若选②,因为一次函数 $f(x)=x+b$ 是增函数,所以 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值为 $f(2)=2+b=2$,解得 $b=0$.

(1)$g(x)$ 是奇函数.证明如下:

由上得 $g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$,$g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

因为 $\forall x\in\mathbf{R}$,都有 $-x\in\mathbf{R}$,且 $g(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2+1}=-\dfrac{x}{x^2+1}=-g(x)$,所以 $g(x)$ 是奇函数.

(2)因为对任意的 $x_1\in\mathbf{R}$,总存在 $x_2\in[-2,2]$,使得 $g(x_1)=h(x_2)$ 成立,

记 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的值域为集合 A,$h(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的值域为集合 B,则 $A\subseteq B$.

由 $g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$,得 $g(0)=0$.

当 $x>0$ 时,$g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{1}{x+\frac{1}{x}}\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}}=\dfrac{1}{2}$,当且仅当 $x=\dfrac{1}{x}$,即 $x=1$ 时,等号成立,

又 $g(x)>0$,所以 $g(x)\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$.

由(1)知 $g(x)$ 是奇函数,所以当 $x<0$ 时,$g(x)\in\left[-\dfrac{1}{2},0\right)$.综上,$g(x)\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$,即 $A=\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$.

因为 $h(x)=-x-2c$ 在 $[-2,2]$ 上单调递减,所以 $B=[-2-2c,2-2c]$.

因为 $A\subseteq B$,所以 $\begin{cases}-2-2c\leqslant-\dfrac{1}{2},\\2-2c\geqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $-\dfrac{3}{4}\leqslant c\leqslant\dfrac{3}{4}$.

故实数 c 的取值范围是 $\left[-\dfrac{3}{4},\dfrac{3}{4}\right]$.

第 8 期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A

提示:$\sqrt{(\pi-4)^2}+\sqrt[3]{(3-\pi)^3}=4-\pi+3-\pi=7-2\pi$.故选 A.

2.A

提示:依题意,可知 $a\geqslant0$,所以 $\sqrt[3]{-a}\cdot\sqrt[6]{a}=-a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{6}}=-a^{\frac{1}{2}}=-\sqrt{a}$.故选 A.

3.A

提示:由 $10^m=\dfrac{1}{4}$,$10^n=\dfrac{1}{3}$,可得 $10^{m-2n}=\dfrac{10^m}{10^{2n}}=\dfrac{10^m}{(10^n)^2}=\dfrac{9}{4}$.故选 A.

4.D

提示:若 $0<a<1$,则 $y=a^x$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递减,根据题意,有 $a-a^2=2$,方程无解;若 $a>1$,则 $y=a^x$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递增,根据题意,有 $a^2-a=2$,解得 $a=2$.故选D.

5.B

提示:由题图可得 $0<b<a<1<d<c$,则由不等式的性质,得 $b+d<a+c$.故选 B.

6.A

提示:$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.因为 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-2ax}$ 在 $[1,3]$ 上单调递减,$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^t$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,由复合函数的单调性知,函数 $t=x^2-2ax=(x-a)^2-a^2$ 需在 $[1,3]$ 上单调递增,则 $a\leqslant1$.故选 A.

7.C

提示:设该湖泊中原来的蓝藻数为 a,由题意,得经过30天后的蓝藻数为 $a(1+6.25\%)^{30}\approx6a\Rightarrow(1+6.25\%)^{30}\approx6$,所以经过60天后的蓝藻数量为 $a(1+6.25\%)^{60}=a[(1+6.25\%)^{30}]^2\approx36a$.所以经过60天后该湖泊的蓝藻数大约为原来的36倍.故选C.

8.D

提示:当 $x>0$ 时,$f(x)=x+\dfrac{1}{x}\geqslant2$,当且仅当 $x=\dfrac{1}{x}$,即 $x=1$ 时,等号成立.

所以若 $f(x)$ 的最小值为 2,则当 $x\leqslant0$ 时,$4^x-2^{x+2}+m\geqslant2$ 恒成立,即 $m\geqslant-4^x+4\cdot2^x+2$ 在 $(-\infty,0]$ 上恒成立.

令 $t=2^x$,则 $t\in(0,1]$,$g(t)=-t^2+4t+2=-(t-2)^2+6$ 在 $(0,1]$ 上单调递增,

所以 $g(t)$ 在 $(0,1]$ 上的最大值为 $g(1)=5$.所以 $m\geqslant5$.故选 D.

二、多项选择题

9.ACD

提示:由已知,得 $\begin{cases}a>0,\\a\neq1,\\a^2-4a+4=1,\end{cases}$ 解得 $a=3$.故选 ACD.

10.CD

提示:对于 A,$(-1)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-1}=-1$,$(-1)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-1)^2}=1$,故 A 不符合题意;对于 B,0 的负分数指数幂没有意义,故 B 不符合题意;对于 C,$4^{\frac{1}{4}}=(2^2)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}$,故 C 符合题意;对于 D,$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{4}}=3^{\frac{1}{4}}$,故 D 符合题意.故选 CD.

11.BC

提示:对于 A,因为函数 $y=1.7^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,且 $2.5<3$,所以 $1.7^{2.5}<1.7^3$,故 A 错误;对于 B,$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}=2^{-\frac{2}{3}}$,因为函数 $y=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,且 $-\dfrac{2}{3}>-\dfrac{4}{3}$,所以 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}=2^{-\frac{2}{3}}>2^{-\frac{4}{3}}$,故 B 正确;对于 C,因为 $1.7^{0.3}>1.7^0=1$,$0.9^{3.1}<0.9^0=1$,所以 $1.7^{0.3}>0.9^{3.1}$,故 C 正确;对于D,因为函数 $y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,且 $\dfrac{3}{4}>\dfrac{2}{3}$,所以 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}<\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$,又易知函数 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,$\dfrac{2}{3}<\dfrac{3}{4}$,所以 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$,所以 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}<\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$,故 D 错误.故选BC.

12.AC

提示:令 $1-x=0$,得 $x=1$,此时 $f(1)=a^0+1=2$,所以函数 $f(x)$ 恒过定点 $(1,2)$,故A正确;因为 a 的值不确定,所以 $f(x)$ 的单调性无法确定,故B错误;因为 $a^{1-x}>0$,所以 $a^{1-x}+1>1$,即 $f(x)$ 的值域为 $(1,+\infty)$,故C正确;由指数函数的性质可知,函数 $f(x)$ 不具有奇偶性,故D错误.故选AC.

三、填空题

13.9

提示:原式 $=\left(\dfrac{3^2}{3^{\sqrt{2}}}\right)^{2+\sqrt{2}}=(3^{2-\sqrt{2}})^{2+\sqrt{2}}=3^{(2-\sqrt{2})\times(2+\sqrt{2})}=3^2=9$.

14.$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

提示:根据题意,结合指数函数的图象,可知 $m^2-3>1$,解得 $m<-2$,或 $m>2$.故实数 m 的取值范围是 $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

15.$[0,1]$

提示:由 $f(2^x)$ 的定义域为 $[0,2]$,得 $0\leqslant x\leqslant2$,根据 $y=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数,得 $1\leqslant2^x\leqslant4$.

