一个法向量为$\boldsymbol{n}=(0,1,-2\lambda)$.由(1)知$BD\perp$平面$ADM$,所以平面$ADM$的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(0,1,0)$,因为二面角$H-AD-M$的余弦值为$\frac{3\sqrt{3}}{13}$,所以$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{1+4\lambda^2}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$,解得$\lambda=\frac{1}{3}$(舍负),故线段$MN$上存在点$H$,使得二面角$H-AD-M$的余弦值为$\frac{3\sqrt{3}}{13}$,点$H$为靠近点$M$的三等分点.

第36期

第2~3版专题检测

一、单项选择题

1.A **提示**:由题意,得$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1+4-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=9$,则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2$,所以$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影向量为$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.故选A.

2.B **提示**:由题意结合正弦定理,得$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=6\sqrt{2}$.故选B.

3.C **提示**:因为$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,所以$\alpha+\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$,又$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{5}<\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$,所以$\alpha+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$,所以$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\sqrt{6}}{5}$,所以$\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=2\times\frac{2\sqrt{6}}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{4\sqrt{6}}{25}$,故选C.

4.D **提示**:由题意,得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4-2m=0$,解得$m=2$,则$\boldsymbol{b}=(1,2)$,所以$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(6,2)$,所以$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=2\sqrt{10}$.故选D.

5.A **提示**:因为$2b\sin A-\sqrt{3}a=0$,所以由正弦定理,得$2\sin B\sin A=\sqrt{3}\sin A$,又$\sin A>0$,所以$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$,又$B$为锐角,所以$B=\frac{\pi}{3}$.因为$3c=3a+\sqrt{3}b$,所以由正弦定理,得$\sin C=\sin A+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin B=\sin A+\frac{1}{2}$,又$C=\pi-(B+A)$,所以$\sin\left(\frac{\pi}{3}+A\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A=\sin A+\frac{1}{2}$,即$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A-\frac{1}{2}\sin A=\frac{1}{2}$,所以$\sin\left(\frac{\pi}{3}-A\right)=\frac{1}{2}$,又$A\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$,所以$\frac{\pi}{3}-A\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$,所以$\frac{\pi}{3}-A=\frac{\pi}{6}$,则$A=\frac{\pi}{6}$.故选A.

6.D **提示**:因为$f(x)$的相邻两个零点之间的距离为π,所以$f(x)$的最小正周期为2π,则$\frac{2\pi}{2\omega}=2\pi$,解得$\omega=\frac{1}{2}$,所以$f(x)=3\sin(x+\varphi)$,因为$f(x)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{6}$对称,所以$\frac{\pi}{6}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,得$\varphi=k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,当$k=0$,即$\varphi=\frac{\pi}{3}$时,$f(x)=3\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$,当$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right]$时,$x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$,则$f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right]$上单调递增,符合题意.故选D.

7.B **提示**:由$a\sin\frac{A+C}{2}=b\sin A$及正弦定理,得$\sin A\sin\frac{A+C}{2}=\sin B\sin A$,又$\sin A>0$,则$\sin\frac{A+C}{2}=\sin B=\sin(A+C)=2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A+C}{2}$,因为$A+C\in(0,\pi)$,则$\frac{A+C}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以$\sin\frac{A+C}{2}>0$,所以$\cos\frac{A+C}{2}=\frac{1}{2}$,则$\frac{A+C}{2}=\frac{\pi}{3}$,故$A+C=\frac{2\pi}{3}$,所以$B=\frac{\pi}{3}$,又$b=1$,由余弦定理,得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,所以$1+ac=a^2+c^2\geqslant 2ac$,则$ac\leqslant 1$,当且仅当$a=c$时,取等号,所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}$,当且仅当$a=c$时,取等号.故选B.

8.A **提示**:由题意知,$g(x)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)$,因为$g(x)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{12}$对称,所以$2\times\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,则$\varphi=k\pi-\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$,又$0<\varphi<\pi$,所以$\varphi=\frac{2\pi}{3}$,所以$h(x)=2\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$,当$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$时,$x+\frac{2\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$,所以当$x+\frac{2\pi}{3}=\pi$,即$x=\frac{\pi}{3}$时,$h(x)$取得最小值$-2$.故选A.

二、多项选择题

9.ABD **提示**:对于A,若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$垂直,则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1+2m=0$,解得$m=\frac{1}{2}$,故A正确;对于B,若$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,则$-m=1\times 2$,解得$m=-2$,故B正确;对于C,若$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,则$\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{1^2+m^2}$,解得$m=\pm 2$,故C错误;对于D,若$m=3$,则$\boldsymbol{b}=(1,3)$,设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\theta$,则$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{5}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,因为$\theta\in[0,\pi]$,所以$\theta=\frac{\pi}{4}$,故D正确.故选ABD.

