22.(1)**解**：方程$\left(\frac{5}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x=1$的根就是函数$f(x)=\left(\frac{5}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x-1$的零点.

因为$f(1)=\frac{4}{13}>0$，$f(3)=\frac{-344}{2197}<0$，

所以$f(1)f(3)<0$.

又$f(x)$的图象是一条连续不断的曲线，由函数零点存在定理，可知$f(x)$在区间$(1,3)$内至少有一个零点.

因为$y=\left(\frac{5}{13}\right)^x$，$y=\left(\frac{12}{13}\right)^x$都是$\mathbf{R}$上的减函数，

所以$f(x)=\left(\frac{5}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x-1$是$\mathbf{R}$上的减函数.

所以$f(x)$在区间$(1,3)$内只有一个零点.

又$f(2)=\left(\frac{5}{13}\right)^2+\left(\frac{12}{13}\right)^2-1=0$，所以$f(x)$的零点为2，

即方程$\left(\frac{5}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x=1$的根为2.

(2)**证明**：对于$f(x)=e^x-\frac{1}{x}$，

因为$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$，$f(1)=e-1>0$，

所以$f\left(\frac{1}{2}\right)f(1)<0$.所以$x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.

由$f(x_0)=0$，得$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$.

所以$f(2x_0)=e^{2x_0}-\frac{1}{2x_0}=\frac{1}{x_0^2}-\frac{1}{2x_0}=\left(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}$.

设$t=\frac{1}{x_0}$，由$x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，得$t\in(1,2)$.

因为$y=\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}$在$(1,2)$上单调递增，

所以$y\in\left(\frac{1}{2},3\right)$，即$f(2x_0)\in\left(\frac{1}{2},3\right)$.

第 12 期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C

提示：①通过观察获取数据，③④通过调查获取数据，只有②通过试验获取数据.故选C.

2.D

提示：对于A，总量太大，不适合普查，故A不合理；对于B，为了安全性，应该选择普查，故B不合理；对于C，D，都具有破坏性，故都应该选择抽样调查，故C不合理，D合理.故选D.

3.D

提示：用随机数表法选取样本时，样本的编号位数要一致，故对总体的编号可以是001，002，…，108.故选D.

4.C

提示：对于A，B，D，总体容量大，制作号签比较麻烦；对于C，总体容量小，最适合用简单随机抽样.故选C.

5.D

提示：由于抽样的比例为$\frac{30}{150}=\frac{1}{5}$，故其中高级职称应抽取$15\times\frac{1}{5}=3$(人)，中级职称应抽取$45\times\frac{1}{5}=9$(人)，一般职员应抽取$90\times\frac{1}{5}=18$(人).故选D.

6.C

提示：设中型企业的抽样家数是x，

由题意，得$\frac{2}{10}=\frac{x}{90}$，解得$x=18$.故选C.

7.D

提示：由题意，先在高二年级12个班中抽取3个班，样本量少，适合用抽签法；再按每个班男女生比例抽取样本，由于总体有明显的性别差异，适合使用分层随机抽样，所以先用抽签法，再用分层随机抽样.故选D.

8.D

提示：由高中生有3000人，其中男生、女生人数之比为3:7，

得高中生中男生人数为$3000\times\frac{3}{3+7}=900$，女生人数为$3000-900=2100$.

由初中生有2000人，其中男生、女生人数之比为6:4，得初中生中男生人数为$2000\times\frac{6}{6+4}=1200$.

用分层随机抽样的方法从该校学生中抽取样本时，设从高中生中抽取的女生人数是x，因为从初中生中抽取男生12人，

则$\frac{x}{2100}=\frac{12}{1200}$，解得$x=21$.故选D.

二、多项选择题

9.ABD

提示：因为该地区小学、初中、高中三个学段学生的肺活量有较大差异，而同一学段男女生的肺活量差异不大，所以应该按学段分层随机抽样.故选ABD.

10.AD

提示：因为三种型号的客车的数量有差异，所以应采用的抽样方法为分层随机抽样，故D正确；由题意，样本量为$14\div\frac{2}{2+5+3}=70$，故A正确；样本中，中型客车有$70\times\frac{5}{2+5+3}=35$(辆)，大型客车有$70-14-35=21$(辆)，大型车辆比中型车辆少$35-21=14$(辆)，故B，C错误.故选AD.

11.ABC

提示：该问题中的总体是高一、高二年级的全体学生的视力，故A正确；因为各年级的视力情况不一样，所以应采用分层随机抽样，故B正确；高一年级应抽取的人数为$235\times\frac{20\times50}{20\times50+30\times45}=100$，高二年级应抽取的人数为$235\times\frac{30\times45}{20\times50+30\times45}=135$，故C正确；甲、乙被抽到的可能性相等，故D错误.故选ABC.

12.BD

提示：由题意知，总体容量$N=12+18+6=36$，足球运动员、篮球运动员、乒乓球运动员的人数比例为12:18:6=2:3:1，故n应为6的倍数，且不超过36，结合选项可知，选BD.

三、填空题

13.120

提示：由已知，得总体容量为300，故样本量为$300\times40\%=120$.

14.19

提示：由题意，选取出来的数字依次是18，07，92(超过20)，45(超过20)，44(超过20)，17，16，58(超过20)，09，79(超过20)，83(超过20)，86(超过20)，19，故选出来的第6个个体编号为19.

15.450

提示：由题意，设从一、二、三、四4个车间抽取的人数依次为x，$x+1$，$x+2$，$x+3$，

则$x+x+1+x+2+x+3=30$，解得$x=6$.

所以从第四车间抽取9人.

所以采取分层随机抽样时，从第四车间抽取的人数占样本容量的$\frac{9}{30}=\frac{3}{10}$，

根据分层随机抽样的概念可知，该工厂第四车间的人数为$1500\times\frac{3}{10}=450$.

16.25%

提示：由图可得，样本中35岁以下具有本科学历的有50人，且本科学历占62.5%，所以35岁以下的人数为$\frac{50}{62.5\%}=80$.所以35岁以下具有研究生学历的人数为$80-50=30$.所以估计该地区35岁以下具有研究生学历的教师百分比为$\frac{30}{120}=25\%$.

