2.B

提示:因为$(-2)^2-2=2>0$,$(-1)^2-2=-1<0$,$\left(\frac{3}{2}\right)^2-2=\frac{1}{4}>0$,$(\sqrt{2})^2-2=0$,所以$-1\in A$,即 a 可以为-1.故选 B.

3.D

提示:因为 $A\cap B=\{2,4\}$,所以 $2\in A$,$2\in B$,$4\in A$,$4\in B$,故选项 A,C 错误.

又 $A\cup B=\{1,2,3,4\}$, 所以 $3\in A$ 或 $3\in B$,$5\notin A$,$5\notin B$,故选项 B 错误,选项 D 正确.故选 D.

4.A

提示:$A=B$ 等价于 $x=x^2$,即 $x=0$ 或 $x=1$.所以“$x=1$”是“$A=B$”的充分不必要条件.故选 A.

5.B

提示:因为 $x+y=-2$,所以 $x=-2-y$.

因为 $y<0$,所以$-y>0$.

所以 $x-\frac{1}{y}=-2-y-\frac{1}{y}=-2+\left[(-y)+\frac{1}{-y}\right]$

$\geqslant-2+2\sqrt{(-y)\cdot\frac{1}{-y}}=0$,

当且仅当$-y=\frac{1}{-y}$,即 $y=-1$,$x=-1$ 时,等号成立.

所以 $x-\frac{1}{y}$的最小值为 0.故选 B.

6.D

提示:根据题意,由韦达定理,可得 $c=-6\times1=-6$,$b=-(1+4)=-5$,所以原不等式为 $x^2-5x-6<0$,解得$-1<x<6$.故选 D.

7.C

提示:由题意,可得一元二次方程 $x^2-2ax-1=0$ 的实数根均在区间$[-2,2]$内,

因为 $\Delta=4a^2+4>0$ 恒成立,结合二次函数 $y=x^2-2ax-1$ 的图象,可得$-2<-\frac{-2a}{2}<2$, ①

且当 $x=-2$ 时,$y=4+4a-1\geqslant0$; ②

当 $x=2$ 时,$y=4-4a-1\geqslant0$, ③

由①②③,解得$-\frac{3}{4}\leqslant a\leqslant\frac{3}{4}$.故选 C.

8.B

提示:设第一次加油时汽油单价为 x 元/升,第二次加油时汽油单价为 y 元/升($x\neq y$),则妈妈两次加油的平均单价(元/升)为$\frac{x+y}{2}$,爸爸两次加油的平均单价(元/升)为$\frac{250\times2}{\frac{250}{x}+\frac{250}{y}}=\frac{2xy}{x+y}$.

因为$\frac{x+y}{2}-\frac{2xy}{x+y}=\frac{(x+y)^2-4xy}{2(x+y)}=\frac{(x-y)^2}{2(x+y)}>0$,所以$\frac{x+y}{2}>\frac{2xy}{x+y}$,所以爸爸的加油方式更合算.故选 B.

二、多项选择题

9.ACD

提示:因为全集 $U=\mathbf{Z}$,$A=\{x|2x+1\geqslant0,x\in\mathbf{Z}\}=\left\{x\middle|x\geqslant-\frac{1}{2},x\in\mathbf{Z}\right\}$,$B=\{-1,0,1,2\}$,所以 $A\cap B=\{0,1,2\}$,$A\cup B=\{x|x\geqslant-1,x\in\mathbf{Z}\}$,$\complement_UA=\left\{x\middle|x<-\frac{1}{2},x\in\mathbf{Z}\right\}$,$(\complement_UA)\cap B=\{-1\}$,$A\cap B$ 的真子集个数为 $2^3-1=7$.故选 ACD.

10.BD

提示:对于 A,当 $A=\varnothing$,$B\neq\varnothing$时,$A\subseteq B$,但是 $A\cap B=\varnothing$,故必要性不成立,故 A 错误;对于 B,$x>\sqrt{2}\Rightarrow x>1$,反之不成立,故 B 正确;对于 C,当 $m\neq0$,$n=0$ 时,$mn=0$,所以充分性不成立,故 C 错误;对于 D,$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca\Leftrightarrow2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2bc+2ca\Leftrightarrow(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=0\Leftrightarrow a=b=c$,故 D 正确.

故选 BD.

11.CD

提示:因为 $a\geqslant\frac{4}{a}+\frac{1}{b}$,$b\geqslant\frac{5}{b}+\frac{1}{a}$,

所以 $a^2\geqslant4+\frac{a}{b}$,$b^2\geqslant5+\frac{b}{a}$,

所以 $a^2+b^2\geqslant4+\frac{a}{b}+5+\frac{b}{a}\geqslant9+2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=11$,当且仅当 $a^2=4+\frac{a}{b}$,$b^2=5+\frac{b}{a}$,且$\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$时,等号同时成立.

因为$\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$,即 $a=b$ 时,所以 $a^2=5$,$b^2=6$,则 $a^2\neq b^2$,即等号不能同时成立,所以 $a^2+b^2>11$.故 A,B 错误,C,D 正确.故选 CD.

12.ABC

提示:由已知,得不等式 $a\leqslant x^2-4x-1$ 在$[1,4]$上有解,等价于当 $1\leqslant x\leqslant4$ 时,$a\leqslant(x^2-4x-1)_{max}$.

设 $y=x^2-4x-1=(x-2)^2-5$,当 $1\leqslant x\leqslant4$ 时,结合二次函数的图象,可知 y 的最大值为-1.

所以 $a\leqslant-1$.结合选项可知选 ABC.

三、填空题

13.$\{(x,y)|x<0,y>0\}$

14.存在一个矩形不是平行四边形

提示:由题设知,原命题为全称量词命题,其否定为存在量词命题,所以其否定为“存在一个矩形不是平行四边形”.

