$\cos 2B$，又 $A,B\in(0,\pi)$，则 $A=2B$.

（2）**解**：由（1）得 $C=\pi-A-B=\pi-3B$，

则由正弦定理，得 $\frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A}=\frac{\sin(\pi-3B)}{\sin 2B}=\frac{\sin 3B}{\sin 2B}=\frac{\sin 2B\cos B+\cos 2B\sin B}{2\sin B\cos B}=\cos B+\frac{2\cos^2B-1}{2\cos B}=2\cos B-\frac{1}{2\cos B}$，因为 $0<C<\pi$，即 $0<\pi-3B<\pi$，解得 $0<B<\frac{\pi}{3}$. 令 $t=\cos B$，则 $t\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，又函数 $g(t)=2t-\frac{1}{2t}$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递增，则 $g(t)>g\left(\frac{1}{2}\right)=0$，$g(t)<g(1)=\frac{3}{2}$，所以 $\frac{c}{a}$ 的取值范围为 $\left(0,\frac{3}{2}\right)$.

19. **解**：（1）由题意，知当走私船发现巡逻艇时，走私船在 D 点，巡逻艇在 C 点，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ 海里，$AC=2\sqrt{2}$ 海里，$\angle BAC=60^\circ$，在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC=12$，所以 $BC=2\sqrt{3}$ 海里，由正弦定理，得 $\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}$，所以 $\sin\angle ABC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，因为 $BC>AC$，所以 $\angle BAC>\angle ABC$，所以 $\angle ABC=45^\circ$，在 $\triangle BCD$ 中，$BD=3$，$BC=2\sqrt{3}$，$\angle CBD=30^\circ$，由余弦定理，得 $CD^2=BD^2+BC^2-2BD\cdot BC\cdot\cos\angle CBD=3$，所以 $CD=\sqrt{3}$ 海里，所以当走私船发现了巡逻艇时，两船相距 $\sqrt{3}$ 海里.

（2）由（1）知，$BC=2\sqrt{3}$ 海里，$BD=3$ 海里，$CD=\sqrt{3}$ 海里，所以 $CD^2+BD^2=BC^2$，则 $\angle BDC=90^\circ$，$\angle CDE=135^\circ$，设当巡逻艇沿 CE 方向经过 t 小时，在 E 处追上走私船，则 $CE=3\sqrt{2}t$ 海里，$DE=3t$ 海里，在 $\triangle CDE$ 中，由正弦定理，得 $\frac{CE}{\sin\angle CDE}=\frac{DE}{\sin\angle DCE}$，即 $\frac{3\sqrt{2}t}{\sin 135^\circ}=\frac{3t}{\sin\angle DCE}$，则 $\sin\angle CDE=\frac{1}{2}$，所以 $\angle DCE=30^\circ$，$\angle ACE=\angle ACB+\angle BCD+\angle DCE=75^\circ+60^\circ+30^\circ=165^\circ$，所以巡逻船应该沿北偏东 75° 方向去追，才能最快追上走私船.

20. **解**：（1）由 $ac\sin A=2\sin C(a^2+c^2-b^2)$，得 $a^2c=2c(a^2+c^2-b^2)$，则 $a^2=2b^2-2c^2$，①又 $b-c=\frac{2\sin A}{\sin B+\sin C}$，所以由正弦定理，得 $(b-c)(b+c)=2a$，即 $b^2-c^2=2a$，②

联立①②，可得 $a^2=4a$，所以 $a=4$. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，因为 $\pi R^2=8\pi$，所以 $R=2\sqrt{2}$，由正弦定理，得 $\sin A=\frac{a}{2R}=\frac{4}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（2）因为 $A=C$，所以 $BC=AB=4$，$\sin A=\sin C$，代入 $ac\sin A=2\sin C(a^2+c^2-b^2)$，得 $a^2+c^2-b^2=\frac{1}{2}ac$，所以 $\cos B=\frac{1}{4}$，$B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\frac{\sqrt{15}}{4}$. 在 $\triangle ABM$ 中，由正弦定理，得 $\frac{AB}{\sin\angle AMB}=\frac{AM}{\sin B}$，故 $\sin\angle AMB=\frac{AB\cdot\sin B}{AM}=\frac{4\times\frac{\sqrt{15}}{4}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为 $AM>AB$，所以 $\angle AMB<\angle B$，所以 $\angle AMB=\frac{\pi}{3}$.

21. **解**：（1）因为 $a+b=c\cos B+\sqrt{3}c\sin B$，所以由正弦定理，得 $\sin A+\sin B=\sin C\cos B+\sqrt{3}\sin C\sin B$，又 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，所以 $\sin B+\sin B\cos C=\sqrt{3}\sin B\sin C$，又 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B\neq 0$，所以 $\sqrt{3}\sin C-\cos C=1$，即 $\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，又 $0<C<\pi$，所以 $-\frac{\pi}{6}<C-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，则 $C-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，解得 $C=\frac{\pi}{3}$.

（2）延长 CD 至 E，使得 $DE=2CD$，因为 $AD=2DB$，所以 $AE/\!/CB$，且 $AE=2CB=2a$，$CE=3CD=6$，又 $\angle ACB=\frac{\pi}{3}$，所以 $\angle CAE=\frac{2\pi}{3}$，在 $\triangle ACE$ 中，由余弦定理，得 $CE^2=AC^2+AE^2-2AC\cdot AE\cdot\cos\angle CAE$，所以 $b^2+4a^2+2ab=36$，因为 $b^2+4a^2\geqslant 4ab$，所以 $6ab\leqslant 36$，得 $ab\leqslant 6$，当且仅当 $b=2a=2\sqrt{3}$ 时，等号成立，所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}AC\cdot BC\sin\angle ACB=\frac{\sqrt{3}}{4}ab\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$，所以 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

22. **解**：（1）选条件①，由 $(b-c)^2=a^2-bc$，整理得 $b^2-2bc+c^2=a^2-bc$，即 $b^2+c^2-a^2=bc$，由余弦定理推论，得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，又 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

选条件②，由 $2c=\sqrt{3}a\sin C+c\cos A$，根据正弦定理，得 $2\sin C=\sqrt{3}\sin A\sin C+\sin C\cos A=\sin C(\sqrt{3}\sin A+\cos A)$，又 $A\in(0,\pi)$，则 $\sin C>0$，所以 $\sqrt{3}\sin A+\cos A=2$，所以 $2\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=2$，则 $\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=1$，又 $0<A<\pi$，所以 $A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，则 $A=\frac{\pi}{3}$.

（2）由（1）知，$A=\frac{\pi}{3}$，则 $B+C=\frac{2\pi}{3}$，即 $C=\frac{2\pi}{3}-B$，因为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $\sqrt{3}$，所以由正弦定理，得 $b+c=2\sqrt{3}(\sin B+\sin C)=2\sqrt{3}\left[\sin B+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)\right]=2\sqrt{3}\left(\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right)=6\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$，因为 $0<B<\frac{2\pi}{3}$，所以 $\frac{\pi}{6}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，则 $3<6\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 6$，所以 $b+c$ 的取值范围为 $(3,6]$.

第 12 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.D **提示**：由数列 $-2,4,-\frac{26}{3},20,\cdots$，得 $a_1=(-1)^1\cdot\frac{3^1-1}{1}=-2$，$a_2=(-1)^2\cdot\frac{3^2-1}{2}=4$，$a_3=(-1)^3\cdot\frac{3^3-1}{3}=-\frac{26}{3}$，$a_4=(-1)^4\cdot\frac{3^4-1}{4}=20$，所以该数列的一个通项公式可以是 $a_n=(-1)^n\cdot\frac{3^n-1}{n}$. 故选 D.

2.C **提示**：由题意，得数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公差为 2 的等差数列，所以 $a_n=1+2(n-1)=2n-1$，则 $a_5=9$. 故选 C.

3.A **提示**：根据等差数列性质，得 $a_1+a_3+a_5=3a_3=12$，则 $a_3=4$，又 $a_{12}=22$，所以 $d=\frac{a_{12}-a_3}{12-3}=\frac{22-4}{12-3}=2$. 故选 A.

4.B **提示**：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由已知 $a_2+a_9=2a_1+9d=29$，$S_5=5a_1+10d=35$，解得 $a_1=1$，$d=3$，所以 $S_8=8a_1+28d=8+28\times 3=92$. 故选 B.

5.A **提示**：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由 $a_5=5$，得 $a_1+4d=5$，① 由 $a_1+S_{11}=67$，得 $12a_1+55d=67$，② 由①②，解得 $a_1=1$，$d=1$，所以 $a_n=a_1+(n-1)d=n$，所以 $a_3a_{10}=3\times 10=30$，又 $a_{30}=30$，所以 a_3a_{10} 是 $\{a_n\}$ 中的第 30 项. 故选 A.