10.BD **提示**:对于A,$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta-(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$,故A错误;对于B,$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$,故B正确;对于C,由$\tan(50°+70°)=\tan 120°=-\sqrt{3}=\frac{\tan 50°+\tan 70°}{1-\tan 50°\tan 70°}$,得$\tan 50°+\tan 70°=\sqrt{3}\tan 50°\tan 70°-\sqrt{3}$,所以$\tan 50°+\tan 70°-\sqrt{3}\tan 50°\tan 70°=-\sqrt{3}$,故C错误;对于D,$\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha=-2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$,故D正确.故选BD.

11.AD **提示**:因为$b^2+c^2-\sqrt{3}bc=a^2$,由余弦定理的推论,得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以$A=\frac{\pi}{6}$,由$bc=\sqrt{3}a^2$,及$b^2+c^2-\sqrt{3}bc=a^2$,消去$a$,得$\sqrt{3}b^2-4bc+\sqrt{3}c^2=0$,即$(\sqrt{3}b-c)(b-\sqrt{3}c)=0$,所以$c=\sqrt{3}b$或$b=\sqrt{3}c$.当$c=\sqrt{3}b$时,$a=b$,此时$A=B=\frac{\pi}{6}$,$C=\frac{2\pi}{3}$;当$b=\sqrt{3}c$时,$a=c$,此时$A=C=\frac{\pi}{6}$.故选AD.

12.ABD **提示**:由图象,得$A=2$,$\frac{1}{4}\times\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}$,所以$\omega=1$.根据五点作图法,得$1\times\frac{\pi}{6}+\varphi=0$,所以$\varphi=-\frac{\pi}{6}$,函数$f(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$,则$f(x+\pi)=2\sin\left(x+\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-f(x)$,故A错误;当$x\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$时,$x-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$,则$f(x)$不具有单调性,故B错误;因为$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=-2$,所以$f(x)$的图象关于直线$x=\frac{5\pi}{3}$对称,故C正确;当$x\in\left[-\frac{7\pi}{12},-\frac{5\pi}{12}\right]$时,$x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{3\pi}{4},-\frac{7\pi}{12}\right]$,则$f(x)$取不到$-2$,故D错误.故选ABD.

三、填空题

13.-1或$-\frac{1}{3}$ **提示**:由题意,得$2\lambda+1+\lambda(3\lambda+2)=0$,即$3\lambda^2+4\lambda+1=0$,解得$\lambda=-1$或$\lambda=-\frac{1}{3}$.

14.$\frac{\pi}{4}$ **提示**:因为$\alpha\in(0,\pi)$,$\cos\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$,所以$\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$,$\tan\alpha=\frac{1}{3}$,又$\tan(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$,所以$\tan\beta=-\tan(\alpha-\beta-\alpha)=-\frac{\tan(\alpha-\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha-\beta)\tan\alpha}=1$,又$\beta\in(0,\pi)$,所以$\beta=\frac{\pi}{4}$.

15.2 **提示**:由$2b\cos B=a\cos C+c\cos A$及正弦定理,得$2\sin B\cos B=\sin A\cos C+\sin C\cos A=\sin(A+C)$,又$A+B+C=\pi$,则$2\sin B\cos B=\sin(\pi-B)=\sin B$,又$\sin B>0$,所以$\cos B=\frac{1}{2}$,则$B=\frac{\pi}{3}$,由$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac=\sqrt{3}$,得$ac=4$,由余弦定理,得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac\geqslant 2ac-ac=ac=4$,当且仅当$a=c=2$时,等号成立,所以$b\geqslant 2$,即$b$的最小值为2.

16.$\left[\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right]$ **提示**:当$x\in\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$时,$\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{5\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}\right]$,因为$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$在$\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$上单调递增,所以$-\frac{\pi}{2}\leqslant-\frac{5\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}$,且$\frac{2\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}$,解得$\omega\leqslant\frac{1}{2}$,所以$0<\omega\leqslant\frac{1}{2}$,又存在唯一$x_0\in\left[0,\frac{5\pi}{6}\right]$,使得$f(x_0)=1$,当$x\in\left[0,\frac{5\pi}{6}\right]$时,$\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}\right]$,所以$\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{5\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{2}$,解得$\frac{2}{5}\leqslant\omega<\frac{14}{5}$,所以$\omega$的取值范围是$\left[\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right]$.

