{AC_1}=(2,0,-2)$，

设平面 ADC_1 的法向量为 $n=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AD}=x+y=0,\\ n\cdot\overrightarrow{AC_1}=2x-2z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，得 $n=(1,-1,1)$，

因为 $n\cdot\overrightarrow{A_1B}=0-2+2=0$，且 $A_1B\not\subset$ 平面 ADC_1，所以 $A_1B\parallel$ 平面 ADC_1.

(2)因为 $\overrightarrow{DC}=(1,-1,0)$，$\overrightarrow{DC_1}=(1,-1,-2)$，设平面 BB_1C_1C 的法向量为 $m=(a,b,c)$，

则 $\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{DC}=a-b=0,\\ m\cdot\overrightarrow{DC_1}=a-b-2c=0,\end{cases}$ 令 $a=1$，得 $m=(1,1,0)$，又平面 ADC_1 的一个法向量 $n=(1,-1,1)$，所以 $n\cdot m=1-1+0=0$，所以平面 $ADC_1\perp$ 平面 BB_1C_1C.

20.(1)**证明**：以 D_1 为原点，D_1A_1，D_1C_1，D_1D 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，则 $A(1,0,1)$，$C_1(0,1,0)$，$D(0,0,1)$，$A_1(1,0,0)$，$B(1,1,1)$，$\overrightarrow{AC_1}=(-1,1,-1)$，$\overrightarrow{A_1D}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{A_1B}=(0,1,1)$，

所以 $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{A_1D}=1+0-1=0$，$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0+1-1=0$，所以 $AC_1\perp A_1D$，$AC_1\perp A_1B$，

因为 $A_1D\cap A_1B=A_1$，$A_1D,A_1B\subset$ 平面 A_1BD，所以 $AC_1\perp$ 平面 A_1BD.

(2)**解**：连接 A_1E，A_1C_1.因为 $AC_1\perp$ 平面 A_1BD，$A_1E\subset$ 平面 A_1BD，所以 $A_1E\perp AC_1$.

根据正方体的性质，可知 $AA_1\perp A_1C_1$，在 $\mathrm{Rt}\triangle AA_1C_1$ 中，$A_1C_1=\sqrt{2}$，$AC_1=\sqrt{3}$，

所以 $S_{\triangle AA_1C_1}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times1=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times A_1E$，所以 $A_1E=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，所以 $AE=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1}$，

所以 $\lambda=\frac{1}{3}$.

21.**证明**：设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，

则 $D(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$B(2,2,0)$，$D_1(0,0,2)$，$A_1(2,0,2)$，$C_1(0,2,2)$，$B_1(2,2,2)$，

所以 $M(2,1,0)$，$N(1,2,0)$，$E(2,0,1)$，$F(0,1,2)$.

(1)$\overrightarrow{D_1C}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{ME}=(0,-1,1)$，则有 $\overrightarrow{D_1C}=-2\overrightarrow{ME}$，故 $D_1C\parallel ME$，又 $ME\subset$ 平面 EMN，$D_1C\not\subset$ 平面 EMN，

所以 $D_1C\parallel$ 平面 EMN.

(2)$\overrightarrow{EF}=(-2,1,1)$，$\overrightarrow{EM}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{EN}=(-1,2,-1)$，设 $\overrightarrow{EF}=m\overrightarrow{EM}+n\overrightarrow{EN}$，则 $\begin{cases}-2=0-n,\\ 1=m+2n,\\ 1=-m-n,\end{cases}$ 解得 $m=-3$，$n=2$，

所以 $\overrightarrow{EF}=-3\overrightarrow{EM}+2\overrightarrow{EN}$，所以向量 $\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{EM}$，$\overrightarrow{EN}$ 共面，必有 E,F,N,M 四点共面.