6.C **提示**：设树干截面的半径为 r 米，因为树干的周长为 3.14 米，则 $2\pi r=3.14$，所以 $r\approx 0.5\text{m}=50\text{cm}$. 从树芯到树皮，设第 n 个年轮宽度是 a_n，由题意，知 $a_5=0.4\text{cm}$，$a_{n-4}=0.2\text{cm}$，且 $\{a_n\}$ 是等差数列，则 $r=50=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(a_5+a_{n-4})}{2}=\frac{0.4+0.2}{2}\times n=0.3n$. 解得 $n=\frac{50}{0.3}\approx 167$ 年，又树龄 100~299 年的古树为三级，所以该大树属于三级. 故选 C.

7.A **提示**：因为 a_8,a_9 是方程 $x^2+x-2023=0$ 的两根，所以 $a_8+a_9=-1$，$a_8\cdot a_9=-2023$，又 $a_1>0$，所以 $a_8>0$，$a_9<0$，所以 $S_{16}=\frac{(a_1+a_{16})\times 16}{2}=8(a_8+a_9)=-8<0$，$S_{15}=\frac{(a_1+a_{15})\times 15}{2}=15a_8>0$，所以能使 $S_n>0$ 成立的 n 的最大值为 15. 故选 A.

8.B **提示**：对于 A，由 $S_{2023}>S_{2021}>S_{2022}$，$S_{2021}+a_{2022}+a_{2023}>S_{2021}>S_{2021}+a_{2022}$，得 $a_{2022}+a_{2023}>0$，$a_{2022}<0$，则 $a_{2023}>0$，所以 $d>0$，故 A 错误；对于 B，由 $d>0$，得等差数列 $\{a_n\}$ 是递增数列，又 $a_{2022}<0$，$a_{2023}>0$，所以当 $a_n<0$ 时，n 的最大值为 2022，故 B 正确；对于 C，由 A 项得，$d>0$，所以 S_n 是关于 n 的开口向上的二次函数，则 S_n 有最小值没有最大值，故 C 错误；对于 D，因为 $a_{2022}+a_{2023}>0$，则 $S_{4044}=\frac{4044(a_1+a_{4044})}{2}=2022(a_{2022}+a_{2023})>0$，$S_{4043}=\frac{4043(a_1+a_{4043})}{2}=4043a_{2022}<0$，所以 $S_n<0$ 时，n 的最大值为 4043，故 D 错误. 故选 B.

二、多项选择题

9.AD **提示**：对于 A，在等差数列 $\{a_n\}$ 中，因为 $a_2+a_5+a_8=15$，所以 $3a_5=15$，则 $a_5=5$，$a_3+a_7=2a_5=10$，故 A 正确；对于 B，若 $a_9=6$，则 $S_{17}=\frac{17(a_1+a_{17})}{2}=17a_9=102$，故 B 错误；对于 C，设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由 $S_3=S_8$，得 $S_8-S_3=a_4+a_5+a_6+a_7+a_8=5a_6=0$，则 $a_6=a_1+5d=0$，又 $a_1>0$，所以 $d<0$，则当 $1\leqslant n\leqslant 5$ 时，$a_n>0$，当 $n\geqslant 7$ 时，$a_n<0$，所以当 $n=5$ 或 $n=6$ 时，S_n 取得最大值，故 C 错误；对于 D，$S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$，则 $\frac{S_n}{n}=\frac{d}{2}n+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)$，因为 $\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{d}{2}$，所以 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 必为等差数列，故 D 正确. 故选 AD.

10.BCD **提示**：由 $S_9=S_{10}<S_{11}$，得 $a_{10}=S_{10}-S_9=0$，$a_{11}=S_{11}-S_{10}>0$，则 $d=a_{11}-a_{10}=a_{11}>0$，故 A 错误，B 正确；因为 $a_{10}=0$，$d>0$，所以 $a_8=a_{10}-2d=-2d<0$，$a_9=a_{10}-d=-d<0$，所以 $S_{15}=\frac{15(a_1+a_{15})}{2}=15a_8<0$，故 C 正确；由 $S_9-S_8=a_9<0$，得 $S_8>S_9$，故 D 正确. 故选 BCD.

11.ACD **提示**：由题意，得包括第 1 层在内的其中 10 层的塔数可以构成等差数列 $\{a_n\}$，设其公差为 d，若 $d=1$，则 10 层的塔数之和为 $10\times 1+\frac{10\times 9}{2}\times 1=55$，最多可以有 $55+10+10=75$ 座塔，不符合题意，若 $d=3$，则 10 层的塔数之和为 $10\times 1+\frac{10\times 9}{2}\times 3=145>108$，不符合题意，则必有 $d=2$，所以 10 层的塔数之和为 $10\times 1+\frac{10\times 9}{2}\times 2=100$，剩下的 2 层塔数分别为 3 和 5，所以这 12 层塔数依次为 1,3,3,5,5,7,9,11,13,15,17,19. 第 3 层的塔数为 3，故 A 正确；第 6 层的塔数为 7，故 B 错误；第 4 层与第 5 层的塔数相等，都是 5，故 C 正确；等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2，故 D 正确. 故选 ACD.

12.AD **提示**：因为数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，$S_8=10$，所以 $\frac{8(a_1+a_8)}{2}=10$，即 $a_1+a_8=\frac{5}{2}$，由等差数列的性质，得 $a_3+a_6=a_1+a_8=\frac{5}{2}$ 为定值，故 A 正确；当 $a_1=\frac{27}{2}$ 时，$a_8=-11$，则 $d=-\frac{7}{2}$，则数列 $\{a_n\}$ 是递减数列，则 $a_4=3$，$a_5=-\frac{1}{2}$，所以当 $n=4$ 时，S_n 取得最大值，故 B 错误；当 $d=\frac{1}{2}$ 时，因为 $a_1+a_8=2a_1+7d=\frac{5}{2}$，所以 $a_1=-\frac{1}{2}$，$S_n=-\frac{1}{2}n+\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{n(n-3)}{4}$，令 $S_n<0$，得 $0<n<3$，又 $n\in\mathbf{N}_+$，所以 S_n 为负值的 n 的值有 2 个，故 C 错误；由 $S_4=6$，即 $4a_1+6d=6$，又 $a_1+a_8=\frac{5}{2}$，即 $2a_1+7d=\frac{5}{2}$，解得 $a_1=\frac{27}{16}$，$d=-\frac{1}{8}$，所以 $S_{12}=12a_1+\frac{12\times(12-1)}{2}\times d=12$，故 D 正确. 故选 AD.

三、填空题

13.39 **提示**：由等差数列的性质，得 $a_2+a_7+a_{12}=(a_2+a_{12})+a_7=2a_7+a_7=3a_7=9$，所以 $a_7=3$，所以 $S_{13}=\frac{13(a_1+a_{13})}{2}=\frac{13\times 2a_7}{2}=13a_7=39$.

14.143 **提示**：因为等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3+a_6+a_9=3a_6=39$，所以 $a_6=13$，所以 $S_{11}=\frac{11(a_1+a_{11})}{2}=11a_6=143$.

15.-1；1 **提示**：因为 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n(n\in\mathbf{N}_+)$，所以 $a_3=1$，$a_4=-1$，$a_5=-2$，$a_6=-1$，$a_7=1$，$a_8=2$，$\cdots$. 所以数列 $\{a_n\}$ 是周期为 6 的周期数列，因为 $2023=6\times 337+1$，所以 $S_{2023}=337\times(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)+a_1=1$.

16.37,50 **提示**：因为数列 $\{b_n\}$ 为二阶等差数列，所以数列 $\{b_{n+1}-b_n\}$ 为等差数列，由 $b_1=2$，$b_2=4$，$b_3=7$，$b_4=11$，得 $b_2-b_1=2$，$b_3-b_2=3$，$b_4-b_3=4$，所以数列 $\{b_{n+1}-b_n\}$ 是首项为 2，公差为 1 的等差数列，所以 $b_{n+1}-b_n=n+1$，因为当 $n\geqslant 2$ 时，$b_2-b_1=2$，$b_3-b_2=3$，$b_4-b_3=4$，$\cdots$，$b_n-b_{n-1}=n$，以上各式相加，得 $b_n-b_1=2+3+4+\cdots+n(n\geqslant 2)$，又 $b_1=2$，所以 $b_n=\frac{n^2+n+2}{2}(n\geqslant 2)$，当 $n=1$ 时，$b_1=2$ 满足上式，所以 $b_n=\frac{n^2+n+2}{2}$，所以 $b_8=\frac{8^2+8+2}{2}=37$. 令 $b_n=1276$，即 $\frac{n^2+n+2}{2}=1276$，解得 $n=50$（舍去负值）.

四、解答题

17. **解**：（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由 $a_2+a_5=2a_1+5d=24$，$a_{17}=a_1+16d=66$，解得 $d=4$，$a_1=2$，所以 $a_n=2+4(n-1)=4n-2$，则 $a_{2023}=2023\times 4-2=8090$.

（2）由（1）得，$a_n=4n-2$，令 $4n-2=2022$，解得 $n=506$，所以 2022 是数列 $\{a_n\}$ 中的第 506 项.

18. **解**：（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，当 $n=1$ 时，$a_1+2a_2=3a_1+2d=20$，①

当 $n=2$ 时，$a_2+2a_3=3a_1+5d=32$，②

由②−①，得 $3d=12$，解得 $d=4$，即 $a_1=4$，

所以 $a_n=4+(n-1)\times 4=4n$.

