第 8 期
第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C　**提示**：由题意，得 $|OP|=\sqrt{5}$，所以 $\cos\alpha=\frac{-1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.故选 C.

2.D　**提示**：因为 $\tan\alpha=2$，所以 $\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan^2\alpha+\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{6}{5}$.故选 D.

3.B　**提示**：因为 α 是第二象限角，$\sin\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{4}{5}$，即 $-\cos\alpha=\frac{4}{5}$，可得 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，则 $\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{3}{5}$.故选 B.

4.C　**提示**：设外弧长为 l_1，外弧半径为 r_1，内弧长为 l_2，内弧半径为 r_2，该扇面所在扇形的圆心角为 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$，因为扇形的弧长为 $l=\alpha r$，由题意，得 $l_1=24$，$l_2=10$，所以 $r_1=\frac{l_1}{\alpha}=\frac{36}{\pi}$，$r_2=\frac{l_2}{\alpha}=\frac{15}{\pi}$，因为扇形的面积 $S=\frac{1}{2}lr$，所以该扇面画的面积 $S=\frac{1}{2}l_1r_1-\frac{1}{2}l_2r_2=\frac{1}{2}\times24\times\frac{36}{\pi}-\frac{1}{2}\times10\times\frac{15}{\pi}=\frac{357}{\pi}\approx119$.故选 C.

5.B　**提示**：$\cos\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha=\frac{4}{7}$，因为 $\tan\alpha<0$，所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{7}\right)^2}=-\frac{\sqrt{33}}{7}$，所以 $\cos(\pi-\alpha)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\tan\alpha=-\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{4+\sqrt{33}}{7}$.故选 B.

6.A　**提示**：$\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2\alpha-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(2\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$.当 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=1-2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$，充分性成立.当 $\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$ 时，$1-2\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}$，解得 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，必要性不成立，则"$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$"是"$\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$"的充分不必要条件.故选 A.

7.C　**提示**：由 $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}$，$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{3}$，两式分别平方，得 $\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{1}{4}$，　①

$\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{1}{9}$，　②

由①+②，得 $2+2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta=\frac{13}{36}$，即 $2+2\cos(\alpha+\beta)=\frac{13}{36}$，得 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{59}{72}$.故选 C.

8.C　**提示**：由 $\sin\alpha=2\sin\beta$，$\cos\alpha=\frac{1}{2}\cos\beta$，得 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=4\sin^2\beta+\frac{1}{4}\cos^2\beta=1$，又 $4\sin^2\beta+\frac{1}{4}\cos^2\beta=\frac{15}{4}\sin^2\beta+\frac{1}{4}\sin^2\beta+\frac{1}{4}\cos^2\beta=1$，则 $\sin^2\beta=\frac{1}{5}$，又 α,β 均为锐角，所以 $\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{3}{5}$.故选 C.

9.D　**提示**：因为 $f(x)=a\tan(\pi-x)+b\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+2023=-a\tan x-b\sin x+2023$，所以 $f(m)+f(-m)=-a\tan m-b\sin m+2023+a\tan m+b\sin m+2023=4046$，又 $f(m)=2021$，所以 $f(-m)=2025$.故选 D.

10.C　**提示**：因为 $\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\sin\alpha\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sin\alpha\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=3\cos\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $\tan\alpha=3\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$，则 $\tan\alpha=3\times\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{3\tan\alpha+\sqrt{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\alpha}$，所以 $\tan^2\alpha+2\sqrt{3}\tan\alpha+3=0$，解得 $\tan\alpha=-\sqrt{3}$，所以 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1-\tan^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{1+\tan^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{2}$.故选 C.

11.C　**提示**：因为 $a=(1-\sqrt{3}\tan20^\circ)\sin80^\circ=\frac{\cos20^\circ-\sqrt{3}\sin20^\circ}{\cos20^\circ}\cdot\sin80^\circ=\frac{2\left(\frac{1}{2}\cos20^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin20^\circ\right)}{\cos20^\circ}\cdot\cos10^\circ=\frac{2\sin10^\circ\cos10^\circ}{\cos20^\circ}=\frac{\sin20^\circ}{\cos20^\circ}=\tan20^\circ$，$b=\sin40^\circ\sin110^\circ-\sin20^\circ\sin130^\circ=\sin40^\circ\cos20^\circ-\sin20^\circ\cos40^\circ=\sin(40^\circ-20^\circ)=\sin20^\circ$，$c=\frac{2\tan15^\circ}{1-\tan^215^\circ}=\tan30^\circ$，又 $\sin20^\circ<\tan20^\circ<\tan30^\circ$，所以 $b<a<c$.故选 C.

12.D　**提示**：因为 $\tan(\pi+\theta)-\frac{1}{\tan(2\pi-\theta)}=\frac{10}{3}$，所以 $\tan\theta-\frac{1}{\tan(-\theta)}=\frac{10}{3}$，即 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{10}{3}$，所以 $3\tan^2\theta-10\tan\theta+3=0$，所以 $\tan\theta=\frac{1}{3}$ 或 $\tan\theta=3$，因为 $\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\tan\theta>1$，所以 $\tan\theta=3$，所以 $\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)+2\cdot\cos^2(-\theta)=\sqrt{2}\left(\sin2\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos2\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)+2\cos^2\theta=\sin2\theta+\cos2\theta+2\cos^2\theta=2\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta-\sin^2\theta=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}+\frac{3\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{2\tan\theta+3-\tan^2\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{2\times3+3-9}{9+1}=0$.故选 D.

二、多项选择题

13.AB　**提示**：对于 A，由 $-\frac{5\pi}{6}$ 的终边在第三象限，得 $-\frac{5\pi}{6}$ 是第三象限角，故 A 正确；对于 B，设扇形的半径为 r，则 $\frac{\pi}{2}\cdot r=\pi$，所以 $r=2$，扇形面积 $S=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times2^2=\pi$，故 B 正确；对于 C，$P$ 到原点的距离为 $\sqrt{(-3m)^2+(4m)^2}=5|m|$，当 $m>0$ 时，$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，当 $m<0$ 时，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，故 C 错误；对于 D，$\alpha=30^\circ$ 是锐角，但 $2\alpha=60^\circ$ 不是钝角，故 D 错误.故选 AB.

14.ABD　**提示**：对于 A，$\cos82^\circ\sin52^\circ-\sin82^\circ\cos52^\circ=\sin(52^\circ-82^\circ)=\sin(-30^\circ)=-\frac{1}{2}$，故 A 正确；对于 B，$\sin15^\circ\sin30^\circ\sin75^\circ=\sin15^\circ\sin30^\circ\cos15^\circ=\frac{1}{2}\sin^230^\circ=\frac{1}{8}$，故 B 正确；对于 C，$\frac{\tan48^\circ+\tan72^\circ}{1-\tan48^\circ\tan72^\circ}=\tan(48^\circ+72^\circ)=\tan120^\circ=-\sqrt{3}$，故 C 错误；对于 D，$\cos^215^\circ-\sin^215^\circ=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 D 正确.故选 ABD.

15AB　**提示**：因为 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{7}{5}$，所以 $1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{49}{25}$，则 $\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{12}{25}$，又 $\alpha\in(0,\pi)$，所以 $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$，所以 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha=1-\frac{24}{25}=\frac{1}{25}$，所以 $\sin\alpha+\cos\alpha=\pm\frac{1}{5}$，所以 $\sin\alpha+\cos\alpha+\sin2\alpha=\sin\alpha+\cos\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{5}-\frac{24}{25}=-\frac{19}{25}$ 或 $\sin\alpha+\cos\alpha+\sin2\alpha=\sin\alpha+\cos\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{1}{5}-\frac{24}{25}=-\frac{29}{25}$.故选 AB.

16.BD　**提示**：因为 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，①

所以 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{25}$，则 $2\sin\theta\cos\theta=-\frac{24}{25}$，因为 $\theta\in(0,\pi)$，所以 $\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$，所以 $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{49}{25}$，所以 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{7}{5}$②，故 A 错误；联立①②，得 $\sin\theta=\frac{4}{5}$，$\cos\theta=-\frac{3}{5}$，故 B 正确；所以 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{4}{3}$，故 C 错误；$\sin^4\theta-\cos^4\theta=(\sin^2\theta-\cos^2\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=\frac{7}{25}$，故 D 正确.故选 BD.

