第 4 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A **提示**:由 $x\log_3 2=1$,得 $x=\dfrac{1}{\log_3 2}=\log_2 3$,则 $4^x=4^{\log_2 3}=2^{2\log_2 3}=2^{\log_2 9}=9$.故选 A.

2.C **提示**:因为函数 $y=(m^2-2m-2)m^x$ 是指数函数,所以 $\begin{cases}m^2-2m-2=1,\\ m>0,\\ m\neq 1,\end{cases}$ 解得 $m=3$.故选 C.

3.B **提示**:根据题意,得 $100!\approx\sqrt{200\pi}\left(\dfrac{100}{e}\right)^{100}$,所以 $\lg 100!\approx 100(2-\lg e)+\dfrac{1}{2}(\lg 2+2+\lg\pi)\approx 100\times(2-0.434)+\dfrac{1}{2}\times(0.301+2+0.497)=157.999$,所以 100! 的十进制的位数约为 158 位.故选 B.

4.C **提示**:由题意,知 $m^2-2m-2=1$,即 $(m+1)(m-3)=0$,解得 $m=-1$ 或 $m=3$.所以当 $m=-1$ 时,$m-2=-3$,则 $f(x)=x^{-3}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,不合题意;当 $m=3$ 时,$m-2=1$,则 $f(x)=x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,符合题意,所以 $m=3$.故选 C.

5.D **提示**:当 $0<a<1$ 时,则 $\dfrac{1}{a}>1$,所以 $g(x)=\log_a x$ 在域 $(0,+\infty)$ 上单调递减,$f(x)=a^{-x}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,所以对应的图象为选项 D.故选 D.

6.A **提示**:$a=\log_2\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{5}}2}$,$b=\log_3\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{5}}3}$,因为 $\log_{\frac{1}{5}}3<\log_{\frac{1}{5}}2<\log_{\frac{1}{5}}1=0$,所以 $0>\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{5}}3}>\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{5}}2}$,即 $0>b>a$,又 $c=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{5}}>\left(\dfrac{1}{5}\right)^0=1$,所以 $c>b>a$.故选 A.

7.C **提示**:作出函数 $f(x)=\begin{cases}|\log_2 x|,0<x\leqslant 4,\\ \dfrac{2}{3}x^2-8x+\dfrac{70}{3},x>4,\end{cases}$ 的图象(图略),因为 a,b,c,d 互不相同,不妨设 $a<b<c<d$,又 $f(a)=f(b)=f(c)=f(d)$,且 $f(5)=f(7)=0$,所以 $4<c<5$,$7<d<8$,所以 $-\log_2 a=\log_2 b$,$c+d=12$,则 $ab=1$,所以 $abcd=c(12-c)=-c^2+12c$,又 $4<c<5$,由二次函数的性质,知 $-4^2+12\times4<-c^2+12c<-5^2+12\times5$,即 $32<-c^2+12c<35$,所以 $abcd$ 的取值范围是 $(32,35)$.故选 C.

8.D **提示**:由题意,得 $f(2)=\lg(2a-3)=0$,则 $2a-3=1$,解得 $a=2$,故 $f(x)=\lg(2x-3)$,由 $2f(x)>\lg(kx^2)$,即 $\lg(2x-3)^2>\lg(kx^2)$ 在 $[3,4]$ 上有解,则 $0<kx^2<4x^2-12x+9$,即 $k<\dfrac{9}{x^2}-\dfrac{12}{x}+4$ 在 $[3,4]$ 上有解.令 $t=\dfrac{1}{x}$,则 $t\in\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3}\right]$,$g(t)=9t^2-12t+4$,函数 $g(t)$ 在 $\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3}\right]$ 上单调递减,所以 $g(t)_{\max}=g\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{25}{16}$,所以 $k<\dfrac{25}{16}$,又 $k>0$,所以 k 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{25}{16}\right)$.故选 D.

二、多项选择题

9.CD **提示**:因为 $\log_3 a>\log_3 b$,所以 $a>b>0$,所以 $0<\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$,故 A 错误;因为 $a-b>1$ 不一定成立,所以 $\log_3(a-b)>0$ 不一定成立,故 B 错误;由 $a>b>0$,得 $a-b>0$,则 $3^{a-b}>3^0=1$,故 C 正确;$\left(\dfrac{1}{3}\right)^a<\left(\dfrac{1}{3}\right)^b<\left(\dfrac{1}{2}\right)^b$,故 D 正确.故选 CD.

10.BD **提示**:当 $a>1$ 时,$f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上单调递增,所以 $f(x)$ 的最大值为 a^2,最小值为 $\dfrac{1}{a}$,由题意,知 $a^2=\dfrac{8}{a}$,解得 $a=2$,满足题意.当 $0<a<1$ 时,$f(x)$ 在 $[-1,2]$ 单调递减,所以 $f(x)$ 的最大值为 $\dfrac{1}{a}$,最小值为 a^2,由题意,知 $\dfrac{1}{a}=8a^2$,解得 $a=\dfrac{1}{2}$,满足题意.

综上,$a=\dfrac{1}{2}$ 或 $a=2$.故选 BD.

11.AD **提示**:因为 $f(x)=(m^2-3)x^m$ 为幂函数,所以 $m^2-3=1$,所以 $m=-2$ 或 $m=2$.当 $m=2$ 时,$f(x)=x^2$,此时 $f(2)=4$,函数 $f(x)$ 的图象不过点 $\left(2,\dfrac{1}{4}\right)$,不符合题意,故 $f(x)\neq x^2$;当 $m=-2$ 时,$f(x)=x^{-2}$,此时 $f(2)=\dfrac{1}{4}$,函数 $f(x)$ 的图象过点 $\left(2,\dfrac{1}{4}\right)$,符合题意,故 $f(x)=x^{-2}$.又 $f(-x)=f(x)$,则 $f(x)$ 是偶函数,故 A 正确;因为 $-2<0$,所以 $f(x)=x^{-2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,故 D 正确;结合偶函数的性质,得 $f(x)=x^{-2}$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增,故 C 错误.故选 AD.

12.AD **提示**:对于 A,由 $x^2-2ax+a^2-1>0$,得 $x>a+1$ 或 $x<a-1$,则 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,a-1)\cup(a+1,+\infty)$,故 A 正确;对于 B,设 $t=x^2-2ax+a^2-1$,则 $y=\log_a t$,因为 $0<a<1$,所以 $y=\log_a t$ 为减函数,又 $t=x^2-2ax+a^2-1$ 为开口向上的二次函数,当 $x\in(a+1,+\infty)$ 时,该二次函数单调递增,当 $x\in(-\infty,a-1)$ 时,该二次函数单调递减,所以当 $0<a<1$ 时,$f(x)$ 的单调递减区间为 $(a+1,+\infty)$,单调递增区间为 $(-\infty,a-1)$,故 B 错误;对于 C,不妨设 $a=2$,则 $f(x)=\log_2(x^2-4x+3)$,设 $t=f(x)$,由 $f(f(x))=2$,得 $f(t)=2$,即 $\log_2(t^2-4t+3)=2$,解得 $t=2\pm\sqrt{5}$,又 $2+\sqrt{5}\in(3,+\infty)$,$2-\sqrt{5}\in(-\infty,1)$,作出 $t=f(x)$ 的大致图象(图略),由图可知直线 $t=2\pm\sqrt{5}$ 与 $y=f(x)$ 的图象有四个不同的交点,则方程 $f(f(x))=2$ 至多存在 4 个实根,故 C 错误;对于 D,因为 $f(2a-x)=\log_a[(2a-x)^2-2a(2a-x)+a^2-1]=\log_a(x^2-2ax+a^2-1)=f(x)$,所以 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称,故 D 正确.故选 AD.

三、填空题

13.$\sqrt{10}$ **提示**:因为 $2^a=5^b=m$,所以 $a=\log_2 m$,$b=\log_5 m$,所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\log_m 2+\log_m 5=\log_m 10=2$,所以 $m^2=10$,又 $m>0$,所以 $m=\sqrt{10}$.

14.$\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$ **提示**:由函数 $y=a^{1-x}(a>0$,且 $a\neq1)$,令 $1-x=0$,得 $x=1$,所以定点为 $A(1,1)$,又点 A 在直线 $mx+ny-1=0(mn>0)$ 上,所以 $m+n=1$,又 $mn>0$,所以 $m>0,n>0$,所以 $\dfrac{1}{2m}+\dfrac{1}{n}=\left(\dfrac{1}{2m}+\dfrac{1}{n}\right)(m+n)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{n}{2m}+\dfrac{m}{n}\geqslant\dfrac{3}{2}+2\sqrt{\dfrac{n}{2m}\cdot\dfrac{m}{n}}=\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$,当且仅当 $\dfrac{n}{2m}=\dfrac{m}{n}$,即 $m=\sqrt{2}-1$,$n=2-\sqrt{2}$ 时,等号成立,所以 $\dfrac{1}{2m}+\dfrac{1}{n}$ 的最小值为 $\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$.

