所以 $f(x)\in\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$.

不等式 $g(2x)-af(x)-1\geqslant 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立,

即 $a\leqslant\frac{g(2x)-1}{f(x)}=\frac{2^{2x}+2^{-2x}-1}{2^x-2^{-x}}=\frac{(2^x-2^{-x})^2+1}{2^x-2^{-x}}=(2^x-2^{-x})+\frac{1}{2^x-2^{-x}}$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立.

设 $t=2^x-2^{-x}\left(t\geqslant\frac{3}{2}\right)$,由对勾函数可知 $h(t)=t+\frac{1}{t}$ 在 $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$ 上单调递增,

所以 $h(t)$ 的最小值为 $h\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{13}{6}$.所以 $a\leqslant\frac{13}{6}$.

故实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{13}{6}\right]$.

第 8 期

第2~3版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.C

提示:$\sqrt[4]{(-2)^4}=|-2|=2$.故选 C.

2.D

提示:$\left(\frac{a^2}{a^{\sqrt{2}}}\right)^{2+\sqrt{2}}=(a^{2-\sqrt{2}})^{2+\sqrt{2}}=a^{4-2}=a^2$.

故选 D.

3.D

提示:原式 $=\left(\frac{4}{9}\right)^{0.5}+3\times3^{-2}-1=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-1=0$.故选 D.

4.C

提示:因为 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,又 $\frac{1}{2}<\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$,所以 $1>a>b$,即 $b<a<1$.故选 C.

5.B

提示:根据指数函数 $y=a^x$ 的图象,当 $a>1$ 时,函数单调递增,当 $0<a<1$ 时,函数单调递减;当 $a>1$ 时,a 越大,函数的图象在 $x>0$ 时越靠近 y 轴,则③是函数 $y=3^x$ 的图象,④是函数 $y=2^x$ 的图象,根据对称性,①是函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象,故选B.

6.A

提示:因为 $a=(\sqrt{2})^3=2^{\frac{3}{2}}$,$b=2^{\sqrt{3}}$,$\frac{3}{2}<\sqrt{3}$,所以 $a<b$.因为 $b^{\sqrt{3}}=(2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}=2^3=8$,$c^{\sqrt{2}}=(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=3^2=9$,所以 $b^{\sqrt{3}}<c^{\sqrt{2}}$,又 $\sqrt{3}>\sqrt{2}$,所以 $b<c$.所以 $a<b<c$.

故选A.

7.C

提示:当 $a>1$ 时,函数 $y=a^x-2$ 是增函数,由 $-1\leqslant x\leqslant 1$,得 $\begin{cases}\frac{1}{a}-2=-\frac{5}{3},\\ a-2=1\end{cases}\Rightarrow a=3$;当 $0<a<1$ 时,函数 $y=a^x-2$ 是减函数,由 $-1\leqslant x\leqslant 1$,得 $\begin{cases}\frac{1}{a}-2=1,\\ a-2=-\frac{5}{3}\end{cases}\Rightarrow a=\frac{1}{3}$.

综上,$a=3$ 或 $\frac{1}{3}$.故选C.

8.A

提示:因为 $f(x)=2^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x$,$x\in\mathbf{R}$,所以 $f(-x)=2^{-x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x-2^x=-f(x)$,所以 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.由 $y=2^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数,可知 $f(x)=2^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数.所以由 $f(m)+f(n)>0$,得 $f(m)>-f(n)=f(-n)$,所以 $m>-n$,即 $m+n>0$.

故选 A.

二、多项选择题

9.BC

提示:$(-1)^{\frac{1}{3}}$ 写法不正确,$\sqrt[6]{(-1)^2}=1$,故 A 不符合题意;$\frac{1}{3^{-\frac{4}{3}}}=3^{\frac{4}{3}}$,故 B 符合题意;$4^{\frac{1}{4}}=2^{2\times\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$,故 C 符合题意;$4^{-\frac{3}{2}}=2^{2\times\left(-\frac{3}{2}\right)}=2^{-3}\neq\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$,故 D 不符合题意.故选 BC.

10.CD

提示:由 $2^x\leqslant 4$,解得 $x\leqslant 2$,所以不等式 $2^x\leqslant 4$ 成立的充分不必要条件是集合 $\{x|x\leqslant 2\}$ 的真子集,故选CD.

11.ABD

提示:对于A,定义域为 $\mathbf{R}$,值域为 $(0,+\infty)$,符合要求;对于B,定义域为 $\{x|x\neq 1\}$,值域为 $\{y|y\neq 0\}$,符合要求;对于C,由 $x-1>0$,得定义域为 $(1,+\infty)$,由 $\frac{1}{\sqrt{x-1}}>0$,得值域为 $(1,+\infty)$,不符合要求;对于D,定义域为 $\{x|x\neq 0\}$,因为 $\frac{1}{x}\neq 0$,所以值域为 $\{y|y>0$,且 $y\neq 1\}$,符合要求.故选ABD.

12.BC

提示:$f(x)=|a^x-1|$ 的图象是由 $y=a^x$ 的图象向下平移 1 个单位长度,再将 x 轴下方的图象翻折到 x 轴上方得到的,分 $0<a<1$ 和 $a>1$ 两种情况分别画出 $y=f(x)$ 的大致图象如图所示.

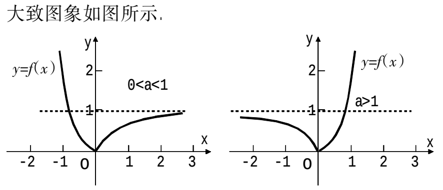


图 1　图 2

(第 12 题图)

由图可得,$f(x)$ 恒过定点 $(0,0)$,值域为 $[0,+\infty)$,且 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,故 A 错误,B,C 正确;若直线 $y=2a$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象有两个公共点,可得 $0<a<1$,且 $0<2a<1$,解得 $0<a<\frac{1}{2}$,故 D 错误.故选 BC.

三、填空题

13.6

提示:原式 $=2\times3^{\frac{1}{2}}\times(2^2\times3)^{\frac{1}{6}}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$=2^{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}=2\times3=6$.

14.$\sqrt{2}$

提示:设指数函数 $f(x)=a^x(a>0$,且 $a\neq 1)$,

则 $f(-2)=a^{-2}=\left(\frac{1}{a}\right)^2=4$,解得 $a=\frac{1}{2}$.

所以 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

故 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$.

15.$[-1,+\infty)$

提示:因为函数 $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+m}-3$ 的图象不经过第一象限,所以 $g(0)=\left(\frac{1}{3}\right)^m-3\leqslant 0$,即 $3^{-m}\leqslant 3$,解得 $m\geqslant -1$.所以 m 的取值范围为 $[-1,+\infty)$.