17.BD　**提示**：因为 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，且 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，所以 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$，$\cos\beta<0$，因为 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=\pm\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\pm\frac{1}{3}$，所以 $\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\pm\frac{1}{3}\right)=-\frac{7}{9}$ 或 -1（舍去），则 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{3}$，故 A 错误，B 正确；所以 $\cos2\beta=2\cos^2\beta-1=\frac{17}{81}$，故 C 错误；所以 $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$，可得 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}\times\left(-\frac{7}{9}\right)-\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{4\sqrt{2}}{9}=-\frac{23}{27}$，故 D 正确.故选 BD.

18.ABD　**提示**：对于 A，因为 β 均为锐角，所以 $\beta+\frac{\pi}{6}\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$，因为 $\cos\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\beta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$，所以 $\beta=\frac{\pi}{12}$，故 A 正确；对于 B，因为 $\sin\left(\alpha+\beta+\frac{5\pi}{4}\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{4}\right)=\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{2\sqrt{2}}{5}$，所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{5}$，故 B 正确；对于C，因为 α 为锐角，所以 $\alpha+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$，又 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{5}$，所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\pm\frac{\sqrt{17}}{5}$，故 C 错误；对于 D，$\sin[2(\alpha+\beta)]=\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right]=2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-1=2\times\frac{8}{25}-1=-\frac{9}{25}$，故 D 正确.故选 ABD.

三、填空题

19.$\frac{5}{9}$　**提示**：因为 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$，所以 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{2}{3}$，两边平方，可得 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=1-\sin2\alpha=\frac{4}{9}$，则 $\sin2\alpha=\frac{5}{9}$.

20.$\frac{\sqrt{2}}{3}$　**提示**：因为 $f(\alpha)=\frac{\sin(\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha(-\cos\alpha)}{-\sin\alpha}=\cos\alpha$，又 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}$，则 $f\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right]=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

21.$-\frac{\pi}{4}$　**提示**：由 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，得 $2\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，因为 $\cos2\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，所以 $\sin2\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.易知 $\alpha-\beta\in\left(\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right)$，因为 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\cos(\alpha-\beta)=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos[2\alpha-(\alpha-\beta)]=\cos2\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin2\alpha\sin(\alpha-\beta)=-\frac{\sqrt{10}}{10}\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $\alpha+\beta\in\left(-\frac{3\pi}{4},0\right)$，所以 $\alpha+\beta=-\frac{\pi}{4}$.

22.$\frac{2}{7}$　**提示**：由 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{6}{7}$，得 $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{6}{7}$，①，因为 $\tan\alpha=2\tan\beta$，即 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2\sin\beta}{\cos\beta}$，则 $\sin\alpha\cos\beta=2\cos\alpha\sin\beta$，②，由①②，得 $\cos\alpha\sin\beta=\frac{2}{7}$，$\sin\alpha\cos\beta=\frac{4}{7}$，所以 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{2}{7}$.

四、解答题

23.**解**：(1)因为 $\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，且 $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，所以 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，则 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{1}{2}$，所以 $\frac{2\sin\theta+3\cos\theta}{3\sin\theta-2\cos\theta}=\frac{2\tan\theta+3}{3\tan\theta-2}=\frac{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+3}{3\times\left(-\frac{1}{2}\right)-2}=-\frac{4}{7}$.

(2)原式$=\frac{-\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot(-\tan\theta)}{-\tan\theta\cdot\sin\theta}=-\cos\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

24.**解**：(1)$f(\alpha)=\frac{\sin(\alpha+2\pi)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos(-\alpha)\tan(\pi+\alpha)}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha\tan\alpha}=\cos\alpha$.

(2)因为 $f(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，且 α 为锐角，所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\tan\alpha=\sqrt{2}$，则 $\sin^2\alpha+\sqrt{2}\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha+\frac{2}{\tan\alpha}=\frac{2}{3}+\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$.

(3)由 $f(\alpha)f\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{5}$，得 $\cos\alpha\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\alpha\sin\alpha=-\frac{2}{5}$，则 $\cos\alpha\sin\alpha=\frac{2}{5}$，所以 $(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=1-2\cos\alpha\sin\alpha=\frac{1}{5}$，因为 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos\alpha-\sin\alpha<0$，则 $f(\alpha)+f\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha-\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

25.**解**：(1)因为 $\boldsymbol{a}=\left(\cos\frac{4\pi}{3},\sin(\pi+\alpha)\right)=\left(-\frac{1}{2},-\sin\alpha\right)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1-2\cos\alpha)$，又 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，所以 $-\frac{1}{2}(1-2\cos\alpha)-\sin\alpha=0$，则 $\sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{1}{2}$，两边平方，得 $1-\sin2\alpha=\frac{1}{4}$，则 $\sin2\alpha=\frac{3}{4}$.

(2)由(1)知 $\sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{1}{2}$，$\sin2\alpha=\frac{3}{4}$，又 $\alpha\in(-\pi,0)$，所以 $\alpha\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sin\alpha+\cos\alpha=-\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=-\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}=-\frac{\sqrt{7}}{2}$，联立 $\begin{cases}\sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{1}{2},\\ \sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{2},\end{cases}$ 解得 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{7}+1}{4}$，$\cos\alpha=\frac{1-\sqrt{7}}{4}$，则 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4+\sqrt{7}}{3}$.

26.**解**：(1)$f(x)=\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)-4\sin^2\omega x+2=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin2\omega x-\frac{1}{2}\cos2\omega x+2\cos2\omega x=\sqrt{3}\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$ $(\omega>0)$，因为 $f(x)$ 的图象与 x 轴相邻两个交点间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，所以 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，则 $\omega=1$，所以 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，由 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，所以函数 $f(x)$ 图象的对称轴为 $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

(2)因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $2x+\frac{\pi}{3}\in\left[0,\frac{4\pi}{3}\right]$，所以当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{12}\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$f(x)$ 为增函数；当 $x\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{4\pi}{3}\right]$，$f(x)$ 为减函数.所以 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减.

第 5 期
第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B　**提示**：因为函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ 与 $y=-\sqrt{x}$ 都是减函数，所以函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}-\sqrt{x}$ 是连续的减函数，又 $f(1)=1>0$，$f(2)=1-\sqrt{2}<0$，可得 $f(1)f(2)<0$，所以函数 $f(x)$ 的零点所在区间是 $(1,2)$.故选 B.

2.D　**提示**：由表格可知，方程 $x^3+x^2-2x-2=0$ 的近似根在 $(1,1.5)$，$(1.25,1.5)$，$(1.375,1.5)$，$(1.375,1.4375)$，$(1.406\,25,1.4375)$ 内，又 $1.4375-1.406\,25=0.031\,25<0.04$，故方程 $x^3+x^2-2x-2=0$ 的一个近似根（精确度 0.04）可以为 1.4375.故选 D.

3.D　**提示**：因为 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x+1$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，$y=2-x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，且 $\left(\frac{1}{2}\right)^0+1=2-0^2$，所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，因为 $f(2a^2-1)>f(3a+4)$，所以 $2a^2-1<3a+4$，解得 $-1<a<\frac{5}{2}$，即不等式 $f(2a^2-1)>f(3a+4)$ 的解集为 $\left(-1,\frac{5}{2}\right)$.故选 D.

4.B　**提示**：函数 $f(x)=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x-1\right|-\log_2x$ 的零点个数，等价于方程 $f(x)=0$，即 $\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x-1\right|=\log_2x$ 的根的个数，等价于函数 $y=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x-1\right|$ 与 $y=\log_2x$ 的图象交点个数，作出函数 $y=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x-1\right|$ 与 $y=\log_2x$ 的大致图象（图略），由图象可知，函数 $y=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x-1\right|$ 与 $y=\log_2x$ 的图象只有 1 个交点，所以函数 $f(x)=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x-1\right|-\log_2x$ 有 1 个零点.故选 B.

5.C　**提示**：由题意，得 $2.8=v_0\ln\frac{a+3a}{a}=v_0\ln4$，则 $v_0=\frac{2.8}{\ln4}=\frac{2.8}{2\ln2}\approx2$，所以 $v=v_0\ln\frac{a+5a}{a}=v_0\ln6=2(\ln2+\ln3)\approx3.6$.故选 C.

6.A　**提示**：由 $f(x+2)=f(x)$，得 $y=f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，函数 $g(x)=f(x)-\log_a|x|$ 至少有 6 个零点等价于函数 $y=f(x)$ 与 $g(x)=\log_a|x|$ 的图象至少有 6 个交点.①当 $a>1$ 时，作出函数 $y=f(x)$ 与 $g(x)=\log_a|x|$ 的图象（图略），由图象，可得 $g(5)=\log_a5<1$，则 $a>5$.