（2）由（1）知，$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(4+4n)}{2}=(2+2n)n$，$a_n=4n$，因为 $S_m^2=14a_ma_{m+1}$，所以 $(2m^2+2m)^2=14\times 4m\times 4(m+1)$，即 $m^2+m-56=0$，解得 $m=7$ 或 $m=-8$（舍去），所以 m 的值为 7.

19.（1）**证明**：由题意，得方程的 $\Delta=(a_{n+1}-a_{n-1})^2-4(a_n-a_{n+1})(a_{n-1}-a_n)=0$，所以 $\Delta=(a_{n+1}-a_n+a_n-a_{n-1})^2-4(a_n-a_{n+1})(a_{n-1}-a_n)=0$，即 $[(a_{n+1}-a_n)-(a_n-a_{n-1})]^2=0$，所以 $a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}(n\geqslant 2)$，所以数列 $\{a_n\}$ 成等差数列.

（2）**解**：由（1）得，数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，设其公差为 d，因为 $S_5=-10$，$a_8=8$，所以 $\begin{cases}5a_1+10d=-10,\\a_1+7d=8,\end{cases}$ 解得 $d=2$，$a_1=-6$，所以 $S_n=-6n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2-7n$，根据二次函数的性质，知当 $n=3$ 或 $n=4$ 时，S_n 取得最小值，最小值为 $S_3=S_4=-12$.

20. **解**：（1）因为等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d\neq 0)$，$a_2+a_3+a_7=-15$，所以 $3a_1+9d=-15$，即 $a_1=-5-3d$.

若选①，$a_1+a_6+a_{10}=3a_1+14d=-15+5d=0$，得 $d=3$，则 $a_1=-14$，所以 $a_n=-14+3(n-1)=3n-17$.

若选②，则 $-2a_2=a_{13}$，即 $-2a_1-2d=a_1+12d$，得 $3a_1+14d=-15+5d=0$，得 $d=3$，所以 $a_1=-14$，所以 $a_n=-14+3(n-1)=3n-17$.

若选③，$a_3a_5=a_7^2$，即 $(a_1+2d)(a_1+4d)=(a_1+6d)^2$，即 $(-5-d)(-5+d)=(-5+3d)^2$，解得 $d=3$，或 $d=0$（舍去），则 $a_1=-14$，所以 $a_n=-14+3(n-1)=3n-17$.

（2）由（1）得 $a_n=3n-17$，所以 $S_k=\frac{k(a_1+a_k)}{2}=\frac{(-14+3k-17)k}{2}=-40$，解得 $k=5$ 或 $k=\frac{16}{3}$（舍去），所以 k 的值为 5.

21. **解**：（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由 $\begin{cases}a_2=4,\\S_5=30,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a_1+d=4,\\5a_1+10d=30,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=2,\\d=2,\end{cases}$ 所以 $a_n=2+2(n-1)=2n$.

（2）由（1）得，$S_n=2n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2+n$，则 $S_n\geqslant 8n+\lambda$，即 $\lambda\leqslant n^2-7n$ 对任意的正整数 n 成立. 令 $f(x)=x^2-7x$，其图象为开口向上的抛物线，对称轴为直线 $x=\frac{7}{2}$，所以当 $n=3$ 或 $n=4$ 时，$f(n)$ 取得最小值 -12，所以 $\lambda\leqslant -12$，即实数 λ 的取值范围为 $(-\infty,-12]$.

22. **解**：（1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $a_n=a_1+(n-1)\cdot d$，又 $a_{n+1}+a_n=2n+3$，所以 $\begin{cases}a_1+a_2=2a_1+d=5,\\a_3+a_2=2a_1+3d=7,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=2,\\d=1,\end{cases}$ 所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n+1$.

（2）因为 $a_{n+1}+a_n=2n+3$，①

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n+a_{n-1}=2(n-1)+3$，②

①−②，得 $a_{n+1}-a_{n-1}=2$，所以数列 $\{a_{2n}\}$ 是以 a_2 为首项，2 为公差的等差数列，数列 $\{a_{2n-1}\}$ 是以 a_1 为首项，2 为公差的等差数列. 又 $a_1+a_2=5$，所以 $a_2=5-a_1$. 当 n 为偶数时，$a_n=a_2+\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot 2=n+3-a_1$；当 n 为奇数时，$a_n=a_1+\left(\frac{n+1}{2}-1\right)\cdot 2=n-1+a_1$. 所以 $a_n=\begin{cases}n-1+a_1(n\text{ 为奇数}),\\n+3-a_1(n\text{ 为偶数}).\end{cases}$ 因为对任意的 $n\in\mathbf{N}_+$，都有 $a_n+n^2\geqslant 0$ 成立，当 n 为奇数时，$a_n+n^2=n-1+a_1+n^2\geqslant 0$ 恒成立，所以 $-a_1\leqslant n^2+n-1$ 在 n 为奇数时恒成立，所以 $-a_1\leqslant 1$，所以 $a_1\geqslant -1$；同理，当 n 为偶数时，$a_n+n^2=n+3-a_1+n^2\geqslant 0$ 恒成立，所以 $a_1\leqslant n^2+n+3$ 在 n 为偶数时恒成立，所以 $a_1\leqslant 9$.

综上，a_1 的取值范围是 $[-1,9]$.

扫码免费下载习题讲解 ppt

第 9 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C **提示**：对于 A，$y=\tan 2x$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$，故 A 错误；对于 B，$y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 是非奇非偶函数，故 B 错误；对于 C，$y=\cos\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)=\sin 2x$，易知该函数为奇函数，且最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，故 C 正确；对于 D，$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$ 为偶函数，故 D 错误. 故选 C.

2.C **提示**：令 $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$，结合选项可知，C 项符合题意. 故选 C.

3.B **提示**：令 $2x-\frac{\pi}{6}\in[2k\pi,\pi+2k\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $x\in\left[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，当 $k=-1$ 时，$x\in\left[-\frac{11\pi}{12},-\frac{5\pi}{12}\right]$. 故选 B.

4.D **提示**：由题意，知 $2\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=\frac{5\pi}{6}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，由 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，得 $-\frac{\pi}{6}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$，则 $2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in[-1,2]$，所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域为 $[-1,2]$. 故选 D.

5.B **提示**：由图象知，$f(x)$ 的最小正周期 $T=4\times\left[\frac{2\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=4\pi$，$A=\sqrt{3}$，则 $\omega=\frac{2\pi}{4\pi}=\frac{1}{2}$，$f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{1}{2}x+\varphi\right)$，将点 $\left(\frac{2\pi}{3},\sqrt{3}\right)$ 代入，得 $\sqrt{3}\sin\left(\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=\sqrt{3}$，即 $\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，则 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$，则 $f(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 B.

6.C **提示**：因为 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2\omega x+\cos 2\omega x)=\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 的最小正周期为 T，$\frac{\pi}{2}<T<\pi$，所以 $\frac{\pi}{2}<\frac{2\pi}{2\omega}<\pi$，解得 $1<\omega<2$，故①错误. 又 $y=f(x)$ 的图象的一条对称轴为直线 $x=\frac{\pi}{12}$，所以 $2\omega\times\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $\omega=6k+\frac{3}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$. 令 $k=0$，可得 $\omega=\frac{3}{2}\in(1,2)$，$f(x)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$，得 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\pi=0$，故②正确. 当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{12}\right]$ 时，$3x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，所以函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递增，故③正确. 把 $f(x)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象上所有点的纵坐标不变，横坐标伸长为原来的 2 倍，可得 $y=\sin\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象，再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，可得 $y=\sin\left[\frac{3}{2}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\sin\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{3}{2}x$ 的图象，又 $g(x)=\cos\omega x=\cos\frac{3}{2}x$，故④正确. 故选 C.

7.B **提示**：设 y 与时间 t 的函数关系式为 $y=A\sin(\omega t+\varphi)$，由题意，得初始位置为 $P_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，又初相为 φ，所以 $\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $A=1$，$\varphi=\frac{\pi}{4}$，所以 $y=\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)$，又该函数的周期是 60（秒）且秒针按顺时针方向旋转，则 $T=\left|\frac{2\pi}{\omega}\right|=60$，$\omega<0$，所以 $\omega=-\frac{\pi}{30}$，$y=\sin\left(-\frac{\pi}{30}t+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{30}t+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{30}t+\frac{\pi}{4}\right)$，由 $y<-\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $\cos\left(\frac{\pi}{30}t+\frac{\pi}{4}\right)<-\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\frac{5\pi}{6}<\frac{\pi}{30}t+\frac{\pi}{4}<\frac{7\pi}{6}$，解得 $\frac{35}{2}<t<\frac{55}{2}$. 故选 B.