16.$(1,2)$

提示:若 $f(x)>0$,则 $\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}>0$,得 $0<a^x<1$,

所以当 $0<a<1$ 时,$x>0$;当 $a>1$ 时,$x<0$.

又不等式 $f(ax^2+bx+c)>0$ 的解集为 $(1,2)$,

所以 $a>1$,$ax^2+bx+c<0$,且 1 和 2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根.

所以 $-\frac{b}{a}=1+2=3$,得 $a=-\frac{1}{3}b$.

因为 $b\in(-6,1)$,所以 $a\in\left(-\frac{1}{3},2\right)$.

又 $a>1$,所以 $a\in(1,2)$.

四、解答题

17.**解**:(1)由 $f(x)=g(x)$,

得 $2x-1=4x+1$,解得 $x=-1$.

(2)由 $f(x)>g(x)$,

当 $0<a<1$ 时,可化为 $2x-1<4x+1$,解得 $x>-1$;

当 $a>1$ 时,可化为 $2x-1>4x+1$,解得 $x<-1$.

综上,当 $0<a<1$ 时,x 的取值范围为 $(-1,+\infty)$;

当 $a>1$ 时,x 的取值范围为 $(-\infty,-1)$.

18.**解**:(1)由 $x^2-mx+1=0$,知 $x\neq 0$,所以 $m=\frac{x^2+1}{x}=x+x^{-1}$.所以 $x^2+x^{-2}=(x+x^{-1})^2-2=m^2-2$.

(2)由(1)知 $x^2+x^{-2}=m^2-2$,所以 $x-x^{-1}=\pm\sqrt{(x-x^{-1})^2}=\pm\sqrt{x^2+x^{-2}-2}=\pm\sqrt{m^2-4}$.

19.**解**:(1)由 $f(2)=a^2=4$,$a>0$,且 $a\neq 1$,解得 $a=2$.

(2)设 $t=2^x$,则 $y=g(x)=2^{2x}-2^x-1=t^2-t-1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$.

因为 $x\in[0,2]$,所以 $t\in[1,4]$.

所以当 $t=1$ 时,y 取得最小值为 -1;当 $t=4$ 时,y 取得最大值为11.故 $g(x)$ 的值域为 $[-1,11]$.

20.**解**:(1)因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

所以 $f(-x)=-f(x)$,

即 $\frac{a-2^{-x}}{1+2^{-x}}=-\frac{a-2^x}{1+2^x}\Rightarrow\frac{a\cdot 2^x-1}{1+2^x}=\frac{2^x-a}{1+2^x}\Rightarrow a\cdot 2^x-1=2^x-a\Rightarrow a(2^x+1)=2^x+1$,所以 $a=1$.

(2)$f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数,证明如下:

由(1)知 $f(x)=\frac{1-2^x}{1+2^x}$.$\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$,且 $x_1<x_2$,

则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{1-2^{x_1}}{1+2^{x_1}}-\frac{1-2^{x_2}}{1+2^{x_2}}$

$=\frac{2(2^{x_2}-2^{x_1})}{(1+2^{x_1})(1+2^{x_2})}$.

由 $x_1<x_2$,得 $0<2^{x_1}<2^{x_2}$,所以 $2^{x_2}-2^{x_1}>0$,$1+2^{x_1}>0$,$1+2^{x_2}>0$.

所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$,即 $f(x_1)>f(x_2)$.

所以 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数.

(3)由(2)知,$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递减,

所以 $f(2)\leqslant f(x)\leqslant f(0)$,即 $-\frac{3}{5}\leqslant f(x)\leqslant 0$.

所以 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的值域为 $\left[-\frac{3}{5},0\right]$.

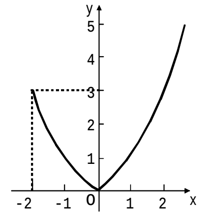
21.**解**:(1)当 $x<0$ 时,$-x>0$,则 $f(-x)=2^{-x}-1$,

又 $f(x)$ 为偶函数,所以 $f(x)=f(-x)=2^{-x}-1$.

故 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1,x<0,\\ 2^x-1,x\geqslant 0.\end{cases}$

(2)由(1)知 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1,x<0,\\ 2^x-1,x\geqslant 0,\end{cases}$

其在区间 $[-2,+\infty)$ 上的图象如图所示.



(第 21 题图)

当 $-2<a<0$ 时,$f(x)$ 在 $[-2,a]$ 上单调递减,$f(x)_{max}=f(-2)=3$,$f(x)_{min}=f(a)=2^{-a}-1$;

当 $0\leqslant a\leqslant 2$ 时,$f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上单调递减,在 $[0,a]$ 上单调递增,$f(x)_{max}=f(-2)=3$,$f(x)_{min}=f(0)=0$;

当 $a>2$ 时,$f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上单调递减,在 $[0,a]$ 上单调递增,$f(x)_{max}=f(a)=2^a-1$,$f(x)_{min}=f(0)=0$.

综上,当 $-2<a<0$ 时,$f(x)$ 的最大值为3,最小值为 $2^{-a}-1$;当 $0\leqslant a\leqslant 2$ 时,$f(x)$ 的最大值为3,最小值为0;当 $a>2$ 时,$f(x)$ 的最大值为 2^a-1,最小值为0.

22.**解**:(1)因为 $y=2^{x+1}$ 与 $y=-2^{1-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上均为增函数,所以 $f(x)=2^{x+1}-2^{1-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数.

又 $f(1)=3$,所以原不等式等价于 $f(f(x)-2)>f(1)$,

所以 $f(x)-2>1$,即 $f(x)>3=f(1)$.

所以 $x>1$.所以原不等式的解集是 $(1,+\infty)$.

(2)关于 x 的不等式 $f(x)>\frac{k}{2^{x-1}}+2$ 恒成立,

即 $2^{x+1}-2^{1-x}>\frac{k}{2^{x-1}}+2$ 恒成立,即 $k<2^{2x}-2^x-1$ 恒成立,

所以 $k<(2^{2x}-2^x-1)_{min}$.

因为 $y=2^{2x}-2^x-1=\left(2^x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$,

所以当 $2^x=\frac{1}{2}$,

即 $x=-1$ 时,y 取得最小值 $-\frac{5}{4}$.

所以 $k<-\frac{5}{4}$,即实数 k 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{5}{4}\right)$.

扫码免费下载习题讲解 ppt

第 5 期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A

提示:对于 A,$\forall x\in M$,在 N 中都存在唯一确定的元素与之对应,满足函数的定义,故 A 正确;取 $x=4$,可知对于 B,C,D 中的对应关系,在 N 中均不存在元素与之对应,不满足函数的定义,故 B,C,D 错误.故选 A.