22.**证明**：(1)以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，则 $A_1(2,0,2)$，$B(2,2,0)$，$B_1(2,2,2)$，$C(0,2,0)$，$D(0,0,0)$，$D_1(0,0,2)$，

故 $\overrightarrow{DA_1}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{B_1C}=(-2,0,-2)$，$\overrightarrow{B_1D_1}=(-2,-2,0)$，

设平面 A_1BD 的法向量为 $n_1=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{DA_1}\cdot n_1=0,\\ \overrightarrow{DB}\cdot n_1=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}2x_1+2z_1=0,\\ 2x_1+2y_1=0,\end{cases}$ 令 $x_1=1$，则 $n_1=(1,-1,-1)$.

设平面 B_1CD_1 的法向量为 $n_2=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{B_1C}\cdot n_2=0,\\ \overrightarrow{B_1D_1}\cdot n_2=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}-2x_2-2z_2=0,\\ -2x_2-2y_2=0,\end{cases}$ 令 $x_2=1$，则 $n_2=(1,-1,-1)$，

所以 $n_1=n_2$，即 $n_1\parallel n_2$，故平面 $A_1BD\parallel$ 平面 B_1CD_1.

(2)由 M,N 分别是 AB,B_1C 中点，则 $M(2,1,0)$，$N(1,2,1)$，

所以 $\overrightarrow{MN}=(-1,1,1)$，则 $\overrightarrow{MN}=-n_1$，所以 $\overrightarrow{MN}\parallel n_1$，

所以 $MN\perp$ 平面 A_1BD.

第 11 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C　提示：根据题意，$m=(2,1,-3)$，$n=(1,-3,2)$，

则 $|m|=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}$，$|n|=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}$，$m\cdot n=2-3-6=-7$，

故 $\cos\langle m,n\rangle=\frac{m\cdot n}{|m||n|}=-\frac{1}{2}$，则 $\langle m,n\rangle=\frac{2\pi}{3}$，故 a，b 夹角的大小是 $\frac{\pi}{3}$.故选 C.

2.A　提示：由题意知，设直线 l 与平面 α 所成角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle a,n\rangle|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，得 $\theta=\frac{\pi}{3}$.故选 A.

3.C　提示：因为 $\overrightarrow{PA}=(-2,-6,2)$，$\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}=(-2,-6,2)\cdot(-3,0,4)=14$，$|n|=5$，

所以点 P 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|n|}=\frac{14}{5}$.故选 C.

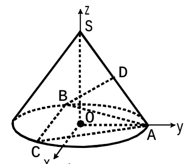
4.A　提示：以 C 为原点，CD，CB，CC₁所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，设 $BC=CD=1$，则 $CC_1=2$，$D(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C_1(0,0,2)$，所以 $\overrightarrow{BC_1}=(0,-1,2)$，$\overrightarrow{DC_1}=(-1,0,2)$.设平面 BDC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=-y+2z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC_1}=-x+2z=0,\end{cases}$ 取 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(2,2,1)$.又 $\overrightarrow{CD}=(1,0,0)$，设 CD 与平面 BDC_1 所成角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle n,\overrightarrow{CD}\rangle|=\frac{|n\cdot\overrightarrow{CD}|}{|n||\overrightarrow{CD}|}=\frac{2}{3\times1}=\frac{2}{3}$.故选 A.

5.B　提示：因为 $A(1,0,-1)$，$B(0,-1,1)$，所以 $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,2)$，又平面 α 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,2,1)$，所以点 A 到平面 α 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|n|}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.故选 B.

6.A　提示：因为该圆锥的侧面积是底面积的 2 倍，所以该圆锥的母线长是底面半径的 2 倍.

设底面半径为 1，以底面圆心 O 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $A(0,1,0)$，$S(0,0,\sqrt{3})$，$B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$，$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$，$D\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0\right)$，$\overrightarrow{BD}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则 $|\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|}=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{3}\times\sqrt{\frac{5}{2}}}=\frac{\sqrt{30}}{20}$，故异面直线 AC 与 BD 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{20}$.故选 A.



