$\sqrt{3}c$,联立$\begin{cases}bc=\sqrt{3},\\ b=\sqrt{3}c,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3},\\ c=1,\end{cases}$所以椭圆$C$的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)由(1)得$F_2(1,0)$,设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,直线AB的方程为$x=my+1$,联立$\begin{cases}x=my+1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$得$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$,$\Delta=144(m^2+1)>0$,$y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}$,$y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$,又$\overrightarrow{F_1M}=\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B}$,所以四边形$AMBF_1$是平行四边形,设平行四边形$AMBF_1$的面积为$S$,则$S=2S_{\triangle ABF_1}=2\cdot\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_1-y_2|=\frac{24\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$.设$t=\sqrt{m^2+1}$,则$m^2=t^2-1(t\geqslant1)$,所以$S=\frac{24t}{3t^2+1}=\frac{24}{3t+\frac{1}{t}}$,因为$t\geqslant1$,对勾函数$y=3t+\frac{1}{t}$在$[1,+\infty)$上单调递增,所以$3t+\frac{1}{t}\geqslant4$,所以$S\in(0,6]$.所以四边形$AMBF_1$面积的取值范围为$(0,6]$.

21.**解**:(1)由题意,知$a-c=1$,$a+c=3$,解得$a=2$,$c=1$,则$b^2=a^2-c^2=3$,故椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)设点P,Q的坐标分别为(x_1,y_1),(x_2,y_2).①当直线PQ斜率不存在时,$k_1=-k_2$,又$k_1k_2=-\frac{1}{4}$,所以直线AP,AQ的方程分别为$y=\frac{1}{2}(x+2)$,$y=-\frac{1}{2}(x+2)$,与椭圆方程分别联立,得$P\left(1,\frac{3}{2}\right)$,$Q\left(1,-\frac{3}{2}\right)$,故直线$PQ$的方程为$x=1$.②当直线$PQ$的斜率存在时,设直线$PQ$的方程为$y=kx+m$,联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$得$(4k^2+3)x^2+8kmx+(4m^2-12)=0$,由$\Delta=48(4k^2-m^2+3)>0$,得$4k^2+3>m^2$,由韦达定理,得$x_1+x_2=-\frac{8km}{4k^2+3}$,$x_1x_2=\frac{4m^2-12}{4k^2+3}$,所以$k_1k_2=\frac{y_1y_2}{(x_1+2)(x_2+2)}=-\frac{1}{4}$,即$4y_1y_2+(x_1+2)\cdot(x_2+2)=0$,化简得$(4k^2+1)x_1x_2+(4km+2)(x_1+x_2)+4m^2+4=0$,所以$(4k^2+1)\cdot\frac{4m^2-12}{4k^2+3}-(4km+2)\cdot\frac{8km}{4k^2+3}+4m^2+4=0$,化简得$m^2-km-2k^2=0$,解得$m=2k$,或$m=-k$.当$m=2k$时,直线$PQ$的方程为$y=kx+2k$,即$y=k(x+2)$,过定点$(-2,0)$不符合题意;当$m=-k$时,直线$PQ$的方程为$y=kx-k$,即$y=k(x-1)$,过定点$(1,0)$,

综上,直线PQ过定点$(1,0)$.

22.**解**:(1)由题意,得$F_1(-1,0)$,因为直线l的斜率为1,所以直线l的方程为$y=x+1$,设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,联立$\begin{cases}y=x+1,\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$得$3x^2+4x=0$,所以$x_1+x_2=-\frac{4}{3}$,$y_1+y_2=\frac{2}{3}$,所以$M\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$,所以直线$OM$的斜率为$-\frac{1}{2}$.

(2)假设存在直线l,使得$|AM|^2=|CM||DM|$成立,由题意,直线l不与x轴重合,设直线l的方程为$x=my-1$,联立$\begin{cases}x=my-1,\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$得$(m^2+2)y^2-2my-1=0$.设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则$y_1+y_2=\frac{2m}{m^2+2}$,$y_1y_2=-\frac{1}{m^2+2}$,所以$|AB|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{2\sqrt{2}(m^2+1)}{m^2+2}$.又$x_1+x_2=m(y_1+y_2)-2=\frac{-4}{m^2+2}$,所以弦$AB$的中点$M$的坐标为$\left(\frac{-2}{m^2+2},\frac{m}{m^2+2}\right)$,故$CD$的方程为$y=-\frac{m}{2}x$.联立$\begin{cases}y=-\frac{m}{2}x,\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$得$x^2=\frac{4}{m^2+2}$,由对称性,设$C(x_0,y_0)$,$D(-x_0,-y_0)$,则$x_0^2=\frac{4}{m^2+2}$,所以$|CD|=\sqrt{1+\frac{m^2}{4}}\cdot|2x_0|=2\sqrt{\frac{m^2+4}{m^2+2}}$.因为$|AM|^2=|CM||DM|=(|OC|-|OM|)(|OD|+|OM|)$,且$|OC|=|OD|$,所以$|AM|^2=|OC|^2-|OM|^2$,故$\frac{|AB|^2}{4}=\frac{|CD|^2}{4}-|OM|^2$,即$|AB|^2=|CD|^2-4|OM|^2$,将$|AB|$,$|CD|$,$|OM|$代入上式,得$\frac{8(m^2+1)^2}{(m^2+2)^2}=\frac{4(m^2+4)}{m^2+2}-4\left[\frac{4}{(m^2+2)^2}+\frac{m^2}{(m^2+2)^2}\right]$,解得$m=\pm\sqrt{2}$.所以直线$l$的方程为$x=\pm\sqrt{2}y-1$,即$x\pm\sqrt{2}y+1=0$.

第 40 期

第2~3版专题检测

一、单项选择题

1.C **提示**:由题意,得高三年级被抽取的人数为$78\times\frac{1300}{1040+1040+1300}=78\times\frac{5}{13}=30$人.故选C.

2.D **提示**:因为$\left(2x+\frac{1}{x}\right)^n$展开式的各项系数和为729,所以$3^n=729$,解得$n=6$,所以$(2x-3)(x-1)^6$展开式中$x^3$的系数为$C_6^4(-1)^4\times2+C_6^3(-1)^3\times(-3)=90$.故选D.

3.C **提示**:由频率分布直方图,得这80名教师中年龄小于45岁的频率为$(0.040+0.080)\times5=0.6$,所以这80名教师中年龄小于45岁的人数为$0.6\times80=48$.故选C.

4.D **提示**:①4名小学生参与4项工作,则不同的安排方式有$A_4^4=24$种;②4名小学生参与3项工作,则不同的安排方式有$C_4^3C_4^2A_3^3=144$种;③4名小学生参与2项工作,则不同的安排方式有$C_4^2\frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}A_2^2=36$种.综上,不同的安排方式共有$24+144+36=204$种.故选D.

5.B **提示**:由题意,得估计该地区中学生每天睡眠时间的均值为$\frac{800}{1200+800}\times9+\frac{1200}{1200+800}\times8=8.4$(小时),则估计该地区中学生每天睡眠时间的方差为$\frac{800}{1200+800}\times[1+(9-8.4)^2]+\frac{1200}{1200+800}\times[0.5+(8-8.4)^2]=0.94$.故选B.

6.C **提示**:全年级6个班分为甲、乙两组,每组3个班,不同的分法有$\frac{C_6^3C_3^3}{A_2^2}A_2^2=20$种,则高一(1)班和高一(2)班恰好都在甲组的情况有$C_4^1C_3^3=4$种分法,所以所求概率$P=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$.故选C.

7.A **提示**:根据表中数据,得$\overline{X}=\frac{1}{5}\times(22+24+25+26+28)=25$,$\overline{Y}=\frac{1}{5}\times(17+19+20+23+26)=21$,所以样本点的中心为$(25,21)$,代入$Y=0.8X+\hat{a}$,得$0.8\times25+\hat{a}=21$,解得$\hat{a}=1$,所以$Y=0.8X+1$,当$X=31$时,$Y=25.8$.故选A.

8.A **提示**:设事件A_1,A_2,A_3分别为取得的这盒X光片是由甲厂、乙厂、丙厂生产的,事件B为"取得的X光片为次品",由题意,得$P(A_1)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$,$P(A_2)=\frac{3}{10}$,$P(A_3)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$,$P(B|A_1)=\frac{1}{10}$,$P(B|A_2)=\frac{1}{15}$,$P(B|A_3)=\frac{1}{20}$,由全概率公式,得$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{15}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{20}=0.08$.故选A.

二、多项选择题

9.BC **提示**:对于A,$A_{100}^{13}=100\times99\times98\times\cdots\times89\times88$,故A错误;对于B,h,e,r,o的全排列为$A_4^4=24$种,正确的有1种,则出现的错误共有$24-1=23$种,故B正确;对于C,10个朋友,两个人握手一次,一共握手$C_{10}^2=45$次,故C正确;对于D,老师手里有3张参观游园的门票分给7人中的3人,则不同的分法有$C_7^3=35$种,故D错误.故选BC.

10.AC **提示**:二项式$(1+\sqrt{x})^{2023}$的展开式的通项为$T_{r+1}=C_{2023}^r(\sqrt{x})^r$,该二项展开式中二项式系数和为$2^{2023}$,令$x=1$,得各项系数和为$(1+1)^{2023}=2^{2023}$,则二项展开式中二项式系数和与各项系数和相等,故A正确;由二项展开式的通项可知,当r为偶数时,对应的项为有理项,故B错误;该二项展开式中的常数项是$T_1=C_{2023}^0=1$,故C正确;该二项展开式中含x的项为$T_3=C_{2023}^2(\sqrt{x})^2=2023\times1011x$,系数是$2023\times1011$,故D错误.故选AC.

11.BCD **提示**:由题意,可得$P(A)=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$,$P(B)=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$,$P(AB)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$,故A错误;$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{2}{3}$,故B正确;$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{3}{5}$,故C正确;因为$P(AB)=P(A)P(B)$,所以事件$A$与事件$B$相互独立,故D正确.故选BCD.