对于函数 $f(4^{1-x})$,有 $1\leqslant4^{1-x}\leqslant4$,根据 $y=4^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数,得 $0\leqslant1-x\leqslant1$,解得 $0\leqslant x\leqslant1$.

所以函数 $f(4^{1-x})$ 的定义域为 $[0,1]$.

16.3

提示:因为 $a>1$,所以对 $\forall x\in[a,2a]$,有 $a^x\in[a^a,a^{2a}]$,且 $a^x>0$.由 $y\cdot a^x=a^c$,得 $y=\dfrac{a^c}{a^x}$,故 $y\in[a^{c-2a},a^{c-a}]$.又因为 $y\in[a,a^4]$,所以 $\begin{cases}c-2a=1,\\c-a=4,\end{cases}$ 两式相减,得 $a=3$.

四、解答题

17.**解:**(1)原式 $=-18a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\left(-\frac{2}{6}\right)}=-18ab^{\frac{7}{6}}$.

(2)原式 $=(\sqrt{6})^6+1-4\times\dfrac{7}{4}+\pi-2=216+1-7+\pi-2=208+\pi$.

18.**解:**(1)因为 $a>0$,且 $a^{2x}=\sqrt{2}+1$,

所以 $(a^x+a^{-x})(a^x-a^{-x})=a^{2x}-a^{-2x}$

$=\sqrt{2}+1-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)=2$.

(2)$\dfrac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=\dfrac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}=\dfrac{\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{2}+1-1}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$.

(3)$\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{(a^x+a^{-x})(a^{2x}-a^xa^{-x}+a^{-2x})}{a^x+a^{-x}}$

$=a^{2x}-a^xa^{-x}+a^{-2x}=\sqrt{2}+1-1+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=2\sqrt{2}-1$.

19.**解:**(1)当 $a=1$ 时,$f(x)=2^{x^2+4x+2}$.

因为 $x^2+4x+2=(x+2)^2-2\geqslant-2$,所以 $f(x)\geqslant2^{-2}=\dfrac{1}{4}$.

故 $f(x)$ 的值域为 $\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)$.

(2)令 $t=ax^2+4x+2$,因为指数函数 $y=2^t$ 在其定义域内是增函数,所以要使 $f(x)$ 有最大值16,则 t 的最大值为4,故 $a<0$,且 $\dfrac{4a\times2-4^2}{4a}=4$,解得 $a=-2$.

20.**解:**(1)$f(x)$ 为偶函数.证明如下:

因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$\forall x\in\mathbf{R}$,都有 $-x\in\mathbf{R}$,

且 $f(-x)=-2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|-x|}+2=-2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x|}+2=f(x)$,

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2)当 $x\geqslant0$ 时,$f(x)=-2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x|}+2=-2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+2=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}+2$,将指数函数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 的图象向右平移 1 个单位长度,然后关于 x 轴对称,最后向上平移 2 个单位长度,取 y 轴右侧的部分,可得 $f(x)$ 在 y 轴右侧的图象,由(1)知 $f(x)$ 为偶函数,所以 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称,由此可得 $f(x)$ 的图象如图 1 所示,由图 1 可知 $f(x)$ 的值域为 $[0,2)$.

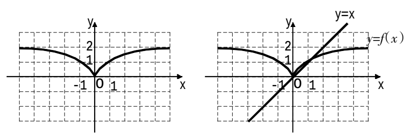


图 1　　图 2

(第 20 题图)

(3)在同一平面直角坐标系中画出 $y=f(x)$ 与 $y=x$ 的图象,如图 2 所示,结合图 2,可知不等式 $f(x)>x$ 的解集为 $(-\infty,0)\cup(0,1)$.

21.**解:**(1)因为 $y=f(x)$ 是奇函数,所以 $f(-x)=-f(x)$,

即 $2^{-x}+a\cdot2^x=-2^x-a\cdot2^{-x}$,即 $(a+1)(2^x+2^{-x})=0$.

因为 $2^x+2^{-x}>0$,所以 $a+1=0$,解得 $a=-1$.

(2)因为 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,2]$ 上严格单调递减,

所以对 $\forall x_1<x_2\leqslant2$,都有 $f(x_1)-f(x_2)>0$,

即 $f(x_1)-f(x_2)=(2^{x_1}-2^{x_2})\left(1-\dfrac{a}{2^{x_1}\cdot2^{x_2}}\right)>0$ 恒成立.

由 $2^{x_1}-2^{x_2}<0$,知 $1-\dfrac{a}{2^{x_1}\cdot2^{x_2}}<0$ 恒成立,即 $2^{x_1}\cdot2^{x_2}<a$ 恒成立.

当 $x_1<x_2\leqslant2$ 时,$2^{x_1}\cdot2^{x_2}<16$,所以 $a\geqslant16$,即 a 的取值范围是 $[16,+\infty)$.

22.**解:**(1)因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,$g(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,且 $f(x)+g(x)=2^{x+1}$,

所以 $f(-x)+g(-x)=-f(x)+g(x)=2^{-x+1}$.

联立以上两式,解得 $f(x)=2^x-2^{-x}$,$g(x)=2^x+2^{-x}$.

(2)由 $y=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,$y=2^{-x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,

可知 $f(x)=2^x-2^{-x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)\in\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$.

不等式 $g(2x)-af(x)-1\geqslant0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立,

即 $a\leqslant\dfrac{g(2x)-1}{f(x)}=\dfrac{2^{2x}+2^{-2x}-1}{2^x-2^{-x}}=\dfrac{(2^x-2^{-x})^2+1}{2^x-2^{-x}}=(2^x-2^{-x})+\dfrac{1}{2^x-2^{-x}}$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立.

设 $t=2^x-2^{-x}\left(t\geqslant\dfrac{3}{2}\right)$,由对勾函数可知 $h(t)=t+\dfrac{1}{t}$ 在 $\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ 上单调递增,

所以 $h(t)$ 的最小值为 $h\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{13}{6}$.所以 $a\leqslant\dfrac{13}{6}$.

故实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,\dfrac{13}{6}\right]$.

扫码免费下载
习题讲解 ppt

第 5 期

第2~3版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.C

提示:当 $a=1,b=-1$ 时,$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$,故 A 错误;当 $c=0$ 时,$\dfrac{c^2}{a-b}=0$,$a|c|=b|c|$,故 B,D 错误;由 $a>b$,$c^2+1>0$,可得 $\dfrac{a}{c^2+1}>\dfrac{b}{c^2+1}$,故 C 正确.故选 C.

2.D

提示:把"="改为">",对于 A,如果 $a>b$,$c\neq0$,那么 $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$,当 $c<0$ 时,可知该结论错误;对于 B,如果 $a>b$,那么 $|a|>|b|$,取 $a=1,b=-1$,可知该结论错误;对于 C,如果 $a>b,c>d$,那么 $ac>bd$,取 $a=1,b=0,c=0,d=-1$,可知该结论错误;对于 D,如果 $a>b,c>d$,根据不等式的性质,可知 $a+c>b+d$,所以 $a-d>b-c$,所以结论成立.故选 D.