8.C **提示**：由 $f(-x)+f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=0$，得 $f(-x)=-f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $f(x)$ 的一个对称中心为 $\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$，由 $f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$，得 $f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$，所以 $f(x)$ 的一条对称轴为直线 $x=\frac{\pi}{4}$，所以 $\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{T}{4}+k\frac{T}{2}(k\in\mathbf{N})$，解得 $T=\frac{2\pi}{2k+1}$，又 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，所以 $\frac{2\pi}{2k+1}=\frac{2\pi}{\omega}$，则 $\omega=2k+1(k\in\mathbf{N})$，因为 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{28}\right)$ 上单调，则 $\frac{5\pi}{28}-\frac{\pi}{8}=\frac{3\pi}{56}\leqslant\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}$，得 $0<\omega\leqslant\frac{56}{3}$，由选项知，需要依次验证 $\omega=17,15,13$，直至符合题意为止. 当 $\omega=17$ 时，$f(x)=A\sin(17x+\varphi)$，则 $17\times\frac{\pi}{4}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{N})$，得 $\varphi=-\frac{15\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbf{N})$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，则 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，此时 $f(x)=A\sin\left(17x+\frac{\pi}{4}\right)$，可以验证 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{28}\right)$ 上不单调，不符合题意；当 $\omega=15$ 时，$f(x)=A\sin(15x+\varphi)$，则 $15\times\frac{\pi}{4}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{N})$，得 $\varphi=-\frac{13\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbf{N})$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，则 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$，此时 $f(x)=A\sin\left(15x-\frac{\pi}{4}\right)$，可以验证 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{28}\right)$ 上单调，符合题意. 综上，ω 的最大值为 15. 故选 C.

二、多项选择题

9.AB **提示**：因为 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$，$\omega>0$，

所以 $\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi\omega}{2}+\frac{\pi}{6},\frac{5\pi\omega}{6}+\frac{\pi}{6}\right]$，

所以 $\begin{cases}\frac{\pi\omega}{2}+\frac{\pi}{6}\geqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,\\\frac{5\pi\omega}{6}+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$，解得 $\frac{2}{3}+4k\leqslant\omega\leqslant\frac{8}{5}+\frac{12}{5}k$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $k=0$ 时，$\frac{2}{3}\leqslant\omega\leqslant\frac{8}{5}$，结合选项，知 ω 的取值可以是 $1,\frac{4}{3}$. 故选 AB.

10.BC **提示**：$f(x)=4\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故 A 错误；$f(x)=4\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=4\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，故 B 正确；因为 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=4\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$，所以 $y=f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 对称，故 C 正确；因为 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=4\cos\frac{\pi}{2}=0$，所以 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 不对称，故 D 错误. 故选 BC.

11.ACD **提示**：因为 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{2\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 在 $\left[-\pi,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调，所以 $\frac{T}{2}\geqslant\frac{3\pi}{2}$，即 $\frac{\pi}{\omega}\geqslant\frac{3\pi}{2}$，解得 $0<\omega\leqslant\frac{2}{3}$，因为曲线 $y=f(x)$ 关于点 $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$ 对称，所以 $-\frac{\pi}{3}\omega+\frac{2\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\omega=\frac{1}{2}-3k(k\in\mathbf{Z})$，当 $k=0$ 时，$\omega=\frac{1}{2}\in\left(0,\frac{2}{3}\right]$，所以 $f(x)=\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{2\pi}{3}\right)$，$f(x)$ 的最小正周期 $T=4\pi$，故 A 正确；由 $f\left(\frac{2\pi}{9}\right)=\cos\frac{7\pi}{9}=-\cos\frac{2\pi}{9}$，$f\left(\frac{10\pi}{9}\right)=\cos\frac{11\pi}{9}=-\cos\frac{2\pi}{9}$，得 $f\left(\frac{2\pi}{9}\right)=f\left(\frac{10\pi}{9}\right)$，故 B 错误；将 $f(x)=\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{2\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{4\pi}{3}$ 个单位长度后得到 $g(x)=\cos\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{4\pi}{3}\right)+\frac{2\pi}{3}\right]=\cos\frac{1}{2}x$，则 $g(x)$ 为偶函数，故 C 正确；令 $y=5f(x)+4=0$，即 $f(x)=-\frac{4}{5}$，作出 $y=f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的图象（图略），$f(0)=-\frac{1}{2}>-\frac{4}{5}$，$f(\pi)=-\frac{\sqrt{3}}{2}<-\frac{4}{5}$，由图可知，则 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=-\frac{4}{5}$ 在 $[0,\pi]$ 上只有一个交点，所以 $y=5f(x)+4$ 在 $[0,\pi]$ 上有且仅有一个零点，故 D 正确. 故选 ACD.

12.BC **提示**：由题意，得 $g(x)=-f\left(-x-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left[2\left(-x-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，则 $F(x)=f(x)+g(x)=\sin 2x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\frac{3}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，则 $F(x)$ 的值域是 $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$，故 A 错误；$F\left(-\frac{7\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin\left(-\frac{9\pi}{2}\right)=-\sqrt{3}=F(x)_{\min}$，故 B 正确；令 $t=2x+\frac{\pi}{6}$，当 $x\in\left(-\frac{\pi}{12},\frac{17\pi}{12}\right)$ 时，$t\in(0,3\pi)$，又 $F(x)=1$，即 $\sin t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 在 $(0,3\pi)$ 上的四个实根依次为 t_1,t_2,t_3,t_4，且 $t_1+t_2=\pi$，$t_3+t_4=5\pi$，所以 $F(x)=1$ 的四个实根依次为 x_1,x_2,x_3,x_4，且 $2x_1+\frac{\pi}{6}+2x_2+\frac{\pi}{6}=\pi$，$2x_3+\frac{\pi}{6}+2x_4+\frac{\pi}{6}=5\pi$，所以 $x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{8\pi}{3}$，故 C 正确；当 $x\in(-\pi,0)$ 时，$t=2x+\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{11\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$，$F(x)<-\frac{3}{2}$，即 $\sin t<-\frac{\sqrt{3}}{2}$，此时 $-\frac{2\pi}{3}<t<-\frac{\pi}{3}$，即 $-\frac{2\pi}{3}<2x+\frac{\pi}{6}<-\frac{\pi}{3}$，解得 $-\frac{5\pi}{12}<x<-\frac{\pi}{4}$，故 D 错误. 故选 BC.

三、填空题

13.π **提示**：由 $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x+\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\frac{1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)=\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{4}$，得 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$.

14.$-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **提示**：令 $2x-\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，因为方程 $f(x)=\frac{1}{3}$ 在区间 $(0,\pi)$ 上的根为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，所以 x_1,x_2 关于直线 $x=\frac{5\pi}{12}$ 对称，所以 $x_1+x_2=\frac{5\pi}{6}$，则 $\tan(x_1+x_2)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

15.$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，$\left[-\frac{\pi}{2}+3k\pi,\pi+3k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$ **提示**：由题意，得 $\frac{T}{4}=\frac{3\pi}{4}$，则 $T=3\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，得 $\omega=\frac{2}{3}$，所以 $f(x)=\sin\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$，则 $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. 令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $-\frac{\pi}{2}+3k\pi\leqslant x\leqslant\pi+3k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{2}+3k\pi,\pi+3k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.

16.$\frac{105}{4}$ **提示**：由题意，知 $\begin{cases}-\frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_1\pi,\\\frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_2\pi+\frac{\pi}{2},\end{cases}$ $k_1,k_2\in\mathbf{Z}$，则 $\begin{cases}\omega=\frac{3(2k+1)}{4},\\\varphi=\frac{k'\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\end{cases}$ $k,k'\in\mathbf{Z}$，其中 $k=k_2-k_1$，$k'=k_2+k_1=k+2k_1$，故 k 与 k' 同为奇数或同为偶数. 由题意知 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{5}\right)$ 上有且只有一个最大值点，且要求 ω 最大，则 $\left(\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{5}\right)$ 包含的周期应该最多，所以 $\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{15}\leqslant 2T$，即 $\frac{2\pi}{15}\leqslant\frac{16\pi}{3(2k+1)}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $k\leqslant 19.5$. ①当 $k=19$ 时，$\omega=\frac{117}{4}$，k' 为奇数，则 $\varphi=\frac{3\pi}{4}$，当 $x\in\left(\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{5}\right)$ 时，$\frac{117}{4}x+\frac{3\pi}{4}\in(2.7\pi,6.6\pi)$，当 $\frac{117}{4}x_1+\frac{3\pi}{4}=\frac{9}{2}\pi$ 或 $\frac{13}{2}\pi$ 时，$f(x_1)=3$ 都成立，舍去；②当 $k=18$ 时，$\omega=\frac{111}{4}$，k' 为偶数，则 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，当 $x\in\left(\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{5}\right)$ 时，$\frac{111}{4}x+\frac{\pi}{4}\in(2.1\pi,5.8\pi)$，当 $\frac{111}{4}x_1+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{2}\pi$ 或 $\frac{9}{2}\pi$ 时，$f(x_1)=3$ 都成立，舍去；③当 $k=17$ 时，$\omega=\frac{105}{4}$，k' 为奇数，则 $\varphi=\frac{3\pi}{4}$，当 $x\in\left(\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{5}\right)$ 时，$\frac{105}{4}x+\frac{3\pi}{4}\in(2.5\pi,6\pi)$，当 $\frac{105}{4}x_1+\frac{3\pi}{4}=\frac{9}{2}\pi$ 时，$f(x_1)=3$ 成立，符合题意. 综上，ω 的最大值为 $\frac{105}{4}$.