15.$(-\infty,-7]\cup[1,+\infty)$

提示:解 $x^2+3x-4<0$,得$-4<x<1$;解 $x^2-(2k+3)x+k^2+3k>0$,得 $x<k$,或 $x>k+3$.因为“$x^2+3x-4<0$”是“$x^2-(2k+3)\cdot x+k^2+3k>0$”的充分不必要条件,所以$(-4,1)\subsetneqq(-\infty,k)\cup(k+3,+\infty)$,所以 $k\geqslant1$,或 $k+3\leqslant-4$,即 $k\geqslant1$,或 $k\leqslant-7$.所以实数 k 的取值范围是$(-\infty,-7]\cup[1,+\infty)$.

16.$\left\{x\middle|x<-1,\text{或}-\frac{1}{3}\leqslant x<5\right\}$

提示:由已知,得 $a<0$,且关于 x 的方程 $ax-b=0$ 的解为 $x=3$,所以 $b=3a$,所以$\frac{bx+a}{x^2-4x-5}\geqslant0$ 即$\frac{3ax+a}{x^2-4x-5}\geqslant0$,得$\frac{3x+1}{x^2-4x-5}\leqslant0$,等价于$\begin{cases}(3x+1)(x^2-4x-5)\leqslant0,\\x^2-4x-5\neq0,\end{cases}$解得 $x<-1$, 或$-\frac{1}{3}\leqslant x<5$. 所以原不等式的解集为$\left\{x\middle|x<-1,\text{或}-\frac{1}{3}\leqslant x<5\right\}$.

四、解答题

17.**解**:(1)因为 $0<a<b$,所以 $a^2<ab$.又 $a+b=1$,所以 $a^2+b^2<ab+b^2=b(a+b)=b$,即 $a^2+b^2<b$.

(2)由基本不等式,得 $2ab\leqslant2\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$,当且仅当 $a=b$ 时,等号成立.

又 $a<b$,所以等号取不到,所以 $2ab<\frac{1}{2}$.

18.**解**:(1)因为 $A\cup B=A$,且 A 有 3 个元素,B 有 2 个元素,所以 $B\subsetneqq A$.

(2)由(1)知,$B\subsetneqq A$,当 $a^2-a+1=3$ 时,解得 $a=2$,或 $a=-1$,经检验,符合集合 A 中元素的互异性;

当 $a^2-a+1=a$ 时,解得 $a=1$,不符合集合 A 中元素的互异性,舍去.

所以 a 的值为 2 或-1.

19.**解**:(1)当 $a=1$ 时,$A=\{x|-1<x\leqslant1\}$,

则 $B=\{y|y=|x|,x\in A\}=\{x|0\leqslant x\leqslant1\}$,

$C=\{z|z=x^2,x\in A\}=\{x|0\leqslant x\leqslant1\}$,

故 $B\cap C=\{x|0\leqslant x\leqslant1\}$.

(2)当 $0<a<1$ 时,得 $B=\{y|y=|x|,x\in A\}=\{x|0\leqslant x<1\}$,$C=\{z|z=x^2,x\in A\}=\{x|0\leqslant x<1\}$,满足 $C\subseteq B$;

当 $a\geqslant1$ 时,得 $B=\{y|y=|x|,x\in A\}=\{x|0\leqslant x\leqslant a\}$,

$C=\{z|z=x^2,x\in A\}=\{x|0\leqslant x\leqslant a^2\}$,

因为 $C\subseteq B$,所以 $a^2\leqslant a$,

结合 $a\geqslant1$,解得 $a\leqslant1$,所以 $a=1$.

综上,实数 a 的取值范围为$(0,1]$.

20.**解**:(1)因为命题 p 为假命题,

所以 p 的否定为真命题,

即$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2-4x+m\neq0$,

所以 $\Delta=16-4m<0$,解得 $m>4$.所以 $B=\{m|m>4\}$.

(2)因为 $A=\{x|3a<x<a+4\}$为非空集合,

所以 $3a<a+4$,解得 $a<2$.

因为“$x\in A$”是“$x\in B$”的充分不必要条件,

所以 $A\subsetneqq B$,则 $3a\geqslant4$,解得 $a\geqslant\frac{4}{3}$.

综上,实数 a 的取值范围为$\left[\frac{4}{3},2\right)$.

21.**解**:(1)由 $m+2n=2$,$m>0$,$n>0$,

得$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)(m+2n)=\frac{1}{2}\left(5+\frac{2n}{m}+\frac{2m}{n}\right)$

$\geqslant\frac{1}{2}\left(5+2\sqrt{\frac{2n}{m}\cdot\frac{2m}{n}}\right)=\frac{9}{2}$,

当且仅当$\frac{2n}{m}=\frac{2m}{n}$,即 $m=\frac{2}{3}$,$n=\frac{2}{3}$时,等号成立.

故$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}$的最小值为$\frac{9}{2}$.

(2)由 $m+2n=2$,得 $m+1+2n=3$.又 $m>-1$,$n>0$,

所以$\frac{1}{m+1}+\frac{2}{n}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{m+1}+\frac{2}{n}\right)(m+1+2n)=\frac{1}{3}\left[5+\frac{2n}{m+1}+\frac{2(m+1)}{n}\right]\geqslant\frac{1}{3}\left[5+2\sqrt{\frac{2n}{m+1}\cdot\frac{2(m+1)}{n}}\right]=3$,

当且仅当$\frac{2n}{m+1}=\frac{2(m+1)}{n}$,即 $m=0$,$n=1$ 时,等号成立.故$\frac{1}{m+1}+\frac{2}{n}$的最小值为 3.

22.**解**:(1)因为前墙长为 xm,地面面积为 240m²,

所以左右两侧墙的长度均为$\frac{240}{x}$m($x>0$),

所以甲工程队的报价为

$240\times100+2\times5x\times150+2\times5\times\frac{240}{x}\times250$

$=24\ 000+1500\left(x+\frac{400}{x}\right)$

$\geqslant24\ 000+1500\times2\sqrt{x\times\frac{400}{x}}=84\ 000$,

当且仅当$\frac{400}{x}=x$,即 $x=20$ 时,等号成立.