(第 6 题图)

7.C　提示：以 D 为原点，DA，DC，DF 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，

则 $A(2,0,0)$，$C(0,4,0)$，$E(2,4,1)$，$C_1(0,4,3)$，所以 $\overrightarrow{AC_1}=(-2,4,3)$，$\overrightarrow{AE}=(0,4,1)$.

设平面 AEC_1F 的法向量为 $n=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{AC_1}=0,\end{cases}$

得 $\begin{cases}4y+z=0,\\ -2x+4y+3z=0,\end{cases}$ 令 $z=1$，则 $\begin{cases}x=1,\\ y=-\frac{1}{4},\end{cases}$ 所以 $n=\left(1,-\frac{1}{4},1\right)$.

又 $\overrightarrow{CC_1}=(0,0,3)$，所以点 C 到平面 AEC_1F 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{CC_1}\cdot n|}{|n|}=\frac{4\sqrt{33}}{11}$.故选 C.

8.A　提示：以 A 为坐标原点，AD，AB，AP 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，由二面角 Q-PD-A 的平面角大小为 30°，可知 Q 的轨迹是过点 D 的一条直线，又 Q 是四边形 ABCD 内部一点(包括边界)，则 Q 的轨迹是过点 D 的一条线段.

设 Q 的轨迹与 y 轴的交点坐标为 $G(0,b,0)(b>0)$，由题意可知 $A(0,0,0)$，$D(2,0,0)$，$P(0,0,1)$，

所以 $\overrightarrow{DP}=(-2,0,1)$，$\overrightarrow{DG}=(-2,b,0)$，$\overrightarrow{AD}=(2,0,0)$.

易知平面 APD 的一个法向量为 $n_1=(0,1,0)$，

设平面 PDG 的法向量为 $n_2=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}n_2\cdot\overrightarrow{DP}=0,\\ n_2\cdot\overrightarrow{DG}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x+z=0,\\ -2x+by=0,\end{cases}$ 令 $z=2$，得 $x=1$，$y=\frac{2}{b}$，所以 $n_2=\left(1,\frac{2}{b},2\right)$ 是平面 PDG 的一个法向量，则二面角 G-PD-A 的平面角的余弦值为 $|\cos\langle n_1,n_2\rangle|=\frac{|n_1\cdot n_2|}{|n_1|\cdot|n_2|}=\frac{\left|\frac{2}{b}\right|}{\sqrt{5+\frac{4}{b^2}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $b=\frac{2\sqrt{15}}{15}$ 或 $b=-\frac{2\sqrt{15}}{15}$(舍去).

因为 Q 在 DG 上运动，所以 $S_{\triangle ADQ}\leqslant S_{\triangle ADG}=\frac{1}{2}\times2\times\frac{2\sqrt{15}}{15}=\frac{2\sqrt{15}}{15}$，所以△ADQ 面积的取值范围为 $\left(0,\frac{2\sqrt{15}}{15}\right]$.

故选 A.

二、多项选择题

9.AB　提示：因为 $\overrightarrow{AP}=(-3,-1,1)$，$n=(1,0,-1)$，

所以 $\cos\langle n,\overrightarrow{AP}\rangle=\frac{n\cdot\overrightarrow{AP}}{|n||\overrightarrow{AP}|}=\frac{-4}{\sqrt{2}\times\sqrt{11}}=-\frac{2\sqrt{22}}{11}$，

则 $\sin\langle n,\overrightarrow{AP}\rangle=\sqrt{1-\left(-\frac{2\sqrt{22}}{11}\right)^2}=\frac{\sqrt{33}}{11}$，

所以点 P 到直线 l 的距离 $d=|\overrightarrow{AP}|\sin\langle n,\overrightarrow{AP}\rangle=\sqrt{11}\times\frac{\sqrt{33}}{11}=\sqrt{3}$.

所以点 P 到直线 l 上任意一点 Q 的距离大于或等于 $\sqrt{3}$.故选 AB.