15.2,$[1,2)$ **提示**:因为 $y=(m^2-3)x^m$ 是幂函数,所以 $m^2-3=1$,解得 $m=\pm2$,又 $y=(m^2-3)x^m$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $m>0$,则 $m=2$,所以 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+mx)=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+2x)$,由 $-x^2+2x>0$,解得 $0<x<2$,则 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+2x)$ 的定义域为 $(0,2)$,令 $t=-x^2+2x=-(x-1)^2+1$,其开口向下,对称轴为直线 $x=1$,所以 $t=-x^2+2x$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,在 $[1,2)$ 上单调递减,又 $y=\log_{\frac{1}{2}}t$ 在其定义域内单调递减,所以 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x^2+2x)$ 的单调递增区间为 $[1,2)$.

16.$[2,+\infty)$ **提示**:$\exists x_1\in[2,+\infty)$,$\forall x_2\in\left[\dfrac{1}{3},3\right]$ 有 $f(x_1)\leqslant g(x_2)$ 等价于当 $x_1\in[2,+\infty)$,$x_2\in\left[\dfrac{1}{3},3\right]$ 时,$f(x_1)_{\min}\leqslant g(x_2)_{\min}$.由 $x\in[2,+\infty)$,得 $x^2-1\geqslant3$,则 $\log_3(x^2-1)\geqslant\log_3 3=1$,所以当 $x\in[2,+\infty)$ 时,$f(x)_{\min}=f(2)=1$,又 $g(x)=x^2-2x+a$ 的图象开口向上,对称轴为直线 $x=1\in\left[\dfrac{1}{3},3\right]$,所以当 $x\in\left[\dfrac{1}{3},3\right]$ 时,$g(x)_{\min}=g(1)=a-1$,所以 $1\leqslant a-1$,解得 $a\geqslant2$,即实数 a 的取值范围是 $[2,+\infty)$.

四、解答题

17.**解**:(1)原式 $=\sqrt{\dfrac{25}{4}}-1-\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}+64^{\frac{1}{3}}=\dfrac{5}{2}-1-\dfrac{2}{3}+4=\dfrac{29}{6}$.

(2)原式 $=\log_3 3^{\frac{3}{2}}+\lg(125\times8)+2=\dfrac{3}{2}+3+2=\dfrac{13}{2}$.

18.**解**:(1)因为幂函数 $f(x)=(m^2-3m+3)x^{4m-m^2}$ 是偶函数,所以 $m^2-3m+3=1$,解得 $m=2$ 或 $m=1$,又 $f(x)$ 是偶函数,所以 $4m-m^2$ 是偶数,则 $m=2$,所以函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=x^4$.

(2)因为 $f(x)=x^4$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,所以 $f(2x-1)<f(2-x)$ 等价于 $|2x-1|<|2-x|$,即 $(2x-1)^2<(2-x)^2$,解得 $-1<x<1$,所以 x 的取值范围是 $(-1,1)$.

19.**解**:(1)因为函数 $f(x)=b\cdot a^x$,(a,b 为常数,且 $a>0,a\neq1$)的图象经过点 $A(1,8)$,$B(3,32)$,

所以 $\begin{cases}a\cdot b=8,\\ a^3\cdot b=32,\end{cases}$ 解得 $a=2,b=4$,所以 $f(x)=4\cdot2^x=2^{x+2}$.

(2)设 $g(x)=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x+\left(\dfrac{1}{b}\right)^x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$,因为不等式 $\left(\dfrac{1}{a}\right)^x+\left(\dfrac{1}{b}\right)^x-m\geqslant0$,即 $m\leqslant g(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上恒成立,所以当 $x\in(-\infty,1]$ 时,$m\leqslant g(x)_{\min}$.因为 $y=g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数,所以当 $x\in(-\infty,1]$ 时,$g(x)_{\min}=g(1)=\dfrac{3}{4}$,则 $m\leqslant\dfrac{3}{4}$,即实数 m 的取值范围是 $\left(-\infty,\dfrac{3}{4}\right]$.

20.**解**:(1)因为 $a>0$ 且 $a\neq1$,设 $t(x)=4-ax$,则 $t(x)=4-ax$ 为减函数,所以当 $x\in\left[\dfrac{1}{2},3\right]$ 时,$t(x)\geqslant t(3)=4-3a$.要使 $f(x)$ 有意义,只需 $x\in\left[\dfrac{1}{2},3\right]$ 时,$4-ax>0$ 恒成立,即 $f(x)_{\min}>0$,则 $4-3a\geqslant0$,得 $a\leqslant\dfrac{4}{3}$.又 $a>0$ 且 $a\neq1$,所以 $0<a<1$,或 $1<a\leqslant\dfrac{4}{3}$,

所以实数 a 的取值范围为 $(0,1)\cup\left(1,\dfrac{4}{3}\right]$.

(2)由(1)知,$t(x)=4-ax$ 为减函数,要使函数 $f(x)$ 在 $[-5,21]$ 上为增函数,只需 $0<a<1$,则 $f(x)_{\min}=f(-5)=\log_a(4+5a)=-1$,解得 $a=\dfrac{1}{5}$,或 $a=-1$(舍去),所以存在 $a=\dfrac{1}{5}$ 使得函数 $f(x)$ 在 $[-5,21]$ 上为增函数,并且在此区间上的最小值为 -1.

21.**解**:(1)因为 $f(x)$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的奇函数,所以 $f(x)=-f(x)$,$f(0)=0$,又当 $x\in(-1,0)$ 时,$f(x)=2^x+2^{-x}$,所以当 $x\in(0,1)$ 时,则 $-x\in(-1,0)$,$f(x)=-f(-x)=-(2^x+2^{-x})$,

所以 $f(x)=\begin{cases}2^x+2^{-x},-1<x<0,\\ 0,x=0,\\ -(2^x+2^{-x}),0<x<1.\end{cases}$

(2)由题意,得 $t\cdot2^x\cdot f(x)<4^x-1$,即 $t\cdot2^x\cdot[-(2^x+2^{-x})]<4^x-1$,即 $t>-\dfrac{4^x-1}{4^x+1}$ 在 $(0,1)$ 上恒成立.令 $g(x)=-\dfrac{4^x-1}{4^x+1}=-1+\dfrac{2}{4^x+1}$,因为 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,所以 $g(x)<g(0)=-1+\dfrac{2}{4^0+1}=0$,所以 $t\geqslant0$,即实数 t 的取值范围为 $[0,+\infty)$.

22.**解**:(1)当 $m=6$ 时,$g(x)=\log_a(2x+4)$,所以 $F(x)=f(x)+g(x)=\log_a x+\log_a(2x+4)=\log_a(2x^2+4x)$,$x\in[1,3]$.当 $a>1$ 时,$F(x)$ 在 $[1,3]$ 上单调递增,则 $F(x)_{\max}=F(3)=\log_a 30=2$,解得 $a=\sqrt{30}$.当 $0<a<1$ 时,$F(x)$ 在 $[1,3]$ 上单调递减,则 $F(x)_{\max}=F(1)=\log_a 6=2$,解得 $a=\sqrt{6}\notin(0,1)$,舍去.

综上,a 的值为 $\sqrt{30}$.

(2)要使 $g(x)$ 在 $[1,3]$ 上有意义,则 $2\times1+m-2>0$,解得 $m>0$.由 $f(x)<2g(x)$,即 $\log_a x<\log_a(2x+m-2)^2$ 在 $[1,3]$ 上有解,又 $a>1$,所以 $x<(2x+m-2)^2$,即 $\sqrt{x}<2x+m-2$,即 $m>-2x+\sqrt{x}+2$ 在 $[1,3]$ 上有解.令 $t=\sqrt{x}$,则 $t\in[1,\sqrt{3}]$,$h(t)=-2t^2+t+2$,对称轴为直线 $t=\dfrac{1}{4}$,所以 $h(t)$ 在 $[1,\sqrt{3}]$ 上单调递减,则 $h(t)_{\min}=h(\sqrt{3})=\sqrt{3}-4$,所以 $m>\sqrt{3}-4$,又 $m>0$,所以 $m>0$.

综上,实数 m 的取值范围为 $(0,+\infty)$.

扫码免费下载
习题讲解 ppt

第 1 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C **提示**:因为集合 M 满足 $\{2,3\}\subseteq M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$,所以 $2\in M$,$3\in M$,所以集合 M 的个数等于集合 $\{1,4,5\}$ 的子集的个数,为 $2^3=8$.故选 C.

2.B **提示**:因为 $z(1+i)=1-3i$,所以 $z=\dfrac{1-3i}{1+i}=\dfrac{(1-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2-4i}{2}=-1-2i$,所以 z 的虚部是 -2.故选B.

