∴$\angle MBQ=\angle CBQ$.

(3)由折叠的性质可得$DF=CF=4$cm,$AP=PM$.

∵Rt△BCQ≌Rt△BMQ,

∴$CQ=MQ$.

当点Q在线段CF上时,

∵$FQ=1$cm,

∴$MQ=CQ=3$cm,$DQ=5$cm.

∵$PQ^2=PD^2+DQ^2$,

∴$(AP+3)^2=(8-AP)^2+5^2$.

解得$AP=\frac{40}{11}$.

当点Q在线段DF上时,

∵$FQ=1$cm,

∴$MQ=CQ=5$cm,$DQ=3$cm.

∵$PQ^2=PD^2+DQ^2$,

∴$(AP+5)^2=(8-AP)^2+3^2$.

解得$AP=\frac{24}{13}$.

综上所述:AP的长为$\frac{40}{11}$ cm或$\frac{24}{13}$ cm.

第40期

4版

专项训练(十九)

一、选择题

1.D 2.D 3.B 4.D 5.D

二、填空题

6.$-3\leqslant x\leqslant 1$ 7.2 8.$\frac{27}{2}$

9.121 10.48

三、解答题

11.解:(1)∵点$A(a,2)$在反比例函数$y=\frac{4}{x}$的图象上,

∴$2=\frac{4}{a}$.解得$a=2$.

∴$A(2,2)$.

设直线OA的解析式为$y=mx$.

则$2=2m$.解得$m=1$.

∴直线OA的解析式为$y=x$.

(2)由(1),知$A(2,2)$.

∵$AB\parallel x$轴,且交y轴于点C,

∴$AC=2$.

∵$AC=2BC$,

∴$BC=1$.

∴$B(-1,2)$.

把$B(-1,2)$代入$y=\frac{k}{x}$,得$2=\frac{k}{-1}$.

解得$k=-2$.

∴反比例函数$y=\frac{k}{x}$的解析式为$y=-\frac{2}{x}$.

(3)设$D\left(t,-\frac{2}{t}\right)$.

∵$A(2,2)$,

∴AD的中点E的坐标为$\left(\frac{t+2}{2},-\frac{1}{t}+1\right)$.

∵点E在y轴上,

∴$\frac{t+2}{2}=0$.解得$t=-2$.

∴$D(-2,1)$,$E\left(0,\frac{3}{2}\right)$.

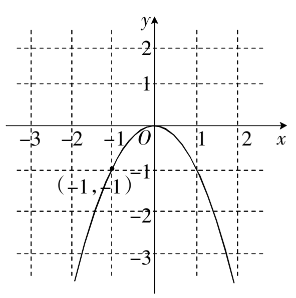
∴$S_{\triangle DOE}=\frac{1}{2}OE\cdot|x_D|=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times 2=\frac{3}{2}$,$S_{\triangle AOE}=\frac{1}{2}OE\cdot|x_A|=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times 2=\frac{3}{2}$.

∴△OAD的面积$S=S_{\triangle DOE}+S_{\triangle AOE}=3$.

12.解:$y=-x^2$(答案不唯一).

【观察发现】

如图.



(第12题图)

【思考交流】

我不认同他们的说法.理由如下:

设抛物线的解析式为$y=ax^2+bx+c$,则抛物线的对称轴为$x=-\frac{b}{2a}$.

由题意知,$a<0$,

∴抛物线的对称轴可以在y轴的左侧,也可以在y轴的右侧,或者是y轴.

例如:$y=-x^2$,对称轴为y轴.

∴小亮的说法不正确.

∵抛物线$y=-2(x+2)^2+1$经过点$(-1,-1)$,且不经过第一象限,与x轴有两个交点,

∴小莹的说法不正确.

【概括表达】

设抛物线的解析式为$y=ax^2+bx+c$.

∵抛物线经过点$(-1,-1)$,且不经过第一象限,

∴$a-b+c=-1$且$a<0$.

①当对称轴在y轴右侧时,即$b>0$,此时顶点在x轴上或x轴下方,

∴$\begin{cases}a<0,\\ b^2-4ac\leqslant 0,\\ a-b+c=-1.\end{cases}$

∴$b^2-4ab+4a^2+4a\leqslant 0$.