10.AC　提示：对于 A，$|\cos\langle m,n\rangle|=\frac{|-2|}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$，满足题意；对于 B，$|\cos\langle m,n\rangle|=\frac{|13|}{\sqrt{13}\times\sqrt{29}}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{29}}\neq\frac{2\sqrt{13}}{13}$，不满足题意；对于 C，$|\cos\langle m,n\rangle|=\frac{|2+6|}{\sqrt{13}\times4\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$，满足题意；对于 D，$|\cos\langle m,n\rangle|=\frac{|-2\sqrt{5}+6|}{\sqrt{13}\times\sqrt{10}}\neq\frac{2\sqrt{13}}{13}$，不满足题意.故选 AC.

11.BCD　提示：若 $a\perp n$，则直线 $a\parallel$ 平面 α 或 $a\subset\alpha$，故 A 不正确；若 $a\parallel n$，则直线 a 也是平面 α 的一个法向量，所以直线 $a\perp$ 平面 α，故 B 正确；直线与平面所成角的正弦值等于直线的方向向量与平面法向量夹角的余弦值的绝对值，所以若 $\cos\langle a,n\rangle=\frac{1}{2}$，则直线 a 与平面 α 所成角的大小为 $\frac{\pi}{6}$，故 C 正确；两个平面夹角与它们法向量的不大于 90°的夹角相等，故 D 正确.故选 BCD.

12.BCD　提示：由已知 $AB\perp AD$，$AB\perp AF$，又 $AF\cap AD=A$，所以 $AB\perp$ 平面 AFD，以 A 为坐标原点，AB，AD 所在的直线为 x 轴，y 轴，过 A 垂直于底面 ABCD 的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系，

因为二面角 E-AB-D 的平面角为 60°，所以∠FAD=60°，又 AB=2AF=4，

所以 $A(0,0,0)$，$B(0,4,0)$，$E(1,4,\sqrt{3})$，$G(4,2,0)$，$\overrightarrow{AE}=(1,4,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BG}=(4,-2,0)$，

所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BG}=4-8+0=-4\neq0$，所以 AE，BG 不垂直，故 A 错误；

因为 $\overrightarrow{BE}=(1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AG}=(4,2,0)$，所以 $\cos\langle\overrightarrow{BE},\overrightarrow{AG}\rangle=\frac{\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AG}}{|\overrightarrow{BE}||\overrightarrow{AG}|}=\frac{4}{2\times2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以直线 BE 与 AG 所成角的余弦值是 $\frac{\sqrt{5}}{5}$，故 B 正确；设平面 AGE 的法向量为 $n=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AG}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}4x+2y=0,\\ x+4y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 取 $x=1$，可得 $y=-2$，$z=\frac{7\sqrt{3}}{3}$，所以 $n=\left(1,-2,\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)$，

又 $\overrightarrow{BG}=(4,-2,0)$，设 BG 与平面 AGE 所成角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{BG},n\rangle|=\frac{|\overrightarrow{BG}\cdot n|}{|\overrightarrow{BG}||n|}=\frac{8}{2\sqrt{5}\times\frac{8\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{15}}{10}$，

所以直线 BG 与平面 AGE 所成角的正弦值是 $\frac{\sqrt{15}}{10}$，故 C 正确；

因为 $\overrightarrow{BA}=(0,-4,0)$，平面 AGE 的法向量为 $n=\left(1,-2,\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)$，设点 B 到平面 AGE 的距离为 d，则 $d=\frac{|\overrightarrow{BA}\cdot n|}{|n|}=\frac{8}{\frac{8\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}$，故 D 正确.故选 BCD.

三、填空题

13.$\frac{\sqrt{33}}{3}$　提示：设 AC 的中点为 O，以 O 为原点，OA，OB 所在直线为 x 轴，y 轴，过 O 平行于 AA_1 的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系，则 $A(1,0,0)$，$B_1(0,\sqrt{3},2\sqrt{2})$，$C(-1,0,0)$，$\overrightarrow{AB_1}=(-1,\sqrt{3},2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AC}=(-2,0,0)$，所以点 C 到直线 AB_1 的距离为 $\sqrt{\overrightarrow{AC}^2-\left(\frac{\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB_1}|}\right)^2}=\sqrt{4-\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{\sqrt{33}}{3}$.