12.ABD **提示**:对于A,该产品能销售的概率为$\left(1-\frac{1}{6}\right)\times\left(1-\frac{1}{10}\right)=\frac{3}{4}$,故A正确;对于B,由A项,得每件产品能销售的概率为$\frac{3}{4}$,一箱中有4件产品,则$\xi\sim B\left(4,\frac{3}{4}\right)$,故B正确;对于C,由题意,得$X=40\xi-80(4-\xi)=120\xi-320$,由$120\xi-320=40$,得$\xi=3$,所以$P(X=40)=P(\xi=3)=C_4^3\times\left(\frac{3}{4}\right)^3\times\frac{1}{4}=\frac{27}{64}$,故C错误;对于D,由$X=-80$,即$120\xi-320=-80$,得$\xi=2$,所以$P(X=-80)=P(\xi=2)=C_4^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{27}{128}$,故D正确.故选ABD.

三、填空题

13.47 **提示**:把这组数据按从小到大排序为10,18,21,29,30,35,37,41,53,76,因为$10\times80\%=8$,所以这组数据的第80百分位数是第8个和第9个数据的平均数,即$\frac{41+53}{2}=47$.

14.-2,560 **提示**:由题意,令$x=0$,得$a_0=1$,令$x=1$,则$a_0+a_1+\cdots+a_7=(1-2)^7=-1$,所以$a_1+a_2+\cdots+a_7=-1-1=-2$.因为$a_4$为二项式$(1-2x)^7$的展开式中含$x^4$的项的系数,所以$a_4=C_7^4\times(-2)^4=560$.

15.0.538,支持 **提示**:由表中数据可知$\chi^2=\frac{74\times(29\times5-33\times7)^2}{(29+33)\times(7+5)\times(29+7)\times(33+5)}\approx0.538<3.841$,所以没有足够把握认为学生在注意力的稳定性上与性别有关,即该实验支持该年龄段的学生在注意力的稳定性上对于性别没有显著差异.

16.$\frac{12}{125}$,$\frac{37}{32}$ **提示**:由题意,得甲击中的次数$X\sim B\left(3,\frac{4}{5}\right)$,所以甲三次射击恰好命中1次的概率为$C_3^1\times\frac{4}{5}\times\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{12}{125}$.设乙射击的次数为$\xi$,则$\xi$所有可能的取值为1,2,3,由题意,得$P(\xi=1)=\frac{7}{8}$,$P(\xi=2)=\frac{1}{8}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{32}$,$P(\xi=3)=\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$,乙射击次数的期望$E(\xi)=1\times\frac{7}{8}+2\times\frac{3}{32}+3\times\frac{1}{32}=\frac{37}{32}$.

四、解答题

17.**解**:(1)由频率分布直方图,得$(0.04+0.12+0.15+a+0.05)\times2=1$,解得$a=0.14$.

(2)依题意,得100名学生中参加实践活动的时间在$[6,10)$小时内的人数为$100\times(0.15+0.14)\times2=58$.

(3)由频率分布直方图,可知参加实践活动的时间在$[2,4)$内的频率为$0.04\times2=0.08$,在$[4,6)$内的频率为$0.12\times2=0.24$,在$[6,8)$内的频率为$0.15\times2=0.30$,所以中位数落在区间$[6,8)$内,中位数为$6+\frac{0.5-(0.08+0.24)}{0.15}=7.2$(小时),即这100名学生参加实践活动时间的中位数为7.2小时.这100名学生参加实践活动时间的平均数为$0.04\times2\times3+0.12\times2\times5+0.15\times2\times7+0.14\times2\times9+0.05\times2\times11=7.16$(小时).

18.**解**:(1)2×2列联表如下:

	天文爱好者	非天文爱好者	合计
女	20	30	50
男	35	15	50
合计	55	45	100

因为$\chi^2=\frac{100\times(20\times15-30\times35)^2}{50\times50\times55\times45}\approx9.091>7.879$,所以能在犯错误的概率不超过0.005的前提下认为"天文爱好者"或"非天文爱好者"与性别有关.

(2)抽取的5人中"天文爱好者"有$5\times\frac{20}{20+30}=2$(人),"非天文爱好者"有$5\times\frac{30}{20+30}=3$(人),所以其中至少有1人是"天文爱好者"的概率$P=1-\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{9}{10}$.

19.**解**:(1)甲、乙、丙三人共进行了3场比赛且丙获得冠军的情况有2种:①首先甲乙比赛,甲胜,然后甲丙比赛,丙胜,再由乙丙比赛,丙胜,概率为$P_1=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{15}$;

②首先甲乙比赛,乙胜,然后乙丙比赛,丙胜,再由甲丙比赛,丙胜,概率为$P_2=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{15}$,所以甲、乙、丙三人共进行了3场比赛且丙获得冠军的概率为$\frac{2}{15}+\frac{1}{15}=\frac{1}{5}$.

(2)甲和乙先赛且甲获得冠军的情况有2种:①甲胜乙,甲胜丙,概率为$P_3=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$;②乙胜甲,丙胜乙,甲胜丙,甲胜乙,概率为$P_4=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{15}$,所以甲和乙先赛且甲获得冠军的概率为$\frac{2}{5}+\frac{1}{15}=\frac{7}{15}$.

20.**解**:(1)该顾客实际付款金额为X元,则X的所有可能取值为0,500,700,800,所以$P(X=0)=\frac{C_1^1C_2^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{120}$,$P(X=500)=\frac{C_1^1C_2^1C_7^1}{C_{10}^3}=\frac{7}{60}$,$P(X=700)=\frac{C_1^1C_7^2}{C_{10}^3}=\frac{7}{40}$,$P(X=800)=\frac{C_9^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{10}$,

所以X的分布列为

X	0	500	700	800
P	$\frac{1}{120}$	$\frac{7}{60}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{7}{10}$

所以$E(X)=0\times\frac{1}{120}+500\times\frac{7}{60}+700\times\frac{7}{40}+800\times\frac{7}{10}=\frac{4445}{6}$,所以顾客实际付款金额的数学期望为$\frac{4445}{6}$元.

(2)设10名顾客中享受8折优惠的人数为Y人,则$Y\sim B\left(10,\frac{7}{10}\right)$,所以$E(Y)=10\times\frac{7}{10}=7$,售货员获得的提成为$Z$元,则$Z=40Y+20(10-Y)=20Y+200$,故$E(Z)=20E(Y)+200=20\times7+200=340$,所以该售货员可能获得的平均提成为340元.

21.**解**:(1)因为$\overline{x}=\frac{1}{5}\times(9+9.5+10+10.5+11)=10$,$\overline{y}=\frac{1}{5}\times(11+10+8+6+5)=8$,所以$\hat{b}=\frac{392-5\times10\times8}{502.5-5\times10^2}=-3.2$,$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=8-(-3.2)\times10=40$,所以$y$关于$x$的线性回归方程为$\hat{y}=-3.2x+40$.

(2)当$x=8$时,$\hat{y}=-3.2\times8+40=14.4$,则$|\hat{y}-y|=|14.4-14|=0.4<0.5$,故可以认为所得到的线性回归方程是理想的.

(3)设销售利润为W,所以$W=(x-2.5)(-3.2x+40)=-3.2x^2+48x-100=-3.2(x-7.5)^2+80$,当$x=7.5$时,$W$取得最大值,所以该配件的销售单价应定为7.5元时,才能获得最大利润.

22.**解**:(1)由频率分布直方图,得$\overline{x}=17\times0.02+18\times0.09+19\times0.22+20\times0.33+21\times0.24+22\times0.08+23\times0.02=20$,所以估计50位农民的年平均收入为20千元.

(2)由题意知$X\sim N(20,1.22^2)$,

(ⅰ)因为$P(X>\mu-\sigma)=\frac{1}{2}+\frac{0.6827}{2}\approx0.84135$,所以当$X\geqslant20-1.22=18.78$时,满足题意,即最低年收入标准大约为18.78千元.

(ⅱ)因为$P(X\geqslant17.56)=P(X\geqslant\mu-2\sigma)=0.5+\frac{0.9545}{2}\approx0.97725$,所以每个农民的年收入不少于17.56千元的概率为0.97725,记1000个农民的年收入不少于17.56千元的人数为ξ,则$\xi\sim B(1000,p)$,其中$p=0.97725$,所以恰好有k个农民的年收入不少于17.56千元的概率为$P(\xi=k)=C_{1000}^k\cdot p^k(1-p)^{1000-k}$,令$\frac{P(\xi=k)}{P(\xi=k-1)}=\frac{(1001-k)p}{k(1-p)}>1$,解得$k<1001p$,又$1001p=978.22725$,所以当$0\leqslant k\leqslant978$时,$P(\xi=k-1)<P(\xi=k)$,当$979\leqslant k\leqslant1000$时,$P(\xi=k-1)>P(\xi=k)$,由此可知,在所走访1000位农民中,年收入不少于17.56千元的人数最有可能是978人.

扫码免费下载习题讲解ppt

第 37 期

第2~3版专题检测

一、单项选择题

1.A **提示**:由题意,得-1,2是一元二次方程$x^2+ax+b=0$的两个实数根,所以$\begin{cases}-1+2=-a,\\ (-1)\times2=b,\end{cases}$解得$a=-1$,$b=-2$,所以$a+b=-3$.故选A.

2.C **提示**:因为$\{a_n\}$是等差数列,所以$a_3+a_{17}=a_9+a_{11}=2a_{10}=30$,则$a_{10}=15$,所以$a_9+a_{10}+a_{11}=3a_{10}=45$.故选C.

3.A **提示**:设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q(q\neq0)$,前n项和为S_n,若$q=1$,则$a_2-a_6=0$,与题意矛盾,所以$q\neq1$,由题意,得$\begin{cases}S_4=\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=600,\\ a_2-a_6=a_1q-a_1q^5=150,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=320,\\ q=\frac{1}{2},\end{cases}$所以$a_7=a_1q^6=5$.故选A.

4.A **提示**:设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,$a_2+3a_8=4a_1+22d=2(a_6+a_7)<0$,因为$a_6\cdot a_7<0$,因为数列$\{a_n\}$的前$n$项和$S_n$有最大值,则$a_1>0$,$d<0$,所以数列$\{a_n\}$是递减的等差数列,所以$a_6>0$,$a_7<0$,所以$S_{11}=\frac{11(a_1+a_{11})}{2}=11a_6>0$,$S_{12}=\frac{12(a_1+a_{12})}{2}=6(a_6+a_7)<0$,所以$S_n$取得最小正值时的$n$为11.故选A.