四、解答题

17.**解**：小强的结论更可靠.因为小王观测的是一个月的气温情况，选取的样本不够大，没有代表性；小英观察了三个月的气温情况，但调查结果局限于春季，不能推广到全年，结论也不可靠；小强虽然也只观察了四个月的气温情况，但他所选择的月份分别代表了春、夏、秋、冬的气温，所以小强观察到的结论更可靠.

18.**解**：步骤如下：

第一步，将历史、地理、生物题的编号，分别写到大小、形状都相同的号签上，并将历史、地理、生物题的号签分别放在三个不透明的容器中，搅拌均匀；

第二步，分别从装有历史、地理、生物题的容器内逐个抽取3个、3个、2个号签，并记录所得号签的编号，这便是这个学生所要回答的8道题的序号.

19.**解**：(1)由题意，男成员有48人，女成员有36人，总体容量为$48+36=84$，

所以按照性别进行分层随机抽样，要抽取一个容量为21的样本，

则男成员应抽取$21\times\frac{48}{84}=12$(人)，

女成员应抽取$21\times\frac{36}{84}=9$(人).

(2)由题意，45岁以上的成员共有$12+18=30$(人)，总体容量为84，

所以按照年龄进行分层随机抽样，要抽取一个容量为28的样本，

则45岁以上的成员应抽取$28\times\frac{30}{84}=10$(人).

20.**解**：(1)案例一数量少，采用简单随机抽样较为合适；案例二员工收入差距明显，采用分层随机抽样较为合适.

(2)对于案例二，抽样过程如下：

①分层，将总体分为高级职称、中级职称、初级职称及其余人员四层；

②确定抽样比例$k=\frac{40}{800}=\frac{1}{20}$；

③按抽样比例确定各层样本数分别为$160\times\frac{1}{20}=8$，$320\times\frac{1}{20}=16$，$200\times\frac{1}{20}=10$，$120\times\frac{1}{20}=6$；

④按简单随机抽样方式在各层确定相应的样本；

⑤汇总构成一个容量为40的样本.

21.**解**：(1)各年龄段的身体状况差异比较明显，所以要抽取40人调查身体状况，应按年龄进行分层随机抽样，从老年人中抽取$200\times\frac{40}{2000}=4$人，从中年人中抽取$600\times\frac{40}{2000}=12$人，从青年人中抽取$1200\times\frac{40}{2000}=24$人.

(2)要开一个讨论单位发展与薪金调整方面的座谈会，应按部门进行分层随机抽样，从管理部门抽取$160\times\frac{25}{2000}=2$人，从技术开发部门抽取$320\times\frac{25}{2000}=4$人，从营销部门抽取$480\times\frac{25}{2000}=6$人，从生产部门抽取$1040\times\frac{25}{2000}=13$人.

(3)要调查对北京冬奥会中国代表团获奖情况的了解，应按年龄进行分层随机抽样，从老年人中抽取$200\times\frac{20}{2000}=2$人，从中年人中抽取$600\times\frac{20}{2000}=6$人，从青年人中抽取$1200\times\frac{20}{2000}=12$人.

22.**解**：(1)以全年级学生的学号为编号，用计算机在450名学生的学号中随机抽取45个学号，这45个学号对应的学生就是要抽取的对象.

(2)将总体450名同学分成男、女两部分，把所有男生进行编号，再进行简单随机抽样选取23人，再把所有女生进行编号，再进行简单随机抽样选取22人.

(3)将每班男女进行分层随机抽样，如果第i个班人数为M_i，则$\frac{5}{M_i}$为抽取的比例数，按照此比例对男生和女生进行抽取.

扫码免费下载习题讲解ppt

第 9 期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A

提示：由$\lg a=b(a>0)$，得$10^b=a$.故选A.

2.A

提示：由$3^x=2$，得$x=\log_3 2$.因为$y=\log_3\frac{9}{4}$，所以$\frac{1}{2}\cdot y=\frac{1}{2}\log_3\frac{9}{4}=\log_3\sqrt{\frac{9}{4}}=\log_3\frac{3}{2}=\log_3 3-\log_3 2=1-\log_3 2$.所以$x+\frac{1}{2}y=\log_3 2+1-\log_3 2=1$.故选A.

3.B

提示：由已知，得$\frac{1}{a}=\log_2 0.1$，$\frac{1}{b}=\log_2 50$，所以$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\log_2 0.01+\log_2 50=\log_2 0.5=\log_2\frac{1}{2}=-1$.故选B.

4.B

提示：因为$3^a\leqslant3^b\Leftrightarrow a\leqslant b$，$\log_{\frac{1}{3}}a>\log_{\frac{1}{3}}b\Leftrightarrow0<a<b$，而$a\leqslant b\nRightarrow0<a<b$，但$0<a<b\Rightarrow a\leqslant b$，所以“$3^a\leqslant3^b$”是“$\log_{\frac{1}{3}}a>\log_{\frac{1}{3}}b$”的必要不充分条件.故选B.

5.B

提示：因为$f(x)=\log_2 x$，所以$f(f(x))=\log_2(\log_2 x)$.要使$f(f(x))$有意义，则$\begin{cases}\log_2 x>0,\\ x>0,\end{cases}$解得$x>1$.所以$x$的取值范围为$(1,+\infty)$.故选B.

6.D

提示：函数y的定义域为$\{x||x|-1>0\}=\{x|x<-1$，或$x>1\}$，排除A，B；当$x>1$时，$y=\log_a(x-1)$，因为$0<a<1$，所以此时y单调递减，排除C，故选D.

7.B

提示：因为$N=4^{10}\times9^5$，所以$\lg N=\lg(4^{10}\times9^5)=\lg4^{10}+\lg9^5=\lg2^{20}+\lg3^{10}=20\lg2+10\lg3\approx20\times0.3010+10\times0.4771=10.791$.

所以$N\approx10^{10.791}\in(10^{10},10^{11})$.故选B.

8.D

提示：由题意可知，$f(x)=2^x$，$g(x)=\log_2 x$，$\varphi(x)=-\log_2 x=\log_2\frac{1}{x}$.所以$a=f\left(-\frac{1}{2}\right)=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\in(0,1)$，$b=g\left(\frac{1}{3}\right)=\log_2\frac{1}{3}<0$，$c=\varphi\left(\frac{1}{3}\right)=\log_2 3>1$，所以$b<a<c$.故选D.