将不等式看作关于b的不等式,则有$\Delta=16a^2-16a^2-16a=-16a>0$.

∴$2a-2\sqrt{-a}\leqslant b\leqslant 2a+2\sqrt{-a}$.

∴$0<b\leqslant 2a+2\sqrt{-a}$.

令$\sqrt{-a}=t$,则$2a+2\sqrt{-a}=-2t^2+2t=-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$.

∵$t\geqslant 0$,

∴当$t=\frac{1}{2}$时,$2a+2\sqrt{-a}$最大,且最大值为$\frac{1}{2}$.

∴$0<b\leqslant\frac{1}{2}$.

②当对称轴在y轴左侧或为y轴时,$b\leqslant 0$,只需保证与y轴交点在x轴上或x轴下方,

∴$c\leqslant 0$.

综上所述:当$b>0$时,$a<0$,$0<b\leqslant\frac{1}{2}$,$a-b+c=-1$;当$b\leqslant 0$时,$c\leqslant 0$,$a-b+c=-1$.

第37期

1版

专项训练(十五)

一、选择题

1.C 2.C 3.B 4.B 5.C

二、填空题

6.3 7.$9\sqrt{3}$ 8.$\frac{\sqrt{5}}{2}\pi$

9.5 10.$\frac{42}{5}$或$\frac{19}{2}$或9

三、解答题

11.解:(1)如图①,连接BP.

∵四边形$ABCD$是平行四边形,

∴$AD=BC$,$AD\parallel BC$.

∴$\angle ADC+\angle C=180°$.

∴$\angle ADC=180°-45°=135°$.

∵$AD=BD$,∴$BD=BC$.

∴$\angle BDC=\angle C=45°$.

∴△BDC是等腰直角三角形.

∵点P为CD的中点,

∴$DP=BP$,$\angle DPB=90°$.

∴$\angle DBP=45°$.

∴$\angle ADP=\angle PBE=135°$.

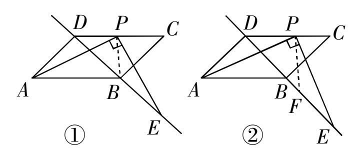
∵$PA\perp PE$,

∴$\angle APE=\angle DPB=90°$.

∴$\angle APD=\angle EPB$.

∴△ADP≌△EBP(ASA).

∴$PA=PE$.



(第11题图)

(2)证明:如图②,过点P作$PF\perp CD$交DE于点F.

∵$PF\perp CD$,$EP\perp AP$,

∴$\angle DPF=\angle APE=90°$.

∴$\angle DPA=\angle FPE$.

∵四边形$ABCD$是平行四边形,

∴$\angle DAB=\angle C=45°$,$AB\parallel CD$.

又∵$AD=BD$,

∴$\angle DAB=\angle DBA=\angle C=\angle CDB=45°$.

∴$\angle ADB=\angle DBC=90°$.

∴$\angle PFD=45°$.

∴$\angle PFD=\angle PDF$.

∴$PD=PF$.

易得$\angle PDA=\angle PFE=135°$.

∴△ADP≌△EFP(ASA).

∴$AD=EF$.

在Rt△FDP中,$\angle PDF=45°$,$\angle DPF=90°$,

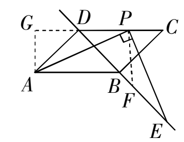
∴△DPF是等腰直角三角形.

∴$DF=\sqrt{2}DP$.

∵$DE=DF+EF$,

∴$DA+\sqrt{2}DP=DE$.

(3)当点P在线段CD上时,如图③,作$AG\perp CD$,交CD的延长线于点G.



(第11题图③)

则△ADG是等腰直角三角形.

∵$AD=3\sqrt{2}$,

∴$AG=DG=3$.

∵$AP=5$,

∴$GP=4$.

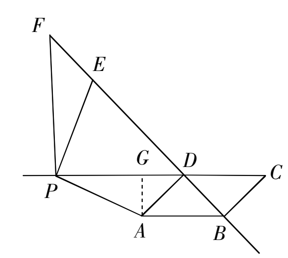
∴$PD=1$.

由(2)得,$DA+\sqrt{2}DP=DE$.

∴$DE=3\sqrt{2}+\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.

∴$BE=DE-BD=4\sqrt{2}-3\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

当点P在CD的延长线上时,如图④,作$AG\perp CD$,交CD的延长线于点G.