3.A **提示**:根据存在量词命题的否定的定义可知,命题"$\exists x\in\mathbf{R}$,使 $x^2+x-1=0$"的否定是"$\forall x\in\mathbf{R}$,使 $x^2+x-1\neq0$".故选 A.

4.A **提示**:因为 $z(1+i)=2i$,所以 $z=\dfrac{2i}{1+i}=\dfrac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1+i$,则复数 z 在复平面内对应的点 $(1,1)$ 位于第一象限.故选 A.

5.B **提示**:因为 $\left\{a,\dfrac{b}{a},1\right\}=\{a^2,a+b,0\}$,所以 $\dfrac{b}{a}=0$,则 $b=0$,所以 $\{a,0,1\}=\{a^2,a,0\}$,所以 $a^2=1$ 且 $a\neq1$,所以 $a=-1$,所以 $b^{2022}-a^{2022}=0-1=-1$.故选 B.

6.A **提示**:对于 A,命题"$\exists x_0\in\mathbf{R}$,$x_0^2-x_0>0$"的否定是"$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2-x\leqslant0$",故 A 正确;对于 B,因为 $a>b>0$,且 $c>0$,所以 $\dfrac{b}{a}-\dfrac{b+c}{a+c}=\dfrac{ab+bc-ab-ac}{a(a+c)}=\dfrac{c(b-a)}{a(a+c)}<0$,所以 $\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+c}{a+c}$,故 B 错误;对于 C,当 $c=0$ 时,由 $a>b$,不能推出 $ac^2>bc^2$,但由 $ac^2>bc^2$,能推出 $a>b$,所以"$a>b$"是"$ac^2>bc^2$"的必要不充分条件,故 C 错误;对于 D,因为 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,所以 $\sin x\in(0,1]$,令 $t=\sin x$,则 $y=t+\dfrac{4}{t}$,$t\in(0,1]$,由对勾函数的性质,知该函数在 $(0,1]$ 上单调递减,所以当 $t=1$ 时,y 取得最小值为 5,故 D 错误.故选 A.

7.D **提示**:由韦恩图可知,阴影部分表示的集合为 $A\cap(\complement_U B)$,$A=\{x\mid y=\sqrt{5-x},x\in\mathbf{N}\}=\{x\mid x\leqslant5,x\in\mathbf{N}\}=\{0,1,2,3,4,5\}$,因为 $B=\{y\mid y=-x^2+3\}=\{y\mid y\leqslant3\}$,所以 $\complement_U B=\{y\mid y>3\}$,所以 $A\cap(\complement_U B)=\{4,5\}$.故选 D.

8.D **提示**:因为 $\dfrac{5}{1-ai}=1+2i$,则 $5=(1-ai)(1+2i)=1+2a+(2-a)i$,所以 $\begin{cases}1+2a=5,\\ 2-a=0,\end{cases}$ 解得 $a=2$,所以 $|1+ai|=|1+2i|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.故选 D.

9.C **提示**:由 $x^2-2x-3<0$,即 $(x-3)(x+1)<0$,解得 $-1<x<3$,则 $A=(-1,3)$,由 $2^{x-2}>1$,得 $x-2>0$,则 $x>2$,$B=(2,+\infty)$,所以 $\complement_{\mathbf{R}}B=(-\infty,2]$,所以 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x\mid-1<x\leqslant2\}$.故选 C.

10.B **提示**:因为 $A=\{x\mid 2^x<1\}=\{x\mid x<0\}$,$B=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{2}{x+1}<1\right\}=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1-x}{x+1}<0\right\}=\{x\mid x>1$ 或 $x<-1\}$,又 $A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$,所以 $A-B=\{x\mid-1\leqslant x<0\}$.故选 B.

11.C **提示**:由 $6+x-x^2>0$,解得 $-2<x<3$,所以 $B=\{x\mid-2<x<3\}$,因为 $A=\{x\mid a<x<a+2\}\neq\varnothing$,$A\subseteq B$,所以 $\begin{cases}a\geqslant-2,\\ a+2\leqslant3,\end{cases}$ 解得 $-2\leqslant a\leqslant1$.故选 C.

12.D **提示**:不等式 $ax^2-2x+1>0(a\in\mathbf{R})$ 恒成立等价于 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta=4-4a<0,\end{cases}$ 解得 $a>1$,所以不等式 $ax^2-2x+1>0(a\in\mathbf{R})$ 恒成立的充要条件是 $a>1$,结合选项可知,$\{a\mid a>2\}\subsetneqq\{a\mid a>1\}$,所以"$a>2$"是"$a>1$"的充分不必要条件.故选 D.

二、多项选择题

13.AD **提示**:因为 $A\cup B=A$,所以 $B\subseteq A$,当 $m=3$ 时,$B=\{1,3\}$,$A=\{1,3,9\}$,符合题意;当 $m=m^2$,即 $m=0$ 或 1 时,若 $m=0$,集合 $A=\{1,3,0\}$,$B=\{1,0\}$,符合题意;若 $m=1$,集合 A,B 都不满足集合元素的互异性,舍去.

综上,$m=3$ 或 0.故选 AD.

14.AD **提示**:对于 A,$z_2=2i$,其实部为零,虚部不为零,是纯虚数,故 A 正确;对于 B,$z_1-z_2=2-3i$,其在复平面上对应的点为 $(2,-3)$,位于第四象限,故 B 错误;对于 C,$z_1+z_2=2+i$,则 $|z_1+z_2|=\sqrt{5}$,故 C 错误;对于 D,$z_1=2-i$,则 $\bar{z}_1=2+i$,故 D 正确.故选 AD.

15.BD **提示**:对于 A,命题"$\forall x>1,x^2>1$"的否定是"$\exists x>1,x^2\leqslant1$",故 A 错误;对于 B,命题"$\exists x\in(-2,+\infty)$,$x^2\leqslant4$"的否定是"$\forall x\in(-2,+\infty)$,$x^2>4$",故 B 正确;对于 C,函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上为连续函数,若 $f(a)f(b)<0$,则函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有零点,反之不成立,如 $f(x)=x^2-1$,$x\in(-5,5)$,易知 $f(-5)f(5)>0$,且 $f(x)$ 在区间 $(-5,5)$ 上有两个零点,所以"$f(a)f(b)<0$"是"函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有零点"的充分不必要条件,故 C 错误;对于 D,当 $b=0$ 时,令 $y=f(x)=ax^2+c$,定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(-x)=ax^2+c=f(x)$,所以二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 为偶函数;当二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 为偶函数时,则 $f(-x)=ax^2-bx+c=f(x)=ax^2+bx+c$,所以 $b=0$,故 D 正确.故选 BD.

16.BCD **提示**:由 $z_1=2-i$,$z_2=1+ai(a\in\mathbf{R})$,得 $z_1\cdot z_2=2+a+(2a-1)i$,因为 $z_1\cdot z_2$ 是纯虚数,所以 $\begin{cases}2+a=0,\\ 2a-1\neq0,\end{cases}$ 解得 $a=-2$,故 A 错误;复数 $z_1=2-i$,$z_2=1-2i$,则 $|z_1|=\sqrt{5}$,$|z_2|=\sqrt{5}$,故 B 正确;$z_2^2=(1-2i)^2=-3-4i$,则 z_2^2 的实部为 -3,故 C 正确;$z_1+z_2=2-i+1-2i=3-3i$,则 z_1+z_2 的实部是 3,虚部是 -3,即 z_1+z_2 的实部与虚部互为相反数,故 D 正确.故选 BCD.

17.BC **提示**:由题意,得函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减等价于 $\begin{cases}2a-1<0,\\ 0<a<1,\\ 3a\geqslant1,\end{cases}$ 解得 $\dfrac{1}{3}\leqslant a<\dfrac{1}{2}$,根据充分不必要条件的定义结合选项,可知选 BC.

18.ABD **提示**:对于 A,因为 $M=N$,所以 $m+2=2$ 或 $2m=2$,解得 $m=0$ 或 1,当 $m=0$ 时,$M=\{0,2\}$,$N=\{2,0\}$,符合题意,当 $m=1$ 时,$M=\{1,2\}$,$N=\{3,2\}$,不符合题意,综上,$m=0$,故 A 正确;对于 B,由 $\varnothing$ 是集合 $\{x\mid x^2\leqslant a,a\in\mathbf{R}\}$ 的真子集,得 $\{x\mid x^2\leqslant a,a\in\mathbf{R}\}\neq\varnothing$,所以 $a\geqslant0$,故 B 正确;对于 C,集合 $P=\{x\mid x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$,$Q=\{x\mid mx-1=0\}$,因为 $P\supseteq Q$,当 $Q=\varnothing$ 时,$m=0$,符合题意,当 $Q\neq\varnothing$ 时,则 $m\neq0$,所以 $Q=\left\{\dfrac{1}{m}\right\}$,所以 $\dfrac{1}{m}=1$ 或 $\dfrac{1}{m}=2$,解得 $m=1$ 或 $m=\dfrac{1}{2}$,综上,$m\in\left\{0,1,\dfrac{1}{2}\right\}$,故 C 错误;对于 D,集合 $A=\{x\mid ax^2-3x+2=0\}$ 至多有一个元素,当 $a=0$ 时,集合 $A=\{x\mid-3x+2=0\}=\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$,符合题意,当 $a\neq0$ 时,则 $\Delta=(-3)^2-8a\leqslant0$,解得 $a\geqslant\dfrac{9}{8}$,综上,a 的取值范围为 $\{0\}\cup\left\{a\,\middle|\,a\geqslant\dfrac{9}{8}\right\}$,故 D 正确.故选 ABD.

