因为$x\in(0,1]$时,$2\ln[h(x)]-\ln[g(x)]-t\geqslant 0$恒成立,

所以$t\leqslant \ln\frac{[h(x)]^2}{g(x)}=\ln\frac{(3^x-3^{-x})^2+4}{2(3^x-3^{-x})}$在$x\in(0,1]$上恒成立.

设$u=3^x-3^{-x}$,可知u为$\mathbf{R}$上的增函数,

又$0<x\leqslant 1$,所以$0<u\leqslant \frac{8}{3}$.

所以$t\leqslant \ln\frac{u^2+4}{2u}=\ln\left[\frac{1}{2}\left(u+\frac{4}{u}\right)\right]$在$u\in\left(0,\frac{8}{3}\right]$上恒成立.

因为$u+\frac{4}{u}\geqslant 2\sqrt{u\cdot\frac{4}{u}}=4$,当且仅当$u=\frac{4}{u}$,即$u=2$时,等号成立,所以$t\leqslant \ln 2$.

故实数t的取值范围为$(-\infty,\ln 2]$.

第 12 期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A

提示:$120°=\frac{2\pi}{3}$,所以与$120°$角的终边相同的角的表达式为$2k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.故选 A.

2.B

提示:把快了 10 分钟的手表校准,需把分针按逆时针方向旋转$\frac{1}{6}\times 360°=60°$,则分针转过的角的弧度数为$\frac{\pi}{3}$.故选 B.

3.B

提示:因为$\frac{\pi}{2}<3<\pi$,所以 3 弧度的角是第二象限角.故选 B.

4.C

提示:由角α的终边过点$A(-4,3)$,得$r=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$,所以$\sin\alpha=\frac{3}{5}$,$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$,则$\sin\alpha\cdot\tan\alpha=-\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}=-\frac{9}{20}$.故选 C.

5.C

提示:因为α为第一象限角,所以$2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,得$4k\pi<2\alpha<4k\pi+\pi$,$k\in\mathbf{Z}$.所以$2\alpha$是第一象限角或第二象限角或终边与$y$轴正半轴重合的角,此时,$\cos 2\alpha$的正负不确定,$\sin 2\alpha>0$.故选 C.

6.C

提示:设角β的终边交单位圆于点B,根据题意,$\beta=10°-110°=-100°$.又由三角函数的定义,知$B(\cos\beta,\sin\beta)$,而$\cos\beta=\cos(-100°)=\cos 100°=\cos(90°+10°)=-\sin 10°$,$\sin\beta=\sin(-100°)=-\sin 100°=-\sin(90°+10°)=-\cos 10°$,所以$B(-\sin 10°,-\cos 10°)$.故选 C.

7.B

提示:由$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$,且$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$,可得$\sin^2\alpha=\cos^2\beta$,则$\sin\alpha=\pm\cos\beta$,即$\sin\alpha\pm\cos\beta=0$.所以“$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$”是“$\sin\alpha+\cos\beta=0$”的必要条件但不是充分条件.故选B.

8.C

提示:因为角α的终边与角β的终边关于x轴对称,所以$\alpha+\beta=2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$.

故有$\sin\alpha=\sin(2k\pi-\beta)=-\sin\beta$,$\cos\alpha=\cos(2k\pi-\beta)=\cos\beta$.故选C.

二、多项选择题

9.BD

提示:由α是第二象限角,得$\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\pi+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,所以$-\pi-2k\pi<-\alpha<-\frac{\pi}{2}-2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$;$\frac{\pi}{4}+k\pi<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$;$2\pi+2k\pi<\frac{3\pi}{2}+\alpha<\frac{5\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$;$\pi+4k\pi<2\alpha<2\pi+4k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$.所以$-\alpha$是第三象限角,A 错误;当$k$为偶数时,$\frac{\alpha}{2}$是第一象限角,当$k$为奇数时,$\frac{\alpha}{2}$是第三象限角,故 B 正确;$\frac{3\pi}{2}+\alpha$是第一象限角,故 C 错误;$2\alpha$是第三或第四象限角或在$y$轴负半轴上,故 D 正确.故选 BD.

10.AC

提示:当$\cos\alpha=1$时,由$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,得$\sin\alpha=0$,即$f(1)=0$,故 A 正确,B 错误;

当$\cos\alpha=-1$时,由$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,得$\sin\alpha=0$,即$f(-1)=0$,故 C 正确,D 错误.故选 AC.

11.AB

提示:$\tan(\pi+1)=\tan 1$,故 A 正确;$\frac{\sin(-\alpha)}{\tan(360°-\alpha)}=\frac{\sin(-\alpha)}{\tan(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{-\tan\alpha}=\cos\alpha$,故 B 正确;$\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\tan\alpha$,故 C 错误;$\frac{\cos(\pi-\alpha)\tan(-\pi-\alpha)}{\sin(2\pi-\alpha)}=\frac{-\cos\alpha(-\tan\alpha)}{-\sin\alpha}=-1$,故 D 错误.故选 AB.

12.BD

提示:由题意可知,经过 1s 后,$\angle AOB=\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}$,此时扇形$AOB$的面积为$\frac{1}{2}\times\frac{5\pi}{12}\times 1^2=\frac{5\pi}{24}$,故 A 错误;经过 2s 后,$\angle AOB=\frac{\pi}{6}-2\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2\times\frac{\pi}{12}=\frac{2\pi}{3}$,此时劣弧$\overset{\frown}{AB}$的长为$\frac{2\pi}{3}\times 1=\frac{2\pi}{3}$,故 B 正确;经过 6s 后,质点$B$转过的角度为$6\times\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$,此时质点$B$为角$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{3}$的终边与单位圆的交点,所以质点$B$的坐标为$\left(\cos\frac{2\pi}{3},\sin\frac{2\pi}{3}\right)$,即$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,故 C 错误;经过$\frac{22}{3}$s 后,质点$B$转过的角度为$\frac{22}{3}\times\frac{\pi}{12}=\frac{11\pi}{18}$,质点$A$转过的角度为$\frac{22}{3}\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{11\pi}{9}$,因为$\frac{11\pi}{18}-\left(-\frac{11\pi}{9}\right)+\frac{\pi}{6}=2\pi$,所以此时质点$A$,$B$在单位圆上第一次相遇,故 D 正确.故选 BD.

三、填空题

13.$\{\alpha|\alpha=2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

提示:根据终边相同角的表示方法,可知终边落在x轴负半轴的角α的集合为$\{\alpha|\alpha=2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.