3.A

提示:当 $a>2$ 时,$a-2>0$,所以 $m=a+\dfrac{1}{a-2}=a-2+\dfrac{1}{a-2}+2\geqslant2\sqrt{(a-2)\cdot\dfrac{1}{a-2}}+2=4$,当且仅当 $a-2=\dfrac{1}{a-2}$,即 $a=3$ 时,等号成立,即 $m\geqslant4$.又 $b\neq0$,所以 $n=2^{2-b^2}=4-b^2<4$,所以 $m>n$.故选 A.

4.A

提示:$C=\dfrac{800}{s}+2s+2000\geqslant2\sqrt{\dfrac{800}{s}\cdot2s}+2000=2080$,当且仅当 $\dfrac{800}{s}=2s$,即 $s=20$ 时,等号成立.故选 A.

5.B

提示:因为 $x+y=-2$,所以 $x=-2-y$.

因为 $y<0$,所以 $-y>0$.

所以 $x-\dfrac{1}{y}=-2-y-\dfrac{1}{y}=-2+\left[(-y)+\dfrac{1}{-y}\right]$

$\geqslant-2+2\sqrt{(-y)\cdot\dfrac{1}{-y}}=0$,

当且仅当 $-y=\dfrac{1}{-y}$,即 $y=-1,x=-1$ 时,等号成立.

所以 $x-\dfrac{1}{y}$ 的最小值为 0.故选 B.

6.D

提示:根据题意,由韦达定理,可得 $c=-6\times1=-6$,$b=-(1+4)=-5$,所以原不等式为 $x^2-5x-6<0$,解得 $-1<x<6$.故选 D.

7.C

提示:由题意,可得一元二次方程 $x^2-2ax-1=0$ 的实数根均在 -2~2 之间,且包括 -2 和 2,

因为 $\Delta=4a^2+4>0$ 恒成立,结合二次函数 $y=x^2-2ax-1$ 的图象,可得 $-2<-\dfrac{-2a}{2}<2$,　①

且当 $x=-2$ 时,$y=4+4a-1\geqslant0$;　②

当 $x=2$ 时,$y=4-4a-1\geqslant0$,　③

由①②③,解得 $-\dfrac{3}{4}\leqslant a\leqslant\dfrac{3}{4}$.故选 C.

8.B

提示:设第一次加油时汽油单价为 x 元/升,第二次加油时汽油单价为 y 元/升 $(x\neq y)$,则妈妈两次加油的平均单价(元/升)为 $\dfrac{x+y}{2}$,爸爸两次加油的平均单价(元/升)为 $\dfrac{250\times2}{\frac{250}{x}+\frac{250}{y}}=\dfrac{2xy}{x+y}$.因为 $\dfrac{x+y}{2}-\dfrac{2xy}{x+y}=\dfrac{(x+y)^2-4xy}{2(x+y)}=\dfrac{(x-y)^2}{2(x+y)}>0$,所以 $\dfrac{x+y}{2}>\dfrac{2xy}{x+y}$,所以爸爸的加油方式更合算.故选 B.

二、多项选择题

9.BD

提示:由已知,得 $a-b=x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$,则 $a>b$,故 A 错误;又 $c=1-\sqrt{3}<0$,则 $ac<bc$,故 C 错误;$b=x^2-6x+9=(x-3)^2\geqslant0$,则 $b>c$,又 $a>b$,所以 $a>c$,故 B,D 正确.故选 BD.

10.ABD

提示:$9x^2-6x+1=(3x-1)^2\geqslant0$,故 A 正确;$-x^2+2x-3=-(x^2-2x+3)=-(x-1)^2-2<0$,故 B 正确;对于方程 $x^2-3x-4=0$,$\Delta=25>0$,结合二次函数 $y=x^2-3x-4$ 的图象,可知 $-x^2+2x-3<0$ 的解集不是 $\mathbf{R}$,故 C 错误;$x^2+\dfrac{1}{x^2+1}=x^2+1+\dfrac{1}{x^2+1}-1\geqslant2\sqrt{(x^2+1)\cdot\dfrac{1}{x^2+1}}-1=1$,当且仅当 $x^2+1=\dfrac{1}{x^2+1}$,即 $x=0$ 时,等号成立,即 $x^2+\dfrac{1}{x^2+1}\geqslant1$ 恒成立,故 D 正确.故选 ABD.

11.CD

提示:因为 $a\geqslant\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{b}$,$b\geqslant\dfrac{5}{b}+\dfrac{1}{a}$,

所以 $a^2\geqslant4+\dfrac{a}{b}$,$b^2\geqslant5+\dfrac{b}{a}$,

所以 $a^2+b^2\geqslant4+\dfrac{a}{b}+5+\dfrac{b}{a}\geqslant9+2\sqrt{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{a}}=11$,当且仅当 $a^2=4+\dfrac{a}{b}$,$b^2=5+\dfrac{b}{a}$,且 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}$ 时,等号同时成立.

因为 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}$,即 $a=b$ 时,$a^2=5,b^2=6$,所以 $a^2\neq b^2$,即等号不能同时成立,所以 $a^2+b^2>11$.故 A,B 错误,C,D 正确.故选 CD.

12.ABC

提示:由已知,得不等式 $a\leqslant x^2-4x-1$ 在 $x\in\{x|1\leqslant x\leqslant4\}$ 上有解,

等价于当 $1\leqslant x\leqslant4$ 时,$a\leqslant(x^2-4x-1)_{\max}$.

设 $y=x^2-4x-1=(x-2)^2-5$,当 $1\leqslant x\leqslant4$ 时,结合二次函数的图象,可知 y 的最大值为 -1.

所以 $a\leqslant-1$.结合选项可知选 ABC.

三、填空题

13.变大,$\dfrac{n}{m}<\dfrac{n+b}{m+b}$ $(m>n>0,b>0)$

提示:该高校 9 月初新生占学生的比例为 $\dfrac{n}{m}$,补录后新生占学生的比例为 $\dfrac{n+b}{m+b}$,因为 $m>n$,所以 $\dfrac{n}{m}-\dfrac{n+b}{m+b}=\dfrac{b(n-m)}{m(m+b)}<0$,所以 $\dfrac{n}{m}<\dfrac{n+b}{m+b}$.所以新生占学生的比例变大,其理论论据用数学形式表达为 $\dfrac{n}{m}<\dfrac{n+b}{m+b}$ $(m>n>0,b>0)$.

14.$\sqrt{2}$

提示:由已知,得 $\dfrac{a+2b}{2}=2$,所以 a,b 的几何平均值是 $\sqrt{ab}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{a\cdot2b}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{a+2b}{2}=\sqrt{2}$,当且仅当 $a=2b$,即 $a=2,b=1$ 时,等号成立.所以 a,b 的几何平均值的最大值为 $\sqrt{2}$.

15.$\{k|k\leqslant-7$,或 $k\geqslant1\}$

提示:解 $x^2+3x-4<0$,得 $-4<x<1$;解 $x^2-(2k+3)x+k^2+3k>0$,得 $x<k$,或 $x>k+3$.因为"$x^2+3x-4<0$"是"$x^2-(2k+3)\cdot x+k^2+3k>0$"的充分不必要条件,所以 $\{x|-4<x<1\}\subsetneqq\{x|x<k$,或 $x>k+3\}$,所以 $k\geqslant1$,或 $k+3\leqslant-4$,即 $k\geqslant1$,或 $k\leqslant-7$.所以实数 k 的取值范围是 $\{k|k\leqslant-7$,或 $k\geqslant1\}$.