2.D

提示:$y=x^2(x\in\mathbf{R})$ 与 $y=\frac{x^3}{x}=x^2(x\neq 0)$,定义域不同,不是同一函数,故图象不相同;$y=|x|(x\in\mathbf{R})$ 与 $y=(\sqrt{x})^2=x(x\geqslant 0)$,对应关系与定义域均不相同,不是同一函数,故图象不相同;函数 $y=\sqrt{x^2}=|x|$ 与 $y=x$ 的对应关系不同,不是同一函数,故图象不相同;$y=\sqrt[3]{(x+1)^3}=x+1$ 与 $y=x+1$ 的定义域与对应关系均相同,是同一函数,故图象相同.故选 D.

3.D

提示:对于 A,$2f(x)=2|x|$,$f(2x)=|2x|=2|x|=2f(x)$;对于 B,$2f(x)=-4x$,$f(2x)=-2(2x)=-4x=2f(x)$;对于 C,$2f(x)=2x-2|x|$,$f(2x)=2x-|2x|=2x-2|x|=2f(x)$;对于 D,$2f(x)=2x-2$,$f(2x)=2x-1\neq 2f(x)$.故选 D.

4.C

提示:由表格可知,$y=f(x)$ 的定义域是 $\{0.1,0.2,0.5,0.8,0.9\}$,值域是 $\{0,1\}$,$f(x)$ 的图象关于直线 $x=0.5$ 对称,故 A 错误,C 正确,D 错误;因为 $f(0.1)=1$,$f(0.5)=1$,所以 $f(f(0.1)-0.8f(0.5))=f(1-0.8\times1)=f(0.2)=0$,故 B 错误.故选 C.

5.C

提示:因为 $y=f(x)$ 为奇函数,所以 $f(-x)=-f(x)$,故有 $f(-a)=-f(a)$,即 $y=f(x)$ 的图象必过点 $(-a,-f(a))$.故选 C.

6.C

提示:当 $x>0$ 时,$f(x)=x^2-2x+5$,图象的对称轴为 $x=1$,所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[1,+\infty)$;当 $x\leqslant 0$ 时,$f(x)=x^2+2x+5$,图象的对称轴为 $x=-1$,所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-1,0]$.故选 C.

7.B

提示:因为对于任意的 $x_1,x_2\in[-1,3]$,且 $x_1\neq x_2$,都有 $[f(x_1)-f(x_2)](x_1-x_2)<0$,

所以当 $-1\leqslant x_1<x_2\leqslant 3$ 时,$f(x_1)>f(x_2)$,所以 $f(x)$ 在 $[-1,3]$ 上单调递减.

所以由 $f(1-2x)\geqslant f(x+1)$,得 $\begin{cases}-1\leqslant 1-2x\leqslant 3,\\ -1\leqslant x+1\leqslant 3,\\ 1-2x\leqslant x+1,\end{cases}$

解得 $0\leqslant x\leqslant 1$.故选 B.

8.A

提示:当 $x>1$ 时,$f(x)=x+\frac{9}{x+1}+a=x+1+\frac{9}{x+1}+a-1\geqslant 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{9}{x+1}}+a-1=5+a$,当且仅当 $x+1=\frac{9}{x+1}$,即 $x=2$ 时,等号成立,故此时 $f(x)$ 的最小值是 $f(2)$.又 $f(1)$ 是 $f(x)$ 的最小值,所以当 $x\leqslant 1$ 时,$f(x)=(x-a)^2$ 的最小值必是 $f(1)$.所以 $a\geqslant 1$,且 $f(1)=(1-a)^2\leqslant 5+a$,解得 $1\leqslant a\leqslant 4$.所以 a 的取值范围是 $[1,4]$.故选 A.

二、多项选择题

9.CD

提示:幂函数的解析式中自变量的系数必为 1,故 A 不符合题意;$y=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增,故 B 不符合题意;C,D 符合题意.故选 CD.

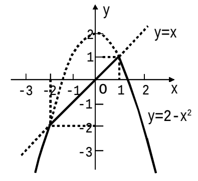
10.ABC

提示:集合 A 表示函数 $f(x)=x^2-1$ 的定义域,所以 $A=\mathbf{R}$;集合 B 表示函数 $f(x)=x^2-1$ 的值域,因为 $f(x)\geqslant -1$,所以 $B=[-1,+\infty)$;对于集合 C,因为 $f(x)=x^2-1$,所以 $f(f(x))=f(x^2-1)=(x^2-1)^2-1\geqslant -1$,所以 $C=[-1,+\infty)$.

故选 ABC.

11.AD

提示:在同一平面直角坐标系中画出函数 $y=2-x^2$,$y=x$ 的图象,如图所示,根据题意,图中实线部分即为 $f(x)$ 的图象.由 $2-x^2=x$,解得 $x_1=-2$,$x_2=1$.由图象可知,$f(x)$ 的最大值为 $f(1)=1$,无最小值.故选 AD.



(第 11 题图)

12.ACD

提示:由 $f(x+1)=\frac{1}{1-g(x)}$,可知 $g(x)\neq 1$,所以 $g(x+1)\neq 1$,即 $\frac{1}{1-f(x)}\neq 1$,所以 $f(x)\neq 0$,故 A 正确;$f(x+2)=\frac{1}{1-g(x+1)}=\frac{1}{1-\frac{1}{1-f(x)}}=1-\frac{1}{f(x)}$,所以 $f(x+4)=1-\frac{1}{f(x+2)}=1-\frac{1}{1-\frac{1}{f(x)}}=-\frac{1}{f(x)-1}$,无法得出 $f(x+4)=f(x)$ 恒成立,故 B 错误;同上得,$g(x+2)=1-\frac{1}{g(x)}$,所以 $g(x+6)=1-\frac{1}{g(x+4)}=1-\frac{1}{1-\frac{1}{g(x+2)}}=\frac{1}{1-g(x+2)}=\frac{1}{1-\left[1-\frac{1}{g(x)}\right]}=g(x)$,故 C 正确;$g(x+3)=\frac{1}{1-f(x+2)}=\frac{1}{1-\left[1-\frac{1}{f(x)}\right]}=f(x)$,故 D 正确.故选 ACD.

三、填空题

13.$[0,+\infty)$

提示:由题意,得 $x\geqslant 0$,故函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,+\infty)$.

14.$\sqrt{2}$

提示:设 $f(x)=x^\alpha$,由题意得 $f(9)=9^\alpha=3$,

故 $\alpha=\frac{1}{2}$,$f(x)=\sqrt{x}$.所以 $f(2)=\sqrt{2}$.