四、解答题

17.**解**:(1)因为$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{7\sqrt{2}}{10}$,所以$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha=\frac{7\sqrt{2}}{10}$,则$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{7}{5}$,又$\cos 2\alpha=\frac{7}{25}$,即$(\cos\alpha+\sin\alpha)\cdot\left(-\frac{7}{5}\right)=\frac{7}{25}$,所以$\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{1}{5}$.

(2)由(1)可得$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{7}{5}$,$\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{1}{5}$,所以$\sin\alpha=\frac{3}{5}$,$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$,$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}$,

所以$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=\frac{1}{7}$.

18.**解**:(1)因为$a\cos C-c\cos(B+C)=-\frac{b}{3\cos(A+B)}$,所以$a\cos C+c\cos A=\frac{b}{3\cos C}$,由正弦定理,可得$\sin A\cos C+\sin C\cos A=\frac{\sin B}{3\cos C}$,所以$\sin(A+C)=\sin B=\frac{\sin B}{3\cos C}$,又$\sin B>0$,所以$\cos C=\frac{1}{3}$,所以$\sin C=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,$\tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=2\sqrt{2}$.

(2)由$c=3$,$\sin C=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,结合正弦定理,得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$,则$a=\frac{9\sqrt{2}}{4}\sin A$,$b=\frac{9\sqrt{2}}{4}\sin B$,又$\sin A\sin B=\frac{16}{27}$,所以$ab=\frac{162}{16}\sin A\sin B=6$,所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 6\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{2}$.

19.**解**:(1)因为$AB=25\sqrt{6}$,$\angle DBA=15°$,$\angle DAB=45°$,所以$\angle ADB=120°$,在$\triangle ABD$中,由正弦定理,可得$\frac{BD}{\sin\angle DAB}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$,即$\frac{BD}{\sin 45°}=\frac{25\sqrt{6}}{\sin 120°}$,所以$BD=50$海里.

(2)在$\triangle BCD$中,$\angle CBD=60°$,$BC=80$,$BD=50$,由余弦定理,可得$CD^2=BC^2+BD^2-2BC\cdot BD\cos\angle CBD=6400+2500-2\times 80\times 50\times\frac{1}{2}=4900$,解得$CD=70$海里,所以该救援船到达$D$点需要的时间为$\frac{70}{35}=2$小时.

20.**解**:(1)因为$f(x)$的图象中相邻的两个对称中心的距离为$\frac{\pi}{2}$,故函数$f(x)$的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,所以$\omega=2$.

选择条件①:函数$f(x)$的图象关于直线$x=-\frac{\pi}{12}$对称,所以$f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=\pm 2$,所以$-\frac{\pi}{6}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,解得$\varphi=k\pi+\frac{2\pi}{3}$,又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=-\frac{\pi}{3}$,所以$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

选择条件②:函数$f(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$对称,即$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$,故$2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得$\varphi=k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=-\frac{\pi}{3}$,所以$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

选择条件③:对任意实数x,$f(x)\leqslant f\left(\frac{5\pi}{12}\right)$恒成立,故$f(x)_{\max}=f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=2$,所以$2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,得$\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=-\frac{\pi}{3}$,所以$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

(2)将函数$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度,得到$g(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象,因为$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$,所以$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$,所以$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$,$g(x)\in[-1,2]$,由题意,得$m\geqslant g(x)_{\min}$,即$m\geqslant-1$,所以实数$m$的取值范围是$[-1,+\infty)$.

21.**解**:(1)选①,$\sqrt{3}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2S_{\triangle ABC}$,所以$\sqrt{3}ac\cos B=2\times\frac{1}{2}ac\sin B$,所以$\sin B=\sqrt{3}\cos B$,则$\tan B=\sqrt{3}$,因为$B\in(0,\pi)$,所以$B=\frac{\pi}{3}$.

选②,$(2a-c)\cos B=b\cos C$,由正弦定理,得$2\sin A\cos B-\sin C\cos B=\sin B\cos C$,所以$2\sin A\cos B=\sin A$,因为$A\in(0,\pi)$,所以$\sin A>0$,所以$\cos B=\frac{1}{2}$,又$B\in(0,\pi)$,所以$B=\frac{\pi}{3}$.

选③,$b\sin A=a\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)$,由正弦定理,得$\sin B\sin A=\sin A\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)$,则$\sin B=\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B$,所以$\tan B=\sqrt{3}$,又$B\in(0,\pi)$,所以$B=\frac{\pi}{3}$.