所以当前墙的长度为 20m 时,甲工程队报价最低.

(2)若无论前墙的长度为多少,乙工程队都能竞标成功,结合(1)可知 $24\ 000+1500\left(x+\frac{400}{x}\right)>12\ 000+500\left(\frac{a+1152}{x}+a\right)$对$\forall x>0$恒成立,

整理,得 $a<\frac{3(x^2+8x+16)}{x+1}$对$\forall x>0$恒成立.

因为$\frac{x^2+8x+16}{x+1}=\frac{(x+1)^2+6(x+1)+9}{x+1}$

$=(x+1)+\frac{9}{x+1}+6\geqslant2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{9}{x+1}}+6=12$,

当且仅当 $x+1=\frac{9}{x+1}$,即 $x=2$ 时,等号成立,

所以 $a<3\times12=36$.

又 $a>0$,所以 a 的取值范围为$(0,36)$.

扫码免费下载习题讲解 ppt

第 1 期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A

提示:A显然正确,B,C均不满足集合中元素的互异性,D不满足集合中元素的确定性.故选A.

2.D

提示:由题意,得当$\sqrt{x}=0$时,$x=0\in\mathbf{N}$;

当$\sqrt{x}=1$时,$x=1\in\mathbf{N}$;

当$\sqrt{x}=2$时,$x=4\in\mathbf{N}$.

综上,集合$B=\{0,1,4\}$.故选D.

3.C

提示:与集合$\{x|x<-2$或$x\geqslant0\}$相对应的区间为$(-\infty,-2)\cup[0,+\infty)$.故选C.

4.C

提示:由已知可得甲、乙两人都想去的景点应该为两个集合的交集,则组成的集合可以表示为{西江千户苗寨,梵净山}.故选C.

5.B

提示:因为全集$U=\{1,3,5\}$,且$\complement_UA=\{3\}$,所以集合$A=\{1,5\}$,共有2个元素,所以集合A的真子集的个数为$2^2-1=3$.故选B.

6.B

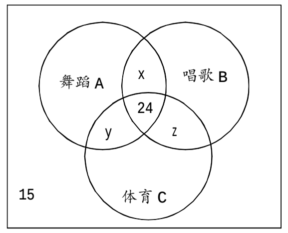
提示:因为$A=B$,所以$-2\in A$,$4\in B$.当$x=-2$时,$x^2=4$,故$2y=1-y$,解得$y=\frac{1}{3}$;当$2y=-2$时,$y=-1$,可得$x=2$,故实数x的取值集合为$\{-2,2\}$.故选B.

7.C

提示:因为集合$A=\{n|n=6k+1,k\in\mathbf{Z}\}=\{n|n=3(2k)+1,k\in\mathbf{Z}\}$,集合$B=\{n|n=3m+1,m\in\mathbf{Z}\}$,所以$A\subsetneqq B$,所以$A\cap B=A$,$A\cup B=B$.故选C.

8.B

提示:不妨将参加舞蹈、唱歌、体育课外活动的小学生分别用集合A,B,C表示,则card$(A)=63$,card$(B)=89$,card$(C)=47$,card$(A\cap B\cap C)=24$,如图所示,可知card$(A\cap B)=24+x$,card$(A\cap C)=y+24$,card$(B\cap C)=z+24$,$x+y+z=22$,不妨设总人数为n,则$n-15=$card$(A)+$card$(B)+$card$(C)-$card$(A\cap B)-$card$(A\cap C)-$card$(B\cap C)+$card$(A\cap B\cap C)=63+89+47-(24+x)-(24+y)-(24+z)+24$,解得$n=144$.故选B.



(第 8 题图)

二、多项选择题

9.BD

提示:对于A,集合与集合之间的关系不可以用“$\in$”这个符号,故A错误;对于B,根据子集的定义,$\{2\}\subseteq\{1,2\}$,故B正确;对于C,根据元素与集合的关系应该用“$\notin$”,故C错误;对于D,0是整数,所以$0\in\mathbf{Z}$,故D正确.故选BD.

10.AC

提示:由题图可知,阴影为集合A,B的交集和B,C的交集的并集, 故阴影部分可表示为 $(A\cap B)\cup(B\cap C)$或$B\cap(A\cup C)$,所以A,C正确,B,D错误.故选AC.

11.ABD

提示:当集合A与B中没有公共元素时,$m+n=s$;当集合A与B中有公共元素时,$m+n>s$;当集合$A=B$时,$m=n=s$.故选ABD.

12.BD

提示:$B=\{x|\sqrt{x-20}\leqslant0\}=\{20\}$.因为集合$A=\{x|x^2+2x+a=0\}\neq\varnothing$,所以一元二次方程$x^2+2x+a=0$有实根.

当$\Delta=4-4a=0$,即$a=1$时,$A=\{-1\}$,所以$A\cup B=\{-1,20\}$,所以$A\cup B$中所有元素的和为19;

当$\Delta=4-4a>0$,即$a<1$时,方程$x^2+2x+a=0$有两不等实根,它们的和为-2,所以$A\cup B$中所有元素的和为18.

故选BD.

三、填空题

13.$\subsetneqq$

提示:由集合与集合的关系,可得$\{a\}\subsetneqq\{a,b,c\}$.

14.$[4,5]$

提示:因为$A=[2,4)$,

所以$\complement_RA=(-\infty,2)\cup[4,+\infty)$.

又因为$B=[3,5]$,所以$(\complement_RA)\cap B=[4,5]$.

15.2

提示:因为$B\subseteq A$,所以$a+2=3$或$a+2=a^2$,解得$a=\pm1$或$a=2$.当$a=\pm1$时,不满足集合中元素的互异性,故舍去;当$a=2$时,$A=\{1,3,4\}$,$B=\{1,4\}$,满足题意,所以$a=2$.