15.3

提示:$f(x)=\frac{2x+m}{x+1}=\frac{2(x+1)+m-2}{x+1}=2+\frac{m-2}{x+1}$.显然 $m\neq 2$,当 $m>2$ 时,$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减,则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(0)=m=3$;当 $m<2$ 时,$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增,则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)=\frac{2+m}{2}=3$,解得 $m=4$(舍去).综上,$m=3$.

16.①③

提示:函数 $y=x+\frac{3}{x}$ 是奇函数,图象的对称中心为 $(0,0)$,将 $y=x+\frac{3}{x}$ 的图象向右平移 2 个单位长度,再向上平移 1 个单位长度,可得 $f(x)=x-2+\frac{3}{x-2}+1=x+\frac{3}{x-2}-1$ 的图象,所以 $f(x)=x+\frac{3}{x-2}-1$ 图象的对称中心是 $(2,1)$,故①正确,②错误;若函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 成轴对称图形,图象向左平移 $|a|$ 个单位长度可得 $y=f(x+a)$ 关于 $x=0$ 即 y 轴对称,所以 $y=f(x+a)$ 为偶函数,反之也成立,故③正确,④错误.故所有正确结论的序号是①③.

四、解答题

17.**解**:(1)因为 $f(x)=\begin{cases}-x(x+4),x\leqslant 0,\\ x,x>0,\end{cases}$ 所以 $f(-1)=-(-1)\times(-1+4)=3$.所以 $f(f(-1))=f(3)=3$.

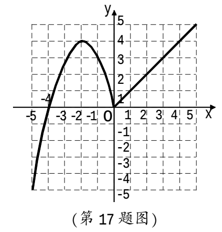
(2)当 $a\leqslant 0$ 时,由 $f(a)=3$,得 $-a(a+4)=3$,

解得 $a=-1$,或 $a=-3$;

当 $a>0$ 时,由 $f(a)=3$,得 $a=3$.

综上,$a=-1$,或 $a=-3$,或 $a=3$.

(3)函数 $f(x)$ 的图象如图所示,实数 m 的取值范围为 $(0,4)$.



(第 17 题图)

18.**解**:(1)要使函数 y 有意义,则 $\begin{cases}x-1\neq 0,\\ \frac{2}{x+1}\geqslant 0,\\ x+1\neq 0,\end{cases}$

解得 $x>-1$,且 $x\neq 1$.

所以函数 y 的定义域为 $(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(2)要使函数 y 有意义,则 $\begin{cases}2-x-x^2\geqslant 0,\\ x+1\geqslant 0,\\ \sqrt{x+1}-1\neq 0,\end{cases}$

解得 $-1\leqslant x\leqslant 1$,且 $x\neq 0$.

所以函数 y 的定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$.

19.**解**:(1)函数 $f(x)$ 是偶函数.证明如下:

函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,因为 $\forall x\in\mathbf{R}$,都有 $-x\in\mathbf{R}$,且 $f(-x)=|-x+2|+|-x-2|=|x-2|+|x+2|=f(x)$,所以函数 $f(x)$ 是偶函数.

(2)由(1)知函数 $f(x)$ 是偶函数,

因为 $f(x^2-4x+1)=f(x-5)$,所以 $|x^2-4x+1|=|x-5|$,

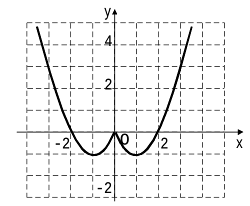
即 $x^2-4x+1=x-5$,或 $x^2-4x+1=5-x$,

解得 $x_1=2$ 或 $x_2=3$,$x_3=-1$ 或 $x_4=4$,

即该方程的解为 $x=-1,2,3,4$.

20.**解**:(1)因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,

所以 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称.补充完整图象如图所示.



(第 20 题图)

因为当 $x\leqslant 0$ 时,$f(x)=x^2+2x$,

所以当 $x>0$ 时,$-x<0$,

可得 $f(-x)=(-x)^2+2(-x)=x^2-2x$,

又 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,

所以 $f(x)=f(-x)=x^2-2x$.

所以 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x,x\leqslant 0,\\ x^2-2x,x>0,\end{cases}$ 其单调递减区间为 $(-\infty,-1)$,$(0,1)$,单调递增区间为 $(-1,0)$,$(1,+\infty)$.

(2)当 $x\in[1,2]$ 时,$g(x)=x^2-2x-2ax+1=(x-1-a)^2-a^2-2a$,其图象的开口向上,对称轴为直线 $x=1+a$,

当 $1+a\leqslant 1$,即 $a\leqslant 0$ 时,$g(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增,

所以 $g(x)$ 的最小值为 $g(1)=-2a$;

当 $1+a\geqslant 2$,即 $a\geqslant 1$ 时,$g(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递减,

所以 $g(x)$ 的最小值为 $g(2)=1-4a$;

当 $1<1+a<2$,即 $0<a<1$ 时,$g(x)$ 的最小值为 $g(1+a)=-a^2-2a$.故 $g(x)_{min}=\begin{cases}-2a,a\leqslant 0,\\ -a^2-2a,0<a<1,\\ 1-4a,a\geqslant 1.\end{cases}$

21.**解**:(1)因为点 $A(1,5)$,$B(2,4)$ 是 $f(x)$ 图象上的两点,

所以 $\begin{cases}a+b=5,\\ 2a+\frac{b}{2}=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=4.\end{cases}$ 故 $f(x)=x+\frac{4}{x}$.

(2)$f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增.理由如下:

$\forall x_1,x_2\in[2,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,

则 $f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1+\frac{4}{x_1}\right)-\left(x_2+\frac{4}{x_2}\right)$

$=(x_1-x_2)+\left(\frac{4}{x_1}-\frac{4}{x_2}\right)=\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-4)}{x_1x_2}$.

因为 $x_1<x_2$,所以 $x_1-x_2<0$.

因为 $x_1,x_2\in[2,+\infty)$,所以 $x_1>2$,$x_2>2$,

所以 $x_1x_2>4>0$,$x_1x_2-4>0$.

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$.

所以 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增.

(3)由(2)可得 $f(x)=x+\frac{4}{x}$ 在 $(0,2]$ 上单调递减,在 $[2,+\infty)$ 上单调递增,且 $f(2)+2=6$,$f(1)+2=f(4)+2=7$,所以存在区间 $[a,b]$,使得 $f(x)+2$ 的值域为 $[6,7]$,此区间长度的最大值为 $4-1=3$.

22.**解**:(1)因为函数 $h(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,函数 $\varphi(x)=h(2x-1)$,

所以要使函数 $\varphi(x)$ 有意义,需满足 $2x-1>0$,解得 $x>\frac{1}{2}$.所以函数 $\varphi(x)$ 的定义域为 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

又 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)\subseteq(0,+\infty)$,所以函数 $\varphi(x)$ 是函数 $h(x)$ 的好函数.