14.$\frac{3}{4}$

提示:由已知,得$\tan\alpha=\frac{6\sin 30°}{8\cos 60°}=\frac{6\times\frac{1}{2}}{8\times\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$.

15.$\frac{\sqrt{21}}{3}$

提示:因为$(\sin A+\cos A)^2=\sin^2 A+2\sin A\cos A+\cos^2 A=1+2\times\frac{2}{3}=\frac{7}{3}$,所以$\sin A+\cos A=\pm\frac{\sqrt{21}}{3}$.又$\sin A\cdot\cos A=\frac{2}{3}>0$,且$A\in(0,\pi)$,所以$\sin A>0$,$\cos A>0$.所以$\sin A+\cos A=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

16.$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$

提示:由点$P(\tan\alpha,\sin\alpha-\cos\alpha)$在第一象限,可得$\begin{cases}\tan\alpha>0,\\ \sin\alpha>\cos\alpha,\end{cases}$结合三角函数的定义及$0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$,可得$\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$.

四、解答题

17.**解:**(1)角α的集合为$\{\alpha|k\cdot 360°+90°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot 360°+120°$,或$k\cdot 360°+270°\leqslant\alpha\leqslant 300°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}=\{k\cdot 180°+90°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot 180°+120°,k\in\mathbf{Z}\}$.

(2)角α的集合为$\{\alpha|k\cdot 360°-60°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot 360°+60°,k\in\mathbf{Z}\}$.

18.**解:**(1)分别取$k=0,1,2,3,4$,得$\alpha=30°,120°,210°,300°,360°+30°$,故集合$M$中有 4 类终边不相同的角.

(2)由$-360°<\beta<360°$,得$-360°<30°+k\cdot 90°<360°$,解得$-\frac{13}{3}<k<\frac{11}{3}$.

又$k\in\mathbf{Z}$,所以$k=-4,-3,-2,-1,0,1,2,3$.

故满足条件的角β有$-330°,-240°,-150°,-60°,30°,120°,210°,300°$,共 8 个角.

(3)由(1)可知集合M中的第二象限角γ与$120°$角的终边相同,故满足条件的集合为$\{\gamma|\gamma=120°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

19.**解:**(1)因为α是第四象限角,且α的终边在直线$y=-2x$上,所以点$P(1,-2)$在α的终边上,所以$\sin\alpha=\frac{-2}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$\tan\alpha=\frac{-2}{1}=-2$.

(2)原式$=\frac{(-\sin\alpha)(-\sin\alpha)\cos\alpha}{-\cos\alpha(-\tan\alpha)}=\sin\alpha\cos\alpha$

$=-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=-\frac{2}{5}$.

20.**解:**(1)因为$\tan\alpha=\frac{4}{3}$,

所以$\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}=\frac{\frac{4}{3}-1}{\frac{4}{3}+1}=\frac{1}{7}$.

(2)因为$\tan\alpha=\frac{4}{3}$,

所以原式$=-2\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha=\frac{-2\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\frac{-2\tan\alpha-\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{-2\times\frac{4}{3}-\frac{16}{9}}{\frac{16}{9}+1}=-\frac{8}{5}$.

21.**解:**(1)$f(x)=\frac{\sin(3\pi-x)\cos(x+4\pi)\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)}$

$=\frac{\sin x\cos x(-\cos x)}{\cos x(-\cos x)}=\sin x$.

(2)由(1),得$f\left(x+\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

因为$x\in(0,\pi)$,

所以$x+\frac{\pi}{5}\in\left(\frac{\pi}{5},\frac{6\pi}{5}\right)$.

又$\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)<0$,所以$x+\frac{\pi}{5}\in\left(\pi,\frac{6\pi}{5}\right)$.

所以$\cos\left(x+\frac{\pi}{5}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(x+\frac{\pi}{5}\right)}=-\frac{\sqrt{7}}{3}$.

所以$\sin\left(\frac{3\pi}{10}-x\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{5}\right)\right]$

$=\cos\left(x+\frac{\pi}{5}\right)=-\frac{\sqrt{7}}{3}$.

22.**解:**(1)因为$\sin\theta$,$\cos\theta$是方程$2x^2-(\sqrt{3}-1)x+m=0$的两个实数根,

由韦达定理,得$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{3}-1}{2},\\ \sin\theta\cos\theta=\frac{m}{2}.\end{cases}$

所以$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+m=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$,

得$m=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2)$\frac{\sin\theta}{1-\frac{1}{\tan\theta}}+\frac{\cos\theta}{1-\tan\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

(3)由(1)知$m=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,则原方程为$2x^2-(\sqrt{3}-1)x-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$,

解得$x=-\frac{1}{2}$,或$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为$\theta\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$,所以$\sin\theta<0$,$\cos\theta>0$.

又$\sin\theta$,$\cos\theta$是上述方程的两个实数根,

所以$\sin\theta=-\frac{1}{2}$,$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以$\cos^2\theta=\frac{3}{4}$.

第 9 期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A

提示:由$\lg a=b(a>0)$,得$10^b=a$.故选A.

2.A

提示:由$3^x=2$,得$x=\log_3 2$.因为$y=\log_3\frac{9}{4}$,所以$\frac{1}{2}\cdot y=\frac{1}{2}\log_3\frac{9}{4}=\log_3\sqrt{\frac{9}{4}}=\log_3\frac{3}{2}=\log_3 3-\log_3 2=1-\log_3 2$.所以$x+\frac{1}{2}y=\log_3 2+1-\log_3 2=1$.故选A.

3.B

提示:由已知,得$\frac{1}{a}=\log_2 0.1$,$\frac{1}{b}=\log_2 50$,所以$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=\log_2 0.01+\log_2 50=\log_2 0.5=\log_2\frac{1}{2}=-1$.故选B.

4.B

提示:因为$3^a\leqslant 3^b\Leftrightarrow a\leqslant b$,$\log_{\frac{1}{3}}a>\log_{\frac{1}{3}}b\Leftrightarrow 0<a<b$,而$a\leqslant b\nRightarrow 0<a<b$,但$0<a<b\Rightarrow a\leqslant b$,所以“$3^a\leqslant 3^b$”是“$\log_{\frac{1}{3}}a>\log_{\frac{1}{3}}b$”的必要不充分条件.故选B.

5.B

提示:因为$f(x)=\log_2 x$,所以$f(f(x))=\log_2(\log_2 x)$.要使$f(f(x))$有意义,则$\begin{cases}\log_2 x>0,\\ x>0,\end{cases}$解得$x>1$.所以$x$的取值范围为$(1,+\infty)$.故选B.