②当 $0<a<1$ 时，作出函数 $y=f(x)$ 与 $g(x)=\log_a|x|$ 的图象（图略），由图象，可得 $g(-5)=\log_a5\geqslant-1$，即 $0<a\leqslant\frac{1}{5}$.综上，a 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{5}\right]\cup(5,+\infty)$.故选 A.

7.C　**提示**：设 $t=f(x)$，则由 $g(x)=[f(x)]^2-af(x)+1$，可设 $h(t)=t^2-at+1$，作出 $f(x)$ 图象（图略），由图可知当 $t<-1$ 时，$t=f(x)$ 有且仅有 1 个解；当 $t=-1$ 或 $t>2$ 时，$t=f(x)$ 有 2 个解；当 $-1<t\leqslant2$ 时，$t=f(x)$ 有 3 个解.令 $h(t)=0$，即 $t^2-at+1=0$，因为函数 $g(x)$ 有 6 个零点，故只需 $t^2-at+1=0$ 在 $(-1,2]$ 内有两个实根，所以 $\begin{cases}\Delta=a^2-4>0,\\ h(-1)=1+a+1>0,\\ h(2)=4-2a+1\geqslant0,\\ -1<\frac{a}{2}<2,\end{cases}$ 解得 $2<a\leqslant\frac{5}{2}$，即 a 的取值范围是 $\left(2,\frac{5}{2}\right]$.故选 C.

8.B　**提示**：当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，其对称轴为直线 $x=\frac{1}{2}$.作出函数 $f(x)$ 的图象（图略），不妨设 $x_1<x_2<0<x_3<x_4$，因为方程 $f(x)=a$ 有四个不同的根 x_1,x_2,x_3,x_4，则 $-|\ln(-x_1)|=-|\ln(-x_2)|$，且 $x_3+x_4=2\times\frac{1}{2}$，所以 $-\ln(-x_1)=\ln(-x_2)$，则 $x_1x_2=1$，$x_3+x_4=1>2\sqrt{x_3x_4}$，即 $0<x_3x_4<\frac{1}{4}$，所以 $x_1x_2x_3x_4$ 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$.故选 B.

二、多项选择题

9.AD　**提示**：因为函数 $f(x)$ 的图象在 $\mathbf{R}$ 上是一条不间断的曲线，且 $f(-2)=\frac{1}{e^2}>0$，$f(-1)=\frac{1}{e}-1<0$，$f(0)=-1<0$，$f(1)=e-3<0$，$f(2)=e^2-4>0$，所以 $f(-2)f(-1)<0$，$f(1)f(2)<0$，由函数零点存在性定理可知，区间 $(-2,-1)$ 和 $(1,2)$ 内含 $f(x)$ 的零点.故选 AD.

10.BD　**提示**：当 $x<1$ 时，$f(x)=4\cdot3^{x-1}-1$ 单调递增，则 $f(x)\in(-1,3)$，当 $x\geqslant1$ 时，$f(x)=3(x^2-4x+3)=3(x-2)^2-3$，则 $f(x)$ 在 $[1,2)$ 上单调递减，在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(2)=-3$，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,1)$ 和 $[2,+\infty)$，故 A 错误，B 正确；若 $f(x)$ 在 $(-2,m)$ 上单调递增，则 $m\leqslant1$，即 m 的最大值为 1，故 C 错误；函数 $y=4\cdot3^{x-1}-1$ 在 $(-\infty,1)$ 上有 1 个零点，函数 $y=3(x^2-4x+3)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有两个零点，分别为 1 和 3，故 D 正确.故选 BD.

11.BD　**提示**：令 $g(x)=f(x)-x$，由 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，得 $g(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，即 $(0,0)$ 为其对称中心，因为 $f(2-x)+f(2+x)=4$，所以 $f(2-x)-(2-x)+f(2+x)-(2+x)=0$，即 $g(2-x)+g(2+x)=0$，则 $g(x)$ 关于点 $(2,0)$ 对称，所以 $g(-x)=-g(x+4)$，又 $g(-x)=-g(x)$，所以 $g(x)=g(x+4)$，$g(x)$ 的最小正周期 $T=4$，又 $x\in[0,2]$ 时，$g(x)=f(x)-x=2x-x^2$，最大值为 $g(1)=1$，由对称性知 $g(x)_{\min}=-1$，方程 $f(x)=x+\lg x$ 的根的个数等价于函数 $y=\lg x$ 与 $y=g(x)$ 图象的交点个数，结合图象，因为 $\lg9<1$，所以当 $0<x\leqslant10$ 时，共有 5 个交点，当 $x>10$ 时，$\lg x>1$，$\lg x>g(x)$，没有交点，所以共 5 个交点，故 B 正确；$g(2023)=f(2023)-2023=g(-1)=-g(1)=-1$，所以 $f(2023)=2022$，故 A 错误；若 $f(x)=x+b$，即 $f(x)-x=g(x)=b$ 有解，则 $-1\leqslant b\leqslant1$，故 C 错误；若 $f(x)<x+b$，即 $f(x)-x=g(x)<b$ 无实数解，则 $b\leqslant g(x)_{\min}=-1$，故 D 正确.故选 BD.

12.BCD　**提示**：作出 $y=f(x)$ 的图象（图略），因为关于 x 的方程 $f(x)=a(a\in\mathbf{R})$ 有四个实数解 x_1,x_2,x_3,x_4 且 $x_1<x_2<x_3<x_4$，所以 $0<a\leqslant1$，因为 $y=x^2+2x+1$ 的对称轴为直线 $x=-1$，所以 $x_1+x_2=-2$.又 $|\log_2x_3|=|\log_2x_4|$，所以 $\log_2x_3+\log_2x_4=0$，则 $x_3x_4=1$，即 $x_4=\frac{1}{x_3}$，由 $|\log_2x_3|\leqslant1$，得 $\frac{1}{2}\leqslant x_3<1$，所以 $(x_1+x_2)(x_3-x_4)=-2\left(x_3-\frac{1}{x_3}\right)$，因为 $y=-2\left(x-\frac{1}{x}\right)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递减，所以 $y\in(0,3]$，即 $(x_1+x_2)(x_3-x_4)$ 的取值范围为 $(0,3]$.故选 BCD.

三、填空题

13.-1 或 4　**提示**：令 $y=0$，即 $\log_3(\sqrt{x^2-3x}-1)=0$，得 $\sqrt{x^2-3x}-1=1$，解得 $x=-1$ 或 4.

14.$\left(\frac{3}{2},2\right)$　**提示**：设 $f(x)=\frac{3}{x}-x^2+1$，则 $f(1)=3>0$，$f(2)=-\frac{3}{2}<0$，取区间 $(1,2)$ 的中点为 $\frac{3}{2}$，$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}>0$，所以可确定 x_0 所在的区间为 $\left(\frac{3}{2},2\right)$.

15.3　**提示**：由题意，知 $N(t)=N_0e^{-0.3t}$，当 $N(t)\leqslant50\%\cdot N_0=\frac{1}{2}N_0$ 时，$e^{-0.3t}\leqslant\frac{1}{2}$，即 $-0.3t\leqslant\ln\frac{1}{2}=-\ln2\approx-0.693$，所以 $t\geqslant2.31$，又 $t\in\mathbf{Z}$，所以 $t_{\min}=3$，即经过 3 天后，该事件的热搜度将降到初始的 50%以下.

16.$[0,+\infty)$　**提示**：当 $x>1$ 时，$f(x)=\frac{x}{e\ln x}$，$f'(x)=\frac{\ln x-1}{e(\ln x)^2}$.当 $1<x<e$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x>e$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，故 $x=e$ 时，$f(x)_{\min}=f(e)=1$；当 $x\leqslant1$ 时，$f(x)=x^3-3x+a$，$f'(x)=3x^2-3$，当 $x<-1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $-1<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，所以当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 有极大值 $f(-1)=2+a$，当 $x=1$ 时，$f(1)=-2+a$，作出 $f(x)$ 的大致图象（图略），由题意，得 $[f(x)]^2-(t+2)f(x)+2t=0$，即 $[f(x)-2][f(x)-t]=0$ 有 7 个不同的实根.当 $f(x)=2$ 有三个根，$f(x)=t$ 有四个实根时，则 $2+a=2$ 或 $-2+a>2$，得 $a=0$ 或 $a>4$；当 $f(x)=2$ 有四个根，$f(x)=t$ 有三个实根时，则 $-2+a\leqslant2<2+a$，得 $0<a\leqslant4$.综上，$a\geqslant0$，即实数 a 的取值范围是 $[0,+\infty)$.

四、解答题

17.(1)**解**：由题意，得 $\frac{1}{4}=a^{-2}=\frac{1}{a^2}$，解得 $a=2$.