(2)因为$a+c=\sqrt{3}b$,所以$\sin A+\sin C=\sqrt{3}\sin B$,由(1)知,$B=\frac{\pi}{3}$,则$A+C=\frac{2\pi}{3}$,所以$\sin A+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=\frac{3}{2}$,化简得,$\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,因为$0<A<\frac{2\pi}{3}$,所以$A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$,则$A=\frac{\pi}{6}$或$\frac{\pi}{2}$,所以当$A=\frac{\pi}{6}$时,$C=\frac{\pi}{2}$;当$A=\frac{\pi}{2}$时,$C=\frac{\pi}{6}$.

综上,$\triangle ABC$为直角三角形.

22.**解**:(1)函数$f(x)=4\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin x+(\sin x+\cos x)\cdot(\sin x-\cos x)+1=\left[2+2\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]\sin x+\sin^2x-\cos^2x+1=2\sin x-2\sin^2x+2\sin^2x=2\sin x$,因为函数$y=f(\omega x)=2\sin\omega x$在区间$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$上是增函数,所以$\begin{cases}\omega>0,\\-\frac{\pi}{2}\leqslant-\frac{\pi}{3}\omega,\\\frac{\pi}{2}\geqslant\frac{\pi}{2}\omega,\end{cases}$解得$0<\omega\leqslant 1$,所以$\omega$的取值范围是$(0,1]$.

(2)$g(x)=\frac{1}{2}\left[f(2x)-af(x)+af\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-a\right]-1=\frac{1}{2}\left[2\sin 2x-2a\sin x+2a\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-a\right]-1=\sin 2x-a\sin x+a\cos x-\frac{1}{2}a-1=2\sin x\cos x-a(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2}a-1$,令$\sin x-\cos x=t$,则$2\sin x\cos x=1-t^2$,$t=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$,因为$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,所以$-1\leqslant\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以$-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant 1$,则$g(x)$转化为$g(t)=1-t^2-at-\frac{1}{2}a-1=-t^2-at-\frac{1}{2}a$,对称轴为$t=-\frac{a}{2}$.因为$g(x)$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值为2,即$g(t)$在$[-\sqrt{2},1]$上的最大值为2,所以当$-\frac{a}{2}\geqslant 1$,即$a\leqslant-2$时,则$g(t)_{\max}=g(1)=-1-a-\frac{1}{2}a=2$,解得$a=-2$;当$-\sqrt{2}<-\frac{a}{2}<1$,即$-2<a<2\sqrt{2}$时,则$g(t)_{\max}=g\left(-\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}-\frac{1}{2}a=2$,解得$a=-2$(舍),或$a=4$(舍);当$-\frac{a}{2}\leqslant-\sqrt{2}$,即$a\geqslant 2\sqrt{2}$时,则$g(t)_{\max}=g(-\sqrt{2})=-2+\sqrt{2}a-\frac{1}{2}a=2$,解得$a=\frac{16\sqrt{2}+8}{7}$.

综上,实数a的值为-2或$\frac{16\sqrt{2}+8}{7}$.

扫码免费下载习题讲解ppt

第33期

第2~3版专题检测

一、单项选择题

1.A **提示**:由题意,得$\begin{cases}-x^2+x+6>0,\\1-x>0,\end{cases}$解得$-2<x<1$.故选A.

2.C **提示**:由题意,得$f\left(\frac{1}{9}\right)=\log_3\frac{1}{9}=-2$,所以$f\left(f\left(\frac{1}{9}\right)\right)=f(-2)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9$.故选C.

3.A **提示**:因为$y=\frac{1}{x}$是奇函数,且在$(0,+\infty)$上单调递减,故A满足条件;因为$y=\sin x$在$(0,+\infty)$上不单调,故B不满足条件;因为$y=x^{-2}$是偶函数,故C不满足条件;因为$y=e^x+e^{-x}$是偶函数,故D不满足条件.故选A.

4.B **提示**:因为函数$f(x)=(4-x^2)\ln|-x|$的定义域为$\{x|x\neq 0\}$,$f(-x)=(4-x^2)\ln|x|=f(x)$,所以$f(x)$为偶函数,排除A,D;当$x\in(0,1)$时,$4-x^2>0$,$\ln|-x|=\ln x<0$,则$f(x)<0$,排除C.故选B.

5.B **提示**:因为$f(x)=(a^2-2a-2)x^{a-1}$为幂函数,所以$a^2-2a-2=1$,解得$a=3$或$a=-1$,又$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,所以$a-1>0$,即$a>1$,所以$a=3$.故选B.

6.C **提示**:设$t$min后该物质溶解的质量为xg,由题意,得$\frac{x}{600+x}=20\%$,解得$x=150$,则$t$min后未溶解的质量为50g,又$M_0=200$,所以$200e^{-0.28t}=50$,得$e^{0.28t}=4$,所以$0.28t=2\ln 2$,解得$t\approx 5$.故选C.