6.D

提示:函数y的定义域为$\{x||x|-1>0\}=\{x|x<-1$,或$x>1\}$,排除A,B;当$x>1$时,$y=\log_a(x-1)$,因为$0<a<1$,所以此时y单调递减,排除C,故选D.

7.B

提示:因为$N=4^{10}\times 9^5$,所以$\lg N=\lg(4^{10}\times 9^5)=\lg 4^{10}+\lg 9^5=\lg 2^{20}+\lg 3^{10}=20\lg 2+10\lg 3\approx 20\times 0.3010+10\times 0.4771=10.791$.

所以$N\approx 10^{10.791}\in(10^{10},10^{11})$.故选B.

8.D

提示:由题意可知,$f(x)=2^x$,$g(x)=\log_2 x$,$\varphi(x)=-\log_2 x=\log_2\frac{1}{x}$.所以$a=f\left(-\frac{1}{2}\right)=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\in(0,1)$,$b=g\left(\frac{1}{3}\right)=\log_2\frac{1}{3}<0$,$c=\varphi\left(\frac{1}{3}\right)=\log_2 3>1$,所以$b<a<c$.故选D.

二、多项选择题

9.AC

提示:$\lg 5+\lg 2=\lg(5\times 2)=\lg 10=1$,故A正确;$\log_4 3=\frac{\log_2 3}{\log_2 4}=\frac{\log_2 3}{2\log_2 2}=\frac{1}{2}\log_2 3$,故B错误;$e^{\ln\pi}=\pi$,故C正确;$\log_5 2=\frac{\lg 2}{\lg 5}=\lg 2\div\lg 5$,故D错误.故选AC.

10.AD

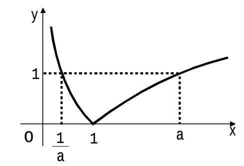
提示:因为$3^x=5^y=15$,所以$x=\log_3 15>\log_3 9=2$,$y=\log_5 15<\log_5 25=2$,所以$x>y$,故A正确;$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\log_{15}3+\log_{15}5=\log_{15}15=1$,故C错误;显然$x>0$,$y>0$,$x\neq y$,则$x+y=(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=2+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}>2+2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=4$,故B错误;由$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$,得$\frac{x+y}{xy}=1$,所以$xy=x+y>4$,故D正确.故选AD.

11.AC

提示:由指数函数的图象可知,当$x\in(0,+\infty)$时,$\left(\frac{1}{2}\right)^x>\left(\frac{1}{3}\right)^x$,故A错误;由对数函数的图象可知,当$x\in(0,1)$时,$\log_{\frac{1}{2}}x>\log_{\frac{1}{3}}x$,故B正确;对于C,当$x=\frac{1}{2}$时,$\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$,$\log_{\frac{1}{2}}x=1$,则$\left(\frac{1}{2}\right)^x<\log_{\frac{1}{2}}x$,故C错误;对于D,当$x\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$时,$\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$,$\log_{\frac{1}{3}}x>\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}=1$,所以$\left(\frac{1}{2}\right)^x<\log_{\frac{1}{3}}x$,故D正确.故选AC.

12.BC

提示:由$f(x)=|\log_a x|$,得$f(1)=0$,$f\left(\frac{1}{a}\right)=f(a)=1$.当$a>1$时,$f(x)$的大致图象如图所示,若值域为$[0,1]$,则$n-m$的最小值为$1-\frac{1}{a}$和$a-1$两者中的最小值.由$a+\frac{1}{a}>2=1+1$,得$a-1>1-\frac{1}{a}$,所以$1-\frac{1}{a}=\frac{1}{4}$,解得$a=\frac{4}{3}$.



(第 12 题图)

当$0<a<1$时,同理,得$n-m$的最小值为$\frac{1}{a}-1$和$1-a$两者中的最小值.由$a+\frac{1}{a}>2=1+1$,得$\frac{1}{a}-1>1-a$,所以$1-a=\frac{1}{4}$,解得$a=\frac{3}{4}$.故选BC.

三、填空题

13.$x=3$

提示:当$x\geqslant 0$时,$g(x)=2\Leftrightarrow\log_2(x+1)=2$,解得$x=3$;
当$x<0$时,$g(x)=f(-x)=2^x+1=2$,解得$x=0$(舍去).
所以$g(x)=2$的解为$x=3$.

14.$\left(0,\frac{3}{2}\right]$

提示:由题意,得$\begin{cases}a>0,\\ -\frac{-2a}{2\times 3}\leqslant 1,\\ \log_2(3\times 1^2-2a\times 1+1)\geqslant a\times 1-a,\end{cases}$

解得$0<a\leqslant\frac{3}{2}$.

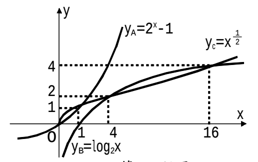
所以实数a的取值范围是$\left(0,\frac{3}{2}\right]$.

15.$10^{10.1}$

提示:设太阳的亮度是E_1,天狼星的亮度是E_2.由题意,得$-1.45-(-26.7)=\frac{5}{2}\lg\frac{E_1}{E_2}$,所以$\lg\frac{E_1}{E_2}=10.1$,得$\frac{E_1}{E_2}=10^{10.1}$.所以太阳与天狼星的亮度的比值为$10^{10.1}$.

16.①②

提示:在同一平面直角坐标系中画出函数$y_A=2^x-1$,$y_B=\log_2 x$,$y_C=x^{\frac{1}{2}}$的大致图象如图所示,可知当$x>1$时,y_A始终最大,故①正确;当$0<x<1$时,y_C始终最大,故②正确;当$4<x<16$时,$y_C>y_B$,故③错误.故所有正确结论的序号是①②.



(第 16 题图)

四、解答题

17.**解:**(1)原式$=\frac{1}{4}-\left(\frac{2}{3}\right)^{3\times\left(-\frac{2}{3}\right)}+\frac{3}{2}\log_2 2$

$=\frac{1}{4}-\frac{9}{4}+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$.

(2)原式$=\log_3\frac{6^2}{4}+\lg 5\times(\lg 5+2\lg 2)+(\lg 2)^2=\log_3 9+(\lg 5)^2+2\lg 5\times\lg 2+(\lg 2)^2=2+(\lg 5+\lg 2)^2=2+1=3$.

18.**解:**(1)因为$3^a=5$,所以$27^a=(3^3)^a=(3^a)^3=5^3=125$.