16.$\left\{x\,\middle|\,x<-1,或-\dfrac{1}{3}\leqslant x<5\right\}$

提示:由已知,得 $a<0$,且关于 x 的方程 $ax-b=0$ 的解为 $x=3$,所以 $b=3a$,所以 $\dfrac{bx+a}{x^2-4x-5}\geqslant0$ 即 $\dfrac{3ax+a}{x^2-4x-5}\geqslant0$,得 $\dfrac{3x+1}{x^2-4x-5}\leqslant0$,等价于 $\begin{cases}(3x+1)(x^2-4x-5)\leqslant0,\\x^2-4x-5\neq0,\end{cases}$ 解得 $x<-1$,或 $-\dfrac{1}{3}\leqslant x<5$.所以原不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x<-1,或-\dfrac{1}{3}\leqslant x<5\right\}$.

四、解答题

17.**解:**(1)因为 $0<a<b$,所以 $a^2<ab$.又 $a+b=1$,所以 $a^2+b^2<ab+b^2=b(a+b)=b$,即 $a^2+b^2<b$.

(2)由基本不等式,得 $2ab\leqslant2\cdot\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$,当且仅当 $a=b$ 时,等号成立.

又 $a<b$,所以等号取不到,所以 $2ab<\dfrac{1}{2}$.

18.**解:**(1)由 $-2<x-y<0$,$1<2x+y<3$,

两式相加,得 $-1<3x<3$,所以 $-\dfrac{1}{3}<x<1$.

因为 $-2<x-y<0$,所以 $-4<2x-2y<0$,

所以 $0<2y-2x<4$.

又 $1<2x+y<3$,两式相加,得 $1<3y<7$,

所以 $\dfrac{1}{3}<y<\dfrac{7}{3}$.

所以 x 的取值范围为 $\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{1}{3}<x<1\right\}$,$y$ 的取值范围为 $\left\{y\,\middle|\,\dfrac{1}{3}<y<\dfrac{7}{3}\right\}$.

(2)设 $8x+y=a(x-y)+b(2x+y)=(a+2b)x+(b-a)y$,则 $\begin{cases}a+2b=8,\\b-a=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=3.\end{cases}$ 所以 $8x+y=2(x-y)+3(2x+y)$.

由 $-2<x-y<0$,$1<2x+y<3$,

得 $-4<2(x-y)<0$,$3<3(2x+y)<9$,

两式相加,得 $-1<8x+y<9$.

所以 z 的取值范围为 $\{z|-1<z<9\}$.

19.**解:**(1)因为关于 x 的不等式 $ax^2-x-b>0(a,b\in\mathbf{R})$ 的解集为 $\{x|x>2$,或 $x<-1\}$,

所以 $a>0$,且关于 x 的方程 $ax^2-x-b=0$ 的两根为 2 和 -1,

由韦达定理,得 $2-1=\dfrac{1}{a}$,且 $2\times(-1)=-\dfrac{b}{a}$,

解得 $a=1,b=2$.

(2)由(1)得 $a=1,b=2$,所以原不等式为 $x^2-(c+1)\cdot x+c<0$,即 $(x-1)(x-c)<0$.当 $c>1$ 时,原不等式的解集为 $\{x|1<x<c\}$;当 $c=1$ 时,原不等式的解集为 $\varnothing$;当 $c<1$ 时,原不等式的解集为 $\{x|c<x<1\}$.

20.**解:**(1)函数 $y=(m+6)x^2+2(m-1)x+m+1$ 恒有零点,即方程 $(m+6)x^2+2(m-1)x+m+1=0$ 必有实数根.

当 $m+6=0$,即 $m=-6$ 时,方程为 $-14x-5=0$,显然有实数根;

当 $m+6\neq0$,即 $m\neq-6$ 时,由 $\Delta=4(m-1)^2-4(m+6)\cdot(m+1)=-36m-20\geqslant0$,解得 $m\leqslant-\dfrac{5}{9}$,且 $m\neq-6$.

综上,实数 m 的取值范围为 $\left\{m\,\middle|\,m\leqslant-\dfrac{5}{9}\right\}$.

(2)设 x_1,x_2 是函数 y 的两个零点,则 x_1,x_2 是方程 $(m+6)x^2+2(m-1)x+m+1=0$ 的两个实数根.

所以 $x_1+x_2=-\dfrac{2(m-1)}{m+6}$,$x_1x_2=\dfrac{m+1}{m+6}$.

又 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=-4$,即 $\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-4$,

代入可得 $-\dfrac{2(m-1)}{m+1}=-4$,解得 $m=-3$.

当 $m=-3$ 时,$m+6\neq0$,$\Delta>0$,符合题意,所以实数 m 的值为 -3.

21.**解:**(1)由 $m+2n=2$,$m>0,n>0$,

得 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{2}{n}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{2}{n}\right)(m+2n)=\dfrac{1}{2}\left(5+\dfrac{2n}{m}+\dfrac{2m}{n}\right)$

$\geqslant\dfrac{1}{2}\left(5+2\sqrt{\dfrac{2n}{m}\cdot\dfrac{2m}{n}}\right)=\dfrac{9}{2}$,

当且仅当 $\dfrac{2n}{m}=\dfrac{2m}{n}$,即 $m=\dfrac{2}{3},n=\dfrac{2}{3}$ 时,等号成立.

故 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{2}{n}$ 的最小值为 $\dfrac{9}{2}$.

(2)由 $m+2n=2$,得 $m+1+2n=3$.又 $m>-1,n>0$,

所以 $\dfrac{1}{m+1}+\dfrac{2}{n}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{m+1}+\dfrac{2}{n}\right)(m+1+2n)=\dfrac{1}{3}\left[5+\dfrac{2n}{m+1}+\dfrac{2(m+1)}{n}\right]\geqslant\dfrac{1}{3}\left[5+2\sqrt{\dfrac{2n}{m+1}\cdot\dfrac{2(m+1)}{n}}\right]=3$,

当且仅当 $\dfrac{2n}{m+1}=\dfrac{2(m+1)}{n}$,即 $m=0,n=1$ 时,等号成立.故 $\dfrac{1}{m+1}+\dfrac{2}{n}$ 的最小值为 3.

22.**解:**(1)因为前墙长为 x m,地面面积为 240m^2,

所以左右两侧墙的长度均为 $\dfrac{240}{x}$ m $(x>0)$,

所以甲工程队的报价为

$240\times100+2\times5x\times150+2\times5\times\dfrac{240}{x}\times250$

$=24\ 000+1500\left(x+\dfrac{400}{x}\right)$

$\geqslant24\ 000+1500\times2\sqrt{x\times\dfrac{400}{x}}=84\ 000$,

当且仅当 $\dfrac{400}{x}=x$,即 $x=20$ 时,等号成立.

所以当前墙的长度为 20m 时,甲工程队报价最低.