5.C **提示**:由题意,得该马第n天走的里程数是公比为$q=\frac{1}{2}$的等比数列$\{a_n\}$,设该马前n天走的里程数之和为S_n,第一天走的里程数为a_1,则$\frac{a_1\left(1-\frac{1}{2^7}\right)}{1-\frac{1}{2}}=700$,得$a_1=\frac{2^7\times350}{127}$,故该马第六天走的里程数为$a_6=a_1q^5=\frac{2^7\times350}{127}\times\frac{1}{2^5}=\frac{1400}{127}$.故选C.

6.A **提示**:函数$y=\log_a(x-2)+1(a>0$,且$a\neq1)$,令$x-2=1$,得$x=3$,此时$y=\log_a1+1=1$,所以点$A(3,1)$,即$x_0=3$,$y_0=1$,所以$3m+n=1$,又$m>0$,$n>0$,所以$\frac{3}{m}+\frac{1}{n}=(3m+n)\left(\frac{3}{m}+\frac{1}{n}\right)=10+\frac{3n}{m}+\frac{3m}{n}\geqslant10+2\sqrt{\frac{3n}{m}\cdot\frac{3m}{n}}=16$,当且仅当$\frac{3n}{m}=\frac{3m}{n}$,即$m=n=\frac{1}{4}$时,等号成立,所以$\frac{3}{m}+\frac{1}{n}$的最小值是16.故选A.

7.D **提示**:因为$a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}+2$,所以$(a_{n+1}-a_n)-(a_n-a_{n-1})=2$,又$a_1=1$,$a_2=4$,则$a_2-a_1=3$,

所以数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是首项为3,公差为2的等差数列,所以$a_{n+1}-a_n=3+2(n-1)=2n+1$,所以$a_n-a_{n-1}=2(n-1)+1=2n-1$,$a_{n-1}-a_{n-2}=2(n-2)+1=2n-3$,…,$a_2-a_1=3$,由累加法,得$a_n-a_1=\frac{(n-1)(3+2n-1)}{2}=n^2-1$,即$a_n-1=n^2-1$,所以$\frac{1}{a_n-1}=\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$,所以$\frac{1}{a_2-1}+\frac{1}{a_4-1}+\frac{1}{a_6-1}+\cdots+\frac{1}{a_{2022}-1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2021}-\frac{1}{2023}\right)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2023}\right)=\frac{1011}{2023}$.故选D.

8.C **提示**:因为$S_{n+1}=2S_n+3n+1$,所以当$n\geqslant2$时,$S_n=2S_{n-1}+3(n-1)+1$,两式相减,得$a_{n+1}=2a_n+3$,所以$a_{n+1}+3=2(a_n+3)(n\geqslant2)$,又$a_1=1$,则$a_1+3=4$,$a_1+a_2=S_2=2S_1+3\times1+1=6$,所以$a_2=5$,$a_2+3=2(a_1+3)$,所以数列$\{a_n+3\}$是以4为首项,2为公比的等比数列,所以$a_n+3=4\times2^{n-1}=2^{n+1}$,所以$c_n=\log_2(a_n+3)=n+1$,所以$\frac{c_n-1}{(n+16)c_n}=\frac{n}{(n+16)(n+1)}=\frac{n}{n^2+17n+16}=\frac{1}{n+\frac{16}{n}+17}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{n\cdot\frac{16}{n}}+17}=\frac{1}{25}$,当且仅当$n=\frac{16}{n}$,即$n=4$时,等号成立,所以$k\geqslant\frac{1}{25}$,所以$k$的最小值为$\frac{1}{25}$.故选C.

二、多项选择题

9.AC **提示**:由$a_n=3a_{n-1}+3^n(n\geqslant2)$,得$\frac{a_n}{3^n}=\frac{a_{n-1}}{3^{n-1}}+1$,由$a_1=3$,得$\frac{a_1}{3}=1$,所以数列$\left\{\frac{a_n}{3^n}\right\}$是首项为1,公差为1的等差数列,则$\frac{a_n}{3^n}=1+(n-1)\times1=n$,即$a_n=n\cdot3^n$.故选AC.

10.ABD **提示**:因为$x+2y=xy$,$x>0$,$y>0$,所以$\frac{1}{y}+\frac{2}{x}=1$.对于A,$x+y=(x+y)\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)=3+\frac{2y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant3+2\sqrt{2}$,当且仅当$\frac{2y}{x}=\frac{x}{y}$,即$y=\sqrt{2}+1$,$x=\sqrt{2}+2$时,取等号,故A正确;对于B,由$xy=x+2y\geqslant2\sqrt{2xy}$,当且仅当$x=2y$,即$y=2$,$x=4$时,取等号,解得$xy\geqslant8$,则$xy$的最小值为8,故B正确;对于C,$2x+y=(2x+y)\left(\frac{1}{y}+\frac{2}{x}\right)=\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}+5\geqslant2\sqrt{4}+5=9$,当且仅当$x=y=3$时,取等号,故C错误;对于D,$5+4m-m^2=-(m-2)^2+9\leqslant9$,结合选项C可知,$2x+y\geqslant5+4m-m^2$对任意$m$恒成立,故D正确.故选ABD.

11.AB **提示**:因为$S_n=n^2$,所以$a_1=S_1=1$,当$n\geqslant2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$,当$n=1$时,上式成立,所以$a_n=2n-1$,因为数列$\{b_n\}$是首项和公比均为2的等比数列,所以$b_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$,所以数列$\{c_n\}$为1,2,3,4,5,7,8,9,11,13,15,16,17,19,21,23,…,所以$c_{12}=16$,故A正确;因为$\{a_n\}$是由连续奇数组成的数列,b_n与b_{n+1}都是偶数,所以b_n与b_{n+1}之间包含的奇数个数为$\frac{2^{n+1}-2^n}{2}=2^{n-1}$,故B正确;因为$b_n=2^n$,所以$b_{2n}=2^{2n}$为偶数,又$a_{2^n}=2\times2^n-1=2^{n+1}-1$为奇数,所以$b_{2n}\neq a_{2^n}$,故C错误;因为$b_n=2^n$,所以$b_n$的前面相邻的一个奇数为$2^n-1$,令$a_k=2^n-1=2k-1$,解得$k=2^{n-1}$,所以数列$\{c_n\}$从1到$2^n$共有$2^{n-1}+n$项,则$c_{2^{n-1}+n}=2^n=b_n$,故D错误.故选AB.

12.BCD **提示**:由$2a_{n+1}-a_n=n+2$,得$2[a_{n+1}-(n+1)]=a_n-n$,因为$a_1-1=4\neq0$,$\frac{a_{n+1}-(n+1)}{a_n-n}=\frac{1}{2}$,所以数列$\{a_n-n\}$是以4为首项,$\frac{1}{2}$为公比的等比数列,所以$a_n-n=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,则$a_n=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+n$,所以$S_n=4\left[1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]+(1+2+\cdots+n)=4\times\frac{1\times\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}+\frac{n(n+1)}{2}=8\times\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+\frac{n(n+1)}{2}$,所以$a_{2022}=2022+2^{-2019}$,故B正确;$S_{10}=63-2^{-7}$,故A错误;因为$a_n=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+n$,所以$a_{n+1}-a_n=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+(n+1)-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-n=1-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,所以当$n=1$时,$a_2-a_1<0$;当$n=2$时,$a_3-a_2=0$;当$n>2$时,$a_{n+1}-a_n>0$.所以$a_1>a_2=a_3<a_4<a_5<\cdots$,所以数列$\{a_n\}$的最小项为$a_2$,$a_3$,故D正确.由上述分析可知,数列$\{a_n\}(n\in\mathbf{N}_+,n>2)$是递增数列,故C正确.故选BCD.

三、填空题

13.20 **提示**:由题意,得$a_1a_8=a_2a_7=a_3a_6=a_4a_5=32$,则$\log_2a_1+\log_2a_2+\cdots+\log_2a_8=\log_2(a_1a_8\cdot a_2a_7\cdot a_3a_6\cdot a_4a_5)=\log_2(a_4a_5)^4=\log_232^4=\log_22^{20}=20$.

14.$\frac{1}{16}$ **提示**:设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q(q\neq0$,且$q\neq1)$,由$a_1=1$,且a_2,a_4,a_3成等差数列,得$2a_4=a_2+a_3$,即$2q^3=q+q^2$,解得$q=-\frac{1}{2}$,或$q=1$(舍去),所以$a_5=a_1q^4=1\times\left(-\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$.

15.$\left(-\frac{3}{5},1\right]$ **提示**:因为关于x的不等式$(a^2-1)x^2+(a-1)x-1\geqslant0$的解集是空集,若$a^2-1=0$,即$a=1$或$a=-1$.当$a=1$时,$-1\geqslant0$的解集为空集,符合题意;当$a=-1$时,$-2x-1\geqslant0$的解集非空,不符合题意;若$a^2-1\neq0$,则$\begin{cases}a^2-1<0,\\ (a-1)^2+4(a^2-1)<0,\end{cases}$解得$-\frac{3}{5}<a<1$.

综上,实数a的取值范围是$\left(-\frac{3}{5},1\right]$.

16.$\left(-\infty,\frac{4}{7}\right]$ **提示**:由题意,知$\frac{1}{1\cdot a_1}=1$,则$\frac{1}{na_n}=1+1\cdot(n-1)=n$,则$a_n=\frac{1}{n^2}$,因为对任意的$n\in\mathbf{N}_+$,不等式$2^n-\lambda\left(\frac{4}{\sqrt{a_n}}-1\right)\geqslant0$,即$2^n-\lambda(4n-1)\geqslant0$恒成立,所以$\lambda\leqslant\frac{2^n}{4n-1}$对任意的$n\in\mathbf{N}_+$恒成立.构造数列$\{b_n\}$,令$b_n=\frac{2^n}{4n-1}$,则$b_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{4n+3}$,因为$b_{n+1}-b_n=\frac{2^{n+1}}{4n+3}-\frac{2^n}{4n-1}=\frac{(4n-5)\cdot2^n}{(4n-1)(4n+3)}$,所以当$n\in\mathbf{N}_+$时,$4n-1\geqslant4\times1-1=3>0$,$4n+3>0$,$2^n>0$,所以当$4n-5<0$,即$n<\frac{5}{4}$时,$b_{n+1}<b_n$,当$4n-5>0$,即$n>\frac{5}{4}$时,$b_{n+1}>b_n$,所以$b_1>b_2<b_3<b_4<\cdots$,所以当$n=2$时,数列$\{b_n\}$取得最小值为$b_2=\frac{2^2}{4\times2-1}=\frac{4}{7}$,所以$\lambda\leqslant b_2=\frac{4}{7}$,即实数$\lambda$的取值范围是$\left(-\infty,\frac{4}{7}\right]$.