二、多项选择题

9.AC

提示：$\lg5+\lg2=\lg(5\times2)=\lg10=1$，故A正确；$\log_4 3=\frac{\log_2 3}{\log_2 4}=\frac{\log_2 3}{2\log_2 2}=\frac{1}{2}\log_2 3$，故B错误；$e^{\ln\pi}=\pi$，故C正确；$\log_5 2=\frac{\lg2}{\lg5}=\lg2\div\lg5$，故D错误.故选AC.

10.AD

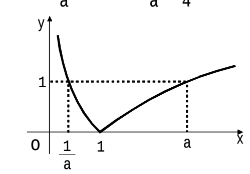
提示：因为$3^x=5^y=15$，所以$x=\log_3 15>\log_3 9=2$，$y=\log_5 15<\log_5 25=2$，所以$x>y$，故A正确；$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\log_{15}3+\log_{15}5=\log_{15}15=1$，故C错误；显然$x>0$，$y>0$，$x\neq y$，由前知$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$，则$x+y=(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=2+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}>2+2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=4$，故B错误；由$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$，得$\frac{x+y}{xy}=1$，所以$xy=x+y>4$，故D正确.故选AD.

11.AC

提示：由指数函数的图象可知，当$x\in(0,+\infty)$时，$\left(\frac{1}{2}\right)^x>\left(\frac{1}{3}\right)^x$，故A错误；由对数函数的图象可知，当$x\in(0,1)$时，$\log_{\frac{1}{2}}x>\log_{\frac{1}{3}}x$，故B正确；对于C，当$x=\frac{1}{2}$时，$\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$，$\log_{\frac{1}{2}}x=1$，则$\left(\frac{1}{2}\right)^x<\log_{\frac{1}{2}}x$，故C错误；对于D，当$x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$时，$\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$，$\log_{\frac{1}{3}}x>\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}=1$，所以$\left(\frac{1}{2}\right)^x<\log_{\frac{1}{3}}x$，故D正确.故选AC.

12.BC

提示：由$f(x)=|\log_a x|$，得$f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{a}\right)=f(a)=1$.当$a>1$时，$f(x)$的大致图象如图所示，若值域为$[0,1]$，则$n-m$的最小值为$1-\frac{1}{a}$和$a-1$两者中的最小值.由$a+\frac{1}{a}>2=1+1$，得$a-1>1-\frac{1}{a}$，所以$1-\frac{1}{a}=\frac{1}{4}$，解得$a=\frac{4}{3}$.



(第12题图)

当$0<a<1$时，同理，得$n-m$的最小值为$\frac{1}{a}-1$和$1-a$两者中的最小值.由$a+\frac{1}{a}>2=1+1$，得$\frac{1}{a}-1>1-a$，所以$1-a=\frac{1}{4}$，解得$a=\frac{3}{4}$.故选BC.

三、填空题

13.$x=3$

提示：当$x\geqslant0$时，$g(x)=2\Leftrightarrow\log_2(x+1)=2$，解得$x=3$；
当$x<0$时，$g(x)=2\Leftrightarrow f(-x)=2^x+1=2$，解得$x=0$(舍去).
所以$g(x)=2$的解为$x=3$.

14.$\left(0,\frac{3}{2}\right]$

提示：由题意，得$\begin{cases}a>0,\\ -\frac{-2a}{2\times3}\leqslant1,\\ \log_2(3\times1^2-2a\times1+1)\geqslant a\times1-a,\end{cases}$

解得$0<a\leqslant\frac{3}{2}$.

所以实数a的取值范围是$\left(0,\frac{3}{2}\right]$.

15.16

提示：由$\log_2\sqrt{a}=\log_b 4$，得$\frac{1}{2}\log_2 a=2\log_b 2=\frac{2}{\log_2 b}$，

故$\log_2 a\cdot\log_2 b=4$.

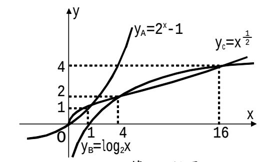
因为$a>1$，$b>1$，所以$\log_2 a>0$，$\log_2 b>0$.

所以$\log_2(ab)=\log_2 a+\log_2 b\geqslant2\sqrt{\log_2 a\cdot\log_2 b}=4$，当且仅当$\log_2 a=\log_2 b$，即$a=b=4$时，等号成立.

所以$ab\geqslant16$.故ab的最小值为16.

16.①②

提示：在同一平面直角坐标系中画出函数$y_A=2^x-1$，$y_B=\log_2 x$，$y_C=x^{\frac{1}{2}}$的大致图象如图所示，可知当$x>1$时，y_A始终最大，故①正确；当$0<x<1$时，y_C始终最大，故②正确；当$4<x<16$时，$y_C>y_B$，故③错误.故所有正确结论的序号是①②.



(第16题图)

四、解答题

17.**解**：(1)原式$=\frac{1}{4}-\left(\frac{2}{3}\right)^{3\times\left(-\frac{2}{3}\right)}+\frac{3}{2}\log_2 2$

$=\frac{1}{4}-\frac{9}{4}+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$.

(2)原式$=\log_3\frac{6^2}{4}+\lg5\times(\lg5+2\lg2)+(\lg2)^2=\log_3 9+(\lg5)^2+2\lg5\times\lg2+(\lg2)^2=2+(\lg5+\lg2)^2=2+1=3$.

18.**解**：(1)因为$3^a=5$，所以$27^a=(3^3)^a=(3^a)^3=5^3=125$.

因为$b=\log_{25}3=\frac{\log_5 3}{\log_5 25}=\frac{1}{2}\log_5 3=\log_5\sqrt{3}$，

所以$5^b=\sqrt{3}$.所以$27^a+5^b=125+\sqrt{3}$.

(2)因为$3^a=5$，所以$a=\log_3 5$.

又由(1)可知$b=\log_{25}3=\frac{1}{2}\log_5 3$，

所以$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)$

$=\left(\log_3 5+\frac{1}{\log_{25}3}\right)\left(\log_{25}3+\frac{1}{\log_3 5}\right)$

$=(\log_3 5+\log_3 25)\left(\frac{1}{2}\log_5 3+\log_5 3\right)$

$=3\log_3 5\times\frac{3}{2}\log_5 3=3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$.