因为$b=\log_{25}3=\frac{\log_5 3}{\log_5 25}=\frac{1}{2}\log_5 3=\log_5\sqrt{3}$,

所以$5^b=\sqrt{3}$.所以$27^a+5^b=125+\sqrt{3}$.

(2)因为$3^a=5$,所以$a=\log_3 5$.

又由(1)可知$b=\log_{25}3=\frac{1}{2}\log_5 3$,

所以$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)$

$=\left(\log_3 5+\frac{1}{\log_{25}3}\right)\left(\log_{25}3+\frac{1}{\log_3 5}\right)$

$=(\log_3 5+\log_3 25)\left(\frac{1}{2}\log_5 3+\log_5 3\right)$

$=3\log_3 5\times\frac{3}{2}\log_5 3=3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$.

19.**解:**(1)由已知,得$f(2)=\log_a 2=1$,解得$a=2$.
所以$f(x)=\log_2 x$.

(2)由(1)知$f(x)=\log_2 x$,则$f(x)$在定义域$(0,+\infty)$上是增函数.所以由$f(m^2-m)<1=f(2)$,得$0<m^2-m<2$,解得$-1<m<0$,或$1<m<2$.所以实数m的取值范围为$(-1,0)\cup(1,2)$.

20.**解:**(1)令$x^2-x+1=1$,解得$x_1=0$,或$x_2=1$.
又$f(0)=f(1)=\log_a 1=0$,
所以函数$y=f(x)$的图象恒过定点$(0,0)$和$(1,0)$.

(2)由$f(2)=\log_a(2^2-2+1)=\log_a 3=\frac{1}{2}$,得$a^{\frac{1}{2}}=3$,

解得$a=9$.

(3)令$t=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$,则$t$在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上单调递减,在$\left[\frac{1}{2},2\right]$上单调递增.

当$0<a<1$时,$y=\log_a t$是减函数,所以$f(x)$在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上单调递增,在$\left[\frac{1}{2},2\right]$上单调递减,所以$f(x)$在区间$[0,2]$上的最大值为$f\left(\frac{1}{2}\right)=\log_a\frac{3}{4}=2$,即$a^2=\frac{3}{4}$,解得$a=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

当$a>1$时,$y=\log_a t$是增函数,所以$f(x)$在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上单调递减,在$\left[\frac{1}{2},2\right]$上单调递增,所以$f(x)$在区间$[0,2]$上的最大值为$f(0)$或$f(2)$,而$f(0)=0$,所以必有$f(2)=\log_a 3=2$,即$a^2=3$,解得$a=\sqrt{3}$.

综上,a的值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\sqrt{3}$.

21.**解:**(1)$f(x)=\ln(x+1)-\ln(a-x)=\ln\frac{x+1}{a-x}$.

由$f(x)$为奇函数,得$f(-x)=-f(x)$,

即$\ln\frac{-x+1}{a+x}=-\ln\frac{x+1}{a-x}=\ln\frac{a-x}{x+1}$,

所以$\frac{-x+1}{a+x}=\frac{a-x}{x+1}$,得$a^2=1$,所以$a=\pm 1$.

当$a=-1$时,$f(x)$无意义,应舍去;

当$a=1$时,$f(x)=\ln(x+1)-\ln(1-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$,

由$\begin{cases}x+1>0,\\ 1-x>0,\end{cases}$得$-1<x<1$,

所以$f(x)$的定义域为$(-1,1)$,符合题意.综上,$a=1$.

(2)$f(x)$是定义在$(-1,1)$上的增函数.证明如下:

由(1)知$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$,且$f(x)$的定义域为$(-1,1)$,

$\forall x_1,x_2\in(-1,1)$,且$x_1<x_2$,

则$f(x_1)-f(x_2)=\ln\frac{1+x_1}{1-x_1}-\ln\frac{1+x_2}{1-x_2}=\ln\left(\frac{1+x_1}{1-x_1}\cdot\frac{1-x_2}{1+x_2}\right)$

$=\ln\frac{1+x_1-x_2-x_1x_2}{1+x_2-x_1-x_1x_2}$.

因为$x_1<x_2$,所以$-x_2<-x_1$,所以$x_1-x_2<x_2-x_1$,所以$1+x_1-x_2-x_1x_2<1+x_2-x_1-x_1x_2$.

因为$x_1,x_2\in(-1,1)$,所以$(1-x_1)(1+x_2)=1+x_2-x_1-x_1x_2>0$.所以$0<\frac{1+x_1-x_2-x_1x_2}{1+x_2-x_1-x_1x_2}<1$.

所以$\ln\frac{1+x_1-x_2-x_1x_2}{1+x_2-x_1-x_1x_2}<0$,即$f(x_1)-f(x_2)<0$.所以$f(x_1)<f(x_2)$.所以$f(x)$是定义在$(-1,1)$上的增函数.

22.**解:**(1)由已知,得$h(x)=(4-2\log_2 x)\log_2 x=-2(\log_2 x)^2+4\log_2 x$.

令$t=\log_2 x$,则$y=h(x)=-2t^2+4t=-2(t-1)^2+2$.因为$x\in[1,2]$,所以$t\in[0,1]$,所以当$t=1$时,$y$取得最大值为2;当$t=0$时,$y$取得最小值为0.所以$h(x)$的值域为$[0,2]$.

(2)$M(x)=\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$

$=\begin{cases}g(x),f(x)\geqslant g(x),\\ f(x),f(x)<g(x).\end{cases}$

由已知,得$f(x)-g(x)=3(1-\log_2 x)$,

所以当$0<x\leqslant 2$时,$f(x)\geqslant g(x)$,此时$M(x)=\log_2 x$,且$M(x)$单调递增,所以$M(x)$的最大值为$M(2)=1$;

当$x>2$时,$f(x)<g(x)$,此时$M(x)=3-2\log_2 x$,且$M(x)$单调递减,所以$M(x)<M(2)=1$.

综上,函数$M(x)$的最大值为1.

(3)对任意$x\in[1,2]$,不等式$f(x^2)f(\sqrt{x})>k\cdot g(x)$恒成立,

③

即$(3-2\log_2x^2)(3-2\log_2\sqrt{x})>k\log_2x$恒成立,

即$(3-4\log_2x)(3-\log_2x)>k\log_2x$恒成立,

即$4(\log_2x)^2-15\log_2x+9>k\log_2x$恒成立.

令$t=\log_2x$,由$x\in[1,2]$,得$t\in[0,1]$,此时$4t^2-15t+9>kt$恒成立.