四、解答题

17.**解**:(1)因为$x>0$,$y>0$,$2x+3y=10$,所以$xy=\frac{1}{6}\cdot2x\cdot3y\leqslant\frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当$2x=3y$,即$x=\frac{5}{2}$,$y=\frac{5}{3}$时,等号成立,所以$xy$的最大值为$\frac{25}{6}$.

(2)因为$x+y=2$,$x>y>0$,所以$(x+3y)+(x-y)=2(x+y)=4$,且$x-y>0$,所以$\frac{4}{x+3y}+\frac{1}{x-y}=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{x+3y}+\frac{1}{x-y}\right)\cdot[(x+3y)+(x-y)]=\frac{1}{4}\left(5+\frac{4(x-y)}{x+3y}+\frac{x+3y}{x-y}\right)\geqslant\frac{1}{4}\times(5+2\sqrt{4})=\frac{9}{4}$,当且仅当$\frac{4(x-y)}{x+3y}=\frac{x+3y}{x-y}$,即$x=\frac{5}{3}$,$y=\frac{1}{3}$时,等号成立,所以$\frac{4}{x+3y}+\frac{1}{x-y}$的最小值为$\frac{9}{4}$.

18.**解**:(1)因为$S_n+S_{n+1}=3a_{n+1}-2$,所以$S_{n-1}+S_n=3a_n-2(n\geqslant2)$,两式作差,得$a_n+a_{n+1}=3a_{n+1}-3a_n$,则$a_{n+1}=2a_n(n\geqslant2)$,当$n=1$时,则$S_1+S_2=3a_2-2$,即$2a_1+a_2=3a_2-2$,又$a_1=1$,则$a_2=2$,所以$\frac{a_2}{a_1}=2$,所以数列$\{a_n\}$是首项为1,公比为2的等比数列,所以$a_n=2^{n-1}$.

(2)由(1)得$a_n=2^{n-1}$,则$a_{n+1}=2^n$,因为$b_n=\log_{a_{n+1}}2=\log_{2^n}2=\frac{1}{n}$,所以$b_nb_{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,设数列$\{b_nb_{n+1}\}$的前$n$项和为$T_n$,所以$T_n=b_1b_2+b_2b_3+\cdots+b_nb_{n+1}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

19.(1)**证明**:由$a_{n+1}a_n=2a_n-a_{n+1}$,得$1=\frac{2}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}$,则$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n}+1\right)$,所以$\frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$,又$\frac{1}{a_1}-1=-\frac{1}{2}\neq0$,所以$\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$是以$-\frac{1}{2}$为首项,$\frac{1}{2}$为公比的等比数列.

(2)**解**:由(1)可得$\frac{1}{a_n}-1=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\left(\frac{1}{2}\right)^n=-\frac{1}{2^n}$,故$a_n=\frac{2^n}{2^n-1}$,所以$b_n=\frac{a_na_{n+1}}{2^n}=\frac{2^{n+1}}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=2\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)$,所以$S_n=2\left[\left(\frac{1}{2^1-1}-\frac{1}{2^2-1}\right)+\left(\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)\right]=2-\frac{2}{2^{n+1}-1}$,因为$S_n>1.999$,即$2-\frac{2}{2^{n+1}-1}>1.999$,所以$2^{n+1}>2001$,又$2^{10}=1024$,所以$n>9$,所以整数$n$的最小值为10.

20.(1)**解**:选择①,由$a_{n+1}-S_n=2$,得$a_n-S_{n-1}=2(n\geqslant2)$,两式作差,得$a_{n+1}=2a_n(n\geqslant2)$,又$a_3=S_2+2=a_1+a_2+2$,$a_2=a_1+2$,所以$a_3=2a_1+4=8$,解得$a_1=2$,$a_2=4$,则$a_2=2a_1$,所以$a_{n+1}=2a_n(n\in\mathbf{N}_+)$,所以数列$\{a_n\}$是以2为首项,2为公比的等比数列,所以$a_n=2^n$.

选择②,因为$a_{m+n}=a_m\cdot a_n$,令$m=1$,得$a_{n+1}=a_n\cdot a_1$,由$a_ma_n\neq0$,知数列$\{a_n\}$各项不为0,所以数列$\{a_n\}$是以a_1为首项,a_1为公比的等比数列,则$a_n=a_1^n$,由$S_1S_2=3a_2$,得$a_1(a_1+a_2)=3a_2$,又$a_2=a_1^2$,则$a_1(a_1+a_1^2)=3a_1^2$,解得$a_1=2$,所以$a_n=2^n$.

选择③,由$S_{n+1}=3S_n-2S_{n-1}(n\geqslant2)$,得$S_{n+1}-S_n=2(S_n-S_{n-1})(n\geqslant2)$,即$a_{n+1}=2a_n(n\geqslant2)$,又$a_1=2$,$S_2=6$,所以$a_2=S_2-a_1=4$,则$a_2=2a_1$,所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2(n\in\mathbf{N}_+)$,所以数列$\{a_n\}$是以2为首项,2为公比的等比数列,所以$a_n=2^n$.

(2)**证明**:因为$a_n=2^n$,所以$b_n=\frac{\log_2a_n}{a_n}=\frac{n}{2^n}$,所以$T_n=\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}$,$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^{n+1}}$,两式作差,得$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}$,所以$T_n=2-\frac{n+2}{2^n}$,所以$T_n<2$,又$b_n>0$,所以$T_n\geqslant b_1=\frac{1}{2}$,所以$\frac{1}{2}\leqslant T_n<2$.

21.**解**:(1)因为a_3+2是a_2和a_4的等差中项,所以$2(a_3+2)=a_2+a_4$,又$a_2+a_3+a_4=28$,等比数列$\{a_n\}$是递增数列,所以$\begin{cases}2(a_1q^2+2)=a_1q+a_1q^3,\\ a_1q+a_1q^2+a_1q^3=28,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=2,\\ q=2,\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=32,\\ q=\frac{1}{2}\end{cases}$(舍去),所以$a_n=2^n$.

(2)由(1)可得$a_n=2^n$,所以$b_n=a_n\log_2\frac{1}{a_n}=-n\cdot2^n$,所以$T_n=-(1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\cdot2^n)$,$2T_n=-(1\times2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+n\cdot2^{n+1})$,所以$-T_n=-(2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot2^{n+1})$,所以$T_n=2^{n+1}-n\cdot2^{n+1}-2$,又$T_n+n\cdot2^{n+1}=510$,即$2^{n+1}-2=510$,解得$n=8$.

22.**解**:(1)因为$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\frac{a_{n+1}^2-1}{3}$,所以$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2=\frac{a_n^2-1}{3}(n\geqslant2)$,两式作差,得$3a_n^2=a_{n+1}^2-a_n^2$,即$a_{n+1}^2=4a_n^2$,又数列$\{a_n\}$各项都是正数,所以$a_{n+1}=2a_n(n\geqslant2)$,又$a_1=1$,$a_1^2=\frac{a_2^2-1}{3}$,解得$a_2=2$(舍去负值),所以$a_{n+1}=2a_n(n\in\mathbf{N}_+)$,所以$a_n=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}_+)$.

因为数列$\{b_n\}$满足$b_1=1$,$b_n+b_{n+1}=2n+1(n\in\mathbf{N}_+)$,所以$b_{n-1}+b_n=2n-1(n\geqslant2)$,两式作差,得$b_{n+1}-b_{n-1}=2(n\geqslant2)$,所以数列$\{b_n\}$的奇数项和偶数项均为公差为2的等差数列,又$b_2=3-b_1=2$,所以数列$\{b_n\}$的奇数项依次为1,3,5,7,…,$2n-1$,…,偶数项依次为2,4,6,…,$2n$,…,所以$b_n=n$.

(2)由(1)得$a_n=2^{n-1}$,$b_n=n$,所以$c_n=\frac{b_n}{a_{2n+1}}=n\cdot\frac{1}{4^n}$,则$T_n=1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4^2}+3\cdot\frac{1}{4^3}+\cdots+n\cdot\frac{1}{4^n}$,$\frac{1}{4}T_n=1\cdot\frac{1}{4^2}+2\cdot\frac{1}{4^3}+\cdots+n\cdot\frac{1}{4^{n+1}}$,两式作差,得$\frac{3}{4}T_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n}-n\cdot\frac{1}{4^{n+1}}=\frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}-n\cdot\frac{1}{4^{n+1}}$,则$T_n=\frac{4}{9}-\frac{3n+4}{9}\cdot\frac{1}{4^n}$,因为不等式$4\times3^n+9\lambda<3^{n+2}T_n$对一切$n\in\mathbf{N}_+$恒成立,即$-9\lambda>(3n+4)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$恒成立,设$d_n=(3n+4)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$,则$d_n>0$,$\frac{d_{n+1}}{d_n}-1=\frac{(3n+7)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{(3n+4)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n}-1=\frac{9n+21}{12n+16}-1=\frac{-3n+5}{12n+16}$,

当$n=1$时,$\frac{d_2}{d_1}-1>0$,则$d_2>d_1$,当$n\geqslant2$时,$\frac{d_{n+1}}{d_n}-1<0$,则$d_{n+1}<d_n$,所以$n=2$时,d_n取得最大值$\frac{45}{8}$,则$-9\lambda>\frac{45}{8}$,解得$\lambda<-\frac{5}{8}$,所以λ的取值范围是$\left(-\infty,-\frac{5}{8}\right)$.

第38期
第2~3版专题检测

一、单项选择题

1.C　**提示**：由倾斜角为150°，得直线的斜率 $k=\tan150°=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，又直线过点(1,0)，则直线方程为 $y-0=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$，即 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}$.故选C.

2.A　**提示**：圆 $C_1:(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 的圆心为 $C_1(2,3)$，半径 $r_1=1$，圆 $C_2:(x-3)^2+(y-4)^2=16$ 的圆心为 $C_2(3,4)$，半径 $r_2=4$，则两圆的圆心距 $|C_1C_2|=\sqrt{2}<|r_1-r_2|=3$，所以圆 C_1 与圆 C_2 的位置关系为内含.故选A.

3.C　**提示**：由题意，得 $2+\frac{p}{2}=3$，则 $p=2$.故选C.