14.$\frac{\sqrt{6}}{3}$　提示：以 A 为原点，AD，AB，AS 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，则 $D\left(\frac{1}{2},0,0\right)$，$C(1,1,0)$，$S(0,0,1)$，

可知 $\overrightarrow{AD}=\left(\frac{1}{2},0,0\right)$ 是平面 SAB 的一个法向量.

设平面 SCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，因为 $\overrightarrow{SD}=\left(\frac{1}{2},0,-1\right)$，$\overrightarrow{DC}=\left(\frac{1}{2},1,0\right)$，所以 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{SD}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{DC}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\frac{x}{2}-z=0,\\ \frac{x}{2}+y=0,\end{cases}$ 令 $x=2$，则 $y=-1$，$z=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(2,-1,1)$.

设平面 SCD 与平面 SAB 所成锐二面角的平面角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{AD}\cdot n|}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|n|}=\frac{\left|\frac{1}{2}\times2\right|}{\frac{1}{2}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

15.$\frac{\sqrt{5}}{5}$　提示：在 AD 上取点 G，使得 FG∥AP，由 $\frac{AE}{AB}=\frac{DF}{DP}$，设 $AE=xAB$，$DF=xDP$，其中 $0<x<1$.

由 $AB=AP=1$，$BC=2$，$AP\perp$ 平面 ABCD，

可得 $DP=\sqrt{AP^2+AD^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$AE=x$，$DF=\sqrt{5}x$，$BE=1-x$，

因为 FG∥AP，AP⊥平面 ABCD，所以 FG⊥平面 ABCD，连接 EG，则∠FEG 为 EF 与平面 ABCD 所成角，

在△APD 中，有 $\frac{GF}{AP}=\frac{DF}{DP}$，可得 $\frac{GF}{1}=\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{5}}$，解得 $GF=x$，

因为△BCE 的面积为 $\frac{1}{2}\times BE\cdot BC=\frac{1}{2}(1-x)\times2=1-x$，

$V_{C-BEF}=V_{F-BCE}=V(x)=\frac{1}{3}(1-x)x=\frac{1}{3}\left[-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]$，

可得当 $x=\frac{1}{2}$ 时，三棱锥 C-BEF 的体积取得最大值 $V\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{12}$.

所以当三棱锥 C-BEF 的体积取得最大值时，E 为 AB 的中点，F 为 DP 的中点，

因为 $FG=\frac{1}{2}AP=\frac{1}{2}$，$EG=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

所以 $\tan\angle FEG=\frac{FG}{EG}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

16.$\frac{2}{3}$　提示：以 D 为原点，DC，DA，DD_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，则 $A(0,1,0)$，$C(2,0,0)$.

因为 E,F,H 分别是 AB,CD,A_1B_1 的中点，所以 $E(1,1,0)$，$F(1,0,0)$，$H(1,1,2)$，则 $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AF}=(1,-1,0)$，所以以 $EC\parallel AF$，又 $EC\not\subset$ 平面 AFH，$AF\subset$ 平面 AFH，所以 $EC\parallel$ 平面 AFH，所以点 E 到平面 AFH 的距离即为直线 EC 到平面 AFH 的距离，设平面 AFH 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{AF}\cdot n=0,\\ \overrightarrow{AH}\cdot n=0,\end{cases}$ 因为 $\overrightarrow{AH}=(1,0,2)$，所以 $\begin{cases}x-y=0,\\ x+2z=0,\end{cases}$ 取 $x=2$，则 $y=2$，$z=-1$，所以 $\boldsymbol{n}=(2,2,-1)$ 是平面 AFH 的一个法向量，又向量 $\overrightarrow{AE}=(1,0,0)$，所以点 E 到平面 AFH 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{AE}\cdot n|}{|n|}=\frac{2}{3}$，即直线 EC 到平面 AFH 的距离为 $\frac{2}{3}$.