(2)记函数 $u(x)$ 的定义域为 M,根据题意,得 $M=\{x|-x^2-ax+a+1>0\}$,且 $M\subseteq(0,+\infty)$.

由 $-x^2-ax+a+1>0$,得 $x^2+ax-a-1<0$,

即 $(x-1)(x+a+1)<0$.

由函数的定义知 M 为非空数集,

故 $a+1\neq-1$,得 $a\neq-2$.

当 $a<-2$ 时,$M=(1,-a-1)$,显然满足 $M\subseteq(0,+\infty)$;

当 $a>-2$ 时,$M=(-a-1,1)$,又 $M\subseteq(0,+\infty)$,则 $-a-1\geqslant0$,解得 $-2<a\leqslant-1$.

综上,实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-2)\cup(-2,-1]$.

第 6 期

第2~3版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.D

提示:对于 A,取常数函数 $f(x)=1$,其值域为 $\{1\}$,是有限集,故 A 错误;对于 B,函数的值域中的每一个数可以在定义域中有多个自变量与其对应,故 B 错误;对于 C,如定义域和值域均为 $\{0,1\}$ 的函数,对应关系可以是 $x\to x,x\in\{0,1\}$,还可以是 $x\to x^2,x\in\{0,1\}$,故C错误;对于 D,根据函数的定义,可知 D 正确.故选 D.

2.A

提示:由已知,得 $f(3)=3-2=1$,因此 $f(f(3))=f(1)=1^2=1$.故选 A.

3.C

提示:对于 $f(x)=\frac{1}{x}$,$x\neq0$,故 A 不符合题意;对于 $f(x)=-|x|$,定义域为 $\mathbf{R}$,$f(-x)=-|-x|=-|x|=f(x)$,该函数为偶函数,故 B 不符合题意;对于 $f(x)=-x^3$,定义域为 $\mathbf{R}$,$f(-x)=-(-x)^3=x^3=-f(x)$,该函数为奇函数,又 $f(x)=-x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数,所以 $f(x)=-x^3$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减,故 C 符合题意;对于 $f(x)=-x^2$,定义域为 $\mathbf{R}$,$f(-x)=-(-x)^2=-x^2=f(x)$,该函数是偶函数,故 D 不符合题意.

故选 C.

4.A

提示:由幂函数的性质,可知 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$,且 $f(x)$ 在定义域上是增函数.

由 $f(x)>f(8x-16)$,得 $x>8x-16\geqslant0$,解得 $2\leqslant x<\frac{16}{7}$.故选 A.

5.C

提示:函数 y 的定义域为 $\{x|4+3x-x^2\neq0\}=\{x|x\neq-1$ 且 $x\neq4\}$.

设 $t=-x^2+3x+4=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$,则 $t\in(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{25}{4}\right]$,由二次函数的性质可知,$t$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$,$\left(-1,\frac{3}{2}\right]$,单调递减区间为 $\left[\frac{3}{2},4\right)$,$(4,+\infty)$,又因为 $y=\frac{1}{t}$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $\left(0,\frac{25}{4}\right]$ 上单调递减,由复合函数的单调性可知,函数 $y=\frac{1}{4+3x-x^2}$ 的单调递增区间为 $\left[\frac{3}{2},4\right)$ 和 $(4,+\infty)$.故选 C.

6.C

提示:观察四个选项,定义域均为 $\{x|x\neq\pm1\}$,故图象中的两虚线为 $x=\pm1$.由题图可知,当 $x\in(0,1)$ 时,$f(x)<0$,对于 B,$f\left(\frac{1}{2}\right)=1>0$,应排除;对于 D,$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}>0$,应排除;对于 A,当 $x>0$ 时,$f(x)=\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$,此函数图象是由函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象向右平移 1 个单位长度,再向上平移 1 个单位长度得到的,所以当 $x>1$ 时,$f(x)>1$ 恒成立,而题图中,当 $x>1$ 时,$f(x)$ 可以小于 1,所以排除 A.故选 C.

7.D

提示:由 $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=5x+\frac{4}{x}$,取 $\frac{1}{x}$ 替换 x,则 $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{5}{x}+4x$.联立解得 $f(x)=x+\frac{2}{x}$,$x\in(0,+\infty)$.所以 $f(x)=x+\frac{2}{x}\geqslant2\sqrt{x\cdot\frac{2}{x}}=2\sqrt{2}$,当且仅当 $x=\frac{2}{x}$,即 $x=\sqrt{2}$ 时,等号成立.所以 $f(x)$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.故选 D.

8.D

提示:由 $f(x)=f(4-x)$,得 $f(2+x)=f(4-(2+x))=f(2-x)$,所以 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称.又 $y=|x-2|$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称,所以 $x_1+x_2+x_3+x_4=4\times2=8$.

故选 D.

二、多项选择题

9.BD

提示:由题表可知,由方程 $f(g(x))=1$,得 $g(x)=3$,所以 $x=2$,或 $x=4$.故选 BD.

10.ACD

提示:根据一次函数 $y=-2x(-1\leqslant x\leqslant0)$ 与幂函数 $y=\sqrt{x}(0<x\leqslant1)$ 的图象,可知 D 正确;$y=f(x-1)$ 的图象是将 $y=f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度得到的,故 A 正确;对于 $y=f(|x|)$,当 $x>0$ 时,其图象与 $y=f(x)(x>0)$ 的图象相同,故 B 错误;$y=f(-x)$ 的图象与 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称,故 C 正确.故选 ACD.

11.ABD

提示:当 $x<a$ 时,由 $f(x)$ 单调递增,得 $a>0$;当 $x\geqslant a$ 时,$f(x)=x^2-2ax+1=(x-a)^2+1-a^2$,此时 $f(x)$ 必单调递增,又 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数,所以 $a^2-1\leqslant a^2-2a^2+1$,结合 $a>0$,解得 $0<a\leqslant1$.结合选项,可知选 ABD.

12.ABC

提示:$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$f(0)=0$,当 $x>0$ 时,$-x<0$,则 $f(-x)=\frac{-x}{1-(-x)}=-\frac{x}{1+x}=-f(x)$,当 $x<0$ 时,$-x>0$,则 $f(-x)=\frac{-x}{1+(-x)}=-\frac{x}{1-x}=-f(x)$,所以 $\forall x\in\mathbf{R}$,$f(-x)=-f(x)$,故 $f(x)$ 为奇函数,A正确;当 $x\geqslant0$ 时,$f(x)=\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}$,此时 $f(x)$ 单调递增,因为 $f(x)$ 为奇函数,其图象关于原点对称,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上也单调递增,故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数,B正确;当 $x\geqslant0$ 时,$f(x)=1-\frac{1}{1+x}\in[0,1)$,则当 $x\leqslant0$ 时,$f(x)=-f(-x)\in(-1,0]$,故 $f(x)\in(-1,1)$,即 $|f(x)|<1$,故C正确,D错误.故选ABC.