19.**解**：(1)由已知，得$f(2)=\log_a 2=1$，解得$a=2$.

所以$f(x)=\log_2 x$.

(2)由(1)知$f(x)=\log_2 x$，则$f(x)$在定义域$(0,+\infty)$上是增函数.所以由$f(m^2-m)<1=f(2)$，得$0<m^2-m<2$，解得$-1<m<0$，或$1<m<2$.所以实数m的取值范围为$(-1,0)\cup(1,2)$.

20.**解**：(1)令$x^2-x+1=1$，解得$x_1=0$，或$x_2=1$.

又$f(0)=f(1)=\log_a 1=0$，

所以函数$y=f(x)$的图象恒过定点$(0,0)$和$(1,0)$.

(2)由$f(2)=\log_a(2^2-2+1)=\log_a 3=\frac{1}{2}$，得$a^{\frac{1}{2}}=3$，

解得$a=9$.

(3)令$t=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$，则$t$在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上单调递减，在$\left[\frac{1}{2},2\right]$上单调递增.

当$0<a<1$时，$y=\log_a t$是减函数，所以$f(x)$在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上单调递增，在$\left[\frac{1}{2},2\right]$上单调递减，所以$f(x)$在区间$[0,2]$上的最大值为$f\left(\frac{1}{2}\right)=\log_a\frac{3}{4}=2$，即$a^2=\frac{3}{4}$，解得$a=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

当$a>1$时，$y=\log_a t$是增函数，所以$f(x)$在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上单调递减，在$\left[\frac{1}{2},2\right]$上单调递增，所以$f(x)$在区间$[0,2]$上的最大值为$f(0)$或$f(2)$，而$f(0)=0$，所以必有$f(2)=\log_a 3=2$，即$a^2=3$，解得$a=\sqrt{3}$.

综上，a的值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\sqrt{3}$.

21.**解**：(1)$f(x)=\ln(x+1)-\ln(a-x)=\ln\frac{x+1}{a-x}$.

由$f(x)$为奇函数，得$f(-x)=-f(x)$，

即$\ln\frac{-x+1}{a+x}=-\ln\frac{x+1}{a-x}=\ln\frac{a-x}{x+1}$，

所以$\frac{-x+1}{a+x}=\frac{a-x}{x+1}$，得$a^2=1$，所以$a=\pm1$.

当$a=-1$时，$f(x)$无意义，应舍去；

当$a=1$时，$f(x)=\ln(x+1)-\ln(1-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$，

由$\begin{cases}x+1>0,\\ 1-x>0,\end{cases}$得$-1<x<1$，

所以$f(x)$的定义域为$(-1,1)$，符合题意.综上，$a=1$.

(2)$f(x)$是定义在$(-1,1)$上的增函数.证明如下：

由(1)知$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$，且$f(x)$的定义域为$(-1,1)$，

$\forall x_1,x_2\in(-1,1)$，且$x_1<x_2$，

则$f(x_1)-f(x_2)=\ln\frac{1+x_1}{1-x_1}-\ln\frac{1+x_2}{1-x_2}=\ln\left(\frac{1+x_1}{1-x_1}\cdot\frac{1-x_2}{1+x_2}\right)$

$=\ln\frac{1+x_1-x_2-x_1x_2}{1+x_2-x_1-x_1x_2}$.

因为$x_1<x_2$，所以$-x_2<-x_1$，所以$x_1-x_2<x_2-x_1$，所以$1+x_1-x_2-x_1x_2<1+x_2-x_1-x_1x_2$.

因为$x_1,x_2\in(-1,1)$，所以$(1-x_1)(1+x_2)=1+x_2-x_1-x_1x_2>0$.所以$0<\frac{1+x_1-x_2-x_1x_2}{1+x_2-x_1-x_1x_2}<1$.

所以$\ln\frac{1+x_1-x_2-x_1x_2}{1+x_2-x_1-x_1x_2}<0$，即$f(x_1)-f(x_2)<0$.所以$f(x_1)<f(x_2)$.所以$f(x)$是定义在$(-1,1)$上的增函数.

22.**解**：(1)由已知，得$h(x)=(4-2\log_2 x)\log_2 x=-2(\log_2 x)^2+4\log_2 x$.

令$t=\log_2 x$，则$y=h(x)=-2t^2+4t=-2(t-1)^2+2$.因为$x\in[1,2]$，所以$t\in[0,1]$，所以当$t=1$时，$y$取得最大值为2；当$t=0$时，$y$取得最小值为0.所以$h(x)$的值域为$[0,2]$.

(2)$M(x)=\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$

$=\begin{cases}g(x),f(x)\geqslant g(x),\\ f(x),f(x)<g(x).\end{cases}$

由已知，得$f(x)-g(x)=3(1-\log_2 x)$，

所以当$0<x\leqslant2$时，$f(x)\geqslant g(x)$，此时$M(x)=\log_2 x$，且$M(x)$单调递增，所以$M(x)$的最大值为$M(2)=1$；

当$x>2$时，$f(x)<g(x)$，此时$M(x)=3-2\log_2 x$，且$M(x)$单调递减，所以$M(x)<M(2)=1$.

综上，函数$M(x)$的最大值为1.

③ (3)对任意$x\in[1,2]$,不等式$f(x^2)f(\sqrt{x})>k\cdot g(x)$恒成立,

即$(3-2\log_2x^2)(3-2\log_2\sqrt{x})>k\log_2x$恒成立,

即$(3-4\log_2x)(3-\log_2x)>k\log_2x$恒成立,

即$4(\log_2x)^2-15\log_2x+9>k\log_2x$恒成立.

令$t=\log_2x$,由$x\in[1,2]$,得$t\in[0,1]$,此时$4t^2-15t+9>kt$恒成立.

当$t=0$时,$k\in\mathbf{R}$;

当$t\in(0,1]$时,$k<\frac{9}{t}+4t-15$恒成立,由对勾函数的性质可知$F(t)=\frac{9}{t}+4t-15$在$(0,1]$上单调递减,

所以$F(t)_{min}=F(1)=-2$,所以$k<-2$.