4.D　**提示**：设圆心为 $C(2b+2,b)$，因为圆 C 过 $A(0,4)$，$B(4,6)$两点，所以 $|AC|=|BC|$，即 $[(2b+2)-0]^2+(b-4)^2=[(2b+2)-4]^2+(b-6)^2$，解得 $b=1$，则圆心为 $C(4,1)$，半径为5，所以所求圆的标准方程为 $(x-4)^2+(y-1)^2=25$.故选D.

5.A　**提示**：由圆 $C:x^2-2x+y^2+a=0$，即 $(x-1)^2+y^2=1-a$，得圆心为 $C(1,0)$，半径 $r=\sqrt{1-a}(a<1)$，则圆心 C 到直线 $4x+3y-9=0$ 的距离 $d=\frac{|4-9|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1$，因为直线 $4x+3y-9=0$ 与圆 C 相交的弦长为 $4\sqrt{2}$，所以 $2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{1-a-1}=4\sqrt{2}$，解得 $a=-8$.故选A.

6.D　**提示**：双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，设点 M 在 x 轴上方，则 $M(a,b)$，$N(a,-b)$，设 P 点的坐标为 (x,y)，代入 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OM}+n\overrightarrow{ON}$，得 $x=ma+na=(m+n)a$，$y=mb-nb=(m-n)b$，又点 P 在双曲线上，则将 P 点的坐标代入双曲线方程，得 $(m+n)^2-(m-n)^2=1$，整理得 $mn=\frac{1}{4}$，则 $\frac{1}{mn}=4$.故选D.

7.A　**提示**：由题意，得 $|PF_1|+|PF_2|=2a$，$|F_1F_2|=2c$，设 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径为 r，所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}(|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|)r=\frac{1}{2}(2a+2c)r=(a+c)r$，因为 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径的最大值为 $a-c$，所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=(a+c)r\leqslant(a+c)\cdot(a-c)=a^2-c^2=b^2$，又 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot y_P\leqslant\frac{1}{2}\cdot2c\cdot b=bc$，所以 $b^2=bc$，则 $b=c$，又椭圆的长轴长为4，则 $2a=4$，即 $a=2$，又 $a^2=b^2+c^2$，则 $b=c=\sqrt{2}$，所以 $S_{\triangle PF_1F_2}\leqslant bc=2$.故选A.

8.B　**提示**：设椭圆对应的参数为 a_1,b_1,c，双曲线对应的参数为 a_2,b_2,c，因为线段 PF_1 的垂直平分线过 F_2，所以 $|F_1F_2|=|PF_2|=2c$.又 $|PF_1|>|PF_2|$，根据双曲线和椭圆的定义，得 $\begin{cases}|PF_1|+2c=2a_1,\\|PF_1|-2c=2a_2,\end{cases}$ 两式相减，得 $4c=2(a_1-a_2)$，即 $a_1-a_2=2c$，则 $a_1=a_2+2c$，又 $a_2>0$，$c>0$，所以 $\frac{2}{e_1}+\frac{e_2}{2}=\frac{2a_1}{c}+\frac{c}{2a_2}=4+\frac{2a_2}{c}+\frac{c}{2a_2}\geqslant4+2\sqrt{\frac{2a_2}{c}\cdot\frac{c}{2a_2}}=6$，当且仅当 $\frac{2a_2}{c}=\frac{c}{2a_2}$，即 $c=2a_2$ 时，等号成立，所以 $\frac{2}{e_1}+\frac{e_2}{2}$ 的最小值为6.故选B.

二、多项选择题

9.AD　**提示**：将直线 l 的方程转化为 $(x+y-4)+m\cdot(2x+y-7)=0$，由 $\begin{cases}x+y-4=0,\\2x+y-7=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\y=1,\end{cases}$ 则直线 l 过定点 $D(3,1)$，故A正确；在圆 C 的方程中，令 $x=0$，解得 $y=2\pm2\sqrt{6}$，则圆 C 被 y 轴截得的弦长为 $4\sqrt{6}$，故B错误；圆 C 的圆心为 $C(1,2)$，半径 $r=5$，则 $|CD|=\sqrt{5}<5$，所以点 D 在圆 C 的内部，直线 l 与圆 C 恒相交，故C错误；当直线 l 被圆 C 截得的弦长最短时，$l\perp CD$，又 $k_{CD}=-\frac{1}{2}$，则直线 l 的斜率为2，此时直线 l 的方程为 $y-1=2(x-3)$，即 $2x-y-5=0$，故D正确.故选AD.

10.ACD　**提示**：抛物线 $C:y^2=4x$ 的准线 l 的方程为 $x=-1$.对于A，当 $x_0=2$ 时，由抛物线的定义，得 $|PF|=x_0+\frac{p}{2}=3$，故A正确；对于B，当 $y_0=1$ 时，$x_0=\frac{1}{4}$，令切线方程为 $m(y-1)=x-\frac{1}{4}$，联立 $\begin{cases}m(y-1)=x-\frac{1}{4},\\y^2=4x,\end{cases}$ 得 $y^2-4my+4m-1=0$，则 $\Delta=16m^2-16m+4=0$，解得 $m=\frac{1}{2}$，则切线方程为 $\frac{1}{2}(y-1)=x-\frac{1}{4}$，即 $4x-2y+1=0$，故B错误；对于C，过点 P，A 分别作准线 l 的垂线，垂足为 Q，B，由抛物线的定义，知 $|PF|=|PQ|$，则 $|PA|+|PF|=|PA|+|PQ|\geqslant|AQ|\geqslant|AB|=3$，当且仅当 P，A，B 三点共线时，等号成立，所以 $|PA|+|PF|$ 的最小值为3，故C正确；对于D，因为焦点 $F(1,0)$，所以 $|PA|-|PF|\leqslant|AF|=\sqrt{(2-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$，当且仅当 P，A，F 三点共线时，等号成立，所以 $|PA|-|PF|$ 的最大值为 $\sqrt{2}$，故D正确.故选ACD.

11.ACD　**提示**：设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，因为点 P 在双曲线 C 的右支上，所以 $m-n=2a$，即 $m=n+2a$，由 $2|PF_1|\leqslant9|PF_2|$，得 $2m=2n+4a\leqslant9n$，所以 $n\geqslant\frac{4}{7}a$，由 $|PF_1|^2=4|OF_2|^2-|PF_2|^2$，得 $m^2=n^2+4an+4a^2=4c^2-n^2$，所以 $4c^2=2n^2+4an+4a^2\geqslant2\times\frac{16}{49}a^2+\frac{16}{7}a^2+4a^2=\frac{340}{49}a^2$，所以 $c^2\geqslant\frac{85}{49}a^2$，所以双曲线 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}\geqslant\frac{\sqrt{85}}{7}$，由选项知，离心率可能的值为 $\frac{\sqrt{85}}{7}$，$\frac{\sqrt{85}}{6}$，$\frac{85}{48}$.故选ACD.

12ACD　**提示**：$\triangle ABF_2$ 的周长为 $|AB|+|AF_2|+|BF_2|=|AF_1|+|AF_2|+|BF_1|+|BF_2|=4a=12$，故A正确；由 $a=3$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=2$，得椭圆的离心率为 $\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$，故B错误；要使 $|AF_2|+|BF_2|=12-|AB|$ 最大，只需 $|AB|$ 最小，根据椭圆的性质，知当 $AB\perp x$ 轴时，$|AB|_{\min}=\frac{2b^2}{a}=\frac{10}{3}$，故 $(|AF_2|+|BF_2|)_{\max}=\frac{26}{3}$，故C正确；设直线 $AB:x=my-2$，代入椭圆方程，整理得 $(9+5m^2)y^2-20my-25=0$，则 $y_A+y_B=\frac{20m}{9+5m^2}$，$y_Ay_B=-\frac{25}{9+5m^2}$，又 $S_{\triangle ABF_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_A-y_B|=2\cdot\sqrt{(y_A+y_B)^2-4y_Ay_B}=\frac{60\sqrt{m^2+1}}{9+5m^2}$，令 $t=\sqrt{m^2+1}$，则 $t\geqslant1$，$m^2=t^2-1$，则 $S_{\triangle ABF_2}=\frac{60t}{5t^2+4}=\frac{60}{5t+\frac{4}{t}}$，又 $y=5t+\frac{4}{t}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $t=1$ 时，y 取得最小值，此时 $S_{\triangle ABF_2}$ 取得最大值 $\frac{20}{3}$，故D正确.故选ACD.

三、填空题

13.$x+2y-3=0$　**提示**：当弦最短时，圆心 C 与点 M 的连线与所求直线垂直，圆 $C:x^2+y^2-4x-6y=0$，即 $(x-2)^2+(y-3)^2=13$，圆心为 $C(2,3)$，所以直线的斜率 $k=-\frac{1}{k_{CM}}=-\frac{1}{2}$，所以直线方程是 $y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$，即 $x+2y-3=0$.

14.$\frac{20}{21}$　**提示**：设圆 C 与 x 轴相切于点 $Q(t,0)$，则 $|PF_1|-|PF_2|=|F_1D|-|F_2E|=|QF_1|-|QF_2|=t+c-(c-t)=2t=2a=4$，则 $t=2$，$Q(2,0)$，又圆 C 的半径为2，所以 $C(2,2)$，设直线 PF_1 的方程为 $y=k(x+3)$，即 $kx-y+3k=0$，由题意，得点 C 到直线 PF_1 的距离 $d=\frac{|2k-2+3k|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，又 $k>0$，解得 $k=\frac{20}{21}$.

15.$\frac{1}{2}$　**提示**：由题意可知，$A(-a,0)$，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，直线 AP 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{4}(x+a)$，$\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形，$\angle F_1F_2P=120°$，则 $|PF_2|=|F_1F_2|=2c$，过 P 作 $PQ\perp x$ 轴于点 Q，在 $Rt\triangle PF_2Q$ 中，$\angle PF_2Q=60°$，所以 $|PQ|=|PF_2|\sin\angle PF_2Q=2c\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}c$，$|F_2Q|=|PF_2|\cdot\cos\angle PF_2Q=2c\times\frac{1}{2}=c$，所以 $P(2c,\sqrt{3}c)$，将点 P 代入直线 $AP:y=\frac{\sqrt{3}}{4}(x+a)$，得 $\sqrt{3}c=\frac{\sqrt{3}}{4}(2c+a)$，即 $a=2c$，所以椭圆离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.