16.31

提示:集合$A=\{x|x^2-3x+2=0,x\in\mathbf{R}\}=\{1,2\}$,$B=\{x|0<x<8,x\in\mathbf{N}\}=\{1,2,3,4,5,6,7\}$.因为$A\subseteq C$,所以$1\in C$,$2\in C$,又因为$C\subsetneqq B$,所以集合$C$中一定含有1,2,且1,2,3,4,5,6,7不能都含有, 则满足条件$A\subseteq C\subsetneqq B$的集合$C$的个数即集合$\{3,4,5,6,7\}$的真子集的个数,即$2^5-1=31$.

四、解答题

17.**解**:(1)所有被3整除的整数组成的集合为$\{x|x=3k,k\in\mathbf{Z}\}$.

(2)不等式$2x-3>5$的解集为$\{x|x>4\}$.

(3)方程$x^2+x+1=0$的所有实数解组成的集合为$\{x|x^2+x+1=0\}$.

(4)抛物线$y=-x^2+3x-6$上所有点组成的集合为$\{(x,y)|y=-x^2+3x-6\}$.

(5)集合$\{1,3,5,7,9\}$用描述法表示为$\{x|x=2n-1,1\leqslant n\leqslant5$且$n\in\mathbf{N}_+\}$.

18.**解**:(1)$B=\left\{x\in\mathbf{N}\middle|\frac{6}{x+1}\in\mathbf{N}\right\}=\{0,1,2,5\}$.

(2)由题意及(1),知$A=\{-1,0,1\}$,$B=\{0,1,2,5\}$,所以$A\cap B=\{0,1\}$,$A\cup B=\{-1,0,1,2,5\}$. 所以$A*B=\{(x,y)|x\in A\cap B,y\in A\cup B\}=\{(0,-1),(0,0),(0,1),(0,2),(0,5),(1,-1),(1,0),(1,1),(1,2),(1,5)\}$.所以$A*B$中元素的个数为10.

19.**解**:(1)当$x\in\mathbf{N}$时,$A=\{2,3,4\}$,所以集合A的所有子集为$\varnothing$,$\{2\}$,$\{3\}$,$\{4\}$,$\{2,3\}$,$\{2,4\}$,$\{3,4\}$,$\{2,3,4\}$,共有8个.

(2)因为$B\subseteq A$,显然$a-1<a$,即$B\neq\varnothing$,所以$\begin{cases}a-1\geqslant1,\\a\leqslant5,\end{cases}$解得$2\leqslant a\leqslant5$.所以实数$a$的取值范围为$[2,5]$.

20.**解**:(1)若集合B中有2个元素,则$x^2-5x+q=0$有两个不等的实数根,则$\Delta=(-5)^2-4q>0$,解得$q<\frac{25}{4}$.

故q的取值范围为$\left(-\infty,\frac{25}{4}\right)$.

(2)若$A\cap B=\{2\}$,则$\begin{cases}4+2p+12=0,\\4-2\times5+q=0,\end{cases}$解得$p=-8$,$q=6$,此时$A=\{2,6\}$,$B=\{2,3\}$,故$A\cup B=\{2,3,6\}$.

21.**解**:由已知可得集合$A=\{0,-4\}$.

(1)因为$A\cup B=B$,所以$A\subseteq B$,

所以$B=A=\{0,-4\}$,即0,-4是方程$x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$的两根,

由韦达定理,可得$\begin{cases}-4+0=-2(a+1),\\-4\times0=a^2-1,\end{cases}$解得$a=1$.

所以实数a的取值范围为$\{1\}$.

(2)因为$A\cup B=A$,所以$B\subseteq A$,

所以$B=\varnothing$,或$\{0\}$,或$\{-4\}$,或$\{0,-4\}$.

当$B=\varnothing$时,$\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)=8a+8<0$,解得$a<-1$;

当$B=\{0\}$时,$\Delta=0$且$\begin{cases}0+0=-2(a+1),\\0\times0=a^2-1,\end{cases}$解得$a=-1$;

当$B=\{-4\}$时,$\Delta=0$且$\begin{cases}-4-4=-2(a+1),\\-4\times(-4)=a^2-1,\end{cases}$无解;

当$B=\{0,-4\}$时,由(1)可知$a=1$.

综上,实数a的取值范围为$\{a|a\leqslant-1$或$a=1\}$.

22.**解**:(1)由集合$A=\{x|0\leqslant x\leqslant2\}$,

得$\complement_RA=\{x|x<0$,或$x>2\}$.

又$B=\{x|a\leqslant x\leqslant3-2a\}$,$(\complement_RA)\cup B=\mathbf{R}$,

所以$\begin{cases}3-2a\geqslant a,\\a\leqslant0,\\3-2a\geqslant2,\end{cases}$ 解得$a\leqslant0$.

所以实数a的取值范围为$(-\infty,0]$.

(2)若$A\cap B=B$,则$B\subseteq A$,

当$B=\varnothing$时,$3-2a<a$,解得$a>1$;

当$B\neq\varnothing$时,$3-2a\geqslant a$,且$\begin{cases}a\geqslant0,\\3-2a\leqslant2,\end{cases}$

解得$\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant1$,

综上,$a\geqslant\frac{1}{2}$.

所以若$A\cap B\neq B$,则$a<\frac{1}{2}$,

即实数a的取值范围为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$.

第 2 期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.D

提示:由 $p\Rightarrow q$,可知“若 p,则 q”为真命题,故由充分条件、必要条件的定义,知①②③④均正确.故选 D.

2.D

提示:A,C 是全称量词命题,B 是存在量词命题且是真命题,D 是存在量词命题且是假命题.故选 D.

3.D

提示:因为存在量词命题的否定是全称量词命题,所以原命题的否定是“$\forall x\in\mathbf{Q}$,$\sqrt{3}x\notin\mathbf{Z}$”.故选 D.

4.B

提示:命题的否定是真命题,则原命题是假命题.由各选项可知,只有 B 项是假命题,故选 B.