综上,实数k的取值范围为$(-\infty,-2)$.

第 10 期

第2~3版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.A

提示:由$\lg a=b(a>0)$,得$10^b=a$.故选A.

2.A

提示:由$x\log_34=1$,得$x=\log_43$,所以$4^x=3$.故选A.

3.C

提示:由$\log_34=a$,得$2\log_32=a$,所以$\log_32=\frac{1}{2}a$.又$\log_35=b$,所以$\log_310=\log_32+\log_35=\frac{1}{2}a+b$.故选C.

4.B

提示:由$\frac{2x-1}{2x+1}>0$,得$x<-\frac{1}{2}$,或$x>\frac{1}{2}$.所以$f(x)$的定义域为$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.因为$f(x)$是偶函数,所以$f(-1)=f(1)$,得$(-1+a)\ln3=(1+a)\ln\frac{1}{3}=(-1-a)\ln3$,所以$-1+a=-1-a$,得$a=0$.故选B.

5.D

提示:因为函数$f(x)$的图象与函数$y=3^x$的图象关于直线$y=x$对称,所以$f(x)=\log_3x$.因为$g(x)$是奇函数,且当$x>0$时,$g(x)=f(x)-x$,所以$g(-9)=-g(9)=-[f(9)-9]=-(\log_39-9)=7$.故选D.

6.A

提示:$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.当$x<0$时,$f(x)=e^x-\lg(-x)$,由复合函数的单调性,可知$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增,排除B,D;当$x>0$时,$f(x)=e^x-\lg x$,因为函数$y=e^x$与函数$y=\lg x$在$(0,+\infty)$上均单调递增,且$y=e^x$增长得越来越快,$y=\lg x$增长得越来越慢,所以函数$f(x)=e^x-\lg x$的值越来越大,排除C,故选A.

7.C

提示:设2021年后,第$n(n\in\mathbf{N}_+)$年该公司全年投入的研发资金为y万元,则$y=300\times(1+10\%)^n$.

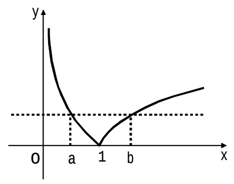
令$y>600$,得$1.1^n>2$,

故$n>\frac{\lg2}{\lg1.1}=\frac{\lg2}{\lg11-1}\approx\frac{0.301}{1.041-1}\approx7.3$.

所以n的最小值为8.故该公司全年投入的研发资金开始超过600万元的年份是2029年.故选C.

8.A

提示:函数$f(x)$的大致图象如图所示.若$f(a)=f(b)$,且$a<b$,由图象可知$0<a<1$,$b>1$.



(第8题图)

因为$f(a)=f(b)$,所以$|\lg a|=|\lg b|$,所以$-\lg a=\lg b$,得$\lg a+\lg b=0$,即$\lg(ab)=0$,所以$ab=1$,则$b=\frac{1}{a}$.

由$\log_ax+\log_b(2x-1)>0$,得$\log_ax-\log_a(2x-1)>0$,

即$\log_ax>\log_a(2x-1)$.

又$0<a<1$,所以$\begin{cases}x>0,\\2x-1>0,\\x<2x-1,\end{cases}$解得$x>1$.所以原不等式的解集为$(1,+\infty)$.故选A.

二、多项选择题

9.BC

提示:因为$\log_2\pi>\log_2e>\log_22=1$,$\ln2<\ln e=1$,所以$c>a>b$.故选BC.

10.AD

提示:当$x=1$时,$y=\log_a(3x-2)+2$的图象过定点$(1,2)$,$y=\log_2x+1$的图象过定点$(1,1)$,$y=a^x+1$的图象过动点$(1,a+1)$,不过定点$(1,2)$,$y=4^x-2$的图象过定点$(1,2)$.故选AD.

11.AC

提示:由已知,得$\begin{cases}a>1,\\4-\frac{a}{2}>0,\\4-\frac{a}{2}-2\leqslant\log_a1,\end{cases}$解得$4\leqslant a<8$,故A正确,D错误.又$7<e^2<8$,$\log_2271>\log_2256=8$,故B错误,C正确.故选AC.

12.BD

提示:因为$b^a=9$,所以$a=\log_b9=2\log_b3$.

又$a+\log_3b=3$,所以$2\log_b3+\log_3b=3$.

设$\log_b3=t$,则$2t+\frac{1}{t}=3$,即$2t^2-3t+1=0$,

解得$t=1$,或$t=\frac{1}{2}$,即$\log_b3=1$,或$\log_b3=\frac{1}{2}$.

所以$b=3$,或$b=9$.故选BD.

三、填空题

13.2

提示:当$a>1$时,对数函数$y=\log_ax$在区间$[1,2]$上单调递增,根据题意,得$\log_a2-\log_a1=1$,解得$a=2$.

14.$\left(\frac{3}{4},1\right]$

提示:要使函数$f(x)$有意义,则$\begin{cases}\log_{0.5}(4x-3)\geqslant0,\\4x-3>0,\end{cases}$解得$\frac{3}{4}<x\leqslant1$.故$f(x)$的定义域是$\left(\frac{3}{4},1\right]$.

15.-2

提示:根据题意,可得$a+2=0$,所以$a=-2$.

16.$[2,+\infty)$

提示:$\exists x_1\in[2,+\infty)$,$\forall x_2\in\left[\frac{1}{3},3\right]$,有$f(x_1)\leqslant g(x_2)$,等价于当$x_1\in[2,+\infty)$,$x_2\in\left[\frac{1}{3},3\right]$时,$f(x_1)_{min}\leqslant g(x_2)_{min}$.

当$x_1\in[2,+\infty)$时,$x_1^2-1\geqslant3$,则$\log_3(x_1^2-1)\geqslant\log_33=1$,此时$f(x_1)_{min}=1$.

当$x_2\in\left[\frac{1}{3},3\right]$时,$g(x_2)=x_2^2-2x_2+a=(x_2-1)^2+a-1$,此时$g(x_2)_{min}=g(1)=a-1$.

所以$1\leqslant a-1$,解得$a\geqslant2$.