三、填空题

19.$\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ **提示**:因为集合 $A=\{y\mid y=\log_2 x,x>1\}=\{y\mid y>0\}$,$B=\left\{y\,\middle|\,y=\dfrac{1}{2^x},x>1\right\}=\left\{y\,\middle|\,0<y<\dfrac{1}{2}\right\}$,所以 $A\cap B=\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

20.$\dfrac{1}{2}-\dfrac{7}{2}i$ **提示**:因为 $(1-i)z=4+3i$,所以 $z=\dfrac{4+3i}{1-i}=\dfrac{(4+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{7}{2}i$,所以 $\bar{z}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{7}{2}i$.

21.$\left(\dfrac{24}{7},+\infty\right)$ **提示**:因为命题"$\exists x\in[0,1]$,$f(x)\leqslant3-a$"是假命题,所以命题"$\forall x\in[0,1]$,$f(x)>3-a$"是真命题,故 $2ax^2-ax>3-a$,即 $a(2x^2-x+1)>3$ 在 $[0,1]$ 上恒成立,则 $a>\left(\dfrac{3}{2x^2-x+1}\right)_{\max}=\dfrac{24}{7}$,易知当 $x=\dfrac{1}{4}$ 时,$\dfrac{3}{2x^2-x+1}$ 取得最大值 $\dfrac{24}{7}$,所以实数 a 的取值范围为 $\left(\dfrac{24}{7},+\infty\right)$.

22.②③ **提示**:因为 $y^2=x^3-2x+1$,所以 $x^3-2x+1\geqslant0$,所以 $(x^2+x-1)(x-1)\geqslant0$,解得 $x\in\left[\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]\cup[1,+\infty)$,所以不存在实数 a,使得 $|x|\leqslant a$ 恒成立,故①错误;因为 $x\in\left[\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]\cup[1,+\infty)$ 不关于原点对称,所以该曲线不是中心对称图形,故②正确;将方程 $y^2=x^3-2x+1$ 中的 y 变为 $-y$ 时,方程变为 $(-y)^2=y^2=x^3-2x+1$,与原方程相同,所以该曲线关于 x 轴对称,故③正确;因为 $x\in\left[\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]\cup[1,+\infty)$,所以当 $m\in\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right)$ 时,直线 $x=m(m>0)$ 与该曲线无交点,故④错误.

四、解答题

23.**解**:(1)$A=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{8}\leqslant2^x\leqslant16\right\}=\{x\mid2^{-3}\leqslant2^x\leqslant2^4\}=\{x\mid-3\leqslant x\leqslant4\}$,当 $a=2$ 时,$B=\{x\mid x^2-8x+12\leqslant0\}=\{x\mid(x-2)(x-6)\leqslant0\}=\{x\mid2\leqslant x\leqslant6\}$,所以 $A\cup B=\{x\mid-3\leqslant x\leqslant6\}$.

(2)$B=\{x\mid x^2-4ax+3a^2\leqslant0,a>0\}=\{x\mid(x-a)(x-3a)\leqslant0,a>0\}=\{x\mid a\leqslant x\leqslant3a\}$,由(1)得 $A=\{x\mid-3\leqslant x\leqslant4\}$,因为 $A\cap B=\varnothing$,又 $a>0$,所以 $a>4$,解得 $a>4$,所以实数 a 的取值范围是 $(4,+\infty)$.

24.**解**:(1)集合 $A=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{4}<2^{x-a}\leqslant8\right\}=\{x\mid2^{-2}<2^{x-a}\leqslant2^3\}=\{x\mid-2<x-a\leqslant3\}=\{x\mid a-2<x\leqslant a+3\}$,当 $a=2$ 时,$A=\{x\mid0<x\leqslant5\}$,由 $\begin{cases}3x-2>0,\\ \log_{\frac{1}{2}}(3x-2)\geqslant0,\end{cases}$ 解得 $\dfrac{2}{3}<x\leqslant1$,即 $B=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{2}{3}<x\leqslant1\right\}$,所以 $\complement_U B=\left\{x\,\middle|\,x\leqslant\dfrac{2}{3}\text{ 或 }x>1\right\}$,所以 $(\complement_U B)\cap A=\left\{x\,\middle|\,0<x\leqslant\dfrac{2}{3}\text{ 或 }1<x\leqslant5\right\}$.

(2)由(1)得,$A=\{x\mid a-2<x\leqslant a+3\}$,$B=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{2}{3}<x\leqslant1\right\}$,因为"$x\in B$"是"$x\in A$"成立的充分不必要条件,所以 $B\subsetneqq A$,所以 $\begin{cases}a-2<\dfrac{2}{3},\\ a+3\geqslant1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a-2\leqslant\dfrac{2}{3},\\ a+3>1,\end{cases}$ 解得 $-2\leqslant a\leqslant\dfrac{8}{3}$,即 a 的取值范围为 $\left[-2,\dfrac{8}{3}\right]$.

25.**解**:(1)集合 $A=\{x\mid\log_2(x^2-7x)>3\}=\{x\mid x^2-7x-8>0\}=\{x\mid x<-1$ 或 $x>8\}$,当 $a=6$ 时,$B=\{x\mid a+1<x<2a-3\}=\{x\mid7<x<9\}$,所以 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x\mid x\leqslant7$ 或 $x\geqslant9\}$,所以图中阴影部分表示的集合 $C=A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x\mid x<-1$ 或 $x\geqslant9\}$.

(2)因为①$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\varnothing$;②$A\cap B=B$;③$A\cup B=A$,所以选择①,②,③均等价于 $B\subseteq A$.

当 $B=\varnothing$ 时,$a+1\geqslant2a-3$,解得 $a\leqslant4$;当 $B\neq\varnothing$ 时,$\begin{cases}a+1<2a-3,\\ 2a-3\leqslant-1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a+1<2a-3,\\ a+1\geqslant8,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant7$.

综上,实数 a 的取值范围是 $(-\infty,4]\cup[7,+\infty)$.

26.**解**:(1)当 $a=1$ 时,$B=[1,3]$,因为 $A=\{x\mid y=\lg(-x^2+6x+5)\}=\{x\mid-x^2+6x-5>0\}=\{x\mid(x-1)(x-5)<0\}=(1,5)$,

所以 $\complement_U A=\{x\mid x\leqslant1$ 或 $x\geqslant5\}$,所以 $B\cup(\complement_U A)=(-\infty,3]\cup[5,+\infty)$.

(2)由(1)得,$A=(1,5)$.

若选①,则 $A\subseteq B$,所以 $\begin{cases}2-a\leqslant1,\\ 1+2a\geqslant5,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant2$,即实数 a 的取值范围为 $[2,+\infty)$.

若选②,则 $B\subseteq A$,当 $B=\varnothing$ 时,$2-a>1+2a$,得 $a<\dfrac{1}{3}$;

当 $B\neq\varnothing$ 时,所以 $\begin{cases}2-a\leqslant1+2a,\\ 2-a>1,\\ 1+2a<5,\end{cases}$ 解得 $\dfrac{1}{3}\leqslant a<1$.

综上,实数 a 的取值范围为 $(-\infty,1)$.

若选③,则 $A\not\subseteq B$ 且 $B\not\subseteq A$,由选①和选②可得,$a\in(-\infty,2)\cap[1,+\infty)$,即 $a\in[1,2)$,所以实数 a 的取值范围为 $[1,2)$.

①

第 2 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C **提示**：对于 A，当 $a=0,b=-2$ 时，$a^2<b^2$，故 A 错误；对于 B，当 $c=0$ 时，$ac^2=bc^2$，故 B 错误；对于 C，函数 $y=x^3$ 是幂函数，在 **R** 上为增函数，若 $a>b$，必有 $a^3>b^3$，故 C 正确；对于 D，当 $a=-1,b=-2$ 时，$\frac{1}{a^2}>\frac{1}{b^2}$，故 D 错误.故选 C.

2.A **提示**：由题意，得 $-3,-2$ 是方程 $ax^2-5x+b=0$ 的两根，由韦达定理，得 $\begin{cases}-3-2=\frac{5}{a},\\-3\times(-2)=\frac{b}{a},\end{cases}$ 解得 $a=-1,b=-6$，所以 $a+b=-7$.故选 A.