三、填空题

13.$x=\frac{1}{2}$

提示:结合 $y=|x|$ 的图象,可得 $f(x)$ 图象的对称轴方程为 $x=\frac{1}{2}$.

14.4

提示:因为 $f(x)$ 是幂函数,所以 $m^2-m-1=1$,解得 $m=-1$ 或 $m=2$.

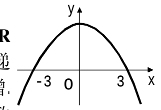
当 $m=-1$ 时,$f(x)=\frac{1}{x}$,图象不关于 y 轴对称,舍去;当 $m=2$ 时,$f(x)=x^2$,图象关于 y 轴对称,故 $f(m)=2^2=4$.

15.$f(x)=x+1$

提示:设一次函数 $f(x)=kx+b$,则 $xf(x+1)+f(x^2)=x[k(x+1)+b]+(kx^2+b)=2kx^2+(k+b)x+b=2x^2+2x+1$,所以 $\begin{cases}2k=2,\\k+b=2,\\b=1.\end{cases}$ 解得 $k=1$,$b=1$.所以 $f(x)=x+1$.

16.$(-1,0)\cup(5,+\infty)$

提示:因为函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,且在 $[0,+\infty)$ 上单调递减,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递增.由 $f(3)=0$,得 $f(-3)=0$.画出 $f(x)$ 的大致图象如图所示.



(第 16 题图)

由图可知,对于 $\frac{f(x-2)}{x}<0$,当 $x<0$ 时,$f(x-2)>0$,得 $-3<x-2<3$,解得 $-1<x<0$;当 $x>0$ 时,$f(x-2)<0$,得 $x-2<-3$,或 $x-2>3$,解得 $x>5$.

综上,原不等式的解集为 $(-1,0)\cup(5,+\infty)$.

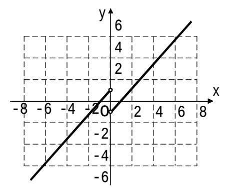
四、解答题

17.**解**:(1)当 $x<0$ 时,$f(x)=x-\frac{|x|}{x}=x-\frac{-x}{x}=x+1$;

当 $x>0$ 时,$f(x)=x-\frac{|x|}{x}=x-\frac{x}{x}=x-1$.

所以 $f(x)=\begin{cases}x+1,x<0,\\x-1,x>0.\end{cases}$

(2)$f(x)$ 的图象如图所示.



(第 17 题图)

(3)$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,值域为 $\mathbf{R}$,单调递增区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$.

18.**解**:(1)由已知,得 $h(x)=\frac{x^2-3x}{\sqrt{2x+1}}\cdot\frac{\sqrt{2x+1}}{x-3}=x$,其中 $\begin{cases}x-3\neq0,\\2x+1>0,\end{cases}$ 即 $x>-\frac{1}{2}$,且 $x\neq3$,所以 $y=h(x)$ 与 $y=H(x)$ 的定义域不相同,二者不是同一函数.

(2)由(1)知 $h(x)=x$,其中 $x>-\frac{1}{2}$,且 $x\neq3$,

所以 $G(x)=h(x)-\sqrt{2h(x)+1}=x-\sqrt{2x+1}$,其中 $x>-\frac{1}{2}$,且 $x\neq3$.

令 $t=\sqrt{2x+1}$,则 $x=\frac{t^2-1}{2}$,$t>0$ 且 $t\neq\sqrt{7}$,所以 $y=G(x)=\frac{t^2-1}{2}-t=\frac{1}{2}(t-1)^2-1\geqslant-1$,且 $y\neq3-\sqrt{7}$.

所以 $G(x)$ 的值域为 $[-1,3-\sqrt{7})\cup(3-\sqrt{7},+\infty)$.

19.(1)**解**:因为 $f(x)=x^{\alpha}$ 的图象经过点 $A\left(\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$,所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}=\sqrt{2}$,即 $2^{-\alpha}=2^{\frac{1}{2}}$,解得 $\alpha=-\frac{1}{2}$.

(2)**证明**:由(1)可得 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{\sqrt{x_1}}-\frac{1}{\sqrt{x_2}}=\frac{\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1x_2}}=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_1x_2}(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})}$.

由 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,得 $\sqrt{x_1x_2}>0$,$\sqrt{x_2}>0$,$\sqrt{x_1}>0$,即 $\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}>0$;

由 $x_1<x_2$,得 $x_2-x_1>0$.所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$,

即 $f(x_1)>f(x_2)$.所以 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调递减.

20.**解**:(1)$f(x)=ax^2+bx+1$,由 $f(-1)=0$,

得 $a-b+1=0$; ①

由函数 $f(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$,得 $\frac{4a-b^2}{4a}=0$. ②

联立①②,解得 $a=1$,$b=2$.所以 $f(x)=x^2+2x+1$.

因为 $y=F(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

所以 $F(-x)=-F(x)$,则 $F(0)=0$.

当 $x>0$ 时,$F(x)=f(x)=x^2+2x+1$,当 $x<0$ 时,$-x>0$,所以 $F(-x)=(-x)^2+2(-x)+1=x^2-2x+1$,则 $F(x)=-x^2+2x-1$.

综上,$F(x)=\begin{cases}-x^2+2x-1,x<0,\\0,x=0,\\x^2+2x+1,x>0.\end{cases}$

(2)由(1)可得 $g(x)=F(x)-kx$

$=\begin{cases}-x^2+(2-k)x-1,x<0,\\0,x=0,\\x^2+(2-k)x+1,x>0.\end{cases}$

当 $x<0$ 时,$g(x)$ 的图象开口向下,对称轴为 $x=\frac{2-k}{2}$;

当 $x>0$ 时,$g(x)$ 的图象开口向上,对称轴为 $x=-\frac{2-k}{2}$.

要使 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调函数,显然 $g(x)$ 只能单调递增,所以 $\frac{2-k}{2}\geqslant0$,且 $-\frac{2-k}{2}\leqslant0$,解得 $k\leqslant2$.

所以实数 k 的取值范围为 $(-\infty,2]$.

21.(1)**解**:在条件①中,令 $x=y=0$,

得 $f(0)=f(0)+f(0)+2$,解得 $f(0)=-2$;

令 $x=1$,$y=-1$,得 $f(0)=f(1)+f(-1)+2$,又 $f(1)=3$,

解得 $f(-1)=-7$.