(第11题图④)

同理可得△ADP≌△EFP.

∴$AD=EF$.

∵$PD=PG+DG=4+3=7$,

∴$DF=\sqrt{2}PD=7\sqrt{2}$.

∴$BE=BD+DF-EF=DF=7\sqrt{2}$.

综上,BE的长为$\sqrt{2}$或$7\sqrt{2}$.

4版

专项训练(十六)

一、选择题

1.B 2.A 3.C 4.B 5.C

二、填空题

6.$\sqrt{2}$

7.答案不唯一,如$AB=AD$

8.$\frac{12}{5}$

9.3或-7

10.3或$\frac{6\sqrt{13}}{13}$

三、解答题

11.解:(1)$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(2)∵$\angle BAD=45°$,$BA=BM$,

∴△AMB是等腰直角三角形.

∴$\angle MBC=\angle AMB=45°$.

∵$EF\parallel BM$,

∴$\angle FEM=\angle AMB=45°$.

∴$\angle AEB=\angle FEB=\frac{1}{2}(180°+45°)=112.5°$.

∴$\angle ABE=180°-\angle AEB-\angle BAE=22.5°$.

∵$\frac{AD}{AN}=m$,△AMB是等腰直角三角形,AN为BC边上的高,

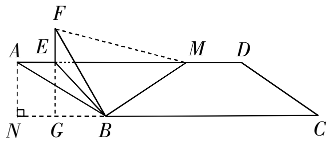
∴$AN=\frac{1}{2}AM$.

∵点M在AD边上,

∴当$AD=AM$时,m取得最小值,最小值为$\frac{AM}{AN}=2$.

(3)如图①,连接FM,延长FE交NC于点G.

⑩



(第 11 题图①)

∵$\angle BAD=30°$,∴$\angle ABN=30°$.

设 $AN=a$,则 $AB=2a$,$NB=\sqrt{3}a$.

∵$EF\perp AD$,

∴$\angle AEB=\angle FEB=\frac{1}{2}(180°+90°)=135°$.

∵$\angle EAB=30°$,

∴$\angle ABE=15°$.

∴$\angle ABF=30°$.

∵$AB=BM$,$\angle BAD=30°$,

∴$\angle ABM=120°$.

∴$\angle FBM=90°$.

在 Rt△FBM 中,$FB=AB=BM$,

∴$FM=\sqrt{2}FB=2\sqrt{2}a$.

∵$\angle EBG=\angle ABE+\angle ABN=45°$,

∴$GB=EG=a$.

∵$NB=\sqrt{3}a$,

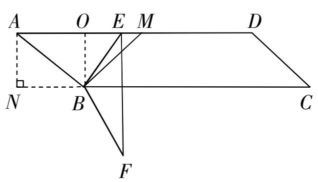
∴$NG=AE=EF=MD=(\sqrt{3}-1)a$.

在 Rt△EFM 中,$EM=\sqrt{FM^2-EF^2}=(\sqrt{3}+1)a$,

∴$AD=AE+EM+MD=2AE+EM=(3\sqrt{3}-1)a$.

∴$m=\frac{AD}{AN}=3\sqrt{3}-1$.

同理,当点 F 落在 BC 下方时,如图②.



(第 11 题图②)

可求得 $AD=(3\sqrt{3}+1)a$.

∴$m=\frac{AD}{AN}=3\sqrt{3}+1$.

综上,m 的值为 $3\sqrt{3}-1$ 或 $3\sqrt{3}+1$.

12.解:(1)把 $A(-1,0)$,$B(4,0)$ 代入 $y=ax^2+bx+4$,

得 $\begin{cases}a-b+4=0,\\16a+4b+4=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=3.\end{cases}$

∴抛物线的解析式为 $y=-x^2+3x+4$.

(2)在 $y=-x^2+3x+4$ 中,令 $x=0$,得 $y=4$.

∴$C(0,4)$.

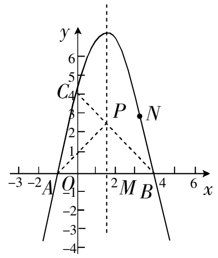
设直线 BC 的解析式为 $y=kx+m$.