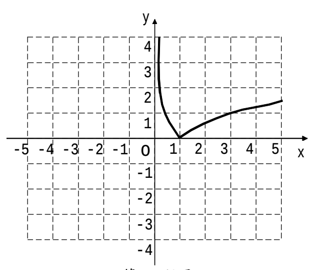
故实数a的取值范围是$[2,+\infty)$.

四、解答题

17.**解:**(1)由$\log_2(4^x-3)=x+1$,得$4^x-3=2^{x+1}$,即$(2^x)^2-2\cdot2^x-3=0$,即$(2^x+1)(2^x-3)=0$,所以$2^x=3$,得$x=\log_23$.

(2)原式$=(0.4^3)^{-\frac{1}{3}}+(-2)^{-3\times\frac{4}{3}}+(2^4)^{-0.75}-\frac{1}{2}\times\lg10^{-1}-2\log_23\times\log_32=\frac{10}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}-2=\frac{19}{16}$.

18.**解:**(1)函数$f(x)$的图象如图所示.



(第18题图)

(2)令$f(a)=f(2)$,即$|\log_3a|=|\log_32|$,

解得$a=\frac{1}{2}$,或$a=2$.

由(1)中图象可知,当$0<a<2$时,若$f(a)>f(2)$,则a的取值范围是$\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

19.**解:**(1)在$f(x)=\log_a(x+2)-1$中,令$x+2=1$,得$x=-1$,$f(-1)=-1$,所以函数$f(x)$的图象恒过定点$A(-1,-1)$,又$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$,所以$g(-1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$.

(2)$F(x)=f(x)-g(x)=\log_a(x+2)-1-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$,因为$F(x)$的图象过点$\left(2,\frac{1}{2}\right)$,所以$F(2)=\log_a4-1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,

又$a>0$,且$a\neq1$,解得$a=2$.所以$F(x)=\log_2(x+2)-1-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$.

因为$y=\log_2(x+2)$在定义域上是增函数,$y=-1-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$在定义域上也是增函数,所以$F(x)$在定义域上是增函数.又$F(1)=\log_23-2$,$F(2)=\frac{1}{2}$,所以$x\in[1,2]$时,$F(x)$的值域为$\left[\log_23-2,\frac{1}{2}\right]$.

20.**解:**(1)当$a=\frac{1}{2}$时,$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2+x)$.

由$x^2+x>0$,解得$x<-1$,或$x>0$.故$f(x)$的定义域为$(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$.

令$t=x^2+x=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$,可知该函数在$(-\infty,-1)$上单调递减,在$(0,+\infty)$上单调递增,而函数$y=\log_{\frac{1}{2}}t$为减函数,所以$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,-1)$,单调递减区间为$(0,+\infty)$.

(2)令$g(x)=x^2+2ax+2a-1=(x+a)^2-a^2+2a-1$,其中$a>0$,$a\neq1$,可知该函数在$(-\infty,-a)$上单调递减,在$(-a,+\infty)$上单调递增.

当$0<a<1$时,要使$f(x)$在$(-\infty,-2)$上单调递减,则需$g(x)$在$(-\infty,-2)$上单调递增,显然不可能;

当$a>1$时,要使$f(x)$在$(-\infty,-2)$上单调递减,则需$g(x)$在$(-\infty,-2)$上单调递减,且$g(x)>0$在$(-\infty,-2)$上恒成立,

故$\begin{cases}-a\geqslant-2,\\g(-2)=4-4a+2a-1\geqslant0,\end{cases}$解得$1<a\leqslant\frac{3}{2}$.

综上,实数a的取值范围为$\left(1,\frac{3}{2}\right]$.

21.**解:**(1)当$a=3$时,$f(x)=\log_2\left(\frac{1}{x}+3\right)$.

由$f(x)>0$,得$\frac{1}{x}+3>1$,即$\frac{2x+1}{x}>0$,

等价于$x(2x+1)>0$,解得$x<-\frac{1}{2}$,或$x>0$.

所以$f(x)>0$的解集为$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(0,+\infty)$.

(2)原方程即$\log_2(x+a)-\log_2[x^2-(2a-1)x+3a-1]=0$,则$x+a=x^2-(2a-1)x+3a-1>0$,即$x^2-2ax+2a-1=0$,得$(x-1)[x-(2a-1)]=0$, ①

解得$x=1$,或$x=2a-1$.

由已知,得方程①在区间$(-1,0)$上恰有一个实数解,则此解必为$x=2a-1$.

所以$\begin{cases}-1<2a-1<0,\\2a-1+a>0,\end{cases}$解得$\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$.

所以实数a的取值范围为$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$.

22.**解:**(1)因为$f(x)$为偶函数,所以$f(-x)=f(x)$,即$\log_4(4^{-x}+1)-kx=\log_4(4^x+1)+kx$,

得$2kx=\log_4\frac{4^x+1}{4^x}-\log_4(4^x+1)=\log_44^{-x}=-x$,

所以$2k=-1$,得$k=-\frac{1}{2}$.

(2)若$x\in[-2,0]$时,函数$f(x)$的图象恒在$g(x)$图象的上方,则$f(x)>g(x)$在$x\in[-2,0]$上恒成立,即$\log_4(4^x+1)-\frac{1}{2}x>\frac{1}{2}(x+a)$在$x\in[-2,0]$上恒成立,所以$a<2\log_4(4^x+1)-2x=\log_2(4^x+1)-\log_24^x=\log_2\left(1+\frac{1}{4^x}\right)$在$x\in[-2,0]$上恒成立.

由复合函数的单调性,可知$y=\log_2\left(1+\frac{1}{4^x}\right)$在$[-2,0]$上单调递减,所以当$x=0$时,$y$取得最小值为1.

所以$a<1$,即实数a的取值范围是$(-\infty,1)$.

(3)函数$y=-4^{f(x)-kx}+g(2^{x+2})=-4^{\log_4(4^x+1)}+\frac{1}{2}(2^{x+2}+a)=-(4^x+1)+2^{x+1}+\frac{1}{2}a=-(2^x)^2+2\cdot2^x+\frac{1}{2}a-1$.