四、解答题

17.**解**：以 D 为原点，分别以 DA，DC，DD_1 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，则 $A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$D_1(0,0,1)$，$E\left(\frac{1}{2},1,1\right)$，$F\left(0,\frac{1}{2},1\right)$，即 $\overrightarrow{D_1B}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{D_1E}=\left(\frac{1}{2},1,0\right)$，$\overrightarrow{FA}=\left(1,-\frac{1}{2},-1\right)$，设平面 BED_1 的法向量为 $m=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{D_1B}=x+y-z=0,\\ m\cdot\overrightarrow{D_1E}=\frac{1}{2}x+y=0,\end{cases}$ 令 $x=2$，则 $y=-1$，$z=1$，即 $\boldsymbol{m}=(2,-1,1)$，设 AF 与平面 BED_1 所成角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{FA},m\rangle|=\frac{|\overrightarrow{FA}\cdot m|}{|\overrightarrow{FA}|\cdot|m|}=\frac{2+\frac{1}{2}-1}{\frac{3}{2}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

故 AF 与平面 BED_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

18.**解**：(1)设正四棱柱的高为 h，以 A_1 为原点，A_1B_1，A_1D_1，A_1A 所在的直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，则 $A(0,0,h)$，$B_1(1,0,0)$，$D_1(0,1,0)$，$C(1,1,h)$，$\overrightarrow{AB_1}=(1,0,-h)$，$\overrightarrow{AD_1}=(0,1,-h)$，$\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$.

设平面 AB_1D_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(u,v,w)$，则 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AB_1}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{AD_1}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}u\cdot1+v\cdot0+w\cdot(-h)=0,\\ u\cdot0+v\cdot1+w\cdot(-h)=0,\end{cases}$ 得 $u=hw$，$v=hw$，所以 $\boldsymbol{n}=(hw,hw,w)$.取 $w=1$，得 $\boldsymbol{n}=(h,h,1)$.由点 C 到平面 AB_1D_1 的距离为 $d=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot n|}{|n|}=\frac{|h+h+0|}{\sqrt{h^2+h^2+1}}=\frac{4}{3}$，解得 $h=2$.所以正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的高为 2.

(2)由(1)可知 $A_1(0,0,0)$，$A(0,0,2)$，$B_1(1,0,0)$，$C_1(1,1,0)$，$E\left(\frac{1}{2},0,1\right)$.

则 $\overrightarrow{A_1E}=\left(\frac{1}{2},0,1\right)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(1,1,0)$.

所以点 E 到直线 A_1C_1 的距离为 $\sqrt{\overrightarrow{A_1E}^2-\left(\frac{\overrightarrow{A_1E}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}}{|\overrightarrow{A_1C_1}|}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{4}-\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

19.(1)**证明**：取 PC 的中点为 F，连接 MF，DF，则 MF∥BC∥DE，且 $MF=\frac{1}{2}BC=DE$，所以四边形 DEMF 是平行四边形，所以 DF∥EM，因为 DF⊂平面 PCD，EM⊄平面 PCD，所以直线 EM∥平面 PCD.

(2)**解**：因为 AD⊥平面 PAB，所以 AD⊥PA，AD⊥PB，以 A 为原点，在平面 PAB 内，垂直 AB 所在直线为 x 轴，AB，AD 所在直线为 y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，

设 AD=2，则 AP=2，$AB=2\sqrt{2}$，因为 PA⊥PB，则∠PAB=45°，

所以 $P(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$D(0,0,2)$，$B(0,2\sqrt{2},0)$，$E(0,0,1)$，$C(0,2\sqrt{2},2)$，$M\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2},0\right)$，$\overrightarrow{EC}=(0,2\sqrt{2},1)$，$\overrightarrow{PC}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},2)$，$\overrightarrow{EM}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2},-1\right)$，

设平面 PCE 的法向量为 $n=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{EC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+2z=0,\\ 2\sqrt{2}y+z=0,\end{cases}$ 令 $y=-1$，得 $z=2\sqrt{2}$，$x=3$，所以 $n=(3,-1,2\sqrt{2})$，设直线 EM 与平面 PCE 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{EM},n\rangle|=\frac{|\overrightarrow{EM}\cdot n|}{|\overrightarrow{EM}|\cdot|n|}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}\times3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{9}$，所以直线 EM 与平面 PCE 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{9}$.