(2)若无论前墙的长度为多少,乙工程队都能竞标成功,结合(1)可知 $24\ 000+1500\left(x+\dfrac{400}{x}\right)>12\ 000+$

$500\left(\frac{a+1152}{x}+a\right)$对$\forall x>0$恒成立,

整理,得$a<\frac{3(x^2+8x+16)}{x+1}$对$\forall x>0$恒成立.

因为$\frac{x^2+8x+16}{x+1}=\frac{(x+1)^2+6(x+1)+9}{x+1}$

$=(x+1)+\frac{9}{x+1}+6\geqslant 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{9}{x+1}}+6=12$,

当且仅当$x+1=\frac{9}{x+1}$,即$x=2$时,等号成立,

所以$a<3\times 12=36$.

又$a>0$,所以a的取值范围为$\{a|0<a<36\}$.

第6期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A

提示:对于A,$\forall x\in M$,在N中都存在唯一确定的元素与之对应,满足函数的定义,故A正确;取$x=4$,可知对于B,C,D中的对应关系,在N中均不存在元素与之对应,不满足函数的定义,故B,C,D错误.故选A.

2.D

提示:$y=x^2(x\in\mathbf{R})$与$y=\frac{x^3}{x}=x^2(x\neq 0)$,定义域不同,不是同一函数,故图象不相同;$y=|x|(x\in\mathbf{R})$与$y=(\sqrt{x})^2=x(x\geqslant 0)$,对应关系与定义域均不相同,不是同一函数,故图象不相同;函数$y=\sqrt{x^2}=|x|$与$y=x$的对应关系不同,不是同一函数,故图象不相同;$y=\sqrt[3]{(x+1)^3}=x+1$与$y=x+1$的定义域与对应关系均相同,是同一函数,故图象相同.故选D.

3.D

提示:对于A,$2f(x)=2|x|$,$f(2x)=|2x|=2|x|=2f(x)$;对于B,$2f(x)=-4x$,$f(2x)=-2(2x)=-4x=2f(x)$;对于C,$2f(x)=2x-2|x|$,$f(2x)=2x-|2x|=2x-2|x|=2f(x)$;对于D,$2f(x)=2x-2$,$f(2x)=2x-1\neq 2f(x)$.故选D.

4.C

提示:由表格可知,$y=f(x)$的定义域是$\{0.1,0.2,0.5,0.8,0.9\}$,值域是$\{0,1\}$,$f(x)$的图象关于直线$x=0.5$对称,故A错误,C正确,D错误;因为$f(0.1)=1$,$f(0.5)=1$,所以$f(f(0.1)-0.8f(0.5))=f(1-0.8\times 1)=f(0.2)=0$,故B错误.故选C.

5.C

提示:因为$y=f(x)$为奇函数,所以$f(-x)=-f(x)$,故有$f(-a)=-f(a)$,即$y=f(x)$的图象必过点$(-a,-f(a))$.故选C.

6.C

提示:当$x>0$时,$f(x)=x^2-2x+5$,图象的对称轴为$x=1$,所以$f(x)$的单调递增区间为$[1,+\infty)$;当$x\leqslant 0$时,$f(x)=x^2+2x+5$,图象的对称轴为$x=-1$,所以$f(x)$的单调递增区间为$[-1,0]$.故选C.

7.B

提示:因为对于任意的$x_1,x_2\in[-1,3]$,且$x_1\neq x_2$,都有$[f(x_1)-f(x_2)](x_1-x_2)<0$,

所以当$-1\leqslant x_1<x_2\leqslant 3$时,$f(x_1)>f(x_2)$,所以$f(x)$在$[-1,3]$上单调递减.

所以由$f(1-2x)\geqslant f(x+1)$,得$\begin{cases}-1\leqslant 1-2x\leqslant 3,\\-1\leqslant x+1\leqslant 3,\\1-2x\leqslant x+1,\end{cases}$

解得$0\leqslant x\leqslant 1$.故选B.

8.A

提示:当$x>1$时,$f(x)=x+\frac{9}{x+1}+a=x+1+\frac{9}{x+1}+a-1\geqslant 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{9}{x+1}}+a-1=5+a$,当且仅当$x+1=\frac{9}{x+1}$,即$x=2$时,等号成立,故此时$f(x)$的最小值是$f(2)$.又$f(1)$是$f(x)$的最小值,所以当$x\leqslant 1$时,$f(x)=(x-a)^2$的最小值必是$f(1)$.所以$a\geqslant 1$,且$f(1)=(1-a)^2\leqslant 5+a$,解得$1\leqslant a\leqslant 4$.所以$a$的取值范围是$[1,4]$.故选A.

二、多项选择题

9.AD

提示:$y=|2x|$为偶函数且在区间$(0,1)$上单调递增,符合题意;$y=1-x^2$在区间$(0,1)$上单调递减,不符合题意;$y=-\frac{1}{x}$为奇函数,不符合题意;$y=2x^2+3$为偶函数且在区间$(0,1)$上单调递增,符合题意.故选AD.

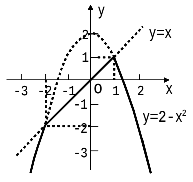
10.ABC

提示:集合A表示函数$f(x)=x^2-1$的定义域,所以$A=\mathbf{R}$;集合B表示函数$f(x)=x^2-1$的值域,因为$f(x)\geqslant -1$,所以$B=[-1,+\infty)$;对于集合C,因为$f(x)=x^2-1$,所以$f(f(x))=f(x^2-1)=(x^2-1)^2-1\geqslant -1$,所以$C=[-1,+\infty)$.

故选ABC.

11.AD

提示:在同一平面直角坐标系中画出函数$y=2-x^2$,$y=x$的图象,如图所示,根据题意,图中实线部分即为$f(x)$的图象.由$2-x^2=x$,解得$x_1=-2$,$x_2=1$.由图象可知,$f(x)$的最大值为$f(1)=1$,无最小值.故选AD.



(第11题图)

12.ACD

提示:由$f(x+1)=\frac{1}{1-g(x)}$,可知$g(x)\neq 1$,所以$g(x+1)\neq 1$,即$\frac{1}{1-f(x)}\neq 1$,所以$f(x)\neq 0$,故A正确;$f(x+2)=\frac{1}{1-g(x+1)}=\frac{1}{1-\frac{1}{1-f(x)}}=1-\frac{1}{f(x)}$,所以$f(x+4)=1-\frac{1}{f(x+2)}=1-\frac{1}{1-\frac{1}{f(x)}}=-\frac{1}{f(x)-1}$,无法得出$f(x+4)=f(x)$恒成立,故B错误;同上得,$g(x+2)=1-\frac{1}{g(x)}$,所以$g(x+6)=1-\frac{1}{g(x+4)}=1-\frac{1}{1-\frac{1}{g(x+2)}}=\frac{1}{1-g(x+2)}=\frac{1}{1-\left[1-\frac{1}{g(x)}\right]}=g(x)$,故C正确;$g(x+3)=\frac{1}{1-f(x+2)}=\frac{1}{1-\left[1-\frac{1}{f(x)}\right]}=f(x)$,故D正确.故选ACD.

三、填空题

13.$[0,+\infty)$

提示:由题意,得$x\geqslant 0$,故函数$f(x)$的定义域是$[0,+\infty)$.