设$t=2^x$,由$x\in[-1,2]$,得$t\in\left[\frac{1}{2},4\right]$,则函数$y=h(t)=-t^2+2t+\frac{1}{2}a-1=-(t-1)^2+\frac{1}{2}a$,

所以$h(t)$在$\left[\frac{1}{2},4\right]$上的最大值为$h(1)=\frac{1}{2}a$,最小值为$h(4)=\frac{1}{2}a-9$.所以$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a-9=2020$,解得$a=2029$.

第 11 期

第3~4版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.A

提示:由$f(x)=0$,得$(x^2-x)\ln|2x-3|=0$,所以$x^2-x=0$,或$\ln|2x-3|=0$,解得$x=0$,或$x=1$,或$x=2$.所以$f(x)$在区间$[-2,2]$上的零点个数为3.故选A.

2.C

提示:易知$f(1)=-1<0$,$f(2)=2>0$,所以$f(1)f(2)<0$,由零点存在定理可知,函数$f(x)$在区间$(1,2)$内必有零点.故选C.

3.D

提示:由题意,取区间中点为$\frac{-2+6}{2}=2$,则第二次所取区间可能是$[-2,2]$或$[2,6]$.故选D.

4.C

提示:对于A,由函数图象可知,y是单调函数,有唯一零点,且函数值在零点两侧异号,可用二分法求零点;同理,可知B,D中函数都可用二分法求零点;对于C,y不是单调函数,虽然也有唯一的零点,但函数值在零点两侧都是正号,故不能用二分法求零点.故选C.

5.C

提示:由题意,当$x=1$时,$y=a\cdot2^{x+1}=200$,得$a=50$.所以$y=50\cdot2^{x+1}$.当$x=3$时,$y=50\times2^{3+1}=800$.故选C.

6.C

提示:由题意,可知每个月的销售量基本呈倍数增长,符合指数型函数模型,故选C.

7.C

提示:根据二分法的原理,初始区间$[0,1]$的长度为1,每经过一次操作,区间长度变为原来的$\frac{1}{2}$,则经过n次操作后,区间的长度为$\frac{1}{2^n}$.由$\frac{1}{2^n}<0.01(n\in\mathbf{N}_+)$,得$n\geqslant7$.故选C.

8.D

提示:因为$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$是$\mathbf{R}$上的减函数,$y=\log_3x$是$(0,+\infty)$上的增函数,所以$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x-\log_3x$是$(0,+\infty)$上的减函数.又$f(a)f(b)f(c)<0$,且$0<a<b<c$,所以必有$f(a)f(b)>0$,$f(c)<0$.而$x_0$是方程$f(x)=0$的一个解,所以$f(x_0)=0$,所以$f(c)<f(x_0)$,故$x_0<c$.若$f(a)>0$,$f(b)>0=f(x_0)$,则$x_0>b$;若$f(a)<0=f(x_0)$,$f(b)<0$,则$x_0<a$.综上,故选D.

二、多项选择题

9.ACD

提示:因为$f(x)$的图象是一条连续不断的曲线,且$f(-1)f(1)<0$,$f(3)f(5)<0$,$f(5)f(7)<0$,所以一定包含$f(x)$的零点的区间是$(-1,1)$,$(3,5)$,$(5,7)$.故选ACD.

10.BC

提示:由$f(0.625)<0$,$f(0.75)>0$,$f(0.625)f(0.75)<0$,取区间$(0.625,0.75)$的中点$\frac{0.625+0.75}{2}=0.6875$,又$f(0.6875)<0$,则$f(0.6875)f(0.75)<0$.计算$|0.75-0.6875|=0.0625<0.1$,所以区间$[0.6875,0.75]$内的任何一个值都可作为方程$f(x)=0$的近似解.结合选项,可知选BC.

11.BC

提示:由已知,得$f(1)f(2)=(2-2-a)(4-1-a)=a(a-3)<0$,解得$0<a<3$.故选BC.

12.ACD

提示:由题意,得$60\leqslant20\lg\frac{p_1}{p_0}\leqslant90\Rightarrow10^3p_0\leqslant p_1\leqslant10^{\frac{9}{2}}p_0$;$50\leqslant20\lg\frac{p_2}{p_0}\leqslant60\Rightarrow10^{\frac{5}{2}}p_0\leqslant p_2\leqslant10^3p_0$;

$20\lg\frac{p_3}{p_0}=40\Rightarrow p_3=100p_0$,故C正确;$p_1\geqslant10^3p_0\geqslant p_2$,即$p_1\geqslant p_2$,故A正确;$p_2\leqslant10^3p_0=10p_3$,故B错误;$p_1\leqslant10^{\frac{9}{2}}p_0=100\times10^{\frac{5}{2}}p_0\leqslant100p_2$,即$p_1\leqslant100p_2$,故D正确.故选ACD.

三、填空题

13.10

提示:令$f(x)=\log_3(x-1)-2=0$,得$\log_3(x-1)=2$,解得$x=10$.所以$f(x)$的零点为10.

14.1.5

提示:设$f(x)=x^3+x-3$,因为$f(0)=-3<0$,$f(2)=7>0$,$f(1)=-1<0$,所以取区间中点$x=1$,则有根区间是$(1,2)$,那么下一个取的点是$x=\frac{1+2}{2}=1.5$.

15.7

提示:设至少需要x块这样的玻璃重叠起来才能满足要求,则$\left(\frac{9}{10}\right)^x<\frac{1}{2}$,两边取常用对数并化简,得$x(2\lg3-1)<-\lg2$,解得$x>-\frac{\lg2}{2\lg3-1}\approx\frac{0.301}{1-2\times0.477}\approx6.54$,由$x\in\mathbf{N}$,得$x$的最小值为7.

16.2;$4m-1$

提示:若待检测的总人数为8,经过4轮共7次检测后确定了所有感染者,则第1轮需检测1次,第2轮需检测2次,第3轮需检测2次,第4轮需检测2次,此时感染者人数最多为2人.若待检测的总人数为$2^m(m\geqslant3)$,且假设其中有不超过2名感染者,若没有感染者,则只需1次检测即可;若只有1名感染者,则只需$1+2\times m=2m+1$次检测;若只有2名感染者,要使检测次数最多,则第2轮检测时,2名感染者位于不同组,此时相当于两个待检测人数均为2^{m-1}的组,每组1名感染者,此时每组需要$1+2(m-1)=2m-1$次检测,所以此时两组共需$2(2m-1)=4m-2$次检测,故有2个感染者,且检测次数最多,共需$4m-2+1=4m-1$次检测.又$m\geqslant3$,采用"二分检测法"所需检测总次数记为n,则n的最大值为$4m-1$.