5.D

①

提示:当 $a=-2,b=1$ 时,可排除 A,B,C 选项;对于 D,$a>b\Leftrightarrow a^3>b^3$,故 D 正确.故选 D.

6.B

提示:由题意,知“东风”是“赤壁之战东吴打败曹操”的必要条件,但不是充分条件.故选 B.

7.A

提示:由已知,得 $B\Rightarrow A,B\Rightarrow C,D\Rightarrow C,A\Rightarrow D$,即 $B\Rightarrow A\Rightarrow D\Rightarrow C$.对于选项 A,得 $C\Rightarrow B$,所以 A,B,C,D 互为充要条件,则 A,B,C,D 中的任意一个命题均为 A,B,C,D 四个命题的必要条件,故 A 正确;对于选项 B,得 $A\Rightarrow B$,但 $C\nRightarrow B$,故 B 错误;同理可知 C,D 错误.故选 A.

8.D

提示:由题设,可得 $\begin{cases}a+1\geqslant 1,\\ -a+1\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant 1$.故选 D.

二、多项选择题

9.AC

提示:对于 A,若 $a=1,b=-2$,满足 $a>b$,但不满足 $a^2>b^2$,即“$a>b$”不是“$a^2>b^2$”的充分条件,故 A 是假命题;对于 B,若 $a>b$,当 $c=0$ 时,得不到 $ac^2>bc^2$,反之,若 $ac^2>bc^2$,可得 $a>b$,故 B 是真命题;对于 C,$\frac{1}{x}>1\Leftrightarrow 0<x<1\Rightarrow x<1$,则“$\frac{1}{x}>1$”是“$x<1$”的充分不必要条件,故 C 是假命题;对于 D,关于 x 的不等式 $x^2-2x+m\geqslant 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立 $\Leftrightarrow \Delta=4-4m\leqslant 0\Leftrightarrow m\geqslant 1$,故 D 是真命题.故选 AC.

10.BCD

提示:对于方程 $x^2-x+1=0$,$\Delta=(-1)^2-4\times1\times1=-3<0$,所以方程无实数根,故 p 是假命题,故 A 错误;p 的否定:$\forall x\in\mathbf{R},x^2-x+1\neq 0$,故 B 正确;显然 q 是真命题,q 的否定:存在两个等边三角形,它们不相似,故 C,D 正确.

故选 BCD.

11.AD

提示:由题意可知,“$\exists x\in M,x<0$”为真命题,且“$\forall x\in M,x<3$”为真命题,所以集合 M 应该是 $(-\infty,3)$ 的子集,且集合 M 中有负实数,结合选项可知,A,D 符合题意.故选 AD.

12.BC

提示:由 $x^2+x-6=0$,解得 $x=2$,或 $x=-3$.对于方程 $ax+1=0$,当 $a=0$ 时,方程无解;当 $a\neq 0$ 时,解方程,可得 $x=-\frac{1}{a}$.由题意知 $p\nRightarrow q,q\Rightarrow p$,则 $a\neq 0$,此时应有 $-\frac{1}{a}=2$ 或 $-\frac{1}{a}=-3$,解得 $a=-\frac{1}{2}$ 或 $a=\frac{1}{3}$.故选 BC.

三、填空题

13.$\exists\alpha>90^\circ$,使 α 不是钝角

提示:全称量词命题的否定为存在量词命题,依题意,命题 p 的否定为“$\exists\alpha>90^\circ$,使 α 不是钝角”.

14.$a=b=0$

提示:$a^2+b^2=0\Leftrightarrow a^2=-b^2\Leftrightarrow a=b=0$,所以“$a^2+b^2=0$”的充要条件是 $a=b=0$.

15.$\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$

提示:因为命题“$\exists x\in\mathbf{R},x^2-x+a=0$”为假命题,

所以该命题的否定“$\forall x\in\mathbf{R},x^2-x+a\neq 0$”为真命题,

即方程 $x^2-x+a=0$ 无实数根,

所以 $\Delta=1-4a<0$,解得 $a>\frac{1}{4}$.

所以实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$.

16.①②

提示:对于函数 $y=ax^2+bx+c$,若函数经过点 $(1,0)$,则 $a\cdot1^2+b\cdot1+c=a+b+c=0$,反之,若 $a+b+c=0$,则 $a\cdot1^2+b\cdot1+c=a+b+c=0$,即函数经过点 $(1,0)$,故①②是真命题;对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a,b,c\in\mathbf{R})$,若 $ac<0$,则 $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$,且 $\frac{c}{a}<0$,所以方程有两个异号实数根,反之,若方程有两个异号实数根,则 $\frac{c}{a}<0$,即 $ac<0$,所以“$ac<0$”是“一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a,b,c\in\mathbf{R})$ 有两个异号实数根”的充要条件,故③是假命题.

四、解答题

17.**解**:(1)任意实数的绝对值都不是正数,是假命题.

(2)任意平行四边形都不是菱形,是假命题.

(3)有些正方形不是矩形,是假命题.

(4)$\forall x\in\mathbf{R},x^2+1\geqslant 0$,是真命题.

(5)$\exists x\in\mathbf{R},x^2-x+\frac{1}{4}<0$.

因为 $x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$,所以是假命题.

18.**解**:(1)由题意,知 $A\subsetneqq B$,

由此可得 $B=\{1,2,3\}$(答案不唯一).

(2)由题意,知 $B\subsetneqq A$,

由此可知 $B=\{1\}$(答案不唯一).

19.(1)**解**:$[(-2)\otimes(-3)]\otimes(-7)=[(-2)\times(-3)]\otimes(-7)=6\otimes(-7)=|6-7|=1$.

(2)**证明**:先证充分性:

当 $a=0,b=-2$ 或 $a=-2,b=0$ 时,由定义可知 $a\otimes b=-2$.