16.$y=\pm(x+1)$，$2-\sqrt{2}$　**提示**：抛物线 $y^2=4x$ 的准线方程为 $x=-1$，焦点为 $F(1,0)$，则 $A(-1,0)$，设 P 到准线的距离为 $|PQ|$，则 $|PQ|=|PF|$，所以 $\frac{|PF|}{|PA|}=\frac{|PQ|}{|PA|}=\sin\angle PAQ$，所以当 PA 与抛物线相切时，$\angle PAQ$ 最小，即 $\frac{|PF|}{|PA|}$ 取得最小值.设过 A 点的直线 $y=k(x+1)$，即 $y=kx+k(k\neq0)$ 与抛物线相切，将 $y=kx+k$ 代入抛物线方程，得 $k^2x^2+(2k^2-4)x+k^2=0$，所以 $\Delta=(2k^2-4)^2-4k^4=0$，解得 $k=\pm1$，则 $x^2-2x+1=0$，解得 $x=1$，把 $x=1$ 代入 $y^2=4x$，得 $y=\pm2$，所以 $P(1,2)$ 或 $P(1,-2)$，此时直线 PA 的方程为 $y=\pm(x+1)$.所以 $S_{\triangle PAF}=\frac{1}{2}|AF|\cdot|y_P|=\frac{1}{2}\times2\times2=2$，又 $|AP|=2\sqrt{2}$，$|AF|=2$，$|PF|=2$，设 $\triangle PAF$ 的内切圆半径为 r，所以 $\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2}+2+2)r=2$，解得 $r=2-\sqrt{2}$.

四、解答题

17.**解**：(1)由题意，得圆 $C:x^2+y^2-mx-4y-20=0$ 的圆心为 $C\left(\frac{m}{2},2\right)$ 在直线 $x-y+1=0$ 上，则 $\frac{m}{2}-2+1=0$，解得 $m=2$，所以圆 $C:x^2+y^2-2x-4y-20=0$，所以圆 C 的标准方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=25$.

(2)设圆心 C 到直线 l 距离为 d，由(1)得 $C(1,2)$，$r=5$，则 $2\sqrt{r^2-d^2}=8$，解得 $d=3$.①当直线 l 斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=4$，满足题意；②当直线 l 斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y+4=k(x-4)$，则 $d=\frac{|-3k-6|}{\sqrt{k^2+1}}=3$，解得 $k=-\frac{3}{4}$，所以直线 l 的方程为 $3x+4y+4=0$.

综上，直线 l 的方程为 $x=4$ 或 $3x+4y+4=0$.

18.(1)**解**：设椭圆的焦距为 $2c$，

则 $\begin{cases}c=1,\\\frac{1}{b^2}=1,\\a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\sqrt{2},\\b=1,\\c=1,\end{cases}$

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)**证明**：设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1,\\y=kx+t,\end{cases}$ 消去 y 得 $(2k^2+1)x^2+4ktx+2t^2-2=0$，

由韦达定理，得

$x_1+x_2=-\frac{4kt}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{2t^2-2}{2k^2+1}$.①

由 $A(0,1)$ 与 $P(x_1,y_1)$ 可得直线 AP 的方程为 $y=\frac{y_1-1}{x_1}\cdot x+1$，所以 $M\left(-\frac{x_1}{y_1-1},0\right)$，同理，$N\left(-\frac{x_2}{y_2-1},0\right)$，又 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=1$，所以 $\frac{x_1x_2}{(y_1-1)(y_2-1)}=1$，化简得 $x_1x_2-y_1y_2+(y_1+y_2)-1=0$，所以 $(1-k^2)x_1x_2+(k-kt)(x_1+x_2)-t^2+2t-1=0$，将①代入并化简得 $t^2+2t-3=0$，所以 $t=-3$ 或 $t=1$(舍去)，所以直线 l 的方程为：$y=kx-3$，所以直线 l 经过定点 $(0,-3)$.

19.**解**：(1)设椭圆的半焦距为 $c(c>0)$.因为圆 $M:x^2+y^2+4x+3=0$ 的圆心为 $M(-2,0)$，所以椭圆的左焦点为 $F_1(-2,0)$，所以 $c=2$.因为 $\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $a=\sqrt{5}$，又 $a^2=b^2+c^2$，所以 $b=1$，所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$.

(2)由(1)可知椭圆 C 的左、右焦点分别为 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，易知直线 l 的斜率不为0，设直线 l 的方程为 $x=my-2$，联立 $\begin{cases}x=my-2,\\\frac{x^2}{5}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(m^2+5)y^2-4my-1=0$，则 $y_1+y_2=\frac{4m}{m^2+5}$，$y_1y_2=-\frac{1}{m^2+5}$，$\triangle ABF_2$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot|F_1F_2|\cdot|y_2-y_1|=2|y_2-y_1|=2\sqrt{(y_2+y_1)^2-4y_1y_2}=2\sqrt{\frac{16m^2}{(m^2+5)^2}+\frac{4}{m^2+5}}=\frac{4\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}}{m^2+5}$.

令 $t=\sqrt{m^2+1}$，则 $t\in[1,+\infty)$，所以 $S=\frac{4\sqrt{5}t}{t^2+4}=\frac{4\sqrt{5}}{t+\frac{4}{t}}\leqslant\sqrt{5}$，当且仅当 $t=\frac{4}{t}$，即 $t=2$，$m=\pm\sqrt{3}$ 时，S 取得最大值 $\sqrt{5}$，所以 $\triangle ABF_2$ 的面积的最大值为 $\sqrt{5}$.

20.**解**：(1)抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，$|PF|=2x_0$，即为 $x_0+\frac{p}{2}=2x_0$，又 $2px_0=4$，解得 $p=2$，$x_0=1$，所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.

(2)设过 $P(1,2)$ 的切线方程为 $y=kx+2-k$，由切线与圆 M 相切，可得 $\frac{|3k+2-k|}{\sqrt{1+k^2}}=r$，化为 $(r^2-4)k^2-8k+(r^2-4)=0$，设切线 PA，PB 的斜率分别为 k_1,k_2，可得 $k_1+k_2=\frac{8}{r^2-4}$，$k_1k_2=1$.由 $y=kx+2-k$，联立抛物线方程，得 $k^2x^2+[2k(2-k)-4]x+(2-k)^2=0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，可得 $1\cdot x_1=\frac{(2-k_1)^2}{k_1^2}=1-\frac{4}{k_1}+\frac{4}{k_1^2}$，$1\cdot x_2=\frac{(2-k_2)^2}{k_2^2}=1-\frac{4}{k_2}+\frac{4}{k_2^2}$，即有 $x_1+x_2=2-4\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)+4\left(\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_2^2}\right)=2-\frac{32}{r^2-4}+4\left[\frac{64}{(r^2-4)^2}-2\right]=\left(\frac{16}{4-r^2}+1\right)^2-7$，由 $0<r\leqslant\sqrt{2}$，可得 $4-r^2\in[2,4)$，则 $\left(\frac{16}{4-r^2}+1\right)^2-7\in(18,74]$，即 $t=\frac{x_1+x_2}{2}\in(9,37]$，所以 t 的取值范围是 $(9,37]$.

21.**解**：(1)根据题意，可得 $\begin{cases}m^2=2p\cdot\frac{1}{2},\\\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2}\cdot|m|=\frac{p^2}{4},\end{cases}$ 解得 $p=1$，所以抛物线 C 的标准方程为 $y^2=2x$.

(2)显然 $k\neq0$，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}y=kx+1,\\y^2=2x,\end{cases}$ 得 $k^2x^2+2(k-1)x+1=0$，因为直线 l 与抛物线 C 交于 M，N 两点，所以 $\Delta=4(k-1)^2-4k^2=4(1-2k)>0$，解得 $k<\frac{1}{2}$，由韦达定理，得 $x_1+x_2=\frac{2(1-k)}{k^2}$，$x_1x_2=\frac{1}{k^2}$，因为以 MN 为直径的圆经过点 O，所以 $OM\perp ON$，所以 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=0$，又 $y_1y_2=(kx_1+1)\cdot(kx_2+1)=k^2x_1x_2+k(x_1+x_2)+1=\frac{2}{k}$，所以 $\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}=0$，解得 $k=-\frac{1}{2}$，符合题意，所以直线 l 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x+1$.

22.**解**：(1)由题意，得 $\frac{1}{a}=\frac{y_M}{\sqrt{2}}$，$\frac{2}{a^2}+\frac{y_M^2}{b^2}=1$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$a^2=b^2+c^2$，联立以上等式，解得 $a=2$，$b=1$，$c=\sqrt{3}$，$y_M=\frac{\sqrt{2}}{2}$.所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)设直线 l 的方程为 $x=m(y-1)+2$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}x=m(y-1)+2,\\\frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 化简得 $(m^2+4)y^2+(4m-2m^2)y+m^2-4m=0$，所以 $y_1+y_2=\frac{2m^2-4m}{m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{m^2-4m}{m^2+4}$，因为 $A(2,0)$，则直线 AM 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1-2}\cdot(x-2)$，

所以 $P\left(x_2,\frac{y_1(x_2-2)}{x_1-2}\right)$，$Q\left(x_2,\frac{y_1(x_2-2)+y_2(x_1-2)}{2(x_1-2)}\right)$.

所以 $k_{AQ}=\frac{y_1(x_2-2)+y_2(x_1-2)}{2(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{my_1(y_2-1)+my_2(y_1-1)}{2m^2(y_1-1)(y_2-1)}=\frac{2y_1y_2-(y_1+y_2)}{2m(y_1y_2-y_1-y_2+1)}=-\frac{1}{2}$.

所以直线 AQ 的方程为 $y=-\frac{1}{2}(x-2)$，则 $Q\left(x_2,-\frac{1}{2}(x_2-2)\right)$，$-2\leqslant x_2<2$.所以 $|AQ|=\sqrt{(x_2-2)^2+\frac{1}{4}(x_2-2)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}|x_2-2|\leqslant\frac{\sqrt{5}}{2}\times|-2-2|=2\sqrt{5}$，当且仅当 $x_2=-2$ 时，$|AQ|$ 取得最大值 $2\sqrt{5}$.

第39期
第2~3版专题检测

一、单项选择题

1.A　**提示**：因为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点为 $(\pm\sqrt{5},0)$，所以所求椭圆的焦点为 $(\pm\sqrt{5},0)$，设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，由题意，得 $\begin{cases}\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1,\\a^2-b^2=5,\end{cases}$ 解得 $a^2=15$，$b^2=10$，所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1$.故选A.