当$t=0$时,$k\in\mathbf{R}$;

当$t\in(0,1]$时,$k<\frac{9}{t}+4t-15$恒成立,由对勾函数的性质可知$F(t)=\frac{9}{t}+4t-15$在$(0,1]$上单调递减,

所以$F(t)_{min}=F(1)=-2$,所以$k<-2$.

综上,实数k的取值范围为$(-\infty,-2)$.

第10期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A

提示:由$f(x)=0$,得$(x^2-x)\ln|2x-3|=0$,所以$x^2-x=0$,或$\ln|2x-3|=0$,解得$x=0$,或$x=1$,或$x=2$.所以$f(x)$在区间$[-2,2]$上的零点个数为3.故选A.

2.C

提示:易知$f(1)=-1<0$,$f(2)=2>0$,所以$f(1)f(2)<0$,由函数零点存在定理可知,函数$f(x)$在区间$(1,2)$内必有零点.故选C.

3.D

提示:由题意,取区间中点为$\frac{-2+6}{2}=2$,则第二次所取区间可能是$[-2,2]$或$[2,6]$.故选D.

4.C

提示:对于A,由函数图象可知,y是单调函数,有唯一零点,且函数值在零点两侧异号,可用二分法求零点;同理,可知B,D中函数都可用二分法求零点;对于C,y不是单调函数,虽然也有唯一的零点,但函数值在零点两侧都是正号,故不能用二分法求零点.故选C.

5.C

提示:由题意,当$x=1$时,$y=a\cdot2^{1+1}=200$,得$a=50$.所以$y=50\cdot2^{x+1}$.当$x=3$时,$y=50\times2^{3+1}=800$.故选C.

6.C

提示:由题意,可知每个月的销售量基本呈倍数增长,符合指数型函数模型,故选C.

7.C

提示:根据二分法的原理,初始区间$[0,1]$的长度为1,每经过一次操作,区间长度变为原来的$\frac{1}{2}$,则经过n次操作后,区间的长度为$\frac{1}{2^n}$.由$\frac{1}{2^n}<0.01(n\in\mathbf{N}_+)$,得$n\geqslant7$.故选C.

8.D

提示:因为$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$是$\mathbf{R}$上的减函数,$y=\log_2x$是$(0,+\infty)$上的增函数,所以$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x-\log_2x$是$(0,+\infty)$上的减函数.又$f(a)f(b)f(c)<0$,且$0<a<b<c$,所以必有$f(a)f(b)>0$,$f(c)<0$.而$x_0$是方程$f(x)=0$的一个解,即$f(x_0)=0$,所以$f(c)<f(x_0)$.故$x_0<c$.若$f(a)>0$,$f(b)>0=f(x_0)$,则$x_0>b$;若$f(a)<0=f(x_0)$,$f(b)<0$,则$x_0<a$.综上,故选D.

二、多项选择题

9.ACD

提示:因为$f(x)$的图象是一条连续不断的曲线,且$f(-1)f(1)<0$,$f(3)f(5)<0$,$f(5)f(7)<0$,所以一定包含$f(x)$的零点的区间是$(-1,1)$,$(3,5)$,$(5,7)$.故选ACD.

10.BC

提示:由$f(0.625)<0$,$f(0.75)>0$,$f(0.625)f(0.75)<0$,取区间$(0.625,0.75)$的中点$\frac{0.625+0.75}{2}=0.6875$,又$f(0.6875)<0$,则$f(0.6875)f(0.75)<0$.计算$|0.75-0.6875|=0.0625<0.1$,所以区间$[0.6875,0.75]$内的任何一个值都可作为方程$f(x)=0$的近似解.结合选项,可知选BC.

11.BC

提示:由已知,得$f(1)f(2)=(2-2-a)(4-1-a)=a(a-3)<0$,解得$0<a<3$.故选BC.

12.AC

提示:由题意,可知$P_0>0$,若$k\in(-1,0)$,则$0<1+k<1$,故指数型函数$P_n=P_0(1+k)^n(k>-1)$是关于n的减函数,所以这期间人口数呈下降趋势,故A正确,B错误;当$k=\frac{1}{3}$时,由$P_n=P_0\left(\frac{4}{3}\right)^n\geqslant2P_0$,得$\left(\frac{4}{3}\right)^n\geqslant2$,又$y=\left(\frac{4}{3}\right)^x$是增函数,且$\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}<2$,$\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{64}{27}>2$,$n\in\mathbf{N}$,所以$n$的最小值为3,故C正确;当$k=-\frac{1}{3}$时,由$P_n=P_0\left(\frac{2}{3}\right)^n\leqslant\frac{1}{2}P_0$,得$\left(\frac{2}{3}\right)^n\leqslant\frac{1}{2}$,又$y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$是减函数,且$\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{2}{3}>\frac{1}{2}$,$\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}<\frac{1}{2}$,$n\in\mathbf{N}$,所以$n$的最小值为2,故D错误.故选AC.

三、填空题

13.10

提示:令$f(x)=\log_3(x-1)-2=0$,得$\log_3(x-1)=2$,解得$x=10$.所以$f(x)$的零点为10.

14.1.5

提示:设$f(x)=x^3+x-3$,因为$f(0)=-3<0$,$f(2)=7>0$,$f(1)=-1<0$,所以取区间中点$x=1$,则有根区间是$(1,2)$,那么下一个取的点是$x=\frac{1+2}{2}=1.5$.

15.7

提示:设至少需要x块这样的玻璃重叠起来才能满足要求,则$\left(\frac{9}{10}\right)^x<\frac{1}{2}$,两边取常用对数并化简,得$x(2\lg3-1)<-\lg2$,解得$x>-\frac{\lg2}{2\lg3-1}\approx\frac{0.301}{1-2\times0.477}\approx6.54$,由$x\in\mathbf{N}$,得$x$的最小值为7.

16.2;$4m-1$

提示:若待检测的总人数为8,经过4轮共7次检测后确定了所有感染者,则第1轮需检测1次,第2轮需检测2次,第3轮需检测2次,第4轮需检测2次,此时感染者人数最多为2人.若待检测的总人数为$2^m(m\geqslant3)$,且假设其中有不超过2名感染者,若没有感染者,则只需1次检测即可;若只有1名感染者,则只需$1+2\times m=2m+1$次检测;若只有2名感染者,要使检测次数最多,则第2轮检测时,2名感染者位于不同组,此时相当于两个待检测人数均为2^{m-1}的组,每组1名感染者,此时每组需要$1+2(m-1)=2m-1$次检测,所以此时两组共需$2(2m-1)=4m-2$次检测,故有2个感染者,且检测次数最多,共需$4m-2+1=4m-1$次检测.又$m\geqslant3$,采用“二分检测法”所需检测总次数记为n,则n的最大值为$4m-1$.