四、解答题

17. **解**：（1）因为 $f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^2x-\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x-1=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-1$，所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. 令 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)$ 的对称轴是直线 $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$.

（2）当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，所以 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-1\in\left[-\frac{3}{2},0\right]$，所以 $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{3}{2}$，$f(x)$ 的最大值为 0.

18. **解**：（1）由 $f(x)$ 的最小正周期为 π，得 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$，由 $f(x)$ 的图象经过点 $(0,-\sqrt{3})$，得 $f(0)=2\sin\varphi=-\sqrt{3}$，则 $\sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，得 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$. 由 $2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $x\in\left[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

（2）由 $x\in(-\pi,\pi)$，得 $2x-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{7\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$，由 $f(x)\geqslant 1$，得 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\geqslant\frac{1}{2}$，所以 $2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{11\pi}{6},-\frac{7\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，解得 $x\in\left[-\frac{3\pi}{4},-\frac{5\pi}{12}\right]\cup\left[\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{12}\right]$. 所以不等式 $f(x)\geqslant 1$ 的解集为 $\left[-\frac{3\pi}{4},-\frac{5\pi}{12}\right]\cup\left[\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{12}\right]$.

19. **解**：（1）函数 $f(x)=A\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$ 满足的条件为①③. 理由如下：由题意，知条件①②互相矛盾，则③为函数 $f(x)=A\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$ 满足的条件之一. 由③可知，$T=\pi$，所以 $\omega=2$，故②不合题意. 所以 $f(x)=A\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$ 满

③ 足的条件为①③，由①知，$A=2$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

（2）由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，又 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，所以当 $k=-1$ 时，则 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right]$；当 $k=0$ 时，则 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right]$ 和 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$.

（3）由 $f(x)+1=0$，即 $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-1$，得 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$，所以 $2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ 或 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$ 或 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，又 $x\in[-\pi,\pi]$，所以 x 的取值为 $-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$，所以方程 $f(x)+1=0$ 的所有的解的和为 $-\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{3}$.

20.**解**：（1）化简得 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}+m$，因为 $f(x)$ 的最小值为 -3，所以 $-1+\frac{1}{2}+m=-3$，解得 $m=-\frac{5}{2}$，所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-2$. 令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.

（2）$f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]-2=\cos2x-2$，所以 $a\sin x+f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=a\sin x+\cos2x-2=-2\sin^2x+a\sin x-1$，令 $t=\sin x$，$x\in(0,\pi)$，则 $t\in(0,1]$，所以原不等式可转化为 $-2t^2+at-1<0$，即 $a<2t+\frac{1}{t}$，又 $2t+\frac{1}{t}\geqslant2\sqrt{2t\cdot\frac{1}{t}}=2\sqrt{2}$，当且仅当 $2t=\frac{1}{t}$，即 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号，所以 $a<2\sqrt{2}$，即实数 a 的取值范围为 $(-\infty,2\sqrt{2})$.

21.**解**：（1）在 Rt△OBC 中，$OC=OP=100$m，$\angle COB=\alpha$，所以 $BC=100\sin\alpha,OB=100\cos\alpha$，在 Rt△$OAD$ 中，$\tan\frac{\pi}{4}=\frac{AD}{OA}=1$，所以 $OA=AD=100\sin\alpha,AB=100\cos\alpha-100\sin\alpha$，所以 $S=AB\cdot BC=(100\cos\alpha-100\sin\alpha)\cdot100\sin\alpha=10\,000(\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha)=5000(\sin2\alpha+\cos2\alpha-1)=5000\sqrt{2}\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-5000$.

（2）由（1）知，$S=5000\sqrt{2}\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-5000$，其中 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$，因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$，所以 $\frac{\pi}{4}<2\alpha+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$，令 $2\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，解得 $\alpha=\frac{\pi}{8}$，

所以当 $\alpha=\frac{\pi}{8}$ 时，S 取得最大值 $5000\sqrt{2}-5000$.

22.**解**：$f(\theta)=4\cos^2\theta-4\cos\theta+3\sin^2\theta=\cos^2\theta-4\cos\theta+3$，$g(\theta)=m\cos\theta$.

（1）对任意的 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，若 $f(\theta)\geqslant g(\theta)$，即 $\cos^2\theta-4\cos\theta+3\geqslant m\cos\theta$，$\cos\theta\in(0,1]$，所以 $\cos\theta+\frac{3}{\cos\theta}-4\geqslant m$，设 $\cos\theta=t,t\in(0,1]$，则 $h(t)=t+\frac{3}{t}-4$ 在 $(0,1]$ 上是减函数，所以函数 $h(t)=t+\frac{3}{t}-4$ 在 $(0,1]$ 上的最小值为 $h(1)=0$，所以 $m\leqslant0$，所以 m 的取值范围为 $(-\infty,0]$.

（2）对 $\theta\in[-\pi,\pi]$，$f(\theta)=g(\theta)$ 有两个不等实根，即 $\cos^2\theta-4\cos\theta+3=m\cos\theta$ 有两个不等实根，$\cos\theta\in[-1,1]$. 当 $\cos\theta=0$ 时，上述方程不成立，所以 $\cos\theta\neq0$，所以两边同除以 $\cos\theta$，得 $\cos\theta+\frac{3}{\cos\theta}-4=m$ 有两个不等实根. 设 $\cos\theta=t$，$t\in[-1,0)\cup(0,1]$，则 $F(t)=t+\frac{3}{t}-4$ 与 $y=m$ 在 $[-1,0)$ 和 $(0,1]$ 上有交点，并且此函数在两个区间上是减函数，又函数 $F(t)=t+\frac{3}{t}-4$ 在 $(0,1]$ 上的最小值为 $F(1)=0$，在 $[-1,0)$ 的最大值为 $F(-1)=-8$，所以要使对 $\theta\in[-\pi,\pi]$，$f(\theta)=g(\theta)$ 有两个不等实根，m 的取值范围为 $(-\infty,-8]\cup[0,+\infty)$.

第 10 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B　**提示**：零向量的大小为零，方向任意，故 A 错误；因为 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 方向相反，长度相等，故 B 正确；因为零向量的模为 0，则 $|\boldsymbol{a}|\geqslant0$ 恒成立，故 C 错误；$|\overrightarrow{AB}|$ 为线段 BA 的长度，故 D 错误.故选 B.

2.A　**提示**：因为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线，所以 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2\neq0$，因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，所以存在实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，所以 $k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2=2\lambda\boldsymbol{e}_1-\lambda\boldsymbol{e}_2$，所以 $\begin{cases}k=2\lambda,\\-\lambda=1,\end{cases}$ 解得 $k=-2$.故选 A.

3.B　**提示**：由题意，得 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{4-2}{8}\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.故选 B.

4.A　**提示**：因为 $\boldsymbol{b}$ 是单位向量，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$，所以 $|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos120°=-\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|$，又 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=0$，即 $\boldsymbol{a}^2-\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|=0$，又向量 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，则 $|\boldsymbol{a}|=\frac{1}{2}$，所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{4}+1-2\times\frac{1}{2}\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4}$，所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\frac{\sqrt{7}}{2}$.故选 A.

5.B　**提示**：因为 $AB=BC=2$，$\angle ABC=60°$，所以△ABC 为边长为 2 的等边三角形，则 $AC=2$，在 Rt△ADC 中，$AC=2,CD=1$，则 $\angle ACD=60°$.以 BC 的中点 O 为坐标原点，以 OC 为 x 轴建立平面直角坐标系，$OC=CD=1$，$\angle OCD=120°$，则 $OD=\sqrt{3}$，$\angle DOC=30°$，所以 $D\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$A(0,\sqrt{3})$，设 $P(x,0)$，则 $-1\leqslant x\leqslant1$，$\overrightarrow{PA}=(-x,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PD}=\left(\frac{3}{2}-x,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}=-x\left(\frac{3}{2}-x\right)+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}=\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{15}{16}$，当 $x=\frac{3}{4}$ 时，上式取得最小值 $\frac{15}{16}$.故选 B.

6.A　**提示**：因为点 M 是 BC 的中点，所以 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，则 $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AM}=\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$，则 $\overrightarrow{AB}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AB}=\frac{5}{2}\lambda\overrightarrow{AD}-\lambda\overrightarrow{AC}$，又 N,D,C 三点共线，所以 $\frac{5}{2}\lambda-\lambda=1$，解得 $\lambda=\frac{2}{3}$.故选A.