3.C **提示**：由 $\frac{2x+1}{x-2}\leqslant1$，即 $\frac{2x+1}{x-2}-1=\frac{x+3}{x-2}\leqslant0$，得原不等式等价于 $\begin{cases}(x+3)(x-2)\leqslant0,\\x-2\neq0,\end{cases}$ 解得 $-3\leqslant x<2$.故选C.

4.C **提示**：令 $f(x)=x^2-2ax-1$，因为 $\Delta=4a^2+4>0$ 恒成立，所以由题意，得 $\begin{cases}-2<\frac{2a}{2}<2,\\f(-2)=4+4a-1\geqslant0,\\f(2)=4-4a-1\geqslant0,\end{cases}$ 解得 $-\frac{3}{4}\leqslant a\leqslant\frac{3}{4}$.故选 C.

5.C **提示**：因为 $f(x)=|\log_2x|$，所以 $f(x)<2\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\-2<\log_2x<2,\end{cases}$ 解得 $\frac{1}{4}<x<4$，所以不等式 $f(x)<2$ 的解集为 $\left(\frac{1}{4},4\right)$.故选 C.

6.B **提示**：因为正数 a,b 满足 $a+b=ab$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，则 $a+4b=(a+4b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=5+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant5+2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=9$，当且仅当 $\frac{4b}{a}=\frac{a}{b}$，即 $a=2b$，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，即 $b=\frac{3}{2}$，$a=3$ 时，取等号，此时 $a+4b$ 取得最小值 9.故选 B.

7.C **提示**：因为 $x>2$，所以 $y=4x+\frac{1}{x-2}=4(x-2)+\frac{1}{x-2}+8\geqslant2\sqrt{4(x-2)\cdot\frac{1}{x-2}}+8=12$，当且仅当 $4(x-2)=\frac{1}{x-2}$，即 $x=\frac{5}{2}$ 时，取等号，则 y 的最小值为 12.故选 C.

8.D **提示**：设 $f(x)=x^2+(a-2)x+5-a$，因为方程 $x^2+(a-2)x+5-a=0$ 在 $(2,4)$ 上有两个不相等的实根，所以 $\begin{cases}\Delta=(a-2)^2-4(5-a)>0,\\2<-\frac{a-2}{2}<4,\\f(2)=a+5>0,\\f(4)=3a+13>0,\end{cases}$ 解得 $-\frac{13}{3}<a<-4$.故选 D.

9.C **提示**：因为 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{m}{2a+b}$ 恒成立，所以 $m\leqslant(2a+b)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$ 恒成立，因为 $\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)(2a+b)=5+\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}\geqslant5+2\sqrt{\frac{2a}{b}\cdot\frac{2b}{a}}=9$，当且仅当 $\frac{2b}{a}=\frac{2a}{b}$，即 $a=b$ 时，取等号，所以 $m\leqslant9$，即 m 的最大值为 9.故选 C.

10.A **提示**：不等式 $f(x)>0$，即 $3\log_2x-2(x-1)>0$ 等价于 $\begin{cases}x>0,\\\log_2x^3>2(x-1),\end{cases}$ 即 $x^3>4^{x-1}$，$x>0$，令 $x^3=4^{x-1}$，解得 $x=1$ 或 4，则函数 $y=x^3$ 与函数 $y=4^{x-1}$ 的交点坐标为 $(1,1)$，$(4,64)$，作出 $y=x^3$ 与 $y=4^{x-1}$ 的图象（图略），由图可知 $x^3>4^{x-1}$ 的解集为为 $(1,4)$，所以 $f(x)>0$ 的解集为 $(1,4)$.故选 A.

11.B **提示**：因为 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$，所以 $x+\frac{y}{4}=\left(x+\frac{y}{4}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)=2+\frac{y}{4x}+\frac{4x}{y}\geqslant2+2\sqrt{\frac{y}{4x}\cdot\frac{4x}{y}}=4$，当且仅当 $\frac{y}{4x}=\frac{4x}{y}$，即 $y=4x$，且 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$，即 $x=2,y=8$ 时，取等号，因为不等式 $x+\frac{y}{4}\leqslant m^2-3m$ 有解，所以 $m^2-3m\geqslant4$，解得 $m\geqslant4$ 或 $m\leqslant-1$.故选 B.

12.D **提示**：在 $f(x)=a^{x-2}+1(a>0$，且 $a\neq1)$ 中，令 $x-2=0$，得 $x=2$，此时 $f(2)=a^0+1=2$，所以函数 $f(x)$ 的图象恒过定点 $(2,2)$，即 $P(2,2)$，因为点 P 在直线 $mx+ny-1=0(mn>0)$ 的图象上，所以 $2m+2n-1=0$，所以 $m+n=\frac{1}{2}$，又 $mn>0$，则 $m>0,n>0$，所以 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=2(m+n)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)=2\left(2+\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\right)\geqslant2\times\left(2+2\sqrt{\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{m}}\right)=8$，当且仅当 $\frac{m}{n}=\frac{n}{m}$，即 $m=n=\frac{1}{4}$ 时，等号成立，所以 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值为 8.故选 D.

二、多项选择题

13.AB **提示**：因为 $a>b$，且 $c>0$，所以 $ac>bc$，所以 $ab+ac>ab+bc$，所以 $a(b+c)>b(a+c)$，故 A 正确；因为 $a>b>0$，且 $c>0$，所以由幂函数的单调性，得 $a^c>b^c$，故 B 正确；因为 $a>b>0$，若 $0<c<1$，则 $\log_ca<\log_cb$，故 C 错误；取 $a=16,b=2,c=0.5$，则 $\frac{a}{b}=8>\frac{b}{c}=4$，故 D 错误.故选 AB.

14.BC **提示**：设 $f(x)=x^2-6x+a$，函数 $f(x)$ 的图象开口向上，且对称轴为 $x=3$，要使关于 x 的一元二次不等式 $x^2-6x+a\leqslant0$ 的解集中有且仅有 3 个整数，需满足 $\begin{cases}f(2)\leqslant0,\\f(1)>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2^2-6\times2+a\leqslant0,\\1^2-6\times1+a>0,\end{cases}$ 解得 $5<a\leqslant8$，又 $a\in\mathbf{Z}$，所以 $a=6$ 或 7 或 8.故选 BC.

15.CD **提示**：因为 $a>0,b>0$，所以 $1=a+b\geqslant2\sqrt{ab}$，即 $0<\sqrt{ab}\leqslant\frac{1}{2}$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，取等号，故 A 错误；$\frac{1}{a}+\frac{9}{b}=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{9}{b}\right)=10+\frac{b}{a}+\frac{9a}{b}\geqslant10+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{9a}{b}}=16$，当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{9a}{b}$，即 $3a=b$，且 $a+b=1$ 时，即 $a=\frac{1}{4}$，$b=\frac{3}{4}$ 时，取等号，故 B 错误；因为 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}=1+2\sqrt{ab}\leqslant2$，所以 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，取等号，故 C 正确；$2^a+2^b\geqslant2\sqrt{2^a\cdot2^b}=2\sqrt{2^{a+b}}=2\sqrt{2}$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，取等号，故 D 正确.故选CD.

16.BD **提示**：对于 A，若 $a>b>0,m>0$，则 $a-b>0$，所以 $\frac{a}{b}-\frac{a+m}{b+m}=\frac{m(a-b)}{b(b+m)}>0$，即 $\frac{a}{b}>\frac{a+m}{b+m}$，故 A 错误；对于 B，若 $x>0$，则 $2-3x-\frac{4}{x}=2-\left(3x+\frac{4}{x}\right)\leqslant2-2\sqrt{3x\cdot\frac{4}{x}}=2-4\sqrt{3}$，当且仅当 $3x=\frac{4}{x}$，即 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时，取等号，故 B 正确；对于 C，若 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1$，则 $x+2y=(x+2y)\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)=2+2+\frac{x}{y}+\frac{4y}{x}\geqslant4+2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{4y}{x}}=8$，当且仅当 $\frac{x}{y}=\frac{4y}{x}$，即 $x=2y=4$ 时，取等号，所以 $x+2y$ 的最小值是 8，故 C 错误；对于 D，由不等式 $ax^2+bx+c\geqslant0$ 的解集为 $\{x|-3\leqslant x\leqslant4\}$，得方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根是 -3 和 4，所以 $\begin{cases}a<0,\\-3+4=-\frac{b}{a},\\-3\times4=\frac{c}{a},\end{cases}$ 解得 $b=-a,c=-12a$，且 $a<0$，所以不等式 $cx^2-bx+a<0$ 可化为 $-12ax^2+ax+a<0$，即 $12x^2-x-1<0$，解得 $-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{3}$，所以不等式 $cx^2-bx+a<0$ 的解集为 $\left\{x\middle|-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{3}\right\}$，故 D 正确.故选 BD.