(2)**证明**:由(1)得 $f(0)=-2$,令 $g(x)=f(x)+2$,

对于 $\forall x\in\mathbf{R}$,都有 $-x\in\mathbf{R}$,且 $g(x)+g(-x)=f(x)+2+f(-x)+2=f(x-x)+2=f(0)+2=0$,

即 $g(-x)=-g(x)$,所以函数 $y=f(x)+2$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

$\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$,且 $x_1>x_2$,有 $x_1-x_2>0$,

则由条件②得 $f(x_1-x_2)<-2$,

所以 $g(x_1)-g(x_2)=g(x_1)+g(-x_2)$

$=f(x_1)+2+f(-x_2)+2=f(x_1-x_2)+2<0$,

即 $g(x_1)<g(x_2)$,所以函数 $y=f(x)+2$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数.

综上,函数 $y=f(x)+2$ 既是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,同时又是 $\mathbf{R}$ 上的减函数.

22.**解**:若选①,因为偶函数 $f(x)$ 的定义域为 $[b-1,b+1]$,所以 $b-1+b+1=0$,解得 $b=0$.

若选②,因为一次函数 $f(x)=x+b$ 是增函数,所以 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值为 $f(2)=2+b=2$,解得 $b=0$.

(1)$g(x)$ 是奇函数.证明如下:

由上得 $g(x)=\frac{x}{x^2+1}$,$g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

因为 $\forall x\in\mathbf{R}$,都有 $-x\in\mathbf{R}$,且 $g(-x)=\frac{-x}{(-x)^2+1}=-\frac{x}{x^2+1}=-g(x)$,所以 $g(x)$ 是奇函数.

(2)因为对任意的 $x_1\in\mathbf{R}$,总存在 $x_2\in[-2,2]$,使得 $g(x_1)=h(x_2)$ 成立,

记 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的值域为集合 A,$h(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的值域为集合 B,则 $A\subseteq B$.

由 $g(x)=\frac{x}{x^2+1}$,得 $g(0)=0$.

当 $x>0$ 时,$g(x)=\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}}=\frac{1}{2}$,当且仅当 $x=\frac{1}{x}$,即 $x=1$ 时,等号成立,

又 $g(x)>0$,所以 $g(x)\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$.

由(1)知 $g(x)$ 是奇函数,所以当 $x<0$ 时,$g(x)\in\left[-\frac{1}{2},0\right)$.综上,$g(x)\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$,即 $A=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

因为 $h(x)=-x-2c$ 在 $[-2,2]$ 上单调递减,所以 $B=[-2-2c,2-2c]$.

因为 $A\subseteq B$,所以 $\begin{cases}-2-2c\leqslant-\frac{1}{2},\\2-2c\geqslant\frac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $-\frac{3}{4}\leqslant c\leqslant\frac{3}{4}$.

故实数 c 的取值范围是 $\left[-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right]$.

第 7 期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B

提示:$8^{\frac{2}{3}}+9^{-\frac{1}{2}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}+(3^2)^{-\frac{1}{2}}=2^2+3^{-1}=4+\frac{1}{3}=\frac{13}{3}$.

故选 B.

2.A

提示:依题意,可知 $a\geqslant0$,所以 $\sqrt[3]{-a}\cdot\sqrt[6]{a}=-a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{6}}=-a^{\frac{1}{2}}=-\sqrt{a}$.故选 A.

3.A

提示:由 $10^m=\frac{1}{4}$,$10^n=\frac{1}{3}$,可得 $10^{m-2n}=\frac{10^m}{10^{2n}}=\frac{10^m}{(10^n)^2}=\frac{9}{4}$.故选 A.

4.D

提示:若 $0<a<1$,则 $y=a^x$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递减,根据题意,有 $a-a^2=2$,方程无解;若 $a>1$,则 $y=a^x$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递增,根据题意,有 $a^2-a=2$,解得 $a=2$.故选D.

5.B

提示:由题图可得 $0<b<a<1<d<c$,则由不等式的性质,得 $b+d<a+c$.故选 B.

6.A

提示:$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.因为 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2ax}$ 在 $[1,3]$ 上单调递减,$y=\left(\frac{1}{2}\right)^t$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,由复合函数的单调性知,函数 $t=x^2-2ax=(x-a)^2-a^2$ 需在 $[1,3]$ 上单调递增,则 $a\leqslant1$.故选 A.

7.A

提示:因为 $0<a<1$,所以 $y=a^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数,且经过定点 $(0,1)$.因为 $b<-1$,所以 $y=a^x+b$ 的图象可看成把 $y=a^x$ 的图象向下平移 $-b(-b>1)$ 个单位长度得到,结合函数 $y=a^x$ 的图象,可知函数 $y=a^x+b$ 的图象经过第二、第三、第四象限,不经过第一象限.故选A.

8.D

提示:当 $x>0$ 时,$f(x)=x+\frac{1}{x}\geqslant2$,当且仅当 $x=\frac{1}{x}$,即 $x=1$ 时,等号成立.

所以若 $f(x)$ 的最小值为 2,则当 $x\leqslant0$ 时,$4^x-2^{x+2}+m\geqslant2$ 恒成立,即 $m\geqslant-4^x+4\cdot2^x+2$ 在 $(-\infty,0]$ 上恒成立.

令 $t=2^x$,则 $t\in(0,1]$,$g(t)=-t^2+4t+2=-(t-2)^2+6$ 在 $(0,1]$ 上单调递增,

所以 $g(t)$ 在 $(0,1]$ 上的最大值为 $g(1)=5$.所以 $m\geqslant5$.故选 D.

二、多项选择题

9.ACD

提示:由已知,得 $\begin{cases}a>0,\\a\neq1,\\a^2-4a+4=1,\end{cases}$ 解得 $a=3$.故选 ACD.

10.CD

提示:对于 A,$(-1)^{\frac{1}{3}}$,$(-1)^{\frac{2}{6}}$ 写法不正确,故 A 不符合题意;对于 B,0 的负分数指数幂没有意义,故 B 不符合题意;对于 C,$4^{\frac{1}{4}}=(2^2)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}$,故 C 符合题意;对于 D,$\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{4}}=3^{\frac{1}{4}}$,故 D 符合题意.故选 CD.

11.BC

提示:对于 A,因为函数 $y=1.7^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,且 $2.5<3$,所以 $1.7^{2.5}<1.7^3$,故 A 错误;对于 B,$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}=2^{-\frac{2}{3}}$,因为函数 $y=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,且 $-\frac{2}{3}>-\frac{4}{3}$,所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}=2^{-\frac{2}{3}}>2^{-\frac{4}{3}}$,故 B 正确;对于 C,因为 $1.7^{0.3}>1.7^0=1$,$0.9^{3.1}<0.9^0=1$,所以 $1.7^{0.3}>0.9^{3.1}$,故 C 正确;对于D,因为函数 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,且 $\frac{3}{4}>\frac{2}{3}$,所以 $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}<\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$,又易知函数 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,$\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$,所以 $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$,所以 $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}<\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$,故 D 错误.