把 $B(4,0)$,$C(0,4)$ 代入,

得 $\begin{cases}4k+m=0,\\m=4.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\m=4.\end{cases}$

∴直线 BC 的解析式为 $y=-x+4$.

(3)如图①.



(第 12 题图①)

由题意,得点 A,B 关于抛物线的对称轴直线 $x=\frac{3}{2}$ 对称,连接 BC 交直线 $x=\frac{3}{2}$ 于点 P,连接 PA.此时 $PA+PC$ 的值最小,最小值为线段 BC 的长 $=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$.

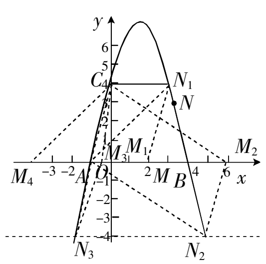
当 $x=\frac{3}{2}$ 时,$y=-\frac{3}{2}+4=\frac{5}{2}$.

∴此时 $P\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$.

(4)在抛物线上存在一点 N,使得以 A,C,M,N 四点为顶点的四边形是平行四边形.

理由:如图②.

观察图象可知,满足条件的点 N 的纵坐标为 4 或 −4.



(第 12 题图②)

对于抛物线 $y=-x^2+3x+4$,当 $y=4$ 时,$-x^2+3x+4=4$.解得 $x_1=0$,$x_2=3$.

∴$N_1(3,4)$.

当 $y=-4$ 时,$-x^2+3x+4=-4$.

解得 $x=\frac{3\pm\sqrt{41}}{2}$.

∴$N_2\left(\frac{3+\sqrt{41}}{2},-4\right)$,

$N_3\left(\frac{3-\sqrt{41}}{2},-4\right)$.

综上所述,满足条件的点 N 的坐标为 $(3,4)$ 或 $\left(\frac{3+\sqrt{41}}{2},-4\right)$ 或 $\left(\frac{3-\sqrt{41}}{2},-4\right)$.

第 38 期

4 版

专项训练(十七)

一、选择题

1.B 2.C 3.B 4.B

二、填空题

5.$\sqrt{13}$ 6.$-\frac{1}{2}$ 7.$3\sqrt{15}$

8.$\frac{1}{4}$ 或 $\frac{3}{2}$

三、解答题

9.解:【类比探究】过点 E 作 $EF\perp CD$ 于点 F,连接 AF.

∵四边形 $ABCD$ 是正方形,

∴$AD=CD=4$,$\angle ADC=90°$.

∵$DE=CE$,$EF\perp CD$,

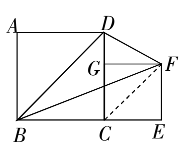
∴$DF=CF=\frac{1}{2}CD=2$,$\angle EFD=\angle ADC=90°$.

∴$AD\parallel EF$.

∴$S_{\triangle ADE}=S_{\triangle ADF}$.

∴$S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot DF=\frac{1}{2}\times4\times2=4$.

【拓展应用】如图,连接 CF.



(第 9 题图)

∵四边形 $ABCD$ 和四边形 $CEFG$ 都是正方形,

∴$\angle BDC=45°$,$\angle GCF=45°$.

∴$\angle BDC=\angle GCF$.

∴$BD\parallel CF$.

∴$S_{\triangle BDF}=S_{\triangle BCD}$.

∵$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot CD=\frac{1}{2}\times4\times4=8$,

∴$S_{\triangle BDF}=8$.

10.解:(1)①2.

提示:如图①,设圆心为 O,连接 BO,CO.

∵$\angle BAC=30°$,∴$\angle BOC=60°$.

又 $OB=OC$,

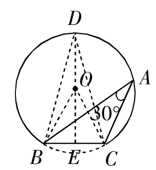
∴△OBC 是等边三角形.

∴$OB=OC=BC=2$,即半径长为 2.

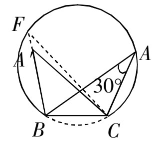
②$\sqrt{3}+2$.

提示:∵$BC=2$,∴当点 A 到 BC 的距离最大时,△ABC 的面积最大.如图①,过点 O 作 BC 的垂线,垂足为 E,延长 EO 交⊙O 于点 D,则 $OE=\sqrt{3}$,$DE=OE+OD=\sqrt{3}+2$.