7.C　**提示**：设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\theta,\theta\in[0°,180°]$，因为 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，所以 $|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}|^2<|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2$，即 $\boldsymbol{a}^2+2t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+t^2\boldsymbol{b}^2<\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $4+4t\cos\theta+t^2<4+4\cos\theta+1$，故 $\exists t\in\mathbf{R}$ 使得 $(t+1)(t-1)+4\cos\theta(t-1)<0$.当 $t>1$ 时，$\cos\theta<-\frac{t+1}{4}$，则 $-1\leqslant\cos\theta<-\frac{1}{2}$；当 $t=1$ 时，显然不等式不成立；当 $t<1$ 时，$\cos\theta>-\frac{t+1}{4}$，则 $-\frac{1}{2}<\cos\theta\leqslant1$.综上，$\cos\theta\neq-\frac{1}{2}$，所以 $\theta\neq120°$.故选 C.

8.A　**提示**：设 $\overrightarrow{CP}=\lambda\overrightarrow{CD}$，由 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，得 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AC}+\lambda\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\lambda\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{3}\lambda\overrightarrow{AB}+(1-\lambda)\overrightarrow{AC}$，又 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，所以 $\begin{cases}\frac{2}{3}\lambda=\frac{1}{3},\\m=1-\lambda,\end{cases}$ 解得 $m=\lambda=\frac{1}{2}$，则 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4$，$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，所以 $|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|=8$，所以 $|\overrightarrow{AP}|^2=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)^2=\frac{1}{9}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\geqslant2\sqrt{\left(\frac{1}{9}|\overrightarrow{AB}|^2\right)\cdot\left(\frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|^2\right)}+\frac{1}{3}\times4=\frac{8}{3}+\frac{4}{3}=4$，当且仅当 $\frac{1}{3}|\overrightarrow{AB}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$，即 $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{3}$，$|\overrightarrow{AC}|=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时，等号成立，所以 $|\overrightarrow{AP}|$ 的最小值为 2.故选 A.

二、多项选择题

9.BD　**提示**：因为向量 $\boldsymbol{a}=(2,0)$，$\boldsymbol{b}=(1,1)$，所以 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，所以 $|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$，故 A 错误；因为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(1,-1)$，所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，故 B 正确，C 错误；因为 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{2}{2\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，且 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，故 D 正确.故选 BD.

10.AC　**提示**：因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，所以 $9=-4x$，解得 $x=-\frac{9}{4}$，故 A 正确；与向量 $\boldsymbol{a}=(3,-4)$ 共线的单位向量是 $\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$，故 B 错误；若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3x-12=0$，得 $x=4$，所以 $3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}=(25,0)$，$|3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}|=25$，$\boldsymbol{a}\cdot(3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})=75$，所以 $\boldsymbol{a}$ 在 $3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$ 方向上的投影向量是 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot(3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})}{|3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}|^2}\cdot(3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})=\frac{75}{625}\times(25,0)=(3,0)$，故 C 正确；因为 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(2x+3,2)$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角，所以 $\begin{cases}3(2x+3)-4\times2<0,\\-4(2x+3)\neq2\times3,\end{cases}$ 解得 $x<-\frac{1}{6}$ 且 $x\neq-\frac{9}{4}$，故 D 错误.故选 AC.

11.BCD　**提示**：因为 A 为 OM 的中点，$\overrightarrow{NB}=2\overrightarrow{BO}$，$\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{CO}$，所以 $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{ON}=3\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OC}$，又 $2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{CO}$，所以 $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=-\overrightarrow{OD}$，取 ND 中点为 E，MD 中点为 F，连接 OE,OF，所以 $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OF}$，$\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OE}$，所以 $2\overrightarrow{OF}=-\overrightarrow{ON}$，$2\overrightarrow{OE}=-\overrightarrow{OM}$，所以 O,F,N 三点共线，O,E,M 三点共线，又 ND 中点为 E，MD 中点为 F，所以 O 是△MND 的重心，故 A 错误，B 正确；则 $S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}OM\cdot ON\cdot\sin\angle MON=\frac{1}{2}\cdot2OA\cdot3OB\cdot\sin\angle MON=6\cdot\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB\cdot\sin\angle MON=6S_{\triangle ABO}$，故 C 正确；由 O 是△MND 的重心，得 $S_{\triangle OMN}=S_{\triangle OMD}=S_{\triangle OND}=\frac{1}{3}S_{\triangle MDN}$，故 D 正确.故选BCD.

12.AD　**提示**：以线段 AB 所在直线为 x 轴，线段 AB 的垂直平分线为 y 轴，建立平面直角坐标系，设 $P(2\cos\theta,2\sin\theta)$，$\theta\in[0,\pi]$，因为 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，$E(2,2)$，$C(2,4)$，所以 $\overrightarrow{AP}=(2\cos\theta+2,2\sin\theta)$，$\overrightarrow{AB}=(4,0)$，$\overrightarrow{AE}=(4,2)$，因为 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AE}$，即 $(2\cos\theta+2,2\sin\theta)=\lambda\cdot(4,0)+\mu(4,2)$，所以 $\begin{cases}2\cos\theta+2=4\lambda+4\mu,\\2\sin\theta=2\mu,\end{cases}$ 解得 $\mu=\sin\theta$，$\lambda=\frac{\cos\theta-2\sin\theta+1}{2}$，因为 $\theta\in[0,\pi]$，则 $-1\leqslant\cos\theta\leqslant1$，$0\leqslant\sin\theta\leqslant1$，所以 $\mu\in[0,1]$，即 μ 的最大值为 1，故 A 正确；$\lambda=\frac{\cos\theta-2\sin\theta+1}{2}=\frac{\sqrt{5}\cos(\theta+\varphi)+1}{2}$，其中 $\cos\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\varphi$ 为锐角，所以当 $\theta=0$ 时，λ 取得最大值 1，故 C 错误；$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=(2\cos\theta+2,2\sin\theta)\cdot(4,0)=8\cos\theta+8\in[0,16]$，故 B 错误；$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=(2\cos\theta+2,2\sin\theta)\cdot(4,4)=8\sin\theta+8\cos\theta+8=8\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+8$，当 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1$，即 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}$ 取得最大值 $8\sqrt{2}+8$，故 D 正确.故选 AD.

三、填空题

13.$\frac{17}{6}$　**提示**：由题意，得 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2m-3,4)$，因为 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，所以 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=-3(2m-3)+8=0$，得 $m=\frac{17}{6}$.

14.4　**提示**：设 $\frac{2\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}=(1-t)\overrightarrow{AB}+2t\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$，则 $|\overrightarrow{AD}|=2$，$\overrightarrow{AE}=(1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AD}$，又 $t+(1-t)=1$，所以 B,D,E 三点共线，所以当 $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{BD}$ 时，$\left|(1-t)\overrightarrow{AB}+2t\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right|=|\overrightarrow{AE}|$ 取得最小值 $\sqrt{2}$，又 $|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{AD}|=2$，所以 $\angle BAC=90°$，所以 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=|\overrightarrow{BA}|^2=4$.

15.$\sqrt{3}$　**提示**：以 C 为坐标原点，以 CB,CA 所在直线分别为 x 轴，y 轴，建立平面直角坐标系，则 $C(0,0)$，$A(0,2)$，$B(2\sqrt{3},0)$，所以直线 AB 的方程为 $\frac{x}{2\sqrt{3}}+\frac{y}{2}=1$，设 $P(x,y)$，则 $y=2-\frac{x}{\sqrt{3}}$，$0\leqslant x\leqslant2\sqrt{3}$，$\overrightarrow{PB}=(2\sqrt{3}-x,-y)$，$\overrightarrow{PC}=(-x,-y)$，所以 $|\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|^2=(2\sqrt{3}-2x)^2+(2y)^2=4x^2+4\left(2-\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2-8\sqrt{3}x+12=\frac{16}{3}x^2-\frac{40\sqrt{3}}{3}x+28=\frac{16}{3}\left(x-\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2+3$，当 $x=\frac{5\sqrt{3}}{4}$ 时，$|\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|^2$ 取得最小值 3，所以 $|\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|$ 的最小值为 $\sqrt{3}$.

16.$\frac{2}{9}$，$1+\frac{2\sqrt{2}}{3}$　**提示**：因为 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，所以 $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})$，所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，又 $\overrightarrow{AD}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，且 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 不共线，则 $m=\frac{1}{3}$，$n=\frac{2}{3}$，$mn=\frac{2}{9}$. $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3\lambda}\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3\mu}\overrightarrow{AF}$，且 D,E,F 三点共线，所以 $\frac{1}{3\lambda}+\frac{2}{3\mu}=1$，且 $\lambda>0,\mu>0$，所以 $\lambda+\mu=\left(\frac{1}{3\lambda}+\frac{2}{3\mu}\right)\cdot(\lambda+\mu)=\frac{1}{3}+\frac{2\lambda}{3\mu}+\frac{\mu}{3\lambda}+\frac{2}{3}\geqslant1+2\sqrt{\frac{2\lambda}{3\mu}\cdot\frac{\mu}{3\lambda}}=1+\frac{2\sqrt{2}}{3}$，当且仅当 $\frac{2\lambda}{3\mu}=\frac{\mu}{3\lambda}$，即 $\mu=\sqrt{2}\lambda$ 时，取等号，所以 $\lambda+\mu$ 的最小值为 $1+\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

四、解答题

17.（1）**证明**：因为 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，所以 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}+3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=5(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=5\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 共线，又它们有公共点 B，所以 A,B,D 三点共线.