17.BD **提示**：对于 A，函数 $y=x-\frac{1}{x}$ 是定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，没有最小值；对于 B，函数 $y=\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant2$，当且仅当 $\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$，即 $x=0$ 时，取等号，所以该函数的最小值是 2；对于 C，函数 $y=2^x$ 的值域是 $(0,+\infty)$，所以函数 $y=2^x+2$ 的值域是 $(2,+\infty)$，即该函数无最小值；对于 D，函数 $y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$，当 $x=1$ 时，该函数取得最小值 2.故选 BD.

18.BC **提示**：因为 $x>0,y>0$，所以 $x+y\geqslant2\sqrt{xy}$，因为 $x+y-xy+3=0$，所以 $xy-3=x+y\geqslant2\sqrt{xy}$，所以 $(xy)^2-10xy+9\geqslant0$，解得 $xy\geqslant9$，当且仅当 $x=y=3$ 时，取等号，故 A 错误；因为 $x>0,y>0$，所以 $x+y\geqslant2\sqrt{xy}$，因为 $x+y-xy+3=0$，所以 $x+y+3=xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$，即 $(x+y)^2-4(x+y)-12\geqslant0$，因为 $x+y>0$，所以 $x+y\geqslant6$，当且仅当 $x=y=3$ 时，取等号，所以 $x+y\geqslant6$，故 B 正确；因为 $x^2+y^2\geqslant2xy$，所以由 B 项得 $2(x^2+y^2)\geqslant(x+y)^2\geqslant36$，所以 $x^2+y^2\geqslant18$，当且仅当 $x=y=3$ 时，取等号，故 C 正确；当 $x=y=3$ 时，满足 $x+y-xy+3=0$，但 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{3}>\frac{1}{3}$，故 D 错误.故选 BC.

三、填空题

19.$(-\infty,1]$ **提示**：设 $t=2^x$，则原不等式可化为 $t^2-t-2\leqslant0$，即 $(t-2)(t+1)\leqslant0$，因为 $t>0$，则 $t-2\leqslant0$，所以 $0<t\leqslant2$，即 $0<2^x\leqslant2$，所以 $x\leqslant1$，即原不等式的解集为 $(-\infty,1]$.

20.$(-2,3)$ **提示**：由题意，可知 $\begin{cases}-3\times2=c,\\-3+4=-b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-1,\\c=-6,\end{cases}$ 所以原不等式为 $x^2-x-6<0$，解得 $-2<x<3$，即原不等式的解集为 $(-2,3)$.

21.8 **提示**：因为 $a>0,b>0,a+b=9$，所以 $\frac{36}{a}+\frac{a}{b}=\frac{4(a+b)}{a}+\frac{a}{b}=4+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant4+2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=8$，当且仅当 $\frac{4b}{a}=\frac{a}{b}$，即 $a=6,b=3$ 时，等号成立，所以 $\frac{36}{a}+\frac{a}{b}$ 的最小值为 8.

22.1 **提示**：因为函数 $f(x)=\frac{1-2^x}{2^x+1}-3x$，定义域为 **R**，且对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(-x)=\frac{1-2^{-x}}{2^{-x}+1}-3(-x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}+3x=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，所以 $f(0)=0$.由 $f(m)+f\left(\frac{n-4}{3}\right)=f(0)=0$，得 $f(m)=-f\left(\frac{n-4}{3}\right)$，所以 $m+\frac{n-4}{3}=0$，即 $\frac{3m}{4}+\frac{n}{4}=1$，又 $m>0,n>0$，所以 $\frac{1}{3m}+\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{3m}+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{3m}{4}+\frac{n}{4}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{3m}{4n}+\frac{n}{12m}\geqslant\frac{1}{2}+2\sqrt{\frac{3m}{4n}\cdot\frac{n}{12m}}=1$，当且仅当 $\frac{3m}{4n}=\frac{n}{12m}$，即 $n=2,m=\frac{2}{3}$ 时，取等号，所以 $\frac{1}{3m}+\frac{1}{n}$ 的最小值为 1.

四、解答题

23.**解**：(1)当 $a=-1$ 时，$f(x)=(-x-1)(x-2)$，所以不等式 $f(x)<0$ 可化为 $(-x-1)(x-2)<0$，即 $(x+1)(x-2)>0$，解得 $x>2$ 或 $x<-1$，所以不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $\{x|x>2$ 或 $x<-1\}$.

(2)当 $a=0$ 时，原不等式可化为 $-(x-2)<0$，得 $x>2$，所以原不等式的解集为 $\{x|x>2\}$；当 $a<0$ 时，不等式可化为 $\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-2)>0$，解集为 $\left\{x\middle|x>2\text{ 或 }x<\frac{1}{a}\right\}$；当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$\frac{1}{a}>2$，原不等式可化为 $\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-2)<0$，解集为 $\left\{x\middle|2<x<\frac{1}{a}\right\}$；当 $a=\frac{1}{2}$ 时，原不等式可化为 $(x-2)^2<0$，解集为 $\varnothing$；当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$0<\frac{1}{a}<2$，原不等式可化为 $\left(x-\frac{1}{a}\right)\cdot(x-2)<0$，解集为 $\left\{x\middle|\frac{1}{a}<x<2\right\}$.

综上，当 $a=0$ 时，不等式的解集为 $\{x|x>2\}$；当 $a<0$ 时，不等式的解集为 $\left\{x\middle|x>2\text{ 或 }x<\frac{1}{a}\right\}$；当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，不等式的解集为 $\left\{x\middle|2<x<\frac{1}{a}\right\}$；当 $a=\frac{1}{2}$ 时，不等式的解集为 $\varnothing$；当 $a>\frac{1}{2}$ 时，不等式的解集为 $\left\{x\middle|\frac{1}{a}<x<2\right\}$.

24.**解**：(1)当 $a=0$ 时，$-4x-1<0$ 对一切实数 x 不都成立，故 $a\neq0$；当 $a\neq0$ 时，由题意，得 $\begin{cases}a<0,\\\Delta=16+4a<0,\end{cases}$ 解得 $a<-4$.

综上，a 的取值范围为 $(-\infty,-4)$.

(2)当 $a=0$ 时，$f(x)=0$，即 $-4x-1=0$，得 $x=-\frac{1}{4}\in(-1,1)$，符合题意；当 $a\neq0,\Delta>0$ 时，只需 $f(-1)\cdot f(1)<0$，则 $\begin{cases}16+4a>0,\\(a+4-1)(a-4-1)<0,\end{cases}$ 解得 $-3<a<5$，所以 $-3<a<0$，或 $0<a<5$；当 $a\neq0,\Delta=0$，即 $a=-4$ 时，$f(x)=-4x^2-4x-1=-(2x+1)^2$，$f(x)$ 只有一个零点 $-\frac{1}{2}\in(-1,1)$，符合题意.

综上，实数 a 的取值范围为 $\{-4\}\cup\{a|-3<a<5\}$.

25.**解**：设画面的高为 $x$cm 时，则画面的宽为 $\frac{400}{x}$cm，设宣传画的纸张面积为 y，则 $y=(x+16)\left(\frac{400}{x}+10\right)=560+\frac{6400}{x}+10x\geqslant2\sqrt{10x\cdot\frac{6400}{x}}+560=560+160\sqrt{10}$，当且仅当 $\frac{6400}{x}=10x$，即 $x=8\sqrt{10}$ 时，等号成立，当 $x=8\sqrt{10}$ 时，画面的宽为 $\frac{400}{8\sqrt{10}}=5\sqrt{10}$cm.故设计高为 $8\sqrt{10}$cm，宽为 $5\sqrt{10}$cm 的宣传画所用纸张面积最小，最小面积是 $(560+160\sqrt{10})$cm².

26.**解**：(1)小华的解法正确，小明的解法错误.

(2)小明的解法中，$a+\frac{1}{a}\geqslant2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$，当且仅当 $a=\frac{1}{a}$，即 $a=1$ 时，等号成立，$b+\frac{2}{b}\geqslant2\sqrt{b\cdot\frac{2}{b}}=2\sqrt{2}$，当且仅当 $b=\frac{2}{b}$，即 $b=\sqrt{2}$ 时，等号成立，所以 y 取得最小值 $1+2\sqrt{2}$ 时，$a+b=1+\sqrt{2}$，这与条件 $a+b=1$ 相矛盾，所以小明的解法错误；

小华的解法中，$\frac{b}{a}+\frac{2a}{b}\geqslant2\sqrt{2}$，等号成立的条件为 $\frac{b}{a}=\frac{2a}{b}$，即 $b=\sqrt{2}a$，又 $a+b=1$，则 $a=\sqrt{2}-1$，$b=2-\sqrt{2}$，所以小华的解法正确.