(2)**解**：由(1)得，$f(x)=2^x$，该函数在 $\left[-\frac{1}{2},1\right]$ 上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f\left(-\frac{1}{2}\right)=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3)**证明**：$g(x)=f(x)+x=2^x+x$，易知 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，又 $g(0)=1>0$，$g(-1)=-\frac{1}{2}<0$，由函数零点存在性定理，知 $g(x)$ 在区间 $(-1,0)$ 内存在零点.

18.**解**：(1)因为一次喷洒 4 个单位的去污剂，所以空气中释放的去污剂浓度为 $f(x)=\begin{cases}4\left(1+\frac{x}{8}\right),0<x\leqslant4,\\ \frac{36}{x+2},4<x\leqslant10,\end{cases}$

当 $0<x\leqslant4$ 时，$4\left(1+\frac{x}{8}\right)\geqslant4$，解得 $x\geqslant0$，则 $0<x\leqslant4$；当 $4<x\leqslant10$ 时，$\frac{36}{x+2}\geqslant4$，解得 $x\leqslant7$，则 $4<x\leqslant7$.综上，x 的取值范围为 $(0,7]$.所以一次投放 4 个单位的去污剂，有效去污时间可达 7 天.

(2)设从第一次喷洒起，经 $x(6<x\leqslant10)$ 天，浓度为 $g(x)=2\times\frac{9}{x+2}+a\left(1+\frac{x-6}{8}\right)=\frac{18}{x+2}+\frac{a(x+2)}{8}\geqslant2\sqrt{\frac{18}{x+2}\cdot\frac{a(x+2)}{8}}=2\sqrt{\frac{9a}{4}}=3\sqrt{a}\geqslant4$，即 $a\geqslant\frac{16}{9}$，又 $a\in[1,4]$，所以 $\frac{16}{9}\leqslant a\leqslant4$，当且仅当 $\frac{18}{x+2}=\frac{a(x+2)}{8}$，即 $x+2=9$ 时，等号成立，此时 $x=7\in(6,10]$，所以 a 的最小值为 $\frac{16}{9}$.

19.**解**：(1)$f(x)=\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2x-\frac{1}{2}\sin x\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\cos2x+1}{2}-\frac{1}{4}\cdot\sin2x=\frac{\sqrt{3}}{4}\cos2x-\frac{1}{4}\sin2x+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}$，所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.由 $2k\pi-\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{6}\leqslant2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $k\pi-\frac{7\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi-\frac{\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $x\in[0,\pi]$，所以当 $k=1$ 时，$\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{11\pi}{12}$，所以函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调递增区间为 $\left[\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right]$.

(2)因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$，所以 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$，又方程 $f(x)=t$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 上有两个不同的实数根，等价于 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=t$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 上有两个交点，所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)<1$，$\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}<\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}$，所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant t<\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}$，即实数 t 的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

20.**解**：(1)由 $f(x)=4^x-a\cdot2^x+2$，令 $t=2^x(t>0)$，则 $g(t)=t^2-at+2(t>0)$，当 $a=3$ 时，$g(t)=t^2-3t+2$，令 $g(t)>0$，解得 $t<1$ 或 $t>2$，则 $2^x<1$ 或 $2^x>2$，解得 $x<0$ 或 $x>1$，所以原不等式的解集为 $\{x|x<0$ 或 $x>1\}$.

(2)结合(1)，因为函数 $t=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在两个零点等价于函数 $g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 存在两个零点，因为 $g(t)=t^2-at+2$ 开口向上，对称轴为直线 $t=\frac{a}{2}$，所以 $\begin{cases}\Delta=a^2-8>0,\\ \frac{a}{2}>1,\\ g(1)=1-a+2>0,\end{cases}$ 解得 $2\sqrt{2}<a<3$，所以实数 a 的取值范围为 $(2\sqrt{2},3)$.

21.**解**：(1)若 $a<0$，则 $f(a)=\lg(-a)=1$，解得 $a=-10$；若 $a\geqslant0$，则 $f(a)=|e^a-2|=1$，解得 $a=0$ 或 $\ln3$.故 a 的值为 0 或 -10 或 $\ln3$.

(2)由题可知 $f(x)=\begin{cases}\lg(-x),x<0,\\ -e^x+2,0\leqslant x<\ln2,\\ e^x-2,x\geqslant\ln2,\end{cases}$

当 $x<0$ 时，$f(x)$ 单调递减，且 $f(x)\in\mathbf{R}$；当 $0\leqslant x<\ln2$ 时，$f(x)$ 单调递减，且 $f(x)\in(0,1]$；当 $x\geqslant\ln2$ 时，$f(x)$ 单调递增，且 $f(x)\in[0,+\infty)$.作出 $f(x)$ 的图象（图略）.

令 $t=f(x)$，则关于 x 的方程 $[f(x)]^2+mf(x)+2m+1=0$ 恰有 5 个实数根等价于关于 t 的方程 $t^2+mt+2m+1=0$ 有 2 个不相等的实数根，设两个实根分别为 t_1,t_2.

不妨设 $t_1>t_2$，则 $\begin{cases}t_2=0,\\ 0<t_1\leqslant1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}t_1>1,\\ 0<t_2\leqslant1,\end{cases}$ 令 $h(t)=t^2+mt+2m+1$，若 $t_1>1$，$0<t_2<1$，则 $\begin{cases}h(0)>0,\\ h(1)<0,\\ \Delta>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2m+1>0,\\ 3m+2<0,\\ m^2-8m-4>0,\end{cases}$ 解集为 $\varnothing$；若 $t_1>1$，$t_2=1$，则 $\begin{cases}h(0)>0,\\ h(1)=0,\\ \Delta>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2m+1>0,\\ 3m+2=0,\\ m^2-8m-4>0,\end{cases}$ 解集为 $\varnothing$；若 $t_2=0$，$0<t_1\leqslant1$，则 $\begin{cases}h(0)=0,\\ h(1)\geqslant0,\\ \Delta>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2m+1=0,\\ 3m+2\geqslant0,\\ m^2-8m-4>0,\end{cases}$ 解得 $m=-\frac{1}{2}$.所以实数 m 的取值范围是 $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

22.**解**：(1)$|f(x)-g(x)|=\left|x+\frac{1}{4x}-1\right|$，$\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}$，设 $h(x)=x+\frac{1}{4x}-1$，$\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}$，则 $h'(x)=\frac{4x^2-1}{4x^2}$，所以当 $x\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，当 $x\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，所以 $h(x)$ 的最小值是 $h\left(\frac{1}{2}\right)=0$，又 $h\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$，$h\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{12}$，所以 $|f(x)-g(x)|\leqslant\frac{1}{4}<1$，所以在区间 $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$ 上，$f(x)$ 可被 $g(x)$ 替代.

(2)由题意，得 $|f(x)-g(x)|=||\sin x|-\ln(a+\cos^2x)|\leqslant1$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，即 $|\ln(a+1-\sin^2x)-|\sin x||\leqslant1$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，令 $|\sin x|=t$，则 $t\in[0,1]$，则 $|\ln(a+1-t^2)-t|\leqslant1$ 对任意 $t\in[0,1]$ 恒成立，即 $|\ln(a+1-t^2)-\ln e^t|\leqslant1$ 对任意 $t\in[0,1]$ 恒成立，所以 $\left|\ln\frac{a+1-t^2}{e^t}\right|\leqslant1$ 对任意 $t\in[0,1]$ 恒成立，即 $e^{-1}\leqslant\frac{a+1-t^2}{e^t}\leqslant e$ 对任意 $t\in[0,1]$ 恒成立，所以 $\begin{cases}a\geqslant e^{t-1}+t^2-1,\\ a\leqslant e^{t+1}+t^2-1\end{cases}$ 对任意 $t\in[0,1]$ 恒成立，设 $s(t)=e^{t-1}+t^2-1$，该函数在 $[0,1]$ 上为增函数，则 $s(t)_{\max}=s(1)=1$，所以 $a\geqslant1$；设 $\varphi(t)=e^{t+1}+t^2-1$，该函数在 $[0,1]$ 上也是增函数，则 $\varphi(t)_{\min}=\varphi(0)=e-1$，所以 $a\leqslant e-1$.

综上，实数 a 的取值范围是 $[1,e-1]$.

第 6 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B **提示**：因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1-3\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=-3\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1-3\Delta x)-f(1)}{-3\Delta x}=-3f'(1)=2$，所以 $f'(1)=-\frac{2}{3}$.故选B.