14.x^2-2x+1

提示:令$x+1=t$,则$x=t-1$,所以$f(t)=(t-1)^2=t^2-2t+1$,即$f(x)=x^2-2x+1$.

15.3

提示:$f(x)=\frac{2x+m}{x+1}=\frac{2(x+1)+m-2}{x+1}=2+\frac{m-2}{x+1}$.显然$m\neq 2$,当$m>2$时,$f(x)$在$[0,1]$上单调递减,则$f(x)$在$[0,1]$上的最大值为$f(0)=m=3$;当$m<2$时,$f(x)$在$[0,1]$上单调递增,则$f(x)$在$[0,1]$上的最大值为$f(1)=\frac{2+m}{2}=3$,解得$m=4$(舍去).综上,$m=3$.

16.①③

提示:函数$y=x+\frac{3}{x}$是奇函数,图象的对称中心为$(0,0)$,将$y=x+\frac{3}{x}$的图象向右平移2个单位长度,再向上平移1个单位长度,可得$f(x)=x-2+\frac{3}{x-2}+1=x+\frac{3}{x-2}-1$的图象,所以$f(x)=x+\frac{3}{x-2}-1$图象的对称中心是$(2,1)$,故①正确,②错误;若函数$y=f(x)$的图象关于直线$x=a$成轴对称图形,图象向左平移$|a|$个单位长度可得$y=f(x+a)$关于$x=0$即$y$轴对称,所以$y=f(x+a)$为偶函数,反之也成立,故③正确,④错误.故所有正确结论的序号是①③.

四、解答题

17.**解**:(1)因为$f(x)=\begin{cases}-x(x+4),x\leqslant 0,\\x,x>0,\end{cases}$所以$f(-1)=-(-1)\times(-1+4)=3$.所以$f(f(-1))=f(3)=3$.

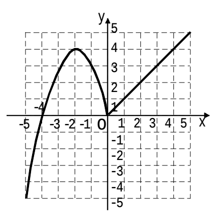
(2)当$a\leqslant 0$时,由$f(a)=3$,得$-a(a+4)=3$,

解得$a=-1$,或$a=-3$;

当$a>0$时,由$f(a)=3$,得$a=3$.

综上,$a=-1$,或$a=-3$,或$a=3$.

(3)函数$f(x)$的图象如图所示,实数m的取值范围为$(0,4)$.



(第17题图)

18.**解**:(1)要使函数y有意义,则$\begin{cases}x-1\neq 0,\\\frac{2}{x+1}\geqslant 0,\\x+1\neq 0,\end{cases}$

解得$x>-1$,且$x\neq 1$.

所以函数y的定义域为$(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(2)要使函数y有意义,则$\begin{cases}2-x-x^2\geqslant 0,\\x+1\geqslant 0,\\\sqrt{x+1}-1\neq 0,\end{cases}$

解得$-1\leqslant x\leqslant 1$,且$x\neq 0$.

所以函数y的定义域为$[-1,0)\cup(0,1]$.

19.**解**:(1)函数$f(x)$是偶函数.证明如下:

函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,因为$\forall x\in\mathbf{R}$,都有$-x\in\mathbf{R}$,且$f(-x)=|-x+2|+|-x-2|=|x-2|+|x+2|=f(x)$,所以函数$f(x)$是偶函数.

(2)由(1)知函数$f(x)$是偶函数,

因为$f(x^2-4x+1)=f(x-5)$,所以$|x^2-4x+1|=|x-5|$,

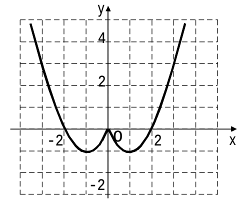
即$x^2-4x+1=x-5$,或$x^2-4x+1=5-x$,

解得$x_1=2$或$x_2=3$,$x_3=-1$或$x_4=4$,

即该方程的解为$x=-1,2,3,4$.

20.**解**:(1)因为$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数,

所以$f(x)$的图象关于y轴对称.补充完整图象如图所示.



(第20题图)

因为当$x\leqslant 0$时,$f(x)=x^2+2x$,

所以当$x>0$时,$-x<0$,

可得$f(-x)=(-x)^2+2(-x)=x^2-2x$,

又$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数,

所以$f(x)=f(-x)=x^2-2x$.

所以$f(x)=\begin{cases}x^2+2x,x\leqslant 0,\\x^2-2x,x>0,\end{cases}$其单调递减区间为$(-\infty,-1)$,$(0,1)$,单调递增区间为$(-1,0)$,$(1,+\infty)$.

(2)当$x\in[1,2]$时,$g(x)=x^2-2x-2ax+1=(x-1-a)^2-a^2-2a$,其图象的开口向上,对称轴为直线$x=1+a$,

当$1+a\leqslant 1$,即$a\leqslant 0$时,$g(x)$在$[1,2]$上单调递增,

所以$g(x)$的最小值为$g(1)=-2a$;

当$1+a\geqslant 2$,即$a\geqslant 1$时,$g(x)$在$[1,2]$上单调递减,

所以$g(x)$的最小值为$g(2)=1-4a$;

当$1<1+a<2$,即$0<a<1$时,$g(x)$的最小值为$g(1+a)=-a^2-2a$.故$g(x)_{\min}=\begin{cases}-2a,a\leqslant 0,\\-a^2-2a,0<a<1,\\1-4a,a\geqslant 1.\end{cases}$

21.**解**:(1)因为点$A(1,5)$,$B(2,4)$是$f(x)$图象上的两点,

所以$\begin{cases}a+b=5,\\2a+\frac{b}{2}=4,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\b=4.\end{cases}$故$f(x)=x+\frac{4}{x}$.

(2)$f(x)$在$[2,+\infty)$上单调递增.理由如下:

$\forall x_1,x_2\in[2,+\infty)$,且$x_1<x_2$,

则$f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1+\frac{4}{x_1}\right)-\left(x_2+\frac{4}{x_2}\right)$

$=(x_1-x_2)+\left(\frac{4}{x_1}-\frac{4}{x_2}\right)=\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-4)}{x_1x_2}$.

因为$x_1<x_2$,所以$x_1-x_2<0$.

因为$x_1,x_2\in[2,+\infty)$,所以$x_1>2$,$x_2>2$,

所以$x_1x_2>4>0$,$x_1x_2-4>0$.

所以$f(x_1)-f(x_2)<0$,即$f(x_1)<f(x_2)$.

所以$f(x)$在$[2,+\infty)$上单调递增.

(3)由(2)可得$f(x)=x+\frac{4}{x}$在$(0,2]$上单调递减,在$[2,+\infty)$上单调递增,且$f(2)+2=6$,$f(1)+2=f(4)+2=7$,所以存在区间$[a,b]$,使得$f(x)+2$的值域为$[6,7]$,此区间长度的最大值为$4-1=3$.

22.**解**:(1)因为函数$h(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,函数$\varphi(x)=h(2x-1)$,

所以要使函数$\varphi(x)$有意义,需满足$2x-1>0$,解得$x>\frac{1}{2}$.所以函数$\varphi(x)$的定义域为$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

又$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)\subseteq(0,+\infty)$,所以函数$\varphi(x)$是函数$h(x)$的好函数.