四、解答题

17.**解:**(1)当$a=b=-3$时,$f(x)=-2x^2-3x-1$,

令$f(x)=0$,解得$x=-1$,或$x=-\frac{1}{2}$.

所以函数$f(x)$的零点为-1和$-\frac{1}{2}$.

(2)因为$f(x)$恒有两个不同的零点,所以一元二次方程$(a+1)x^2+bx-1=0$恒有两个不同的实数解.

所以$a+1\neq0$,且$\Delta=b^2+4(a+1)>0$,

得$a\neq-1$,且$a>-\frac{b^2}{4}-1$.

因为$b<-1$,所以$-\frac{b^2}{4}-1<-\frac{5}{4}$,所以$a\geqslant-\frac{5}{4}$.

综上,实数a的取值范围为$\left[-\frac{5}{4},-1\right)\cup(-1,+\infty)$.

18.**解:**(1)因为函数$y=3^x$是$\mathbf{R}$上的增函数,$y=3x-8$是$\mathbf{R}$上的增函数,

所以$f(x)=3^x+3x-8$是$\mathbf{R}$上的增函数.

又$y=f(x)$的图象是一条连续不断的曲线,$f(1)=-2<0$,$f(2)=7>0$,即$f(1)f(2)<0$,

所以$f(x)$有且只有1个零点,即$y=f(x)$的零点个数是1.

(2)由(1)可知$f(x)$在区间$(1,2)$有且只有1个零点,设零点为x_0,

取区间中点$x_1=1.5$,计算得$f(1.5)=3^{1.5}+3\times1.5-8\approx5.196+4.5-8=1.696>0$,

因为$f(1)f(1.5)<0$,所以$x_0\in(1,1.5)$.

再取区间中点$x_2=1.25$,计算得$f(1.25)=3^{1.25}+3\times1.25-8\approx3.948+3.75-8=-0.302<0$,

因为$f(1.25)f(1.5)<0$,所以$x_0\in(1.25,1.5)$.

同理,可得$f(1.375)=3^{1.375}+3\times1.375-8\approx4.529+4.125-8=0.654>0$,$x_0\in(1.25,1.375)$.

因为$|1.375-1.25|=0.125<0.15$,所以$y=f(x)$在$[1,2]$内函数的零点的近似值可取为1.25.

19.**解:**(1)对于$f(x)=ax^2+bx$,

由题知,$f(1)=10$,$f(2)=30$,

即$\begin{cases}a+b=10,\\4a+2b=30,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=5,\\b=5.\end{cases}$

所以$f(x)=5x^2+5x(1\leqslant x\leqslant12,x\in\mathbf{N}_+)$.

(2)对于产品一,总盈利$g(x)=40x(1\leqslant x\leqslant12,x\in\mathbf{N}_+)$;

对于产品二,总盈利$f(x)=5x^2+5x(1\leqslant x\leqslant12,x\in\mathbf{N}_+)$.

令$g(x)>f(x)$,解得$1\leqslant x<7$;令$g(x)=f(x)$,解得$x=7$;令$g(x)<f(x)$,解得$7<x\leqslant12$.

所以当投资周期小于7个月时,选择产品一;当投资周期为7个月时,选择产品一或产品二都可以;当投资周期大于7个月时,选择产品二.

20.**解:**(1)2017年至2018年增长了40万人,2018年至2019年增长了48万人,增长速度越来越快,符合指数增长模型,故函数模型$y=ka^x$($k>0,a>1$)更合适.将$(1,200)$,$(2,240)$代入$y=ka^x$($k>0,a>1$)中,可得$\begin{cases}ak=200,\\a^2k=240,\end{cases}$解得$a=\frac{6}{5}$,$k=\frac{500}{3}$,所以该模型的函数解析式为$y=\frac{500}{3}\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^x$.

(2)当三峡大坝游客年游览人数约是2018年的2倍时,游览人数约是480万人,

所以$\frac{500}{3}\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^x=480$,即$\left(\frac{6}{5}\right)^x=\frac{72}{25}$,

得$x=\frac{\lg72-\lg25}{\lg6-\lg5}=\frac{2(\lg6-\lg5)+\lg2}{\lg6-\lg5}$

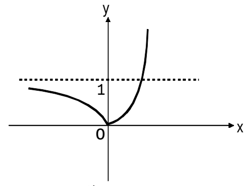
$=2+\frac{\lg2}{2\lg2+\lg3-1}\approx2+\frac{0.3}{2\times0.3+0.48-1}=5.75\approx6$.

故大约在2022年,三峡大坝游客年游览人数约是2018年的2倍.

21.(1)**证明:**当$m=0$时,$h(x)=f(x)-g(x)=x^2-3-e^x(x<0)$,因为$y=x^2-3$在$(-\infty,0)$上单调递减,$y=-e^x$在$(-\infty,0)$上单调递减,所以$h(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,又$h(-3)=6-\frac{1}{e^3}>0$,$h(-1)=-2-\frac{1}{e}<0$,即$h(-3)h(-1)<0$,所以$h(x)$在$(-\infty,0)$上恰有一个负零点.

(2)**解:**由$f(x)=0$,化简可得$(x-2)(x+m+2)=0$,解得$x=2$,或$x=-(m+2)$.

令$\varphi(x)=f(|g(x)|)=0$,则$|g(x)|=2$,或$|g(x)|=-(m+2)$.作出函数$y=|g(x)|=|e^x-1|$的图象如图所示,因为$|g(x)|=2$只有一个实数根,所以要使函数$\varphi(x)=f(|g(x)|)$恰有三个零点,则$|g(x)|=-(m+2)$有且仅有两个实数根,由图象可得,$0<-(m+2)<1$,解得$-3<m<-2$.故实数m的取值范围为$(-3,-2)$.



(第21题图)

22.(1)**解:**方程$\left(\frac{5}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x=1$的根就是函数$f(x)=\left(\frac{5}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x-1$的零点.

因为$f(1)=\frac{4}{13}>0$,$f(3)=\frac{-344}{2197}<0$,所以$f(1)f(3)<0$.

又$f(x)$的图象是一条连续不断的曲线,由函数零点存在定理,可知$f(x)$在区间$(1,3)$内至少有一个零点.