2.D **提示**：因为 $s(t)=\frac{1}{2}t^2-6t$，所以 $s'(t)=t-6$，又 $t=t_0$ 时，该物体的瞬时速度为 2m/s，所以 $t_0-6=2$，解得 $t_0=8$.故选 D.

3.D **提示**：由图象，得 $f(x)$ 在 $[1,5]$ 上单调递减，在 $(5,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f'(2)<0,f'(3)<0,f'(6)>0$.故选 D.

4.A **提示**：由 $f(x)=ex-\ln x$，得 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=e-\frac{1}{x}(x>0)$，令 $f'(x)<0$，得 $0<x<\frac{1}{e}$，所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$.故选 A.

5.A **提示**：因为 $f(-x)+f(x)+2\cos x=0$，所以 $f(-x)=-f(x)-2\cos x$，令 $g(x)=f(x)+\cos x$，则 $g(-x)=f(-x)+\cos(-x)=-f(x)-2\cos x+\cos x=-f(x)-\cos x=-g(x)$，所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为奇函数，又当 $x\geqslant 0$ 时，$f'(x)>\sin x$，所以当 $x\geqslant 0$ 时，$g'(x)=f'(x)-\sin x>0$，所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，又 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为奇函数，所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，又 $f(x)+2\cos x>f(\pi-x)$，所以 $f(x)+\cos x>f(\pi-x)-\cos x$，又 $f(\pi-x)-\cos x=f(\pi-x)+\cos(\pi-x)$，所以 $g(x)>g(\pi-x)$，又 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $x>\pi-x$，解得 $x>\frac{\pi}{2}$，即原不等式的解集为 $\left(\frac{\pi}{2},+\infty\right)$.故选 A.

6.D **提示**：由 $g(x)=\frac{1}{2}x^2-2a\ln x-2x$，知 $g'(x)=x-\frac{2a}{x}-2$，因为 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g'(x)\geqslant 0$，即 $2a\leqslant x^2-2x$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.设 $f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1,x\in(0,+\infty)$，所以 $f(x)_{\min}=f(1)=-1$，所以 $2a\leqslant -1$，则 $a\leqslant -\frac{1}{2}$，即实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$.故选 D.

7.C **提示**：设 $f(x)=\frac{x}{\ln x}(x>1)$，$f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$，则当 $x\in(1,e)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，$a=2\sqrt{e}=\frac{\sqrt{e}}{\ln\sqrt{e}}=f(\sqrt{e})$，

$f(2)=b=\frac{2}{\ln 2}=\frac{4}{2\ln 2}=\frac{4}{\ln 4}=f(4)$，$c=\frac{e^2}{4-\ln 4}=\frac{\frac{e^2}{2}}{\ln\frac{e^2}{2}}=f\left(\frac{e^2}{2}\right)$，

因为 $1<\sqrt{e}<2<e<\frac{e^2}{2}<4$，所以 $f(\sqrt{e})>f(2)=f(4)>f\left(\frac{e^2}{2}\right)$，即 $c<b<a$.故选 C.

8.C **提示**：因为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象上恰有两对关于 x 轴对称的点，所以 $-f(x)=g(x)$，即 $-ax+x\ln x=e^x-1$ 有两解，所以 $a=\frac{x\ln x-e^x+1}{x}$ 有两个实数解，等价于直线 $y=a$ 与 $y=\frac{x\ln x-e^x+1}{x}$ 的图象有两个交点.令 $h(x)=\frac{x\ln x-e^x+1}{x}$，则 $h'(x)=\frac{(e^x-1)(1-x)}{x^2}$，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，所以 $h(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值 $h(1)=1-e$，且当 $x\to 0$ 时，$h(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)\to-\infty$，所以 $h(x)$ 的值域为 $(-\infty,1-e]$，则实数 a 的取值范围为 $(-\infty,1-e)$，故选 C.

二、多项选择题

9.AD **提示**：对于 A，$y=x^3\ln x$ 的导数 $y'=3x^2\ln x+x^2$，故 A 正确；对于 B，$y=\frac{2x-1}{x+1}$ 的导数 $y'=\frac{2(x+1)-(2x-1)}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2}$，故 B 错误；对于 C，$y=\sin 2x$ 的导数 $y'=2\cos 2x$，故 C 错误；对于 D，$y=\frac{1}{x}$ 的导数 $y'=-\frac{1}{x^2}$，故 D 正确.故选 AD.

10.BD **提示**：因为 $x^2f'(x)+xf(x)=\ln x$，所以 $xf'(x)+f(x)=\frac{\ln x}{x}$，设 $g(x)=xf(x)$，则 $g'(x)=f(x)+xf'(x)=\frac{\ln x}{x}$，令 $g'(x)>0$，解得 $x>1$，令 $g'(x)<0$，解得 $0<x<1$，所以函数 $g(x)=xf(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，故 A 错误，B 正确；$g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值 $g(1)=f(1)=\frac{1}{2}$，故 C 错误，D 正确.故选 BD.

11.AC **提示**：设 $g(x)=\frac{f(x)+x^2}{x}$，因为 $xf'(x)+x^2<f(x)$，$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)+x^2}{x^2}<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $g(1)>g(2)>g(3)$，即 $\frac{f(1)+1^2}{1}>\frac{f(2)+2^2}{2}>\frac{f(3)+3^2}{3}$，$2f(1)>f(2)+2$，$3f(1)>f(3)+6>f(3)+3$.故选 AC.

12.BCD **提示**：对于 A，$f'(x)=2(x+1)$，$f''(x)=2\neq 0$，根据拐点定义可知，$y=f(x)$ 没有拐点，故 A 错误；对于 B，$f'(x)=3x^2+4x+3$，$f''(x)=6x+4$，令 $f''(x)=0$，解得 $x=-\frac{2}{3}$，当 $x\in\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$ 时，$f''(x)<0$，当 $x\in\left(-\frac{2}{3},+\infty\right)$ 时，$f''(x)>0$，则 $\left(-\frac{2}{3},f\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$ 为 $y=f(x)$ 的拐点，故 B 正确；对于 C，$f'(x)=(x+1)e^x$，$f''(x)=(x+2)e^x$，令 $f''(x)=0$，解得 $x=-2$，当 $x\in(-\infty,-2)$ 时，$f''(x)<0$，当 $x\in(-2,+\infty)$ 时，$f''(x)>0$，则 $(-2,f(-2))$ 为 $y=f(x)$ 的拐点，故 C 正确；对于 D，$f'(x)=\frac{1}{x}+2x+\cos x$，$f''(x)=-\frac{1}{x^2}+2-\sin x=\frac{(2-\sin x)x^2-1}{x^2}$，令 $g(x)=(2-\sin x)x^2-1(x>0)$，$g'(x)=x(4-2\sin x-x\cos x)$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$-2\sin x>-2$，$-x\cos x>-\frac{\pi}{2}$，则 $g'(x)>0$，当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$-2\sin x>-2$，$-x\cos x>0$，则 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增.当 $x\in(\pi,+\infty)$ 时，$2-\sin x>1$，$(2-\sin x)x^2>\pi^2$，则 $g(x)>\pi^2-1>0$，又 $g\left(\frac{\pi}{6}\right)<0$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$，所以 $g(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一解.又 $f''(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 是连续不断的，所以 $f''(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 有唯一解，故 $y=f(x)$ 存在拐点.故选 BCD.

三、填空题

13.$\frac{3\pi}{4}$ **提示**：因为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2-\Delta x)}{\Delta x}=-2$，所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)+f(2)-f(2-\Delta x)}{\Delta x}=2f'(2)=-2$，则 $f'(2)=-1$，所以曲线 $f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处切线的斜率为 -1，即切线的倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$.

14. $x-y+3=0$ **提示**：由 $y=e^x+2\cos x$，得 $y'=e^x-2\sin x$，则 $y'|_{x=0}=1$，所以该曲线在点 $(0,3)$ 处的切线方程为 $y-3=1\times(x-0)$，即 $x-y+3=0$.

15.$(\ln 2,+\infty)$ **提示**：因为 $f'(x)-f(x)=e^{2x}$，所以 $\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}=e^x$，所以 $\left[\frac{f(x)}{e^x}\right]'=e^x$，所以 $\frac{f(x)}{e^x}=e^x+c$，$c\in\mathbf{R}$，所以 $f(x)=e^x(e^x+c)$，所以 $f(0)=1+c=2$，所以 $c=1$，所以 $f(x)=e^x(e^x+1)$，因为 $f(x)>6$，所以 $e^x(e^x+1)>6$，所以 $(e^x)^2+e^x-6>0$，解得 $e^x>2$，则 $x>\ln 2$，所以不等式 $f(x)>6$ 的解集为 $(\ln 2,+\infty)$.