（2）**解**：因为 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 共线，所以存在实数 λ，使 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})$，即 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}+k\lambda\boldsymbol{b}$，则 $(k-\lambda)\boldsymbol{a}=(k\lambda-1)\boldsymbol{b}$.又 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个不共线的非零向量，所以 $k-\lambda=k\lambda-1=0$，所以 $k^2-1=0$，解得 $k=1$ 或 $k=-1$.

18.**解**：（1）由 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，得 $x-2\times3=0$，则 $x=6$，由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$，得 $1\times2+2y=0$，解得 $y=-1$，所以 $\boldsymbol{b}=(3,6)$，$\boldsymbol{c}=(2,-1)$.

（2）因为 $\boldsymbol{m}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-1,-2)$，$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=(3,1)$，所以 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=-5$，$|\boldsymbol{m}|=\sqrt{5}$，$|\boldsymbol{n}|=\sqrt{10}$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{-5}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以向量 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为 $\frac{3\pi}{4}$.

19.**解**：（1）$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DG}$，由 $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{DG}$，得 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$，因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，因为 E 是 AD 的中点，所以 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{EG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AD}$，所以 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{9}\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}^2$，因为 $|\overrightarrow{AD}|=\frac{2}{3}|\overrightarrow{AB}|$，所以 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}=\frac{1}{9}\times\frac{9}{4}\overrightarrow{AD}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}^2=0$，又 $\overrightarrow{EF}\neq\mathbf{0}$，$\overrightarrow{EG}\neq\mathbf{0}$，所以 $\angle FEG=90°$，所以 $\cos\angle FEG=0$.

（2）$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$，因为 $EB=\sqrt{2}$，$EC=2$，所以 $\overrightarrow{EB}^2=\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{AD}^2=2$，$\overrightarrow{EC}^2=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}^2=4$，两式相减，得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=1$，所以 $\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}^2=3$，因为 $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}=\left(\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}^2=1$，所以 $\overrightarrow{AB}^2=2$，$\overrightarrow{AD}^2=4$，所以 $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EC}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)+\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2=\frac{2}{3}\times2-\frac{1}{2}\times4=-\frac{2}{3}$.

20.**解**：（1）$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AC}+\mu\overrightarrow{BD}=\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\mu(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=(\lambda-\mu)\overrightarrow{AB}+(\lambda+\mu)\overrightarrow{AD}$，且 D,M,B 三点共线，所以 $\lambda-\mu+\lambda+\mu=1$，所以 $\lambda=\frac{1}{2}$. 设 $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AE}=k(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})=\frac{k}{2}\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AD}$，且 $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{1}{2}+\mu\right)\overrightarrow{AD}$，所以 $\begin{cases}\frac{1}{2}-\mu=\frac{k}{2},\\\frac{1}{2}+\mu=k,\end{cases}$ 解得 $\mu=\frac{1}{6}$.

（2）设 $\overrightarrow{BP}=t\overrightarrow{BC}=t\overrightarrow{AD}$，$0\leqslant t\leqslant1$，$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AD}$，因为 $|\overrightarrow{AB}|=4$，$|\overrightarrow{AD}|=2$，且 $\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\rangle=\frac{\pi}{3}$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=4\times2\times\frac{1}{2}=4$，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AE}=(\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AD})\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2+t\overrightarrow{AD}^2+\left(\frac{t}{2}+1\right)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=8+4t+4\left(\frac{t}{2}+1\right)=6t+12$，因为 $0\leqslant t\leqslant1$，$12\leqslant6t+12\leqslant18$，所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AE}$ 的取值范围为 $[12,18]$.

21.**解**：（1）因为点 E 为边 AC 中点，AD 与 BE 交于点 P，且 $\overrightarrow{BP}=4\overrightarrow{PE}$，所以 $\overrightarrow{BP}=\frac{4}{5}\overrightarrow{BE}=\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$，又点 D 为边 BC 上一点，所以存在实数 t，使得 $\overrightarrow{BC}=t\overrightarrow{BD}$，所以 $\overrightarrow{BP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BA}=\frac{2}{5}t\overrightarrow{BD}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$，因为 A,P,D 三点共线，所以 $\frac{2}{5}t+\frac{2}{5}=1$，则 $t=\frac{3}{2}$，即 $\overrightarrow{BC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BD}$，所以 $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$，整理得 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，又 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，所以 $x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{2}{3}$，所以 $y-x=\frac{1}{3}$.

（2）取 AB 的中点 F，连接 OE,OF，则 $OF\perp AB$，$OE\perp AC$，所以 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FO})\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{FO}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$，$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2$，因为 $|AB|=|AC|=2$，所以由（1）知 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{3}|\overrightarrow{AC}|^2=\frac{4}{6}+\frac{4}{3}=2$，所以 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD}$ 是定值 2.

22.**解**：（1）因为 $\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}=\frac{1}{2}$，即 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AD}\cdot(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(4|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2)=0$.

（2）因为点 E 为 BC 的中点，设 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 θ，所以 $\frac{1}{|\overrightarrow{AE}|^2}+\frac{1}{|\overrightarrow{BC}|^2}=\frac{4}{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2}+\frac{1}{(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})^2}=\frac{4}{5+4\cos\theta}+\frac{1}{5-4\cos\theta}=\frac{1}{10}(5+4\cos\theta+5-4\cos\theta)\cdot\left(\frac{4}{5+4\cos\theta}+\frac{1}{5-4\cos\theta}\right)=\frac{1}{10}\left[5+\frac{5+4\cos\theta}{5-4\cos\theta}+\frac{4(5-4\cos\theta)}{5+4\cos\theta}\right]\geqslant\frac{1}{10}\times(5+4)=\frac{9}{10}$.当且仅当 $5+4\cos\theta=2(5-4\cos\theta)$，即 $\cos\theta=\frac{5}{12}$ 时，等号成立，此时△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}\times1\times2\times\sqrt{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2}=\frac{\sqrt{119}}{12}$.

第 11 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A　**提示**：因为 $a=2\sqrt{2}$，$b=2$，$A=\frac{\pi}{4}$，所以由正弦定理，得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{1}{2}$，又 $b<a$，所以 $B<A=\frac{\pi}{4}$，所以 $B=\frac{\pi}{6}$.故选 A.

2.D　**提示**：因为 $a\cos B+b\cos A=2c\cos C$，由正弦定理，得 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin C\cos C$，所以 $\sin(A+B)=2\sin C\cos C$，因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin C=2\sin C\cos C$，所以 $\cos C=\frac{1}{2}$，又 $a=1,b=4$，由余弦定理，得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C=13$，所以 $c=\sqrt{13}$.故选 D.

3.B　**提示**：由 $A=45°$，$B=105°$，得 $C=180°-45°-105°=30°$，由正弦定理，得 $\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$，则 $c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{10\sqrt{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=10$，又 $\sin B=\sin105°=\sin(45°+60°)=\sin45°\cdot\cos60°+\cos45°\sin60°=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times10\sqrt{2}\times10\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}=25(1+\sqrt{3})$.故选 B.

4.C　**提示**：因为 $a^2+b^2+c^2=2bc\cos A+2ac\cos B$，所以由余弦定理的推论，得 $a^2+b^2+c^2=2bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+2ac\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，所以 $a^2+b^2+c^2=2c^2$，即 $a^2+b^2=c^2$，则 $\angle C=\frac{\pi}{2}$，所以△ABC 一定是直角三角形.故选C.

5.B　**提示**：因为△ABC 的面积为 $4\sqrt{3}$，$A=60°$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc=4\sqrt{3}$，则 $bc=16$，又 $b^2+c^2=3bc$，所以 $b^2+c^2=48$，又 $A=60°$，所以 $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A=48-2\times16\times\frac{1}{2}=32$，解得 $a=4\sqrt{2}$（舍去负值）.故选B.

6.B　**提示**：因为 $a\sin A+b\sin B-c\sin C=4b\sin B\cos C$，由正弦定理，得 $a^2+b^2-c^2=4b^2\cos C$，由余弦定理的推论，得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，所以 $a^2+b^2-c^2=4b^2\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，因为△$ABC$ 不是直角三角形，所以 $a^2+b^2-c^2\neq0$，则 $a=2b$.因为 CD 是角 C 的内角平分线，所以 $\frac{BD}{DA}=\frac{CB}{CA}=2$.设 $AD=m$，$BD=2m$，由 $\cos\angle CDB+\cos\angle CDA=0$，即 $\frac{b^2+4m^2-4b^2}{2b\cdot2m}+\frac{b^2+m^2-b^2}{2bm}=0$，得 $m=\frac{\sqrt{2}b}{2}$，所以 $AB=3m=\frac{3\sqrt{2}b}{2}$，在△$ABC$ 中，由余弦定理的推论，得 $\cos C=\frac{BC^2+AC^2-BA^2}{2AC\cdot BC}=\frac{4b^2+b^2-\frac{9}{2}b^2}{2\cdot2b\cdot b}=\frac{1}{8}$，则 $\sin C=\frac{3\sqrt{7}}{8}$，所以 $\tan C=3\sqrt{7}$.故选 B.