再证必要性:当 $a\otimes b=-2$ 时,由定义可知,当 $ab>0$ 时,$a\otimes b>0$;当 $ab<0$ 时,$a\otimes b\geqslant 0$,均不合题意;当 $a=0$ 时,由 $a\otimes b=-2$,得 $b=-2$;当 $b=0$ 时,由 $a\otimes b=-2$,得 $a=-2$,则 $a=0,b=-2$ 或 $a=-2,b=0$.

故命题得证.

20.**解**:(1)由已知,得 $\exists x\in\{x|-2<x<2\}$,使 $x^2-2x-m=0$ 成立,即 $m=x^2-2x=(x-1)^2-1$ 成立.

由 $-2<x<2$,得 $-1\leqslant(x-1)^2-1<8$,

所以 $M=\{m|-1\leqslant m<8\}$.

(2)若“$x\in N$”是“$x\in M$”的充分条件,则 $N\subseteq M$,所以 $\begin{cases}a\geqslant -1,\\ a+1\leqslant 8,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant a\leqslant 7$.

经检验,$a=-1,a=7$ 符合题意.

所以 a 的取值范围是 $[-1,7]$.

21.**解**:(1)要使“$x\in P$”是“$x\in S$”的充要条件,则 $P=S$,

所以 $\begin{cases}1-m=1,\\ 1+m=4,\end{cases}$ 此方程组无解.

所以不存在实数 m,使“$x\in P$”是“$x\in S$”的充要条件.

(2)要使“$x\in P$”是“$x\in S$”的必要条件,则 $S\subseteq P$.

当 $S=\varnothing$ 时,$1-m>1+m$,解得 $m<0$;

当 $S\neq\varnothing$ 时,则 $\begin{cases}1-m\leqslant 1+m,\\ 1-m\geqslant 1,\\ 1+m\leqslant 4,\end{cases}$ 解得 $m=0$.

综上,存在实数 m,使“$x\in P$”是“$x\in S$”的必要条件,且实数 m 的取值范围为 $(-\infty,0]$.

22.**解**:(1)因为命题 p 是真命题,所以 $B\subseteq A$.

当 $B=\varnothing$ 时,$m-1>2m-3$,解得 $m<2$;

当 $B\neq\varnothing$ 时,可得 $\begin{cases}m-1\leqslant 2m-3,\\ m-1\geqslant -2,\\ 2m-3\leqslant 5,\end{cases}$ 解得 $2\leqslant m\leqslant 4$.

综上,实数 m 的取值范围为 $(-\infty,4]$.

(2)因为命题 q 是真命题,所以 $A\cap B\neq\varnothing$.

所以 $B\neq\varnothing$,则 $m-1\leqslant 2m-3$,解得 $m\geqslant 2$,

所以 $m-1\geqslant 1$,

要使 $A\cap B\neq\varnothing$,仍需满足 $m-1\leqslant 5$,即 $m\leqslant 6$.

综上,实数 m 的取值范围为 $[2,6]$.

第 3 期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.D

提示:数学成绩 x 不低于 100 分表示为 $x\geqslant 100$,英语成绩 y 和语文成绩 z 的总成绩高于 200 分且低于 240 分表示为 $200<y+z<240$,故选 D.

2.A

提示:因为 $M-N=(a+2)(a+3)-(a^2+5a+4)=a^2+5a+6-(a^2+5a+4)=2>0$,所以 $M>N$.故选 A.

3.D

提示:当 $c=0$ 时,A 是假命题;若 $a>b>0$,则 $\frac{1}{ab}>0$,所以 $a\cdot\frac{1}{ab}>b\cdot\frac{1}{ab}$,即 $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$,故 B 是假命题;若 $a<b<0$,则 $a^2>b^2$,$\frac{1}{ab}>0$,所以 $a\cdot\frac{1}{ab}<b\cdot\frac{1}{ab}$,即 $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$,故 C 是假命题,D 是真命题.故选 D.

4.B

提示:若经过平移后能与二次函数 $y=x^2-2x-1$ 的图象重合,则二次项的系数必为 1,只有选项 B 符合题意,故选 B.

5.C

提示:由正数 x,y 满足 $x+2y=2$,得 $xy=\frac{1}{2}x\cdot(2y)\leqslant\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x+2y}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$,当且仅当 $x=2y$ 且 $x+2y=2$,即 $x=1$,$y=\frac{1}{2}$ 时,等号成立.所以 xy 的最大值为 $\frac{1}{2}$.故选 C.

6.B

提示:当 $a=b=1$ 时,满足 $ab=1>0$,但 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=2$,不满足 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$,充分性不成立;若 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$,则 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{b^2+a^2}{ab}>2$,因为 $b^2+a^2>0$,所以 $ab>0$,必要性成立.故选B.

7.B

提示:由题设,得

$2400\times\left(20-\frac{5}{2}t\right)\times t\%\geqslant 900$,且 $0<\frac{5}{2}t\leqslant 20$,

整理得 $t^2-8t+15\leqslant 0$,且 $0<t\leqslant 8$,解得 $3\leqslant t\leqslant 5$.

故选 B.

8.C

提示:因为函数 $y=-x^2+bx+c$ 的图象与 x 轴只有一个交点,

所以一元二次方程 $-x^2+bx+c=0$ 只有一个实数根,

则 $\Delta=b^2+4c=0$. ①

由不等式 $-x^2+bx+c-m>0$,即 $x^2-bx-c+m<0$ 的解集为 $\{x|x_0<x<x_0+2\}$,

设方程 $x^2-bx-c+m=0$ 的两实根为 x_1,x_2,则 $x_1+x_2=b$,$x_1x_2=-c+m$,且 $|x_2-x_1|=2$,

所以 $(x_2-x_1)^2=(x_2+x_1)^2-4x_1x_2=b^2-4(-c+m)=4$,

整理,得 $b^2+4c-4m=4$. ②

由①②,可得 $m=-1$.故选 C.