16.$\left[\frac{7}{9},+\infty\right)$ **提示**：因为函数 $h(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2+2x$ 在 $(0,3)$ 上存在单调递减区间，所以 $h'(x)=\frac{1}{x}-ax+2\leqslant 0$ 在 $(0,3)$ 上有解，即 $a\geqslant\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}$ 在 $(0,3)$ 上有解，令 $u=\frac{1}{x}$，$f(u)=u(u+2)$，则 $u>\frac{1}{3}$，所以 $a\geqslant f(u)$ 在 $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$ 上有解，因为 $f(u)$ 在 $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$ 上单调递增，所以 $a\geqslant f(u)_{\min}=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{9}$，即实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{7}{9},+\infty\right)$.

四、解答题

17.**解**：(1) $y'=2(2x+3)\cdot(2x+3)'=4(2x+3)=8x+12$.

(2) $y'=3(1-3x)^2\cdot(1-3x)'=-9(1-3x)^2$.

(3) $y'=2e^{2x}$.

(4)由 $y=\ln\frac{1}{x}=-\ln x$，得 $y'=-\frac{1}{x}$.

18.**解**：(1)由 $f(x)=x^3-x^2+x+2$，得 $f'(x)=3x^2-2x+1$，则 $f(0)=2$，$f'(0)=1$，则曲线 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y-2=1\times(x-0)$，即 $x-y+2=0$.

(2)设切点为 (m,n)，可得 $n=m^3-m^2+m+2$，$f'(x)=3x^2-2x+1$，则切线的斜率为 $3m^2-2m+1$，切线的方程为 $y-(m^3-m^2+m+2)=(3m^2-2m+1)(x-m)$，由切线经过点 $(1,3)$，可得 $3-(m^3-m^2+m+2)=(3m^2-2m+1)(1-m)$，即 $m(m-1)^2=0$，解得 $m=0$ 或 $m=1$，则切线的方程为 $y-2=x$ 或 $y-3=2(x-1)$，即 $y=x+2$ 或 $y=2x+1$.

19.**解**：(1)因为 $f(x)=e^x+x\cos x$，所以 $f'(x)=e^x+\cos x-x\sin x$，所以 $f(0)=1$，$f'(0)=2$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y-1=2(x-0)$，即 $2x-y+1=0$.

(2)由(1)知 $f'(x)=e^x+\cos x-x\sin x$，因为 $\sin x,\cos x\in[-1,1]$，所以当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$e^x-e^x+(\cos x+1)-x(\sin x-1)\geqslant 0$，即 $f'(x)\geqslant e^x-x-1$.令 $g(x)=e^x-x-1$，则 $g'(x)=e^x-1\geqslant 0(x\geqslant 0)$，所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)\geqslant g(0)=0$，所以 $f'(x)\geqslant e^x-x-1\geqslant 0$，且等号不恒成立，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

20.**解**：(1) $a=16$ 时，$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{16}{x}$，$f'(x)=x^2-\frac{16}{x^2}=\frac{x^4-16}{x^2}=\frac{(x+2)(x-2)(x^2+4)}{x^2}$，令 $f'(x)>0$，解得 $x>2$ 或 $x<-2$，故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,-2)$，$(2,+\infty)$.

(2)因为 $g(x)=f(x)-\frac{2}{3}x^2=\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{x}-\frac{2}{3}x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g'(x)=x^2-\frac{4}{3}x-\frac{a}{x^2}\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，即 $a\leqslant x^4-\frac{4}{3}x^3$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，所以 $a\leqslant\left(x^4-\frac{4}{3}x^3\right)_{\min}$.令 $h(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3(x>0)$，则 $h'(x)=4x^2(x-1)$，令 $h'(x)>0$，得 $x>1$，令 $h'(x)<0$，得 $0<x<1$，故 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)_{\min}=h(1)=-\frac{1}{3}$，所以 $a\leqslant-\frac{1}{3}$，即实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]$.

21.**解**：(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=x+\frac{2}{x}+\ln x$，$x>0$，所以 $f'(x)=1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}$，所以 $f(1)=3$，$f'(1)=0$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=3$.

(2)因为函数 $f(x)=x+\frac{2a^2}{x}+a\ln x(a\in\mathbf{R})$，所以当 $a\geqslant 0$ 时，由 $x\in[e,+\infty)$，得 $f(x)>0$ 恒成立，故曲线 $y=f(x)$ 在 x 轴的上方，符合题意.当 $a<0$ 时，$f'(x)=\frac{(x-a)(x+2a)}{x^2}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=-2a$ 或 $x=a$（舍去），所以当 $x\in(0,-2a)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(-2a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $-2a\leqslant e$，即 $-\frac{e}{2}\leqslant a<0$ 时，所以 $f(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 上单调递增，则 $f(x)\geqslant f(e)=\frac{2}{e}\left(a+\frac{e}{4}\right)^2+\frac{7}{8}e>0$，故曲线 $y=f(x)$ 在 x 轴的上方.当 $-2a>e$，即 $a<-\frac{e}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $[e,-2a)$ 上单调递减，在 $(-2a,+\infty)$ 上单调递增，则 $f(x)\geqslant f(-2a)=-3a+a\ln(-2a)$，因为当 $x\in[e,+\infty)$ 时，曲线 $y=f(x)$ 在 x 轴的上方，所以 $-3a+a\ln(-2a)>0$，解得 $a>-\frac{e^3}{2}$，所以 $-\frac{e^3}{2}<a<-\frac{e}{2}$.

综上，实数 a 的取值范围为 $\left(-\frac{e^3}{2},+\infty\right)$.

22.**解**：(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}$.当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增；当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，可得 $x>a$，令 $f'(x)<0$，可得 $0<x<a$，此时函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,a)$ 上单调递减.

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增.

(2)由题意，得 $g'(x)=\frac{2x\ln x-a-x^2}{x^2}$，则 $g'(x_0)=0$，即 $2x_0\ln x_0-a-x_0^2=0$，①

由 $g(x_0)=-2$，可得 $x_0(\ln x_0)^2-x_0^2+2x_0+a=0$，②

联立①②，消去 a，可得 $(\ln x_0)^2+2\ln x_0-2x_0+2=0$. ③

令 $t(x)=(\ln x)^2+2\ln x-2x+2$，

则 $t'(x)=\frac{2\ln x}{x}+\frac{2}{x}-2=\frac{2(\ln x+1-x)}{x}$.

令 $h(x)=\ln x+1-x$，则 $h'(x)=\frac{1-x}{x}$，令 $h'(x)=0$，可得 $x=1$，当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，所以 $h(x)\leqslant h(1)=0$，$\ln x+1-x\leqslant 0$，即 $t'(x)\leqslant 0$，所以 $t(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，又 $t(1)=0$，所以方程③有唯一解，且 $x_0=1$，代入①，可得 $a=-1$.

第 7 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B **提示**：$f'(x)=(x-c)^2+2x(x-c)$，由 $f'(2)=(2-c)^2+2\times 2(2-c)=0$，解得 $c=6$ 或 $c=2$.经检验，当 $c=2$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值，不符合题意，所以 $c=6$.故选 B.

2.A **提示**：因为当 $x=0$ 时，函数 $f(x)=ae^x+bx$ 取得极小值 1，所以 $f(0)=a=1$，且 $f'(0)=0$，又 $f'(x)=ae^x+b$，所以 $f'(0)=a+b=0$，得 $b=-1$，所以 $f'(x)=e^x-1$，则 $f'(1)=e-1$.故选A.

3.C **提示**：由题意，得 $f'(x)=3x^2+a$，因为函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，所以 $f'(1)=3+a=0$，解得 $a=-3$，此时 $f(x)=x^3-3x$，$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$，当 $x<-1$ 或 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，当 $-1<x<1$ 时 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-1,1)$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值 $f(1)=-2$.故选 C.

4.C **提示**：由函数 $g(x)=x\cdot f'(x)$ 的图象，得当 $x\in(-\infty,-2)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(-2,0)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.又 $f'(-2)=f'(1)=0$，所以 $f(x)$ 有两个极值点，$f(-2)$ 为 $f(x)$ 的极小值，$f(1)$ 为 $f(x)$ 的极大值.故选 C.

5.A **提示**：由 $f(x)=a\ln x-x,x\in(e,+\infty)$，得 $f'(x)=\frac{a}{x}-1=\frac{-(x-a)}{x}$，$x>e$.当 $a\leqslant e$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，无最值.当 $a>e$ 时，若 $x\in(e,a)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；若 $x\in(a,+\infty)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，所以 $f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 内有最大值，所以实数 a 的取值范围是 $(e,+\infty)$，故选A.