2.D　**提示**：由题意，得 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，因为点 $P(1,a)$，所以 $\overrightarrow{PF_1}=(-3,-a)$，$\overrightarrow{PF_2}=(1,-a)$，所以 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=-3+a^2$，因为 $\angle F_1PF_2\geqslant90°$，所以 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}\leqslant0$，即 $-3+a^2\leqslant0$，解得 $-\sqrt{3}\leqslant a\leqslant\sqrt{3}$.故选D.

3.A　**提示**：抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 $F(1,0)$，设 $N(x_1,y_1)$，$P(x_2,y_2)$，因为 $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{NF}$，所以 $x_1+1=2(1-x_1)$，解得 $x_1=\frac{1}{3}$.所以 $|NF|=x_1+\frac{p}{2}=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$，所以 $|MF|=3|NF|=4$，所以 $y_M=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}=y_2$，所以 $(2\sqrt{3})^2=4x_2$，解得 $x_2=3$，所以 $|PF|=x_2+\frac{p}{2}=3+1=4$，故选A.

4.B　**提示**：设 $P(x_0,y_0)$，且 $x_0>0$，$y_0>0$，双曲线 C 的左焦点为 $F_1(-2,0)$，则 $Q\left(\frac{x_0-2}{2},\frac{y_0}{2}\right)$，双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm x$，则 $\frac{x_0-2}{2}=\pm\frac{y_0}{2}$，即 $x_0=2\pm y_0$，又 $x_0^2-y_0^2=2$，$x_0>0$，$y_0>0$，两式联立，解得 $x_0=\frac{3}{2}$，$y_0=\frac{1}{2}$，所以 $P\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$.故选B.

5.D　**提示**：由抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$，得 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，则直线 $MF:y=\sqrt{3}\left(x-\frac{p}{2}\right)$，与抛物线 $y^2=2px$ 联立，得 $3x^2-5px+\frac{3}{4}p^2=0$，解得 $x=\frac{3p}{2}$，或 $x=\frac{p}{6}$，又 M 在 x 轴上方，则 $M\left(\frac{3p}{2},\sqrt{3}p\right)$，因为 $MN\perp l$，$\angle MFx=60°$，所以 $\angle NMF=60°$，又 $|MN|=|MF|$，所以 $\triangle NMF$ 为等边三角形，所以 $\angle MNF=\angle NFO=60°$，过 Q 作 x 轴的垂线交 x 轴于 G，设 $|FG|=a$，因为 $\angle NFO=60°$，所以 $|QG|=\sqrt{3}a$，所以 $x_G=\frac{p}{2}-a$，所以 $Q\left(\frac{p}{2}-a,\sqrt{3}a\right)$，因为 Q 在抛物线上，所以 $3a^2=2p\left(\frac{p}{2}-a\right)$，解得 $a=\frac{p}{3}$，所以 $x_Q=\frac{p}{2}-\frac{p}{3}=\frac{p}{6}$，$Q\left(\frac{p}{6},\frac{\sqrt{3}p}{3}\right)$，所以 $|QF|=\frac{p}{6}+\frac{p}{2}=\frac{2p}{3}$，又 $N\left(-\frac{p}{2},\sqrt{3}p\right)$，所以 $|NQ|=\frac{4p}{3}$，则 $\frac{|NQ|}{|QF|}=2$.故选D.

6.B　**提示**：由题意，得 $F_1(-c,0)$，$|F_1H|=\frac{|-bc|}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{bc}{c}=b$，因为 $|F_1O|=c$，所以 $|OH|=a$，过 F_2 作 $F_2Q\perp F_1P$ 于点 Q，由 $OH/\!/F_2Q$，O 为 F_1F_2 的中点，得 OH 为 $\triangle QF_1F_2$ 的中位线，所以 $|F_1H|=|HQ|$，即 H 是 F_1Q 的中点，因为 $2\overrightarrow{F_1H}=\overrightarrow{HP}$，所以 $|F_2Q|=2a$，$|HQ|=b$，$|PQ|=b$，$|PF_1|=3b$，所以 F_2 到直线 l 的距离 $|F_2Q|=2a$，故A错误；在 $\triangle QPF_2$ 中，$b^2+4a^2=|PF_2|^2=25$，又 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，即 $3b-5=2a$，解得 $b=3$，$a=2$，则 $c=\sqrt{13}$，所以双曲线 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{2}$，故B正确；$\sin\angle PF_1F_2=\sin\angle HF_1O=\frac{a}{c}=\frac{2}{\sqrt{13}}$，设 $\triangle PF_1F_2$ 的外接圆半径为 R，所以 $2R=\frac{|PF_2|}{\sin\angle PF_1F_2}=\frac{5\sqrt{13}}{2}$，所以 $R=\frac{5\sqrt{13}}{4}$，故C错误；$\triangle PF_1F_2$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|F_1P||F_1F_2|\sin\angle PF_1F_2=\frac{1}{2}\cdot3b\cdot2c\cdot\frac{a}{c}=3ab=18$，故D错误.故选B.

7.C　**提示**：由椭圆方程可知 $a=2$，$b=\sqrt{3}$，则 $c=1$.对于A，由椭圆的定义，得 $|PF_1|+|PF_2|=2a=4$，又 $|F_1F_2|=2c=2$，所以 $\triangle PF_1F_2$ 的周长是 $4+2=6$，故A正确；对于B，设点 $P(x_0,y_0)(y_0\neq0)$，因为 $|F_1F_2|=2$，所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_0|\leqslant\frac{1}{2}\cdot2c\cdot b=\sqrt{3}$，故B正确；对于C，由椭圆的性质，得当点 P 为椭圆 C 短轴的一个端点时，$\angle F_1PF_2$ 最大，此时 $|PF_1|=|PF_2|=a=2$，又 $|F_1F_2|=2$，则 $\triangle PF_1F_2$ 为正三角形，$\angle F_1PF_2=60°$，所以不存在点 P，使 $PF_1\perp PF_2$，故C错误；对于D，由椭圆的性质可知，当点 P 为椭圆 C 的右顶点时，$|PF_1|$ 取得最大值，此时 $|PF_1|=a+c=3$，当点 P 为椭圆 C 的左顶点时，$|PF_1|$ 取得最小值，此时 $|PF_1|=a-c=1$，所以 $|PF_1|\in[1,3]$，故D正确.故选C.

8.B　**提示**：由抛物线 $C_1:y^2=12x$，得焦点为 $F(3,0)$，$p=6$.由圆 $C_2:x^2+y^2-6x=0$，即 $(x-3)^2+y^2=9$，得圆心为 $C_2(3,0)$，半径 $r=3$.设 $A(x_1,y_1)$，$(x_1>0,y_1>0)$，$B(x_2,y_2)$，当直线 $l\perp x$ 轴时，$|AM|+4|BN|=|AF|-r+4(|BF|-r)=5|AF|-5r=5\times6-5\times3=15$.当直线 l 与 x 轴不垂直时，设直线 l 的方程为 $y=k(x-3)(k\neq0)$，联立 $\begin{cases}y=k(x-3),\\y^2=12x,\end{cases}$ 得 $k^2x^2-(6k^2+12)x+9k^2=0$，则 $x_1x_2=9$，所以 $|AM|+4|BN|=|AF|-r+4(|BF|-r)=x_1+\frac{p}{2}+4\left(x_2+\frac{p}{2}\right)-5r=x_1+\frac{36}{x_1}+15-15\geqslant2\sqrt{x_1\cdot\frac{36}{x_1}}=12$，当且仅当 $x_1=6$ 时，取等号.

综上，$|AM|+4|BN|$ 的最小值为12.故选B.

二、多项选择题

9.BD　**提示**：设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，由抛物线 $C:y^2=x$，得 $F\left(\frac{1}{4},0\right)$，由抛物线的定义，得 $|FM|=x_1+\frac{1}{4}$，$|FN|=x_2+\frac{1}{4}$，由题意，得 $|FM|=|FN|$，则 $x_1=x_2$，$y_2=-y_1$，所以 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=\left(x_1-\frac{1}{4},y_1\right)\cdot\left(x_1-\frac{1}{4},-y_1\right)=\left(x_1-\frac{1}{4}\right)^2-y_1^2=\left(x_1-\frac{1}{4}\right)^2-x_1=0$，解得 $x_1=\frac{3}{4}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $|FM|=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $|MN|=\sqrt{2}\times\left(1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\pm1$.故选BD.

10.AC　**提示**：对于A，根据对称性，连接 OP，OQ，则 $|OF_2|=|OF_1|$，$|OP|=|OQ|$，所以四边形 PF_1QF_2 是平行四边形，所以 $|PF_2|=|QF_1|$，所以 $|PF_1|+|QF_1|=|PF_1|+|PF_2|=2a=4$，故A正确；对于B，由题意知，$a=2$，$b=1$，则 $c=\sqrt{3}$，$|BF_1|=a+c=2+\sqrt{3}$，又 $A(0,1)$，所以 $\triangle AF_1B$ 的面积为 $\frac{1}{2}\cdot|BF_1|\cdot|OA|=\frac{1}{2}\times(2+\sqrt{3})\times1=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，故B错误；对于C，由题意，得 $B(2,0)$，设 $P(x,y)$，则 $Q(-x,-y)$，所以 $k_{PB}\cdot k_{QB}=\frac{y}{x-2}\cdot\frac{-y}{(-x)-2}=\frac{y^2}{x^2-4}=\frac{\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}{x^2-4}=-\frac{1}{4}$，故C正确；对于D，由 $\tan\angle F_1AO=\frac{c}{b}=\sqrt{3}$，得 $\angle F_1AO=\frac{\pi}{3}$，则 $\angle F_1AF_2=\frac{2\pi}{3}$，故椭圆上存在点 P，使得 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$，又四边形 PF_1QF_2 是平行四边形，所以四边形 PF_1QF_2 可能是矩形，故D错误.故选AC.