20.**解**：(1)以 A 为原点，分别以 AB，AD，AP 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(2,4,0)$，$D(0,4,0)$，$P(0,0,4)$，则 $\overrightarrow{PB}=(2,0,-4)$，$\overrightarrow{PC}=(2,4,-4)$，$\overrightarrow{PD}=(0,4,-4)$.

设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PD}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，则 $\overrightarrow{PM}=(0,4\lambda,-4\lambda)$，

所以 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PB}=(-2,4\lambda,4-4\lambda)$，由 $BM\perp PD$，得 $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{PD}=0+16\lambda-4(4-4\lambda)=0$，所以 $\lambda=\frac{1}{2}$，所以 M 为 PD 中点，

所以 $M(0,2,2)$，$\overrightarrow{CM}=(-2,-2,2)$，$|\cos\langle\overrightarrow{PB},\overrightarrow{CM}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{CM}|}{|\overrightarrow{PB}|\cdot|\overrightarrow{CM}|}=\frac{|-4+0-8|}{2\sqrt{5}\times2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

所以异面直线 PB 与 CM 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

(2)由(1)，可知 $\overrightarrow{AP}=(0,0,4)$，$\overrightarrow{AC}=(2,4,0)$，设平面 PAC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}4z=0,\\ 2x+4y=0,\end{cases}$ 所以 $z=0$，取 $x=2$，得 $y=-1$，则 $\boldsymbol{n}=(2,-1,0)$.

所以点 M 到平面 PAC 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{CM}\cdot n|}{|n|}=\frac{|-4+2+0|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+0}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

21.(1)**证明**：因为 AB⊥BC，AB=2，$BC=2\sqrt{2}$，所以 $|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{3}$，设 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AC}$，因为 $\cos\angle BAC=\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC=4$.

因为 BF⊥AO，所以 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AO}=(\lambda\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\lambda}{2}\cdot|\overrightarrow{AC}|^2-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2+\left(\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=8\lambda-4=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$.连接 OF，DE，则 OF∥AB，$OF=\frac{1}{2}AB$.因为 D，E 分别为 BP，AP 的中点，所以 DE∥AB，$DE=\frac{1}{2}AB$，所以 DE∥OF，DE=OF，所以四边形 ODEF 为平行四边形，所以 EF∥OD，因为 OD⊂平面 ADO，EF⊄平面 ADO，所以 EF∥平面 ADO.

(2)**证明**：因为 D，O 分别为 BP，BC 的中点，所以 $OD=\frac{1}{2}PC$，因为 AB⊥BC，所以 $AO=\sqrt{AB^2+OB^2}=\sqrt{6}=PC=2OD$，又 $AD=\sqrt{5}OD$，所以 $AD^2=AO^2+OD^2$，所以 AO⊥OD，所以 AO⊥EF，因为 BF⊥AO，BF∩EF=F，所以 AO⊥平面 BEF，因为 AO⊂平面 ADO，所以平面 ADO⊥平面 BEF.

(3)**解**：设二面角 D-AO-C 的平面角为 θ，因为 AO⊥OD，AO⊥BF，所以 θ 为 $\overrightarrow{OD}$ 和 $\overrightarrow{BF}$ 的夹角，

因为 $|\overrightarrow{BF}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}$，$|\overrightarrow{OD}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PC}|=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB})$，

$\cos\angle BOD=\cos\angle BCP=\frac{8+6-6}{2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以

$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{OD}}{|\overrightarrow{BF}||\overrightarrow{OD}|}=\frac{\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OD}}{|\overrightarrow{BF}||\overrightarrow{OD}|}=\frac{-\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}}{|\overrightarrow{BF}||\overrightarrow{OD}|}=\frac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{6}}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以二面角 D-AO-C 的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

22.(1)**证明**：取 BC 的中点 F，连接 DF，C_1F，记 $B_1C\cap C_1F=G$，

因为 D 是 AB 的中点，所以 DF∥AC，因为 $B_1C\perp AC$，所以 $B_1C\perp DF$.