6.B **提示**：由 $xe^{ax}+\ln x+\ln e^{ax}<1$，得 $xe^{ax}+\ln xe^{ax}<1$.令 $f(x)=x+\ln x,x\in(0,+\infty)$，上述不等式等价于 $f(xe^{ax})<f(1)=1$，易知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $xe^{ax}<1$，即 $a<\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.令 $t=\frac{1}{x}\in(0,+\infty)$，令 $g(t)=t\ln t$，则 $g'(t)=1+\ln t$，当 $0<t<\frac{1}{e}$ 时，$g'(t)<0$，$g(t)$ 单调递减，当 $t>\frac{1}{e}$ 时，$g'(t)>0$，$g(t)$ 单调递增，所以 $y=\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}$ 在 $(0,e)$ 上单调递减，在 $(e,+\infty)$ 上单调递增，所以当 $x=e$ 时，$y_{\min}=-\frac{1}{e}$，所以 $a<-\frac{1}{e}$.故选 B.

7.D **提示**：$\exists x_0\in(0,+\infty)$，使得 $f(x_0)\geqslant 0$，即 $2x_0-ke^{x_0}(2x_0+1)\geqslant 0$，即 $k\leqslant\frac{2x_0}{e^{x_0}(2x_0+1)}=\frac{1}{e^{x_0}}\left(1-\frac{1}{2x_0+1}\right)$ 成立.令 $g(x)=\frac{1}{e^x}\left(1-\frac{1}{2x+1}\right)$，$x>0$，则 $g'(x)=-\frac{2(2x-1)(x+1)}{e^x(2x+1)^2}$，所以当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减.所以 $g(x)\leqslant g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{e}}$，所以 $k\leqslant\frac{1}{2\sqrt{e}}$，即 k 的最大值是 $\frac{1}{2\sqrt{e}}$.故选 D.

8.C **提示**：对任意的 $x_1\in(0,2)$，存在 $x_2\in[1,2]$，使 $g(x_1)\geqslant f(x_2)$，转化为 $g(x)_{\min}\geqslant f(x)_{\min}$.当 $x\in(0,2)$ 时，$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{3}{4x^2}-\frac{1}{4}=\frac{4x-3-x^2}{4x^2}=\frac{-(x-1)(x-3)}{4x^2}$，由 $g'(x)=0$，得 $x=1$，由 $g'(x)>0$，得 $1<x<2$，由 $g'(x)<0$，得 $0<x<1$，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,2)$ 上单调递增，所以当 $x=1$ 时，$g(x)$ 取得极小值也是最小值，$g(x)_{\min}=g(1)=-\frac{1}{2}$.当 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)=x^2-2tx+1=(x-t)^2+1-t^2$，二次函数 $f(x)$ 的图象开口向上，对称轴为直线 $x=t$.①当 $t<1$ 时，$f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，$f(x)_{\min}=f(1)=2-2t$，所以 $2-2t\leqslant-\frac{1}{2}$，解得 $t\geqslant\frac{5}{4}$，此时无解；②当 $t>2$ 时，$f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递减，$f(x)_{\min}=f(2)=5-4t$，所以 $5-4t\leqslant-\frac{1}{2}$，解得 $t\geqslant\frac{11}{8}$，此时 $t>2$；③当 $1\leqslant t\leqslant 2$ 时，当 $x=t$ 时，$f(x)_{\min}=f(t)=1-t^2$，所以 $1-t^2\leqslant-\frac{1}{2}$，解得 $t\geqslant\frac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $t\leqslant-\frac{\sqrt{6}}{2}$，此时 $\frac{\sqrt{6}}{2}\leqslant t\leqslant 2$.综上，实数 t 的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{6}}{2},+\infty\right)$.故选 C.

二、多项选择题

9.BCD **提示**：由 $f(x)=x^2\ln x,x\in(0,+\infty)$，得 $f'(x)=2x\left(\ln x+\frac{1}{2}\right)$，令 $f'(x)=2x\left(\ln x+\frac{1}{2}\right)=0$，解得 $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$，当 $x\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in\left(\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.所以 $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ 时，函数 $f(x)$ 取得极小值，也是最小值，$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\frac{1}{2e}$，当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to 0$，当 $x=1$ 时，$f(1)=0$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$.故选 BCD.

10.ACD **提示**：由 $f(x)=\frac{1}{x}-1+\ln x$，得 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线的斜率为 $f'(1)=0$，又 $f(1)=0$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-0=0(x-1)$，即 $y=0$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线为 x 轴，故 A 正确；当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，故 B 错误；由此可得 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点，故 C 正确；因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上只有一个极小值点，所以函数 $f(x)$ 的极小值也是最小值，最小值为 $f(1)=0$，故 D 正确，故选 ACD.

11.ABC **提示**：由题意，得 $f'(x)=3x^2-3$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\pm 1$，所以当 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 时 $f'(x)>0$，当 $x\in(-1,1)$ 时 $f'(x)<0$，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点，$x=-1$ 为 $f(x)$ 的极大值点，因为 $f(x)$ 在 $(a,6-a^2)$ 上有最小值，所以 $f(x)$ 的极小值点必在区间 $(a,6-a^2)$ 内，即实数 a 满足 $a<1<6-a^2$，且 $f(a)=a^3-3a\geqslant f(1)=-2$.由 $a<1<6-a^2$，解得 $-\sqrt{5}<a<1$，由 $a^3-3a\geqslant f(1)=-2$，即 $a^3-3a+2\geqslant 0$，则 $a^3-1-3(a-1)\geqslant 0$，即 $(a-1)(a^2+a-2)\geqslant 0$，所以 $(a-1)^2(a+2)\geqslant 0$，解得 $a\geqslant-2$，所以实数 a 的取值范围是 $[-2,1)$.故选 ABC.

12.CD **提示**：因为不等式 $me^{x-1}+\frac{\ln m}{e}\geqslant\frac{\ln x}{e}$ 在 $(m,+\infty)$ 上恒成立，所以 $e^x\geqslant\frac{1}{m}\ln\frac{x}{m}$，即 $xe^x\geqslant\frac{x}{m}\ln\frac{x}{m}$，即 $xe^x\geqslant\ln\frac{x}{m}\cdot e^{\ln\frac{x}{m}}$ 在 $(m,+\infty)$ 上恒成立.由 $x>m>0$，得 $\frac{x}{m}>1$，$\ln\frac{x}{m}>0$.令 $f(x)=xe^x$，则 $f'(x)=(x+1)e^x>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，原不等式等价于 $f(x)\geqslant f\left(\ln\frac{x}{m}\right)$，等价于 $x\geqslant\ln\frac{x}{m}$，即 $e^x\geqslant\frac{x}{m}$，所以 $m\geqslant\frac{x}{e^x}$.令 $F(x)=\frac{x}{e^x}$，$x>0$，则 $F'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，所以 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，因为 $x>m>0$，所以当 $0<m<1$ 时，$F(x)$ 在 $(m,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，故 $F(x)\leqslant F(1)=\frac{1}{e}$，要使得原不等式成立，则 $\frac{1}{e}\leqslant m<1$.当 $m\geqslant 1$ 时，$F(x)$ 在 $(m,+\infty)$ 上单调递减，$F(x)<F(1)=\frac{1}{e}$，符合题意.综上，m 的取值范围为 $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.故选 CD.

三、填空题

13.0 **提示**：依题意，$f'(x)=x(\cos x-6)$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$，经检验，符合题意，所以函数 $f(x)$ 的极值点为 0.

14.1 **提示**：因为 $f(x)=x^2-ax-\ln x$，所以 $f'(x)=2x-a-\frac{1}{x}$，因为函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值，所以 $f'(1)=1-a=0$，解得 $a=1$.

15.$\left(2\ln 2-4,-\frac{5}{2}\right)$ **提示**：令 $g(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+2\ln x$，$x\in(0,+\infty)$，则 $g'(x)=x-3+\frac{2}{x}=\frac{x^2-3x+2}{x}=\frac{(x-1)(x-2)}{x}$，所以当 $x>2$ 或 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，当 $1<x<2$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，故 $g(x)_{极大值}=g(1)=-\frac{5}{2}$，$g(x)_{极小值}=g(2)=2\ln 2-4$，且 $x\to 0$ 时，$g(x)\to-\infty$，$x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$.因为 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+2\ln x-m$ 有三个零点，即函数 $g(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+2\ln x$ 的图象与直线 $y=m$ 有 3 个交点，所以 $2\ln 2-4<m<-\frac{5}{2}$.