11.AC　**提示**：由题意，得 $c=5$，因为 F_2 到直线 $y=\frac{b}{a}x$ 的距离为4，则 $b=4$，所以 $a=3$，离心率 $e=\frac{5}{3}$，故A正确；若 Q 在双曲线的右支上，则 $|QF_1|_{\min}=a+c=8$，又 $|QF_1|=7$，所以 Q 只能在双曲线的左支上，故 $|QF_2|-|QF_1|=2a=6$，所以 $|QF_2|=13$，故B错误；若过 F_2 的直线交双曲线右支于 A，B，则 $|AB|$ 的最小值为双曲线的通径，即 $|AB|_{\min}=\frac{2b^2}{a}=\frac{32}{3}$，故C正确；若 M 在双曲线上，且 $MF_1\perp MF_2$，设 $|MF_1|=m$，$|MF_2|=n$，则 $|m-n|=2a=6$，即 $m^2+n^2-2mn=36$，又 $m^2+n^2=4c^2=100$，所以 $mn=32$，则 $\triangle MF_1F_2$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}mn=16$，故D错误.故选AC.

12.ABD　**提示**：由题意，得 $\frac{c}{a}=\frac{3}{4}$，$2a+2c=14$，又 $a^2=b^2+c^2$，解得 $a=4$，$c=3$，$b=\sqrt{7}$，所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$，故A正确；设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，则 $m+n=2a=8\geqslant2\sqrt{mn}$，则 $mn\leqslant16$，当且仅当 $m=n$ 时，取等号，故B正确；设 $\triangle F_1PF_2$ 内切圆的半径为 r，则 $\frac{1}{2}r(2a+2c)=\frac{1}{2}\times2c\times|y_P|\leqslant3\sqrt{7}$，所以 $r\leqslant\frac{3\sqrt{7}}{7}$，所以 $\triangle F_1PF_2$ 内切圆的面积 $S=\pi r^2\leqslant\frac{9\pi}{7}$，故C错误；$\cos\angle F_1PF_2=\frac{m^2+n^2-(2c)^2}{2mn}=\frac{(m+n)^2-2mn-4c^2}{2mn}=\frac{14}{m\cdot n}-1\geqslant\frac{14}{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2}-1=-\frac{1}{8}$，当且仅当 $m=n=4$ 时，取等号，故D正确.故选ABD.

三、填空题

13.$\sqrt{2}$　**提示**：设直线 $l:y=k(x-2)+1$，联立 $\begin{cases}x^2=4y,\\y=k(x-2)+1,\end{cases}$ 得 $x^2-4kx+8k-4=0$，所以 $\Delta=16k^2-32k+16=0$，解得 $k=1$，所以直线 $l:y=x-1$，即 $l:x-y-1=0$，因为 $F(0,1)$，所以点 F 到直线 l 的距离 $d=\frac{|0-1-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

14.$\sqrt{5}$ 或 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$　**提示**：因为椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，所以 $a^2=9$，$b^2=4$，则 $c=\sqrt{5}$，设 $P(x,y)$，因为 $P(x,y)$ 为椭圆上的动点，所以 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，又 $\triangle F_1PF_2$ 为直角三角形，所以当 $PF_2\perp F_1F_2$ 时，易知 $x=\sqrt{5}$，即点 P 的横坐标是 $\sqrt{5}$；当 $PF_1\perp PF_2$ 时，由圆的性质可知，点 P 落在以 F_1F_2 为直径的圆在第一象限的弧上，此时圆心为 $O(0,0)$，半径 $r=\frac{1}{2}|F_1F_2|=c=\sqrt{5}$，故点 P 的轨迹方程为 $x^2+y^2=5(x>0,y>0)$，联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,\\x^2+y^2=5,\end{cases}$ 解得 $x=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 或 $x=-\frac{3\sqrt{5}}{5}$(舍去)，即点 P 的横坐标是 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.综上，点 P 的横坐标是 $\sqrt{5}$ 或 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

15.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　**提示**：因为 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$，所以 $c^2=\frac{5}{2}a^2$，$b^2=\frac{3}{2}a^2$，设双曲线的左焦点为 F_1，连接 AF_1，BF_1，由双曲线的对称性，知 $|OA|=|OB|$，$|OF|=|OF_1|$，又 $AF\perp BF$，所以四边形 $AFBF_1$ 为矩形，设 $|AF|=m>0$，由双曲线的定义，知 $|AF_1|=2a+m$，在 $Rt\triangle F_1AF$ 中，$|F_1F|^2=|AF|^2+|AF_1|^2$，即 $4c^2=(2a+m)^2+m^2$，整理得 $m^2+2am-3a^2=0$，即 $(m-a)(m+3a)=0$，又 $m>0$，所以 $m=a$，$|AF_1|=3a$，连接 QF_1，设 $|QF|=n>0$，由双曲线的定义，知 $|QF_1|=2a+n$，在 $Rt\triangle F_1AQ$ 中，$|F_1Q|^2=|AQ|^2+|AF_1|^2$，即 $(2a+n)^2=(a+n)^2+(3a)^2$，解得 $n=3a$，即 $|QF|=3a$，又 $|BF|=|AF_1|=3a$，所以在 $Rt\triangle BFQ$ 中，$|BQ|=\sqrt{|BF|^2+|FQ|^2}=3\sqrt{2}a$，所以 $\frac{|QF|}{|BQ|}=\frac{3a}{3\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

16.1　**提示**：当直线 l 的斜率为0时，A，B 分别为椭圆左、右顶点，则 $k_1\cdot k_2=\frac{1-0}{2+\sqrt{2}}\times\frac{1-0}{2-\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$.当直线 l 的斜率不为0时，设直线 l 的方程为 $x=my+1$，点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，与椭圆方程联立，整理得 $(m^2+2)y^2+2my-1=0$.所以 $y_1+y_2=-\frac{2m}{m^2+2}$，$y_1y_2=-\frac{1}{m^2+2}$.所以 $k_1\cdot k_2=\frac{y_1-1}{x_1-2}\cdot\frac{y_2-1}{x_2-2}=\frac{(y_1-1)(y_2-1)}{(my_1-1)(my_2-1)}=\frac{y_1y_2-(y_1+y_2)+1}{m^2y_1y_2-m(y_1+y_2)+1}=\frac{m^2+2m+1}{2m^2+2}=\frac{1}{2}+\frac{m}{m^2+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{m+\frac{1}{m}}$，当 $m>0$ 时，$m+\frac{1}{m}\geqslant2\sqrt{m\cdot\frac{1}{m}}=2$，当且仅当 $m=\frac{1}{m}$，即 $m=1$ 时，等号成立，此时 $k_1\cdot k_2\leqslant1$.当 $m<0$ 时，$m+\frac{1}{m}=-\left(-m+\frac{1}{-m}\right)\leqslant-2\sqrt{(-m)\cdot\frac{1}{-m}}=-2$，当且仅当 $-m=-\frac{1}{m}$，即 $m=-1$ 时，等号成立，此时，$k_1\cdot k_2\geqslant0$.综上，$k_1\cdot k_2$ 的最大值为1.

四、解答题

17.**解**：(1)因为椭圆 C 的长轴长为 $4\sqrt{2}$，所以 $2a=4\sqrt{2}$，得 $a=2\sqrt{2}$.又椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $(2,-\sqrt{2})$，所以 $\frac{4}{8}+\frac{2}{b^2}=1$，解得 $b^2=4$.所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=1$，此时线段 AB 中点为 $(1,0)$，不符合题意.

所以设直线 l 的方程为 $y-1=k(x-1)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.联立 $\begin{cases}y-1=k(x-1),\\\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2-4k(k-1)x+2(k-1)^2-8=0$，则 $\Delta>0$，$x_1+x_2=\frac{4k(k-1)}{1+2k^2}$，因为 $P(1,1)$ 为线段 AB 的中点，所以 $\frac{4k(k-1)}{1+2k^2}=2$，解得 $k=-\frac{1}{2}$，所以直线 l 的方程为 $x+2y-3=0$.

18.(1)**解**：由题意，得动点 P 到点 $T\left(0,\frac{3}{2}\right)$ 的距离与它到直线 $l:y=-\frac{3}{2}$ 的距离相等.由抛物线的定义，知动点 P 的轨迹 C 的方程为 $x^2=6y$.

(2)**证明**：设直线 l 的方程为 $y=kx+\frac{3}{2}$，联立 $\begin{cases}y=kx+\frac{3}{2},\\x^2=6y,\end{cases}$ 得 $x^2-6kx-9=0$.设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=6k$，$x_1x_2=-9$，所以 $y_1+y_2=6k^2+3$，$y_1y_2=\frac{9}{4}$，所以 $\frac{1}{|AT|}+\frac{1}{|BT|}=\frac{1}{y_1+\frac{3}{2}}+\frac{1}{y_2+\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$，所以 $\frac{1}{|AT|}+\frac{1}{|BT|}$ 为定值.

19.**解**：(1)由题意得 $2b=2\sqrt{3}$，即 $b=\sqrt{3}$，由 $\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{BF_2}=0$，得 AB 的中点为 F_2，则 $\triangle ABF_1$ 的周长为 $|AF_1|+|AF_2|+(|BF_1|+|BF_2|)=4a=8$，则 $a=2$，所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)显然直线 l 的斜率存在且不为0，设直线 l 的方程为 $y=kx+t$，联立 $\begin{cases}y=kx+t,\\3x^2+4y^2=12,\end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-12=0$，由 $\Delta=64k^2t^2-4(3+4k^2)\cdot(4t^2-12)=0$，得 $t^2=4k^2+3$，则 $x_M=-\frac{8kt}{2(3+4k^2)}=-\frac{4k}{t}$，由 $OP\perp l$，得直线 OP 的方程为 $y=-\frac{1}{k}x$，联立 $\begin{cases}y=-\frac{1}{k}x,\\y=kx+t,\end{cases}$ 得 $x_P=-\frac{kt}{k^2+1}$，所以 $|MP|=\frac{|k|}{|t|\sqrt{1+k^2}}$，又 $|OP|=\frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}$，所以 $S_{\triangle OMP}=\frac{1}{2}\cdot|MP|\cdot|OP|=\frac{1}{2}\cdot\frac{|k|}{|t|\sqrt{1+k^2}}\cdot\frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{|k|+\frac{1}{|k|}}\leqslant\frac{1}{4}$，当且仅当 $k=\pm1$ 时，等号成立.所以 $\triangle OMP$ 的面积的最大值为 $\frac{1}{4}$.

20.**解**：(1)由题意，知当点 P 在短轴端点时，$\triangle PF_1F_2$ 的面积最大，且为正三角形，所以 $\frac{1}{2}\cdot2c\cdot b=bc=\sqrt{3}$，$b=$