(2)记函数$u(x)$的定义域为M,根据题意,得$M=\{x|-x^2-ax+a+1>0\}$,且$M\subseteq(0,+\infty)$.

由$-x^2-ax+a+1>0$,得$x^2+ax-a-1<0$,

即$(x-1)(x+a+1)<0$.

由函数的定义知M为非空数集,

故$a+1\neq -1$,得$a\neq -2$.

当$a<-2$时,$M=(1,-a-1)$,显然满足$M\subseteq(0,+\infty)$;

当$a>-2$时,$M=(-a-1,1)$,又$M\subseteq(0,+\infty)$,则$-a-1\geqslant 0$,解得$-2<a\leqslant -1$.

综上,实数a的取值范围为$(-\infty,-2)\cup(-2,-1]$.

第7期

第3~4版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.D

提示:对于A,取常数函数$f(x)=1$,其值域为$\{1\}$,是有限集,故A错误;对于B,函数的值域中的每一个数可以在定义域中有多个自变量与其对应,故B错误;对于C,如定义域和值域均为$\{0,1\}$的函数,对应关系可以是$x\to x,x\in\{0,1\}$,还可以是$x\to x^2,x\in\{0,1\}$,故C错误;对于D,根据函数的定义,可知D正确.故选D.

2.A

提示:由已知,得$f(3)=3-2=1$,因此$f(f(3))=f(1)=1^2=1$.故选A.

3.C

提示:对于$f(x)=\frac{1}{x}$,$x\neq 0$,故A不符合题意;对于$f(x)=-|x|$,定义域为$\mathbf{R}$,$f(-x)=-|-x|=-|x|=f(x)$,该函数为偶函数,故B不符合题意;对于$f(x)=-x^3$,定义域为$\mathbf{R}$,$f(-x)=-(-x)^3=x^3=-f(x)$,该函数为奇函数,又$f(x)=-x^3$在$\mathbf{R}$上是减函数,所以$f(x)=-x^3$在$[0,+\infty)$上单调递减,故C符合题意;对于$f(x)=-x^2$,定义域为$\mathbf{R}$,$f(-x)=-(-x)^2=-x^2=f(x)$,该函数是偶函数,故D不符合题意.

故选C.

4.A

提示:由幂函数的性质,可知$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$的定义域为$[0,+\infty)$,且$f(x)$在定义域上是增函数.

由$f(x)>f(8x-16)$,得$x>8x-16\geqslant 0$,解得$2\leqslant x<\frac{16}{7}$.故选A.

5.C

提示:函数y的定义域为$\{x|4+3x-x^2\neq 0\}=\{x|x\neq -1$且$x\neq 4\}$.

设$t=-x^2+3x+4=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$,则$t\in(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{25}{4}\right]$,由二次函数的性质可知,$t$的单调递增区间为$(-\infty,-1)$,$\left(-1,\frac{3}{2}\right]$,单调递减区间为$\left[\frac{3}{2},4\right)$,$(4,+\infty)$,又因为$y=\frac{1}{t}$在$(-\infty,0)$和$\left(0,\frac{25}{4}\right]$上单调递减,由复合函数的单调性可知,函数$y=\frac{1}{4+3x-x^2}$的单调递增区间为$\left[\frac{3}{2},4\right)$和$(4,+\infty)$.故选C.

6.C

提示:观察四个选项,定义域均为$\{x|x\neq\pm 1\}$,故图象中的两虚线为$x=\pm 1$.由题图可知,当$x\in(0,1)$时,$f(x)<0$,对于B,$f\left(\frac{1}{2}\right)=1>0$,应排除;对于D,$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}>0$,应排除;对于A,当$x>0$时,$f(x)=\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$,此函数图象是由函数$y=\frac{1}{x}$的图象向右平移1个单位长度,再向上平移1个单位长度得到的,所以当$x>1$时,$f(x)>1$恒成立,而题图中,当$x>1$时,$f(x)$可以小于1,所以排除A.故选C.

7.D

提示:由$f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=5x+\frac{4}{x}$,取$\frac{1}{x}$替换$x$,则$f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{5}{x}+4x$.联立解得$f(x)=x+\frac{2}{x}$,$x\in(0,+\infty)$.所以$f(x)=x+\frac{2}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{2}{x}}=2\sqrt{2}$,当且仅当$x=\frac{2}{x}$,即$x=\sqrt{2}$时,等号成立.所以$f(x)$的最小值为$2\sqrt{2}$.故选D.

8.C

提示:设购买的件数为x,花费为y元,由题表得,

$y=\begin{cases}37x,5\leqslant x\leqslant 10,\\32x,11\leqslant x\leqslant 50,\\30x,51\leqslant x\leqslant 100,\\27x,101\leqslant x\leqslant 300,\\25x,x>300.\end{cases}$

所以当$x=107$时,$y=2889<2900$;当$x=108$时,$y=2916>2900$.故最多可购买这种产品107件.故选C.

二、多项选择题

9.BD

提示:由题表可知,由方程$f(g(x))=1$,得$g(x)=3$,所以$x=2$,或$x=4$.故选BD.

10.ACD

提示:根据一次函数$y=-2x(-1\leqslant x\leqslant 0)$与幂函数$y=\sqrt{x}(0<x\leqslant 1)$的图象,可知D正确;$y=f(x-1)$的图象是将$y=f(x)$的图象向右平移1个单位长度得到的,故A正确;对于$y=f(|x|)$,当$x>0$时,其图象与$y=f(x)(x>0)$的图象相同,故B错误;$y=f(-x)$的图象与$y=f(x)$的图象关于$y$轴对称,故C正确.故选ACD.

11.ABD

提示:当$x<a$时,由$f(x)$单调递增,得$a>0$;当$x\geqslant a$时,$f(x)=x^2-2ax+1=(x-a)^2+1-a^2$,此时$f(x)$必单调递增,又$f(x)$为$\mathbf{R}$上的增函数,所以$a^2-1\leqslant a^2-2a^2+1$,结合$a>0$,解得$0<a\leqslant 1$.结合选项,可知选ABD.

12.ABC

提示:$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,$f(0)=0$,当$x>0$时,$-x<0$,则$f(-x)=\frac{-x}{1-(-x)}=-\frac{x}{1+x}=-f(x)$,当$x<0$时,$-x>0$,则$f(-x)=\frac{-x}{1+(-x)}=-\frac{x}{1-x}=-f(x)$,所以$\forall x\in\mathbf{R}$,$f(-x)=-f(x)$,故$f(x)$为奇函数,A正确;当$x\geqslant 0$时,$f(x)=\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}$,此时$f(x)$单调递增,因为$f(x)$为奇函数,其图象关于原点对称,所以$f(x)$在$(-\infty,0]$上也单调递增,故$f(x)$在$\mathbf{R}$上为增函数,B正确;当$x\geqslant 0$时,$f(x)=1-\frac{1}{1+x}\in[0,1)$,则当$x\leqslant 0$时,$f(x)=-f(-x)\in(-1,0]$,故$f(x)\in(-1,1)$,即$|f(x)|<1$,故C正确,D错误.故选ABC.