第 3 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A **提示**：由 $\begin{cases}x+1>0,\\4-x^2>0,\end{cases}$ 解得 $-1<x<2$，所以函数 $y=\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{4-x^2}}$ 的定义域为 $(-1,2)$.故选 A.

2.D **提示**：对于 A，$y=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$ 的定义域为 $\{x|x\neq1\}$，$y=x+1$ 的定义域为 **R**，定义域不同，不是同一函数；对于 B，$y=\sqrt{x(x+1)}$ 的定义域为 $\{x|x\geqslant0$ 或 $x\leqslant-1\}$，$y=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}$ 的定义域为 $\{x|x\geqslant0\}$，定义域不同，不是同一函数；对于 C，$y=(\sqrt{x+1})^2=x+1$ 的定义域为 $[-1,+\infty)$，$y=x+1$ 的定义域为 **R**，定义域不同，不是同一函数；对于 D，$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 与 $y=\sin\left(-2x-\frac{5\pi}{6}\right)=-\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的定义域都为 **R**，对应关系相同，是同一函数.故选 D.

3.B **提示**：$f(x)=|x|$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 A 错误；$f(x)=2^x$ 在 **R** 上单调递增，故 B 正确；$f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 C 错误；$f(x)=\log_{0.5}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 D 错误.故选 B.

4.C **提示**：由题意，得 $f(f(\ln2))=f(e^{\ln2})=f(2)=2+1=3$.故选 C.

5.C **提示**：令 $t=\log_3x$，由 $x\in[1,9]$，得 $t\in[0,2]$，所以 $f(x^2)=\log_3x^2=2\log_3x=2t$，所以函数 $y=[f(x)]^2+f(x^2)$ 在 $[1,9]$ 上的值域，即 $y=t^2+2t$ 在 $[0,2]$ 上的值域，由二次函数的性质，知 $y=t^2+2t$ 在 $[0,2]$ 上单调递增，所以 $y\in[0,8]$.故选 C.

6.A **提示**：函数 $f(x)=\left(x-\frac{1}{x}\right)\sin x$ 的定义域为 $\{x|x\neq0\}$，因为 $f(-x)=\left(-x+\frac{1}{x}\right)\sin(-x)=\left(x-\frac{1}{x}\right)\sin x=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，故排除 B，D.当 $x\in(0,1)$ 时，$x-\frac{1}{x}<0$，$\sin x>0$，则 $f(x)<0$，故排除 C.故选 A.

7.B **提示**：因为函数 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增，所以 $y=a^{x-3}$ 单调递增，则 $a>1$，因为 $y=x+\frac{a}{x}-3$ 在 $[4,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\sqrt{a}\leqslant4$，解得 $a\leqslant16$，又 $4+\frac{a}{4}-3\geqslant a^{4-3}$，解得 $a\leqslant\frac{4}{3}$，所以实数 a 的取值范围是 $\left(1,\frac{4}{3}\right]$.故选 B.

8.B **提示**：设 $g(x)=(a^x-a^{-x})+\lg(x+\sqrt{x^2+1})$，则 $g(x)$ 的定义域为 **R**，$g(-x)=a^{-x}-a^x+\lg(\sqrt{x^2+1}-x)=a^{-x}-a^x+\lg\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=a^{-x}-a^x-\lg(\sqrt{x^2+1}+x)=-g(x)$，所以 $g(x)$ 为奇函数，因为 $f(2)=g(2)+1=4$，所以 $g(2)=3$，所以 $g(-2)=-g(2)=-3$，所以 $f(-2)=g(-2)+1=-3+1=-2$.故选 B.

9.A **提示**：因为 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数，且在 $(-\infty,0]$ 上为减函数，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，由 $f(2x+3)>f(x+1)$，得 $f(|2x+3|)>f(|x+1|)$，所以 $|2x+3|>|x+1|$，即 $(2x+3)^2>(x+1)^2$，解得 $x<-2$ 或 $x>-\frac{4}{3}$.故选 A.

10.A **提示**：因为 $f(x+1)$ 为奇函数，所以 $f(-x+1)=-f(x+1)$，又 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(-x+1)=f(x-1)$，所以 $f(x-1)=-f(x+1)$，即 $f(x)=-f(x+2)$，所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 4.由 $f(-x+1)=-f(x+1)$，令 $x=0$，得 $f(1)=0$，$f(3)=f(-1)=f(1)=0$，又 $f(0)+f(3)=4$，所以 $f(0)=4$，所以 $\begin{cases}f(0)=k+a=4,\\f(1)=3k+a=0,\end{cases}$ 解得 $k=-2,a=6$，所以当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=-2\cdot3^x+6$，则 $f(\log_32)=-2\times3^{\log_32}+6=-2\times2+6=2$.故选 A.

11.B **提示**：令 $g(x)=f(x)-2=\frac{e^x-1}{e^x+1}+x^3$，由 $g(-x)=\frac{1-e^x}{e^x+1}-x^3=-g(x)$，得 $g(x)$ 为奇函数，易知 $g(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}+x^3=1-\frac{2}{e^x+1}+x^3$ 为增函数，所以 $f(a^2)+f(4a-5)<4\Leftrightarrow f(a^2)-2<-[f(4a-5)-2]$，即 $g(a^2)<-g(4a-5)=g(-4a+5)$，所以 $a^2<-4a+5$，解得 $-5<a<1$.故选 B.

12.D **提示**：因为 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\ln(\sqrt{1+x^2}+x)$，所以 $f(-x)=\frac{e^{-x}-e^x}{2}+\ln(\sqrt{1+x^2}-x)=-\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=-\frac{e^x-e^{-x}}{2}-\ln(\sqrt{1+x^2}+x)=-f(x)$，又 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 和 $y=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，由奇函数的性质，可知 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增，所以 $f(2^x-4^x)+f(m\cdot2^x-2)<0$ 等价于 $f(2^x-4^x)<-f(m\cdot2^x-2)=f(-m\cdot2^x+2)$，所以 $2^x-4^x<-m\cdot2^x+2$，即 $m<\frac{4^x-2^x+2}{2^x}=2^x+\frac{2}{2^x}-1$ 在 **R** 上恒成立，因为 $2^x+\frac{2}{2^x}-1\geqslant2\sqrt{2}-1$，所以 $m<2\sqrt{2}-1$.故选 D.

二、多项选择题

13.AC **提示**：对于 A，由 $\frac{x-3}{x+2}\geqslant0$，解得 $x\geqslant3$ 或 $x<-2$，所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-2)\cup[3,+\infty)$，故A 正确；对于 B，$f(x)=\frac{x^2}{x}=x$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$g(x)=x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，定义域不同，不是同一函数，故 B 错误；对于 C，$f(x)=\frac{1}{x}-x$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，关于原点对称，且 $f(-x)=\frac{1}{-x}+x=-\left(\frac{1}{x}-x\right)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(x)$ 的图象关于坐标原点对称，故 C 正确；对于 D，由 $f(x)-2f(-x)=x-1$，得 $f(-x)-2f(x)=-x-1$，解得 $f(x)=\frac{1}{3}x+1$，故 D 错误.故选AC.

14.AB **提示**：对于 A，$f(x)=|x|=\begin{cases}x,x\geqslant0,\\-x,x<0,\end{cases}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，符合题意；对于 B，由 $y=2^x$ 和 $y=x$ 在 $(0,+\infty)$ 上都是增函数，得 $f(x)=2^x+x$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，符合题意；对于 C，$f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$ 在 $(0,1)$ 上为减函数，在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，不符合题意；对于 D，$f(x)=\log_{\frac{1}{3}}x-3x=-\log_3x-3x$，由 $y=-\log_3x$ 和 $y=-3x$ 在 $(0,+\infty)$ 上都是减函数，得 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，不符合题意.故选 AB.

15.BC **提示**：因为 $y=f(x+1)$ 是 **R** 上的偶函数，所以 $y=f(x+1)$ 的图象关于 y 轴对称，所以 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，故 B 正确；又对任意 $x_1,x_2\in[1,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 成立，所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,1]$ 上单调递减，故 A 错误；又 $a=f(\log_28)=f(3)$，$b=f\left(\log_{e^2}\frac{1}{4}\right)=f(-\ln2)=f(2+\ln2)$，$c=f(e^{\ln2})=f(2)$，又 $2<\ln2+2<3$，函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(2)<f(2+\ln2)<f(3)$，即 $c<b<a$，故 C 正确；由 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,1]$ 上单调递减，得 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得最小值，故 D 错误.故选 BC.

16.ABD **提示**：因为 $f(x)$ 是偶函数，且 $f(x)+f(-x-2)=-2$，所以 $f(x)+f(x+2)=-2$，即 $f(x)=-f(x+2)-2$，所以 $f(x+4)=-f(x+2)-2=f(x)$，所以 $f(x)$ 的最小正周期为 4，故 A 正确；因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(-x)=f(x)=f(x+4)$，则函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，故 B 正确；因为 $f(1)+f(3)=-2$，且函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，所以 $f(1)=f(3)=-1$，故 C 错误；又 $f(0)=1$，则 $f(0)=f(4)=1$，又 $f(2)+f(0)=-2$，则 $f(2)=-3$，因为 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=-4$，所以 $f(1)+f(2)+\cdots+f(20)=-4\times5=-20$，故 D 正确.故选 ABD.