因为$y=\left(\frac{5}{13}\right)^x$,$y=\left(\frac{12}{13}\right)^x$都是$\mathbf{R}$上的减函数,

所以$f(x)=\left(\frac{5}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x-1$是$\mathbf{R}$上的减函数.

所以$f(x)$在区间$(1,3)$内只有一个零点.

又$f(2)=\left(\frac{5}{13}\right)^2+\left(\frac{12}{13}\right)^2-1=0$,所以$f(x)$的零点为2,

即方程$\left(\frac{5}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x=1$的根为2.

(2)**证明:**对于$f(x)=e^x-\frac{1}{x}$,

因为$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$,$f(1)=e-1>0$,

所以$f\left(\frac{1}{2}\right)f(1)<0$.所以$x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.

由$f(x_0)=0$,得$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$.

所以$f(2x_0)=e^{2x_0}-\frac{1}{2x_0}=\frac{1}{x_0^2}-\frac{1}{2x_0}=\left(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}$.

设$t=\frac{1}{x_0}$,由$x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,得$t\in(1,2)$.

因为$y=\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}$在$(1,2)$上单调递增,所以$y\in\left(\frac{1}{2},3\right)$,即$f(2x_0)\in\left(\frac{1}{2},3\right)$.

第11期

第2~3版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.C

提示:$\sqrt[4]{(-2)^4}=|-2|=2$.故选C.

2.D

提示:$\left(\frac{a^2}{a^{\sqrt{2}}}\right)^{2+\sqrt{2}}=(a^{2-\sqrt{2}})^{2+\sqrt{2}}=a^{4-2}=a^2$.

故选D.

3.C

提示:由$\log_34=a$,得$2\log_32=a$,所以$\log_32=\frac{1}{2}a$.又$\log_35=b$,所以$\log_310=\log_32+\log_35=\frac{1}{2}a+b$.故选C.

4.C

提示:因为$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$在$\mathbf{R}$上单调递减,又$\frac{1}{2}<\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$,所以$1>a>b$,即$b<a<1$.故选C.

5.D

提示:因为函数$f(x)$的图象与函数$y=3^x$的图象关于直线$y=x$对称,所以$f(x)=\log_3x$.因为$g(x)$是奇函数,且当$x>0$时,$g(x)=f(x)-x$,所以$g(-9)=-g(9)=-[f(9)-9]=-(\log_39-9)=7$.故选D.

6.A

提示:$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.当$x<0$时,$f(x)=e^x-\lg(-x)$,由复合函数的单调性,可知$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增,排除B,D;当$x>0$时,$f(x)=e^x-\lg x$,因为函数$y=e^x$与函数$y=\lg x$在$(0,+\infty)$上均单调递增,且$y=e^x$增长得越来越快,$y=\lg x$增长得越来越慢,所以函数$f(x)=e^x-\lg x$的值越来越大,排除C,故选A.

7.C

提示:设2021年后,第$n(n\in\mathbf{N}_+)$年该公司全年投入的研发资金为y万元,则$y=300\times(1+10\%)^n$.

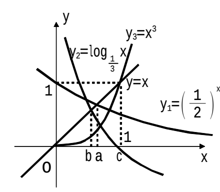
令$y>600$,得$1.1^n>2$,

故$n>\frac{\lg2}{\lg1.1}=\frac{\lg2}{\lg11-1}\approx\frac{0.301}{1.041-1}\approx7.3$.

所以n的最小值为8.故该公司全年投入的研发资金开始超过600万元的年份是2029年.故选C.

8.B

提示:函数$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-x$,$g(x)=\log_{\frac{1}{3}}x-x$,$h(x)=x^3-x(x>0)$的零点,即直线$y=x$分别与函数$y_1=\left(\frac{1}{2}\right)^x$,$y_2=\log_{\frac{1}{3}}x$,$y_3=x^3(x>0)$的图象交点的横坐标.在同一平面直角坐标系中分别画出直线$y=x$以及函数y_1,y_2,y_3的图象如下图所示,由图可知,$c>a>b$.故选B.



(第8题图)

二、多项选择题

9.AD

提示:函数$f(x)$的图象在$\mathbf{R}$上是一条连续不断的曲线.因为$f(-2)=e^{-2}>0$,$f(-1)=e^{-1}-1<0$,$f(0)=-1<0$,$f(1)=e-3<0$,$f(2)=e^2-4>0$,所以$f(-2)f(-1)<0$,$f(1)f(2)<0$.由函数零点存在定理可知,区间$(-2,-1)$和$(1,2)$内含有$f(x)$的零点.故选AD.

10.AD

提示:当$x=1$时,$y=\log_a(3x-2)+2$的图象过定点$(1,2)$,$y=\log_2x+1$的图象过定点$(1,1)$,$y=a^x+1$的图象过动点$(1,a+1)$,$y=4^x-2$的图象过定点$(1,2)$.故选AD.

11.AC

提示:由已知,得$\begin{cases}a>1,\\4-\frac{a}{2}>0,\\4-\frac{a}{2}-2\leqslant\log_a1,\end{cases}$解得$4\leqslant a<8$,故A正确,D错误.又$7<e^2<8$,$\log_2271>\log_2256=8$,故B错误,C正确.故选AC.

12.ACD

提示:由题意,得$60\leqslant20\lg\frac{p_1}{p_0}\leqslant90\Rightarrow10^3p_0\leqslant p_1\leqslant10^{\frac{9}{2}}p_0$;$50\leqslant20\lg\frac{p_2}{p_0}\leqslant60\Rightarrow10^{\frac{5}{2}}p_0\leqslant p_2\leqslant10^3p_0$;

$20\lg\frac{p_3}{p_0}=40\Rightarrow p_3=100p_0$,故C正确;$p_1\geqslant10^3p_0\geqslant p_2$,即$p_1\geqslant p_2$,故A正确;$p_2\leqslant10^3p_0=10p_3$,故B错误;$p_1\leqslant10^{\frac{9}{2}}p_0=100\times10^{\frac{5}{2}}p_0\leqslant100p_2$,即$p_1\leqslant100p_2$,故D正确.故选ACD.

三、填空题

13.$\left(1,\frac{3}{2}\right)$

提示:计算得$f(1)=-1<0$,$f(2)=6>0$,$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{11}{8}>0$,所以$f(1)f\left(\frac{3}{2}\right)<0$,故第二次确定的区间是$\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

14.$\left(\frac{3}{4},1\right]$

提示:要使函数有意义,则$\begin{cases}\log_{0.5}(4x-3)\geqslant0,\\4x-3>0,\end{cases}$解得$\frac{3}{4}<x\leqslant1$.故$f(x)$的定义域是$\left(\frac{3}{4},1\right]$.