7.C　**提示**：由题意，得 $RO=\sqrt{5}$，$OQ=1$，所以 $QR=2$，所以 $\cos\alpha=\sin\angle QOR=\frac{2}{\sqrt{5}}$.在△$RAO$ 中，由正弦定理及 $\frac{\sin RAO}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，得 $\frac{OR}{RA}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，所以 $RA=2$，由余弦定理的推论，得 $\cos\alpha=\frac{OR^2+OA^2-RA^2}{2OR\cdot OA}$，即 $\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{5+OA^2-4}{2\sqrt{5}\cdot OA}$，解得 $OA=2+\sqrt{3}$ 或 $OA=2-\sqrt{3}$（舍去），又 $ON=1$，所以 $NA=OA-ON=1+\sqrt{3}$.故选 C.

8.C　**提示**：因为 $-\frac{\cos B}{\cos C}=\frac{2a+b}{c}$，由正弦定理，得 $-\frac{\cos B}{\cos C}=\frac{2\sin A+\sin B}{\sin C}$，所以 $-\cos B\sin C=2\sin A\cos C+\sin B\cdot\cos C$，所以 $-2\sin A\cos C=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\sin(B+C)=\sin A$，因为 $\sin A>0$，所以 $\cos C=-\frac{1}{2}$，又 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{2\pi}{3}$，$A+B=\frac{\pi}{3}$，所以 $\frac{a+b}{c}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\sin A+\sin\left(\frac{\pi}{3}-A\right)\right]=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A-\frac{1}{2}\sin A\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)$，因为 $A\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $A+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，所以 $\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，所以 $\frac{a+b}{c}\in\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$.故选 C.

二、多项选择题

9.AB　**提示**：由题意结合正弦定理，得 $\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{3\times\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 因为 $c>b$，$0°<C<180°$，所以 $C=60°$ 或 $C=120°$.当 $C=60°$ 时，$A=180°-C-B=90°$，此时 $a^2=b^2+c^2=12$，则 $a=2\sqrt{3}$；当 $C=120°$ 时，$A=180°-C-B=30°=B$，则 $a=b=\sqrt{3}$.综上，$a=2\sqrt{3}$ 或 $a=\sqrt{3}$.故选 AB.

10.BC　**提示**：由 $\cos C=\frac{\sqrt{2}}{10}$，得 $\sin C=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，$C$ 为锐角，因为 $a=4$，$\sin A=\frac{4}{5}$，结合正弦定理，得 $c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{7\sqrt{2}}{2}>a=4$，所以 $C>A$，所以 A 是锐角，则 $\cos A=\frac{3}{5}$，又 $a^2+b^2-2ab\cos C=c^2$，即 $16+b^2-\frac{4\sqrt{2}}{5}b=\frac{49}{2}$，整理得 $10b^2-8\sqrt{2}b-85=0$，解得 $b=\frac{5\sqrt{2}}{2}$（舍去负值），则 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{16+\frac{49}{2}-\frac{25}{2}}{2\times4\times\frac{7}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$，所以，△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\frac{5\sqrt{2}}{2}\times\frac{7\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{5}=7$，故 A，D 错误，B，C 正确.故选 BC.

11.ACD　**提示**：对于 A，若 $A=45°$，$a=2$，$b=2\sqrt{2}$，则由正弦定理，得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，即 $\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin B}$，得 $\sin B=1$，又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=90°$，即△ABC 只有一解，故 A 正确；对于 B，若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}>0$，则 $\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\rangle>0$，则 $\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\rangle$ 为锐角，即 A 为锐角，但角 B,C 未知，所以不能判断△ABC 为锐角三角形，故 B 错误；对于 C，若 $\sin A>\sin B$，则由正弦定理，得 $a>b$，故 C 正确；对于 D，若 $a-b=c\cos B-c\cos A$，则 $a-b=c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-c\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，即 $2ab(a-b)=b(a^2+c^2-b^2)-a(b^2+c^2-a^2)$，化简得 $(a-b)\cdot(a^2+b^2-c^2)=0$，所以 $a=b$ 或 $c^2=a^2+b^2$，所以△ABC 为等腰三角形或直角三角形，故 D 正确.故选 ACD.

12.ABD　**提示**：因为 $\sin A:\sin B:\sin C=2:3:\sqrt{7}$，所以 $a:b:c=2:3:\sqrt{7}$，设 $a=2t,b=3t,c=\sqrt{7}t,t>0$，由余弦定理的推论，得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{4t^2+9t^2-7t^2}{12t^2}=\frac{1}{2}$，又 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$，所以 $A+B=\frac{2\pi}{3}$，则 $A+B=2C$，故 B 正确；因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，所以 $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot2t\cdot3t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，解得 $t=1$，所以 $a=2,b=3,c=\sqrt{7}$，所以△ABC 的周长为 $5+\sqrt{7}$，故 A 正确；由正弦定理，得 $\frac{c}{\sin C}=\frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$，则△$ABC$ 外接圆半径为 $\frac{\sqrt{21}}{3}$，故 C 错误；在△ABC 中，由正弦定理，得 $\frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sin A}$，解得 $\sin A=\frac{\sqrt{21}}{7}$，所以 $\cos A=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，又 $AD=\frac{1}{2}c=\frac{\sqrt{7}}{2}$，在△$ADC$ 中，由余弦定理，得 $CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cdot\cos A=9+\frac{7}{4}-2\times3\times\frac{\sqrt{7}}{2}\times\frac{2\sqrt{7}}{7}=\frac{19}{4}$，则 $CD=\frac{\sqrt{19}}{2}$，故 D 正确.故选 ABD.

三、填空题

13.$\frac{\pi}{4}$　**提示**：因为 $b^2+c^2-a^2=4$，结合余弦定理，可得 $2bc\cos A=4>0$，所以 A 为锐角，又 $\frac{1}{2}bc\sin A=1$，所以 $bc\sin A=2$，则 $\tan A=1$，所以 $A=\frac{\pi}{4}$.

14.4　**提示**：因为 $a\cos B+b\cos A-2c\cos C=0$，由正弦定理，得 $\sin A\cos B+\sin B\cos A-2\sin C\cos C=0$，所以 $\sin(A+B)-2\sin C\cos C=0$，因为 $A+B=\pi-C$，所以 $\sin(A+B)=\sin C$，所以 $\sin C-2\sin C\cos C=0$，所以 $\sin C(1-2\cos C)=0$，因为 $\sin C>0$，所以 $\cos C=\frac{1}{2}$，因为 $c=2\sqrt{3}$，$a=2$，所以由余弦定理，得 $12=4+b^2-2\times2\times b\times\frac{1}{2}$，即 $b^2-2b-8=0$，解得 $b=4$ 或 $b=-2$（舍去）.

15.$\frac{9\sqrt{3}}{4}$　**提示**：因为 $a\cos C+c\cos A=3$，所以由余弦定理得推论，得 $a\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=3$，解得 $b=3$，因为 $a^2+c^2=9+ac$，所以 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=9+ac-2ac\cdot\cos B=9$，则 $\cos B=\frac{1}{2}$，又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$，则 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac\geqslant2ac-ac=ac$，即 $ac\leqslant9$，当且仅当 $a=c=3$ 时，等号成立，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B\leqslant\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

16.$100\sqrt{15}$　**提示**：由题意，得 $\angle DCB=30°$，$\angle CDB=60°$，所以 $\angle CBD=90°$，又 $CD=600$m，在 Rt△CBD 中，$BD=\frac{1}{2}CD=300$m，$BC=\frac{\sqrt{3}}{2}CD=300\sqrt{3}$ m，又 $\angle DCA=75°$，$\angle CDA=45°$，所以 $\angle CAD=60°$，在△ACD 中，由正弦定理，得 $\frac{AC}{\sin45°}=\frac{CD}{\sin60°}$，所以 $AC=\frac{2\times600}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=200\sqrt{6}$ m，在△ABC 中，$\angle ACB=\angle ACD-\angle BCD=75°-30°=45°$，由余弦定理，得 $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB=(200\sqrt{6})^2+(300\sqrt{3})^2-2\times200\sqrt{6}\times300\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=150\,000$，所以 $AB=100\sqrt{15}$m.

四、解答题

17.**解**：（1）因为 $a=1$，$c=\sqrt{3}$，$C=\frac{\pi}{3}$，由正弦定理，得 $\sin A=\frac{a\sin C}{c}=\frac{1\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$，又 $a<c$，所以 $A<C$，所以 $A=\frac{\pi}{6}$.

（2）因为 $a=1$，$c=\sqrt{3}$，$A=\frac{\pi}{6}$，由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $b^2-3b+2=0$，解得 $b=1$ 或 $b=2$.

18.（1）**证明**：因为 $b\sin B-a\sin A=\sin C(2b\cos2B-c)$，由正弦定理，得 $b^2-a^2=c(2b\cos2B-c)=2bc\cos2B-c^2$，所以 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos2B$，即 $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\cos2B$，所以 $\cos A=$