二、多项选择题

9.BD

提示:对于 A,$x^2+3x+3=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$,故 $x^2+3x+3<0$ 没有实数解,故 A 错误;对于 B,$x^2+6x+9=(x+3)^2\geqslant 0$,可知 $x^2+6x+9\leqslant 0$ 的实数解为 $x=-3$,故 B 正确;对于 C,$-x^2-2x-1=-(x^2+2x+1)=-(x+1)^2\leqslant 0$,故 $-x^2-2x-1>0$ 没有实数解,故 C 错误;对于 D,抛物线 $y=x^2-2ax+a^2-1$ 的开口向上,图象两端向上无限延伸,显然,必存在 $x\in\mathbf{R}$,使得 $y\geqslant 0$,即 $x^2-2ax+a^2-1\geqslant 0$ 有实数解,故 D 正确.

故选 BD.

10.ACD

提示:因为 $a>0>b>c$,所以 $a-c>0,a-b>0,b-c>0,c-b<0,bc>0$,所以 $\frac{a}{c}-\frac{a}{b}=\frac{a(b-c)}{bc}>0$,即 $\frac{a}{c}>\frac{a}{b}$,故 A 正确;$\frac{a-b}{a-c}-\frac{b}{c}=\frac{a(c-b)}{c(a-c)}>0$,即 $\frac{a-b}{a-c}>\frac{b}{c}$,故 C 正确;$a-c=(a-b)+(b-c)\geqslant 2\sqrt{(a-b)(b-c)}$,当且仅当 $a-b=b-c$,即 $b=\frac{a+c}{2}$ 时,等号成立,故 D 正确;不妨取 $a=1,b=-2,c=-3$,则 $b^{2a}=(-2)^2=4,c^{2a}=(-3)^2=9$,显然 $b^{2a}<c^{2a}$,故 B 错误.故选 ACD.

11.BC

提示:对于 A,当 $x<0$ 时,$y<0$,所以 y 的最小值不是 2;对于 B,$y=\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 2$,当且仅当 $\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$,即 $x=0$ 时,等号成立,所以 y 的最小值为 2;对于 C,$y=x^2+\frac{1}{x^2}\geqslant 2$,当且仅当 $x^2=\frac{1}{x^2}$,即 $x=\pm1$ 时,等号成立,所以 y 的最小值为 2;对于 D,由 $x(4-x)\geqslant 0$,解得 $0\leqslant x\leqslant 4$,又 $y=\sqrt{x(4-x)}\leqslant\frac{x+4-x}{2}=2$,当且仅当 $x=4-x$,即 $x=2$ 时,等号成立,所以 y 的最大值为 2.故选 BC.

12.AB

提示:关于 x 的一元二次方程 $(ax-1)(x+1)=0$ 的两根为 $\frac{1}{a},-1$,

当 $a>0$ 时,$\frac{1}{a}>-1$,则不等式的解集为 $\left\{x\middle|-1<x<\frac{1}{a}\right\}$.

当 $a<0$ 时,若 $a=-1$,则 $\frac{1}{a}=-1$,

所以不等式的解集为 $\{x|x\neq -1\}$;

若 $-1<a<0$,则 $\frac{1}{a}<-1$,

所以不等式的解集为 $\left\{x\middle|x<\frac{1}{a},\text{或 }x>-1\right\}$;

若 $a<-1$,则 $\frac{1}{a}>-1$,

所以不等式的解集为 $\left\{x\middle|x<-1,\text{或 }x>\frac{1}{a}\right\}$.

故选 AB.

三、填空题

13.$\{x|-10<x<1\}$

提示:由 $1<b<4$,可得 $-8<-2b<-2$,又 $-2<a<3$,两式相加,可得 $-10<a-2b<1$,

所以 x 的取值范围为 $\{x|-10<x<1\}$.

14.1

提示:由题意可知,一元二次方程 $x^2+(a+1)x+ab=0$ 有两个相等的实数根为 $x=1$,

所以 $\begin{cases}\Delta=(a+1)^2-4ab=0,\\ -\frac{a+1}{2}=1,\end{cases}$ 解得 $ab=1$.

15.$-4<k<0$(答案不唯一)

提示:由已知,得 $\forall x\in\mathbf{R},kx^2-kx-1<0$,当 $k=0$ 时,$-1<0$ 恒成立,符合题意;当 $k\neq 0$ 时,得 $\begin{cases}k<0,\\ \Delta=k^2+4k<0,\end{cases}$ 解得 $-4<k<0$.综上,$-4<k\leqslant 0$.所以原命题为真命题的充分条件是 $k\in(-4,0]$ 的一个子集,可以是 $-4<k<0$.

16.36;$12\sqrt{2}+12$

提示:设该直角三角形的两条直角边长分别为 a,b,则 $a>0,b>0,a^2+b^2=12^2=144$,

所以该直角三角形的面积 $S=\frac{1}{2}ab\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{144}{4}=36$,当且仅当 $a=b=6\sqrt{2}$ 时,等号成立,故 S 的最大值为 36.

又 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\leqslant 2(a^2+b^2)=2\times12^2$,所以 $a+b\leqslant 12\sqrt{2}$,当且仅当 $a=b=6\sqrt{2}$ 时,等号成立,所以该直角三角形周长的最大值为 $12\sqrt{2}+12$.

四、解答题

17.**解**:若选①②为条件,③为结论,则命题为真命题,证明如下:

$\frac{b}{a}-\frac{b+x}{a+x}=\frac{x(b-a)}{a(a+x)}$,因为 a,b,x 均为正数,$a>b$,所以 $a(a+x)>0,x>0,b-a<0$,

所以 $\frac{b}{a}-\frac{b+x}{a+x}<0$,即 $\frac{b}{a}<\frac{b+x}{a+x}$.命题得证.

若选①③为条件,②为结论,则命题为真命题,证明如下:

因为 $\frac{b}{a}<\frac{b+x}{a+x}$,所以 $\frac{b}{a}-\frac{b+x}{a+x}=\frac{x(b-a)}{a(a+x)}<0$.因为 a,b,x 均为正数,所以 $x>0,a(a+x)>0$.所以 $b-a<0$,即 $b<a$.命题得证.