17.ABD **提示**：由 $f(x)=f(2-x)$，得 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，因为函数 $y=f(x+1)$ 的图象是由函数 $y=f(x)$ 的图象向左平移一个单位长度得到的，所以函数 $y=f(x+1)$ 的图象关于 y 轴对称，所以函数 $y=f(x+1)$ 是偶函数，故 A 正确；由 $f(x)$ 是**R** 上的奇函数，得 $f(-x)=-f(x)$，又 $f(x)=f(2-x)$，则 $f(-x)=f(2+x)=-f(x)$，所以 $f(4+x)=-f(x+2)=f(x)$，则 $f(x)$ 的最小正周期为 4，故 D正确；当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=x$，因为 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，所以当 $x\in[-1,0)$ 时，$f(x)=x$，且 $f(0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递增，在 $(1,3)$ 上单调递减，因为 $f(x)$ 的最小正周期 $T=4$，所以 $f(x)$ 在 $(3,5)$ 上单调递增，在 $(-3,-1)$ 上单调递减，故 B 正确，C 错误.故选 ABD.

18.ABC **提示**：因为函数 $y=f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，又当 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$ 时，$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1}<0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，又 $f(2ax)<f(2x^2+1)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则 $|2ax|<|2x^2+1|$，两边平方，得 $4a^2x^2<4x^4+4x^2+1$.当 $x=0$ 时，不等式为 $0<1$，成立；当 $x\neq0$ 时，不等式转化为 $a^2<\frac{4x^4+4x^2+1}{4x^2}=x^2+\frac{1}{4x^2}+1$.设 $g(x)=x^2+\frac{1}{4x^2}+1$，$x\in\mathbf{R}$，所以 $g(x)\geqslant2\sqrt{x^2\cdot\frac{1}{4x^2}}+1=2$，当且仅当 $x^2=\frac{1}{4x^2}$，即 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立，所以 $g(x)_{\min}=2$，所以 $a^2<2$，解得 $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$，由选项知 A，B，C 均符合题意.故选 ABC.

三、填空题

19.$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ 和 $[2,+\infty)$ **提示**：$f(x)=|x-2|(x+1)=\begin{cases}(2-x)(x+1),x\leqslant2,\\(x-2)(x+1),x>2,\end{cases}$ 当 $x\leqslant2$ 时，$f(x)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$，其单调递增区间为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$；当 $x>2$ 时，$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$，其单调递增区间为 $[2,+\infty)$，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ 和 $[2,+\infty)$.

20.$f(x)=\frac{2}{3x}-\frac{x}{3}$ **提示**：由 $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x$，得 $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{1}{x}$，两式联立，消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$，得 $f(x)=\frac{2}{3x}-\frac{x}{3}$.

21.2023 **提示**：因为 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{x^2+\sin x+2022}{x^2+2022}=1+\frac{\sin x}{x^2+2022}$，所以 $f\left(\frac{1}{2}-x\right)=1+\frac{\sin(-x)}{x^2+2022}=1-\frac{\sin x}{x^2+2022}$，则 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}-x\right)=2$，令 $x=0$，得 $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，所以 $f(0)+f\left(\frac{1}{2022}\right)+\cdots+f\left(\frac{2021}{2022}\right)+f(1)=[f(0)+f(1)]+\left[f\left(\frac{1}{2022}\right)+f\left(\frac{2021}{2022}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{1010}{2022}\right)+f\left(\frac{1012}{2022}\right)\right]+f\left(\frac{1011}{2022}\right)=2023$.

22.$(-1,2)$ **提示**：因为当 $x>0$ 时，$f(x)>1$，设 $x_1>x_2$，则 $x_1-x_2>0$，$f(x_1-x_2)>1$，又 $f(a+b)=f(a)+f(b)-1$，所以 $f(x_1)-f(x_2)=f[(x_1-x_2)+x_2]-f(x_2)=f(x_1-x_2)-1>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，所以 $f(x)$ 是增函数，因为 $f(2)=3$，即 $f(2)=f(1)+f(1)-1=3$，所以 $f(1)=2$，所以不等式 $f(x^2-x-1)<2$ 等价于 $f(x^2-x-1)<f(1)$，所以 $x^2-x-1<1$，即 $x^2-x-2<0$，解得 $-1<x<2$，所以原不等式的解集是 $(-1,2)$.

四、解答题

23.**解**：(1)因为函数 $f(x)=\begin{cases}x+2(x\leqslant1),\\x^2(1<x<2),\\2x(x\geqslant2),\end{cases}$ 所以 $f(3)=6$，$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}$，$f(f(0))=f(2)=4$.

(2)由 $f(a)\leqslant5$，可得 $\begin{cases}a\leqslant1,\\a+2\leqslant5,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1<a<2,\\a^2\leqslant5,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a\geqslant2,\\2a\leqslant5,\end{cases}$ 解得 $a\leqslant1$ 或 $1<a<2$ 或 $2\leqslant a\leqslant\frac{5}{2}$，

所以实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right]$.

24.**解**：(1)因为函数 $f(x)=\frac{-2^x+a}{2^x+1}$（$a$ 为常数）是奇函数，所以 $f(x)+f(-x)=\frac{-2^x+a}{2^x+1}+\frac{-2^{-x}+a}{2^{-x}+1}=\frac{-2^x+a}{2^x+1}+\frac{-1+a\cdot2^x}{1+2^x}=\frac{a-1+(a-1)\cdot2^x}{1+2^x}=0$，则 $a-1=0$，得 $a=1$，所以 $f(x)=\frac{-2^x+1}{2^x+1}$，

所以 $f(x)=\frac{-2^x+1}{2^x+1}=\frac{-(2^x+1)+2}{2^x+1}=\frac{2}{2^x+1}-1$.

任取 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1>x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)=\left(\frac{2}{2^{x_1}+1}-1\right)-\left(\frac{2}{2^{x_2}+1}-1\right)=\frac{2(2^{x_2}-2^{x_1})}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}$，因为 $x_1>x_2$，所以 $2^{x_1}>2^{x_2}>0$，即 $2^{x_2}-2^{x_1}<0$，$2^{x_2}+1>0$，$2^{x_1}+1>0$，所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $f(x)$ 在 **R** 上单调递减.

(2)因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(2x^2-2x)<-f(1-x)=f(x-1)$，又 $f(x)$ 是 **R** 上的减函数，所以 $2x^2-2x>x-1$，即 $2x^2-3x+1>0$，解得 $x<\frac{1}{2}$ 或 $x>1$，所以原不等式的解集为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$.

25.**解**：(1)$a=4$ 时，$f(x)=4^x-2\cdot2^x+4=(2^x-1)^2+3$，因为 $x\in[0,1]$，所以 $2^x\in[1,2]$，所以 $3\leqslant(2^x-1)^2+3\leqslant4$，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的值域为 $[3,4]$.

(2)$f(x)=4^x-a\cdot2^{x-1}+4=4^x-\frac{a}{2}\cdot2^x+4$，令 $2^x=t$，则 $t>0$，因为 $f(x)=0$ 有解，等价于方程 $t^2-\frac{a}{2}\cdot t+4=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解，所以 $\begin{cases}\Delta=\frac{a^2}{4}-16\geqslant0,\\\frac{a}{2}>0,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant8$，所以实数 a 的取值范围为 $[8,+\infty)$.

26.**解**：(1)因为 $f(x)$ 为 **R** 上的奇函数，$g(x)$ 为 **R** 上的偶函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=g(x)$，

又 $f(x)+g(x)=2^{x+1}$，　①

所以 $f(-x)+g(-x)=-f(x)+g(x)=2^{-x+1}$，　②

由①②，解得 $f(x)=2^x-2^{-x}$，$g(x)=2^x+2^{-x}$.

(2)因为 $f(x)=2^x-2^{-x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)\in\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$，则不等式 $g(2x)-af(x)-1\geqslant0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，即 $a\leqslant\frac{g(2x)-1}{f(x)}=\frac{4^x+4^{-x}-1}{2^x-2^{-x}}=\frac{(2^x-2^{-x})^2+1}{2^x-2^{-x}}=(2^x-2^{-x})+\frac{1}{2^x-2^{-x}}$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立.设 $t=2^x-2^{-x}$，则 $t\geqslant\frac{3}{2}$，由 $h(t)=t+\frac{1}{t}$ 在 $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，得 $h(t)_{\min}=h\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{13}{6}$，所以 $a\leqslant\frac{13}{6}$，所以实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{13}{6}\right]$.