四、解答题

17.**解:**(1)当$a=b=-3$时,$f(x)=-2x^2-3x-1$.

令$f(x)=0$,解得$x=-1$,或$x=-\frac{1}{2}$.

所以函数$f(x)$的零点为-1和$-\frac{1}{2}$.

(2)因为$f(x)$恒有两个不同的零点,所以一元二次方程$(a+1)x^2+bx-1=0$恒有两个不同的实数解.

所以$a+1\neq0$,且$\Delta=b^2+4(a+1)>0$,

得$a\neq-1$,且$a>-\frac{b^2}{4}-1$.

因为$b<-1$,所以$-\frac{b^2}{4}-1<-\frac{5}{4}$,所以$a\geqslant-\frac{5}{4}$.

综上,实数a的取值范围为$\left[-\frac{5}{4},-1\right)\cup(-1,+\infty)$.

18.**解:**(1)因为函数$y=3^x$是$\mathbf{R}$上的增函数,$y=3x-8$是$\mathbf{R}$上的增函数,

所以$f(x)=3^x+3x-8$是$\mathbf{R}$上的增函数.

又$y=f(x)$的图象是一条连续不断的曲线,$f(1)=-2<0$,$f(2)=7>0$,则$f(1)f(2)<0$.

所以$f(x)$有且只有1个零点,即$y=f(x)$的零点个数是1.

(2)由(1)可知$f(x)$在区间$(1,2)$有且只有1个零点,设零点为x_0,

取区间中点$x_1=1.5$,计算得$f(1.5)=3^{1.5}+3\times1.5-8\approx5.196+4.5-8=1.696>0$.

因为$f(1)f(1.5)<0$,所以$x_0\in(1,1.5)$.

再取区间中点$x_2=1.25$,计算得$f(1.25)=3^{1.25}+3\times1.25-8\approx3.948+3.75-8=-0.302<0$,

因为$f(1.25)f(1.5)<0$,所以$x_0\in(1.25,1.5)$.

同理,可得$f(1.375)=3^{1.375}+3\times1.375-8\approx4.529+4.125-8=0.654>0$,$x_0\in(1.25,1.375)$.

因为$|1.375-1.25|=0.125<0.15$,所以$y=f(x)$在$[1,2]$内函数的零点的近似值可取为1.25.

19.**解:**(1)对于$f(x)=ax^2+bx$,

由题知,$f(1)=10$,$f(2)=30$,

即$\begin{cases}a+b=10,\\4a+2b=30,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=5,\\b=5.\end{cases}$

所以$f(x)=5x^2+5x(1\leqslant x\leqslant12,x\in\mathbf{N}_+)$.

(2)对于产品一,总盈利$g(x)=40x(1\leqslant x\leqslant12,x\in\mathbf{N}_+)$;

对于产品二,总盈利$f(x)=5x^2+5x(1\leqslant x\leqslant12,x\in\mathbf{N}_+)$.

令$g(x)>f(x)$,解得$1\leqslant x<7$;令$g(x)=f(x)$,解得$x=7$;令$g(x)<f(x)$,解得$7<x\leqslant12$.

所以当投资周期小于7个月时,选择产品一;当投资周期为7个月时,选择产品一或产品二都可以;当投资周期大于7个月时,选择产品二.

20.**解:**(1)由题意得,

当$15\leqslant t\leqslant30$时,$h=1700$,$y=\frac{3h}{25t}=\frac{204}{t}$;

当$3\leqslant t<15$时,设$h=k\left(2t-\frac{15}{t}+5\right)$,由当$t=15$时,$h=k\cdot\left(2\times15-\frac{15}{15}+5\right)=1700$,解得$k=50$,

所以$h=50\left(2t-\frac{15}{t}+5\right)$,$y=\frac{3h}{25t}=-\frac{90}{t^2}+\frac{30}{t}+12$.

综上,$y=\begin{cases}-\frac{90}{t^2}+\frac{30}{t}+12,3\leqslant t<15,\\\frac{204}{t},15\leqslant t\leqslant30.\end{cases}$

(2)当$15\leqslant t\leqslant30$时,$y=\frac{204}{t}$,此时y单调递减,故当$t=15$时,y取得最大值$\frac{68}{5}$;

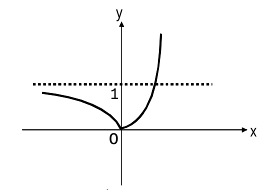
当$3\leqslant t<15$时,$y=-\frac{90}{t^2}+\frac{30}{t}+12=-90\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{29}{2}$,故当$\frac{1}{t}=\frac{1}{6}$,即$t=6$时,$y$取得最大值$\frac{29}{2}>\frac{68}{5}$.

综上,当发车时间间隔为6分钟时,每辆列车的日均车票收入最大,最大值为$\frac{29}{2}$万元.

21.(1)**证明:**当$m=0$时,$h(x)=f(x)-g(x)=x^2-3-e^x(x<0)$,因为$y=x^2-3$在$(-\infty,0)$上单调递减,$y=-e^x$在$(-\infty,0)$上单调递减,所以$h(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,又$h(-3)=6-\frac{1}{e^3}>0$,$h(-1)=-2-\frac{1}{e}<0$,即$h(-3)h(-1)<0$,所以$h(x)$在$(-\infty,0)$上恰有一个负零点.

(2)**解:**由$f(x)=0$,化简可得$(x-2)(x+m+2)=0$,解得$x=2$,或$x=-(m+2)$.

令$\varphi(x)=f(|g(x)|)=0$,则$|g(x)|=2$,或$|g(x)|=-(m+2)$.作出函数$y=|g(x)|=|e^x-1|$的图象如图所示,因为$|g(x)|=2$只有一个实数根,所以要使函数$\varphi(x)=f(|g(x)|)$恰有三个零点,则$|g(x)|=-(m+2)$有且仅有两个不同实数根,由图象可得,$0<-(m+2)<1$,解得$-3<m<-2$.故实数m的取值范围为$(-3,-2)$.



(第21题图)