∴△ABC 面积的最大值 $=S_{\triangle DBC}=\frac{1}{2}BC\cdot DE=\frac{1}{2}\times2\times(\sqrt{3}+2)=\sqrt{3}+2$.



(第 10 题图①)



(第 10 题图②)

(2)证明:如图②,延长 BA' 交圆于点 F,连接 CF.

∵点 F 在圆上,

∴$\angle F=\angle A=30°$.

∵$\angle BA'C=\angle F+\angle A'CF$,

∴$\angle BA'C>\angle F$.

∴$\angle BA'C>\angle A$,即 $\angle BA'C>30°$.

(3)①$\frac{\sqrt{97}-5}{2}$.

提示:如图③,取 BC 的中点 G,连接 DG,则 $GC=\frac{3}{2}$.

∵$\angle GCD=90°$,$CD=AB=2$,

∴$\tan\angle DGC=\frac{CD}{GC}=\frac{4}{3}$.

设 DG 的中点为 Q,以点 Q 为圆心,DQ 为半径画圆,则点 P 在优弧 CGD 上运动.连接 BQ 交⊙Q 交于点 P',则 BP 的最小值是 BP' 的长.

过点 Q 作 $QE\perp BC$,垂足为 E,则 $GE=CE=\frac{1}{2}GC=\frac{3}{4}$,$QE=\frac{1}{2}CD=1$.

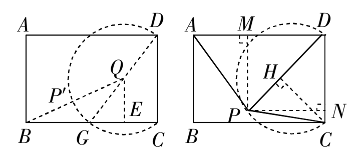
∴$BE=BC-CE=\frac{9}{4}$.

∴$BQ=\sqrt{BE^2+QE^2}=\frac{\sqrt{97}}{4}$.

∵$DG=\sqrt{CD^2+GC^2}=\frac{5}{2}$,

∴⊙Q 的半径 $=\frac{1}{2}DG=\frac{5}{4}$.

∴$BP'=BQ-P'Q=\frac{\sqrt{97}-5}{4}$,即线段 BP 长的最小值为 $\frac{\sqrt{97}-5}{4}$.



(第 10 题图③)(第 10 题图④)

②$\frac{7\sqrt{2}}{4}$.

提示:如图④,过点 P 分别作 AD,DC 的垂线,垂足为 M,N,过点 C 作 $CH\perp PD$ 于点 H.

∵$S_{\triangle PCD}=\frac{2}{3}S_{\triangle PAD}$,

∴$\frac{1}{2}CD\cdot PN=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}AD\cdot PM\right)$.

又 $CD=2$,$AD=3$,

∴$PN=PM$.

∴点 P 在 $\angle ADC$ 的平分线上.

∴$\angle CDH=45°$,△CHD 是等腰直角三角形,$HD=HC=\sqrt{2}$.

∴$PH=CH\div\tan\angle DPC=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

∴$PD=PH+HD=\frac{3\sqrt{2}}{4}+\sqrt{2}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$.

第 39 期

4 版

专项训练(十八)

一、选择题

1.D 2.C 3.A 4.C 5.B

二、填空题

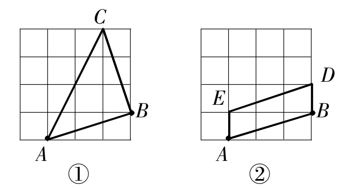
6.$\sqrt{2}+1$ 7.60° 8.$2\sqrt{5}$

9.$\sqrt{13}$ 10.$2\sqrt{13}-4$ 或 4

三、解答题

11.解:(1)如图①,△ABC 即为所求(答案不唯一).

(2)如图②,四边形 $ABDE$ 即为所求.



(第 11 题图)

12.解:(1)答案不唯一,如 $\angle EMB$ 或 $\angle CBM$ 或 $\angle ABP$ 或 $\angle PBM$.

(2)①15,15.

②$\angle MBQ=\angle CBQ$.理由如下:

∵四边形 $ABCD$ 是正方形,

∴$AB=BC$,$\angle BAD=\angle C=90°$.

由折叠可得:$AB=BM$,$\angle BAD=\angle BMP=90°$.

∴$BM=BC$,$\angle BMQ=\angle C=90°$.

又∵$BQ=BQ$,

∴Rt△BMQ≌Rt△BCQ(HL).