故选BC.

12.AC

提示:令 $1-x=0$,得 $x=1$,此时 $f(1)=a^0+1=2$,所以函数 $f(x)$ 恒过定点 $(1,2)$,故A正确;因为 a 的值不确定,所以 $f(x)$ 的单调性无法确定,故B错误;因为 $a^{1-x}>0$,所以 $a^{1-x}+1>1$,即 $f(x)$ 的值域为 $(1,+\infty)$,故C正确;由指数函数的性质可知,函数 $f(x)$ 不具有奇偶性,故D错误.

故选AC.

三、填空题

13.9

提示:原式 $=\left(\frac{3^2}{3^{\sqrt{2}}}\right)^{2+\sqrt{2}}=(3^{2-\sqrt{2}})^{2+\sqrt{2}}$

$=3^{(2-\sqrt{2})\times(2+\sqrt{2})}=3^2=9$.

14.$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

提示:根据题意,结合指数函数的图象,可知 $m^2-3>1$,解得 $m<-2$,或 $m>2$.故实数 m 的取值范围是 $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

15.$[0,1]$

提示:由 $f(2^x)$ 的定义域为 $[0,2]$,得 $0\leqslant x\leqslant2$,根据 $y=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数,得 $1\leqslant2^x\leqslant4$.

对于函数 $f(4^{1-x})$,有 $1\leqslant4^{1-x}\leqslant4$,根据 $y=4^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数,得 $0\leqslant1-x\leqslant1$,解得 $0\leqslant x\leqslant1$.

所以函数 $f(4^{1-x})$ 的定义域为 $[0,1]$.

16.3

提示:因为 $a>1$,所以对 $\forall x\in[a,2a]$,有 $a^x\in[a^a,a^{2a}]$,且 $a^x>0$.由 $y\cdot a^x=a^c$,得 $y=\frac{a^c}{a^x}$,故 $y\in[a^{c-2a},a^{c-a}]$.又因为 $y\in[a,a^4]$,所以 $\begin{cases}c-2a=1,\\c-a=4,\end{cases}$ 两式相减,得 $a=3$.

四、解答题

17.**解**:(1)原式 $=-18a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\left(-\frac{2}{6}\right)}=-18ab^{\frac{7}{6}}$.

(2)原式 $=(\sqrt{6})^6+1-4\times\frac{7}{4}+\pi-2=216+1-7+\pi-2=208+\pi$.

18.**解**:(1)因为 $a>0$,且 $a^{2x}=\sqrt{2}+1$,

所以 $(a^x+a^{-x})(a^x-a^{-x})=a^{2x}-a^{-2x}$

$=\sqrt{2}+1-\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)=2$.

(2)$\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}=\frac{\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{2}+1-1}$

$=\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$.

(3)$\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{(a^x+a^{-x})(a^{2x}-a^xa^{-x}+a^{-2x})}{a^x+a^{-x}}$

$=a^{2x}-a^xa^{-x}+a^{-2x}=\sqrt{2}+1-1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=2\sqrt{2}-1$.

19.**解**:(1)当 $a=1$ 时,$f(x)=2^{x^2+4x+2}$.

因为 $x^2+4x+2=(x+2)^2-2\geqslant-2$,所以 $f(x)\geqslant2^{-2}=\frac{1}{4}$.

故 $f(x)$ 的值域为 $\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$.

(2)令 $t=ax^2+4x+2$,因为指数函数 $y=2^t$ 在其定义域内是增函数,所以要使 $f(x)$ 有最大值16,则 t 的最大值为4,故 $a<0$,且 $\frac{4a\times2-4^2}{4a}=4$,解得 $a=-2$.

20.**解**:(1)$f(x)$ 为偶函数.证明如下:

因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$\forall x\in\mathbf{R}$,都有 $-x\in\mathbf{R}$,

且 $f(-x)=-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{|-x|}+2=-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}+2=f(x)$,

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2)当 $x\geqslant0$ 时,$f(x)=-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}+2=-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+2=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+2$,将指数函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象向右平移 1 个单位长度,然后关于 x 轴对称,最后向上平移 2 个单位长度,取 y 轴右侧的部分,可得 $f(x)$ 在 y 轴右侧的图象,由(1)知 $f(x)$ 为偶函数,所以 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称,由此可得 $f(x)$ 的图象如图 1 所示,由图 1 可知 $f(x)$ 的值域为 $[0,2)$.

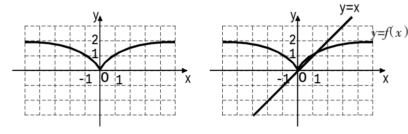


图 1　图 2

(第 20 题图)

(3)在同一平面直角坐标系中画出 $y=f(x)$ 与 $y=x$ 的图象,如图 2 所示,结合图 2,可知不等式 $f(x)>x$ 的解集为 $(-\infty,0)\cup(0,1)$.

21.**解**:(1)因为 $y=f(x)$ 是奇函数,所以 $f(-x)=-f(x)$,

即 $2^{-x}+a\cdot2^x=-2^x-a\cdot2^{-x}$,即 $(a+1)(2^x+2^{-x})=0$.

因为 $2^x+2^{-x}>0$,所以 $a+1=0$,解得 $a=-1$.

(2)因为 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,2]$ 上严格单调递减,

所以对 $\forall x_1<x_2\leqslant2$,都有 $f(x_1)-f(x_2)>0$,

即 $f(x_1)-f(x_2)=(2^{x_1}-2^{x_2})\left(1-\frac{a}{2^{x_1}\cdot2^{x_2}}\right)>0$ 恒成立.

由 $2^{x_1}-2^{x_2}<0$,知 $1-\frac{a}{2^{x_1}\cdot2^{x_2}}<0$ 恒成立,即 $2^{x_1}\cdot2^{x_2}<a$ 恒成立.

当 $x_1<x_2\leqslant2$ 时,$2^{x_1}\cdot2^{x_2}<16$,所以 $a\geqslant16$,即 a 的取值范围是 $[16,+\infty)$.

22.**解**:(1)因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,$g(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,且 $f(x)+g(x)=2^{x+1}$,

所以 $f(-x)+g(-x)=-f(x)+g(x)=2^{-x+1}$.

联立以上两式,解得 $f(x)=2^x-2^{-x}$,$g(x)=2^x+2^{-x}$.

(2)由 $y=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,$y=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,

可知 $f(x)=2^x-2^{-x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增,