16.3 **提示**：$f'(x)=1+\frac{1}{x}$，因为 $f'(x)>\frac{k}{\ln(x+1)+1}$ 对任意 $x>0$ 恒成立，所以 $k<\frac{(x+1)[\ln(x+1)+1]}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.令 $x+1=t$，则 $t\in(1+\infty)$，即 $k<\frac{t\ln t+t}{t-1}$ 对任意 $t>1$ 恒成立.令 $F(t)=\frac{t\ln t+t}{t-1}(t>1)$，$F'(t)=\frac{-\ln t+t-2}{(t-1)^2}$，令 $g(t)=-\ln t+t-2$，则 $g'(t)=\frac{t-1}{t}>0$，$g(t)$ 单调递增，又 $g(3)=1-\ln 3<0$，$g(4)=2-\ln 4>0$，$\exists t_0\in(3,4)$，使 $F'(x)=0$，即 $-\ln t_0+t_0-2=0$，则 $\ln t_0=t_0-2$，当 $x\in(1,t_0)$，$g(t)<0$，则 $F'(t)<0$，$F(t)$ 单调递减，当 $t\in(t_0,+\infty)$，$g(t)>0$，则 $F'(t)>0$，$F(t)$ 单调递增，所以 $F(t)_{\min}=F(t_0)=\frac{t_0\ln t_0+t_0}{t_0-1}$，又 $\ln t_0=t_0-2$，所以 $F(t_0)=t_0$，则 $k<t_0\in(3,4)$，所以整数 k 的最大值为 3.

四、解答题

17.**解**：(1)因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f'(x)=9x^2-9=9(x+1)(x-1)$，令 $f'(x)<0$，可得 $-1<x<1$，所以函数 $y=f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1,1)$.

(2)由(1)知，令 $f'(x)>0$，可得 $x<-1$ 或 $x>1$，则 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$，所以当 $x\in(-1,1)$ 时，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(1,3)$ 时，$f(x)$ 单调递增，且 $f(1)=-1$，$f(-1)=11$，$f(3)=59$，所以函数 $f(x)$ 在 $[-1,3]$ 上的最大值为 59，最小值为 -1.

18.(1)**解**：因为 $f(x)=a\ln x+\frac{2}{\sqrt{x}}(x>1)$，所以 $f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}=\frac{a\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}}$.要使 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上不单调，则 $f'(x)=0$ 在 $(1,+\infty)$ 上有解，即 $a=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $(1,+\infty)$ 上有解，所以 $0<a<1$，所以实数 a 的取值范围是 $(0,1)$.

(2)**证明**：当 $a=1$ 时，要证 $f(x)<\frac{x^2}{2}-x+3$，即证 $g(x)=\ln x+\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{x^2}{2}+x-3<0$. 则 $g'(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}}-(x-1)=\frac{(\sqrt{x}-1)(1-x^2-x\sqrt{x})}{x\sqrt{x}}$，因为 $x>1$，所以 $\sqrt{x}-1>0$，$1-x^2-x\sqrt{x}<0$，所以 $g'(x)<0$，则 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $g(x)<g(1)=-\frac{1}{2}<0$.故 $f(x)<\frac{x^2}{2}-x+3$.

19.**解**：(1)当 $a=-6$ 时，$f(x)=x^2-6\ln(x+2)$，$f'(x)=2x-\frac{6}{x+2}=\frac{2x^2+4x-6}{x+2}=\frac{2(x+3)(x-1)}{x+2}$，则当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(1,4)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，又 $f(0)=-6\ln 2$，$f(1)=1-6\ln 3$，$f(4)=16-6\ln 6$，所以 $y=f(x)$ 在 $x\in[0,4]$ 上的最大值为 $16-6\ln 6$，最小值为 $1-6\ln 3$.

(2)由题意，得 x_1,x_2 是 $f'(x)=0$ 的两根，$f'(x)=2x+\frac{a}{x+2}=\frac{2x^2+4x+a}{x+2}$，令 $f'(x)=0$，则 $a=-2x^2-4x(x>-2)$ 有两个不同的实根.设 $h(x)=-2x^2-4x(x>-2)$，当 $x\in(-2,-1)$ 时，$h(x)$ 单调递增，当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，$h(x)$ 单调递减，且 $x\to-2$ 时，$h(x)\to 0$，$h(-1)=2$，$x\to+\infty$ 时，$h(x)\to-\infty$，又函数 $y=h(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 有两个交点，所以实数 a 的取值范围是 $(0,2)$.

20.**解**：(1)由 $f(x)=ax-2\ln x+2$，得 $f'(x)=a-\frac{2}{x}$，因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值，所以 $f'(1)=a-2=0$，解得 $a=2$，经检验，$a=2$ 符合题意，所以 $a=2$.

(2)由 $f(x)=ax-2\ln x+2=0$，得 $a=\frac{2\ln x-2}{x}$.令 $F(x)=\frac{2\ln x-2}{x}$，则 $f(x)$ 有两个零点等价于 $y=F(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 有两个交点，$F'(x)=\frac{2(2-\ln x)}{x^2}$，当 $x\in(0,e^2)$ 时，$F'(x)>0$，当 $x\in(e^2,+\infty)$ 时，$F'(x)<0$，所以 $F(x)$ 在 $(0,e^2)$ 上单调递增，在 $(e^2,+\infty)$ 上单调递减，则 $F(x)_{\max}=F(e^2)=\frac{2}{e^2}$，当 $x\to+\infty$ 时，$F(x)\to 0$，当 $x\to 0$ 时，$F(x)\to-\infty$，所以 $0<a<\frac{2}{e^2}$，即 a 的取值范围为 $\left(0,\frac{2}{e^2}\right)$.

21.**解**：(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=-2+\frac{1}{x}=\frac{1-2x}{x}$，当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$，单调递减区间为 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$，所以 $f(x)$ 的极大值点是 $x=\frac{1}{2}$，无极小值点.

(2)设 $h(x)=f(x)-g(x)=-2x+\ln x-xe^x+3x+m=\ln x+x-xe^x+m,x\in(0,+\infty)$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}+1-(x+1)e^x=(x+1)\left(\frac{1}{x}-e^x\right)$.令 $t(x)=\frac{1}{x}-e^x,x\in(0,+\infty)$，易知 $t(x)=\frac{1}{x}-e^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.又 $t\left(\frac{1}{2}\right)=2-\sqrt{e}>0$，$t(1)=1-e<0$，所以 $\exists x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $t(x_0)=\frac{1}{x_0}-e^{x_0}=0$，即 $\frac{1}{x_0}=e^{x_0}$，则 $\ln\frac{1}{x_0}=\ln e^{x_0}$，即 $-\ln x_0=x_0$.所以当 $0<x<x_0$ 时，$t(x)>0$，$h'(x)>0$，则 $h(x)$ 单调递增；当 $x>x_0$ 时，$t(x)<0$，$h'(x)<0$，则 $h(x)$ 单调递减，因为 $f(x)\leqslant g(x)$ 恒成立，等价于 $h(x)\leqslant 0$ 恒成立，所以 $h(x)_{\max}\leqslant 0$，即 $h(x)_{\max}=h(x_0)=\ln x_0+x_0-x_0e^{x_0}+m=-1+m\leqslant 0$，解得 $m\leqslant 1$，即实数 m 的取值范围是 $(-\infty,1]$.

22.**解**：(1)由已知得当 $a=1$ 时，$f'(x)=2xe^x+x^2e^x+2x+4=(xe^x+2)(x+2)$，令 $g(x)=xe^x+2$，则 $g'(x)=(x+1)e^x$，当 $x<-1$ 时，$g'(x)<0$，当 $x>-1$ 时，$g'(x)>0$，所以函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)_{\min}=g(-1)=-\frac{1}{e}+2>0$，故 $g(x)=xe^x+2>0$，所以当 $x<-2$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>-2$ 时，$f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递减，在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(-2)=4e^{-2}-4$.

(2) $f'(x)=(xe^x+2a)(x+2)$，令 $h(x)=xe^x+2a(x>0)$.①当 $a\geqslant 0$ 时，$h(x)=xe^x+2a>0$，又 $x+2>0$，故 $f'(x)=(xe^x+2a)(x+2)>0$，此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)$ 无极值；②当 $a<0$ 时，$h'(x)=(x+1)e^x>0$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $h(0)=2a<0$，$h(-2a)=-2a(e^{-2a}-1)>0$，所以 $h(x)=xe^x+2a$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一零点，设为 $x_0(x_0>0)$，所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，所以当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在极值点 x_0.

综上，实数 a 的取值范围为 $(-\infty,0)$.