在矩形 BB_1C_1C 中，因为 $\tan\angle FC_1C=\frac{CF}{CC_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan\angle BCB_1=\frac{BB_1}{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\angle FC_1C=\angle BCB_1$，

所以 $\angle CFC_1+\angle BCB_1=\angle CFC_1+\angle FC_1C=90°$，所以∠CGF=90°，所以 $B_1C\perp C_1F$，

因为 $C_1F\cap DF=F$，所以 $B_1C\perp$ 平面 A_1DFC_1，所以 $B_1C\perp A_1D$.

(2)**解**：由 AC⊥平面 BB_1C_1C，得 AC⊥BC，$AC\perp CC_1$，由侧面 BB_1C_1C 是矩形，得 $BC\perp CC_1$，

以点 C 为原点，CA，CB，CC_1 所在的直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，

设 BC=2，$\overrightarrow{C_1E}=\lambda\overrightarrow{C_1A_1}(0<\lambda<1)$，则 $C(0,0,0)$，$D(1,1,0)$，$B_1(0,2,\sqrt{2})$，$C_1(0,0,\sqrt{2})$，$A_1(2,0,\sqrt{2})$，$\lambda\overrightarrow{C_1A_1}=(2\lambda,0,0)$，所以 $E(2\lambda,0,\sqrt{2})$，所以 $\overrightarrow{CD}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{CB_1}=(0,2,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{B_1D}=(1,-1,-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{B_1E}=(2\lambda,-2,0)$，

设 $m=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 B_1CD 的法向量，则 $\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ m\cdot\overrightarrow{CB_1}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x_1+y_1=0,\\ 2y_1+\sqrt{2}z_1=0,\end{cases}$ 令 $z_1=\sqrt{2}$，则 $\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=-1,\end{cases}$ 所以 $m=(1,-1,\sqrt{2})$.

设 $n=(x_2,y_2,z_2)$ 是平面 B_1DE 的法向量，则 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{B_1D}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{B_1E}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x_2-y_2-\sqrt{2}z_2=0,\\ 2\lambda x_2-2y_2=0,\end{cases}$ 令 $z_2=\sqrt{2}$，则 $x_2=\frac{2}{1-\lambda}$，$y_2=\frac{2\lambda}{1-\lambda}$，所以 $n=\left(\frac{2}{1-\lambda},\frac{2\lambda}{1-\lambda},\sqrt{2}\right)$，

所以 $|\cos\langle m,n\rangle|=\frac{|m\cdot n|}{|m|\cdot|n|}=\frac{2(1-\lambda)}{\sqrt{6\lambda^2-4\lambda+6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

化简得 $3\lambda^2-10\lambda+3=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{3}$ 或 $\lambda=3$(舍去)，

所以 $\frac{C_1E}{A_1C_1}=\frac{1}{3}$.

第 12 期

第 2~3 版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.A　提示：因为 $\overrightarrow{EA_1}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AA_1}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$，所以 $x=-\frac{2}{3}$，$y=-1$，$z=1$，所以 $x+y+z=-\frac{2}{3}$.故选 A.

2.D　提示：因为 A，B，C，D 四点共面，所以存在唯一一对实数 x，y，使得 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，

所以 $2b+\lambda c=x(2a-3b)+y(a-c)=(2x+y)a-3xb-yc$，

因为 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 是空间的一组基，所以 $\begin{cases}2x+y=0,\\ -3x=2,\\ -y=\lambda,\end{cases}$