若选②③为条件,①为结论,则命题为假命题.如 $a=1,b=-1,x=1$,满足②③,但不满足①.

18.**解**:(1)对于方程 $x^2-5x-6=0$,$\Delta=49>0$,方程有两个实数根 $x_1=-1,x_2=6$.

结合二次函数 $y=x^2-5x-6$ 的图象,得原不等式的解集为 $\{x|x<-1,\text{或 }x>6\}$.

(2)对于方程 $x^2-6x+9=0$,$\Delta=0$,方程有两个相等的实数根 $x_1=x_2=3$.

结合二次函数 $y=x^2-6x+9$ 的图象,得原不等式的解集为 $\{x|x\neq 3\}$.

(3)不等式可化为 $x^2-x+3<0$.对于方程 $x^2-x+3=0$,$\Delta=-11<0$,方程无实数根.

结合二次函数 $y=x^2-x+3$ 的图象,得原不等式的解集为 $\varnothing$.

(4)对于方程 $(x+2)(x-3)=0$,解得 $x_1=-2,x_2=3$.

结合二次函数 $y=(x+2)(x-3)$ 的图象,得原不等式的解集为 $\{x|-2<x<3\}$.

19.**解**:(1)因为 $x>0,y>0$,且 $x^2+y^2=2x+2y$,所以 $(x+y)^2-2(x+y)=2xy\leqslant 2\cdot\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$,整理得 $\frac{(x+y)^2}{2}\leqslant 2(x+y)$,解得 $x+y\leqslant 4$,当且仅当 $x=y=2$ 时,等号成立.所以 $x+y$ 的最大值为 4.

(2)因为 $x>0,y>0$,且 $x^2+y^2=2x+2y$,所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{2x+2y}{2xy}=\frac{x^2+y^2}{2xy}\geqslant\frac{2xy}{2xy}=1$,当且仅当 $x=y=2$ 时,等号成立.所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为 1.

20.**解**:(1)方程 $y=0$ 有实根,即方程 $ax^2+ax+1=0$ 有实根,

当 $a=0$ 时,方程化为 $1=0$,显然无根,不符合题意;

当 $a\neq 0$ 时,则 $\Delta=a^2-4a\geqslant 0$,解得 $a<0$,或 $a\geqslant 4$.

综上,a 的取值范围为 $(-\infty,0)\cup[4,+\infty)$.

(2)不等式 $y>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$,即不等式 $ax^2+ax+1>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$,

当 $a=0$ 时,不等式化为 $1>0$,显然恒成立,符合题意;

当 $a\neq 0$ 时,则 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta=a^2-4a<0,\end{cases}$ 解得 $0<a<4$.

综上,a 的取值范围为 $[0,4)$.

21.**解**:(1)设草坪的宽为 x 米,由草坪的面积为 300 平方米,得草坪的长为 $\frac{300}{x}$ 米.

又因为矩形草坪的长比宽至少多 5 米,

所以 $\frac{300}{x}-x\geqslant 5$,整理,得 $x^2+5x-300\leqslant 0$.

因为方程 $x^2+5x-300=0$ 有两个实数根 $x_1=-20,x_2=15$,结合二次函数 $y=x^2+5x-300$ 的图象,解不等式得 $-20\leqslant x\leqslant 15$,又因为 $x>0$,所以 $0<x\leqslant 15$.所以草坪宽的最大值为 15 米.

(2)设草坪的宽为 x 米,则长为 $\frac{300}{x}$ 米.由题意,得整个绿化面积为 $(2x+6)\left(\frac{300}{x}+4\right)=624+\frac{1800}{x}+8x\geqslant 624+2\sqrt{\frac{1800}{x}\cdot 8x}=864$,当且仅当 $\frac{1800}{x}=8x$,即 $x=15$ 时,等号成立.所以整个绿化面积的最小值为 864 平方米.

22.**解**:(1)由已知,得 $a+b=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=4$,

当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$,即 $a=b=2$ 时,等号成立.

故 $a+b$ 的最小值为 4.

(2)由 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=1$,得 $a+b=ab$,所以 $ab-b-a+1=1$,即 $(a-1)(b-1)=1$.

又 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1\Rightarrow\frac{1}{a}=1-\frac{1}{b}>0$,得 $b>1$,同理 $a>1$,所以 $a-1>0,b-1>0$.

所以 $\frac{4a}{a-1}+\frac{9b}{b-1}=4+\frac{4}{a-1}+9+\frac{9}{b-1}$

$\geqslant 13+2\sqrt{\frac{4}{a-1}\cdot\frac{9}{b-1}}=25$,

当且仅当 $\frac{4}{a-1}=\frac{9}{b-1}$,即 $a=\frac{5}{3},b=\frac{5}{2}$ 时,等号成立.

所以 $\frac{4a}{a-1}+\frac{9b}{b-1}$ 的最小值为 25.

(3)由(2)知 $a-1>0,b-1>0,(a-1)(b-1)=1$,

则 $2a^2+b^2-4a-2b=2a^2-4a+2+b^2-2b+1-3=2(a-1)^2+(b-1)^2-3\geqslant 2\sqrt{2}(a-1)(b-1)-3=2\sqrt{2}-3$,

当且仅当 $\sqrt{2}(a-1)=b-1$,即 $a=1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}},b=1+\sqrt[4]{2}$ 时,等号成立.

所以 $2a^2+b^2-4a-2b$ 的最小值为 $2\sqrt{2}-3$.

第 4 期

第2~3版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.C

提示:A 中元素不确定,不能构成集合,故 A 不符合题意;B 中满足 $\sqrt{x+1}<2$ 的所有整数解为 $-1,0,1,2$,组成的集合为有限集,故 B 不符合题意;C 符合题意;D 中,所有到 x 轴,y 轴距离均为 1 的点为 $(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)$,组成的集合为有限集,故 D 不符合题意.故选 C.