三、填空题

13.$x=\frac{1}{2}$

提示:结合$y=|x|$的图象,可得$f(x)$图象的对称轴方程为$x=\frac{1}{2}$.

14.4

提示:因为$f(x)$是幂函数,所以$m^2-m-1=1$,解得$m=-1$或$m=2$.

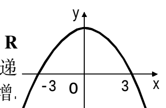
当$m=-1$时,$f(x)=\frac{1}{x}$,图象不关于y轴对称,舍去;当$m=2$时,$f(x)=x^2$,图象关于y轴对称,故$f(m)=2^2=4$.

15.$f(x)=x+1$

提示:设一次函数$f(x)=kx+b$,则$xf(x+1)+f(x^2)=x[k(x+1)+b]+(kx^2+b)=2kx^2+(k+b)x+b=2x^2+2x+1$,所以$\begin{cases}2k=2,\\k+b=2,\\b=1,\end{cases}$解得$k=1$,$b=1$.所以$f(x)=x+1$.

16.$(-1,0)\cup(5,+\infty)$

提示:因为函数$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数,且在$[0,+\infty)$上单调递减,所以$f(x)$在$(-\infty,0]$上单调递增.由$f(3)=0$,得$f(-3)=0$.画出$f(x)$的大致图象如图所示.



(第16题图)

由图可知,对于$\frac{f(x-2)}{x}<0$,当$x<0$时,$f(x-2)>0$,得$-3<x-2<3$,解得$-1<x<0$;当$x>0$时,$f(x-2)<0$,得$x-2<-3$,或$x-2>3$,解得$x>5$.

综上,原不等式的解集为$(-1,0)\cup(5,+\infty)$.

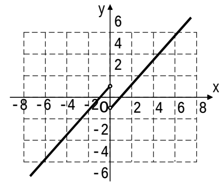
四、解答题

17.**解**:(1)当$x<0$时,$f(x)=x-\frac{|x|}{x}=x-\frac{-x}{x}=x+1$;

当$x>0$时,$f(x)=x-\frac{|x|}{x}=x-\frac{x}{x}=x-1$.

所以$f(x)=\begin{cases}x+1,x<0,\\x-1,x>0.\end{cases}$

(2)$f(x)$的图象如图所示.



(第17题图)

(3)$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,值域为$\mathbf{R}$,单调递增区间为$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$.

18.**解**:(1)由已知,得$h(x)=\frac{x^2-3x}{\sqrt{2x+1}}\cdot\frac{\sqrt{2x+1}}{x-3}=x$,其中$\begin{cases}x-3\neq 0,\\2x+1>0,\end{cases}$即$x>-\frac{1}{2}$,且$x\neq 3$,所以$y=h(x)$与$y=H(x)$的定义域不相同,二者不是同一函数.

(2)由(1)知$h(x)=x$,其中$x>-\frac{1}{2}$,且$x\neq 3$,

所以$G(x)=h(x)-\sqrt{2h(x)+1}=x-\sqrt{2x+1}$,其中$x>-\frac{1}{2}$,且$x\neq 3$.

令$t=\sqrt{2x+1}$,则$x=\frac{t^2-1}{2}$,$t>0$且$t\neq\sqrt{7}$,所以$y=G(x)=\frac{t^2-1}{2}-t=\frac{1}{2}(t-1)^2-1\geqslant -1$,且$y\neq 3-\sqrt{7}$.

所以$G(x)$的值域为$[-1,3-\sqrt{7})\cup(3-\sqrt{7},+\infty)$.

19.(1)**解**:因为$f(x)=x^{\alpha}$的图象经过点$A\left(\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$,所以$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}=\sqrt{2}$,即$2^{-\alpha}=2^{\frac{1}{2}}$,解得$\alpha=-\frac{1}{2}$.

(2)**证明**:由(1)可得$f(x)=x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且$x_1<x_2$,则$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{\sqrt{x_1}}-\frac{1}{\sqrt{x_2}}=\frac{\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1x_2}}=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_1x_2}(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})}$.

由$x_1,x_2\in(0,+\infty)$,得$\sqrt{x_1x_2}>0$,$\sqrt{x_2}>0$,$\sqrt{x_1}>0$,即$\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}>0$;

由$x_1<x_2$,得$x_2-x_1>0$.所以$f(x_1)-f(x_2)>0$,

即$f(x_1)>f(x_2)$.所以$f(x)$在区间$(0,+\infty)$内单调递减.

20.**解**:(1)$f(x)=ax^2+bx+1$,由$f(-1)=0$,

得$a-b+1=0$; ①

由函数$f(x)$的值域为$[0,+\infty)$,得$\frac{4a-b^2}{4a}=0$. ②

联立①②,解得$a=1$,$b=2$.所以$f(x)=x^2+2x+1$.

因为$y=F(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数,

所以$F(-x)=-F(x)$,则$F(0)=0$.

当$x>0$时,$F(x)=f(x)=x^2+2x+1$,当$x<0$时,$-x>0$,所以$F(-x)=(-x)^2+2(-x)+1=x^2-2x+1$,则$F(x)=-x^2+2x-1$.

综上,$F(x)=\begin{cases}-x^2+2x-1,x<0,\\0,x=0,\\x^2+2x+1,x>0.\end{cases}$

(2)由(1)可得$g(x)=F(x)-kx$

$=\begin{cases}-x^2+(2-k)x-1,x<0,\\0,x=0,\\x^2+(2-k)x+1,x>0.\end{cases}$

当$x<0$时,$g(x)$的图象开口向下,对称轴为$x=\frac{2-k}{2}$;

当$x>0$时,$g(x)$的图象开口向上,对称轴为$x=-\frac{2-k}{2}$.

要使$g(x)$是$\mathbf{R}$上的单调函数,显然$g(x)$只能单调递增,所以$\frac{2-k}{2}\geqslant 0$,且$-\frac{2-k}{2}\leqslant 0$,解得$k\leqslant 2$.

所以实数k的取值范围为$(-\infty,2]$.

21.**解**:(1)当$0<x<60$时,$f(x)=70x-600-(x^2-10x)=-x^2+80x-600$;

当$x\geqslant 60$时,$f(x)=70x-600-\left(71x+\frac{6400}{x}-2000\right)=1400-\left(x+\frac{6400}{x}\right)$.所以$f(x)=\begin{cases}-x^2+80x-600,0<x<60,\\1400-\left(x+\frac{6400}{x}\right),x\geqslant 60.\end{cases}$

(2)当$0<x<60$时,$f(x)=-x^2+80x-600=-(x-40)^2+1000$,此时$f(x)$的最大值为$f(40)=1000$;

当$x\geqslant 60$时,$f(x)=1400-\left(x+\frac{6400}{x}\right)\leqslant 1400-2\sqrt{x\cdot\frac{6400}{x}}=1240$,

当且仅当$x=\frac{6400}{x}$,即$x=80$时,等号成立,

此时$f(x)$的最大值为$f(80)=1240$.

因为1000万元<1240万元,所以当年产量为80百件时,所获利润最大,最大利润为1240万元.

22.**解**:若选①,因为偶函数$f(x)$的定义域为$[b-1,b+1]$,所以$b-1+b+1=0$,解得$b=0$.