15.$[-1,+\infty)$

提示:因为函数$g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+m}-3$的图象不经过第一象限,所以$g(0)=\left(\frac{1}{3}\right)^m-3\leqslant0$,即$3^{-m}\leqslant3$,解得$m\geqslant-1$.

所以m的取值范围为$[-1,+\infty)$.

16.$(1,2)$

提示:若$f(x)>0$,则$\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}>0$,得$0<a^x<1$,

所以当$0<a<1$时,$x>0$;当$a>1$时,$x<0$.

又不等式$f(ax^2+bx+c)>0$的解集为$(1,2)$,

所以$a>1$,$ax^2+bx+c<0$,且1和2是方程$ax^2+bx+c=0$的两个根.所以$-\frac{b}{a}=1+2=3$,得$a=-\frac{1}{3}b$.

因为$b\in(-6,1)$,所以$a\in\left(-\frac{1}{3},2\right)$.

又$a>1$,所以$a\in(1,2)$.

四、解答题

17.**解:**(1)由$f(x)=g(x)$,得$2x-1=4x+1$,解得$x=-1$.

(2)由$f(x)>g(x)$,

当$0<a<1$时,可化为$2x-1<4x+1$,解得$x>-1$;

当$a>1$时,可化为$2x-1>4x+1$,解得$x<-1$.

综上,当$0<a<1$时,x的取值范围为$(-1,+\infty)$;

当$a>1$时,x的取值范围为$(-\infty,-1)$.

18.**解:**(1)由$f(2)=a^2=4$,$a>0$,且$a\neq1$,解得$a=2$.

(2)设$t=2^x$,则$y=g(x)=2^{2x}-2^x-1=t^2-t-1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$.

因为$x\in[0,2]$,所以$t\in[1,4]$.

所以当$t=1$时,y取得最小值为-1;当$t=4$时,y取得最大值为11.故$g(x)$的值域为$[-1,11]$.

19.**解:**(1)在$f(x)=\log_a(x+2)-1$中,令$x+2=1$,得$x=-1$,$f(-1)=-1$,所以函数$f(x)$的图象恒过定点$A(-1,-1)$,

又$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$,所以$g(-1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$.

(2)$F(x)=f(x)-g(x)=\log_a(x+2)-1-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$,因为$F(x)$的图象过点$\left(2,\frac{1}{2}\right)$,所以$F(2)=\log_a4-1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,又$a>0$,且$a\neq1$,解得$a=2$.所以$F(x)=\log_2(x+2)-1-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$.

因为$y=\log_2(x+2)$在定义域上是增函数,$y=-1-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$在定义域上也是增函数,所以$F(x)$在定义域上是增函数.又$F(1)=\log_23-2$,$F(2)=\frac{1}{2}$,所以$x\in[1,2]$时,$F(x)$的值域为$\left[\log_23-2,\frac{1}{2}\right]$.

20.**解:**(1)由题表中数据可知,随着x的增加,$p(x)$先增加后减少,且关于直线$x=4$对称,所以最合适的是函数模型②.对于$p(x)=a|x-4|+b$,由$p(1)=1.4$,$p(2)=1.6$,可得$\begin{cases}3a+b=1.4,\\2a+b=1.6,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-0.2,\\b=2.\end{cases}$

所以$p(x)=-0.2|x-4|+2$($1\leqslant x\leqslant7$,x为正整数).

(2)$f(x)=p(x)c(x)=(-0.2|x-4|+2)(5x+100)$,$1\leqslant x\leqslant7$,$x$为正整数.

当$1\leqslant x\leqslant4$,x为正整数时,$f(x)=(5x+100)(1.2+0.2x)=x^2+26x+120=(x+13)^2-49$,此时$f(x)$单调递增,所以$f(x)$的最大值为$f(4)=240$;

当$4\leqslant x\leqslant7$,x为正整数时,$f(x)=(5x+100)(2.8-0.2x)=-x^2-6x+280=-(x+3)^2+289$,此时$f(x)$单调递减,所以$f(x)$的最大值为$f(4)=240$.

综上,该景区国庆期间日营业收入$f(x)$($1\leqslant x\leqslant7$,x为正整数)的最大值为240万元.

21.**解:**(1)当$a=\frac{1}{2}$时,$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2+x)$.

由$x^2+x>0$,解得$x<-1$,或$x>0$.故$f(x)$的定义域为$(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$.

令$t=x^2+x=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$,可知该函数在$(-\infty,-1)$上单调递减,在$(0,+\infty)$上单调递增,而函数$y=\log_{\frac{1}{2}}t$为减函数,所以$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,-1)$,单调递减区间为$(0,+\infty)$.

(2)令$g(x)=x^2+2ax+2a-1=(x+a)^2-a^2+2a-1$,其中$a>0$,且$a\neq1$,可知该函数在$(-\infty,-a)$上单调递减,在$(-a,+\infty)$上单调递增.

当$0<a<1$时,要使$f(x)$在$(-\infty,-2)$上单调递减,则需$g(x)$在$(-\infty,-2)$上单调递增,显然不可能;

当$a>1$时,要使$f(x)$在$(-\infty,-2)$上单调递减,则需$g(x)$在$(-\infty,-2)$上单调递减,且$g(x)>0$在$(-\infty,-2)$上恒成立,

故$\begin{cases}-a\geqslant-2,\\g(-2)=4-4a+2a-1\geqslant0,\end{cases}$解得$1<a\leqslant\frac{3}{2}$.

综上,实数a的取值范围为$\left(1,\frac{3}{2}\right]$.

22.**解:**(1)由已知,得$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}$,即$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$,解得$a=3$.所以$f(x)=3^x$,$F(x)=-3^{x+1}+10-m$.

因为$F(x)$是单调函数,且在区间$(0,2)$内存在零点,

所以$F(0)F(2)<0$,即$(7-m)(-17-m)<0$,

解得$-17<m<7$.

所以实数m的取值范围为$(-17,7)$.

(2)由(1)及已知条件,可得$g(x)+h(x)=3^x$,

且$g(-x)+h(-x)=-g(x)+h(x)=3^{-x}$,

解得$g(x)=\frac{3^x-3^{-x}}{2}$,$h(x)=\frac{3^x+3^{-x}}{2}$.