7.C **提示**:令$g(x)=\frac{f(x)}{e^{3x}}$,则$g'(x)=\frac{f'(x)-3f(x)}{e^{3x}}$,因为$f'(x)>3f(x)(x\in\mathbf{R})$,所以$g'(x)>0$,所以$g(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增,又$g(\ln x)=\frac{f(\ln x)}{e^{3\ln x}}=\frac{f(\ln x)}{x^3}$,由$f\left(\frac{1}{3}\right)=e$,得$g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{e}=1$,所以不等式$f(\ln x)<x^3$,即$\frac{f(\ln x)}{x^3}<1$等价于$g(\ln x)<g\left(\frac{1}{3}\right)$,所以$\ln x<\frac{1}{3}$,解得$0<x<\sqrt[3]{e}$,所以原不等式的解集为$(0,\sqrt[3]{e})$.故选C.

8.D **提示**:由题意,得$2x\ln x+x^2+3>ax$在$(0,+\infty)$上恒成立,即$a<2\ln x+x+\frac{3}{x}$在$(0,+\infty)$上恒成立.令$g(x)=2\ln x+x+\frac{3}{x}$,则$g'(x)=\frac{2}{x}+1-\frac{3}{x^2}=\frac{(x+3)(x-1)}{x^2}$,当$x\in(0,1)$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减,当$x\in(1,+\infty)$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增,所以$g(x)_{\min}=g(1)=4$,所以$a<4$.故选D.

二、多项选择题

9.ABD **提示**:由图知,$f(x)$的极小值点为$x=-1$和$x=4$,极大值点为$x=2$,故C错误;$f(x)$在$(-2,-1)$,$(2,4)$上单调递减,故B正确;$f(x)$在$(-1,2)$上单调递增,则$f(1)<f(2)$,故A正确;由$f'(0)>0$,得$y=f(x)$在$x=0$处的切线的斜率大于0,故D正确.故选ABD.

10.AC **提示**:由$f(x)=\frac{x}{\ln x}(x>0$且$x\neq 1)$,得$f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$,所以$f'(e)=0$,所以曲线$y=f(x)$在$x=e$处的切线斜率为0,即切线平行于$x$轴,故A正确;令$f'(x)>0$,得$x>e$,令$f'(x)<0$,得$0<x<1$或$1<x<e$,所以$f(x)$在$(e,+\infty)$上单调递增,在$(0,1)$和$(1,e)$上单调递减,所以当$x=e$时,函数$f(x)$取得极小值$f(e)=e$,故B错误,C正确;易知当$0<x<1$时,$y=f(x)$的图象与直线$y=-1$有一个交点,此时方程$f(x)=-1$有一个实数解,故D错误.故选AC.

11.BD **提示**:构造函数$g(x)=\frac{f(x)}{x^3+x^2}(x>0)$,因为当$x\in(0,+\infty)$时,$(x^2+x)f'(x)<(3x+2)f(x)$,所以$g'(x)=\frac{(x^3+x^2)f'(x)-(3x^2+2x)f(x)}{(x^3+x^2)^2}=\frac{(x^2+x)f'(x)-(3x+2)f(x)}{x^3(x+1)^2}<0$,则$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,所以$g\left(\frac{1}{2}\right)>g(1)>g(2)>g(3)$,即$\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{8}}>\frac{f(1)}{2}>\frac{f(2)}{12}>\frac{f(3)}{36}$,所以$f(3)<18f(1)$,$f(2)<6f(1)$,$3f(1)<16f\left(\frac{1}{2}\right)$,$f(3)<3f(2)$.故选BD.

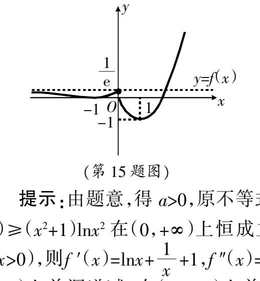
12.BCD **提示**:因为$f(x)=(x-1)e^x$,所以$f'(x)=xe^x$,由$f'(x)>0$,得$x>0$,由$f'(x)<0$,得$x<0$,所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,在$(-\infty,0)$上单调递减,又$x<0$时,$f(x)<0$,且$f(1)=0$,$f(0)=-1$,结合单调性,作出$f(x)$的大致图象(图略).对于A,由图象知,函数$f(x)$只有一个零点,为1,故A错误;对于B,因为$f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$,$(1,+\infty)\subseteq(0,+\infty)$,所以$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,故B正确;对于C,$f(x)_{\min}=f(0)=-1$,故C正确;对于D,由图象可知,当$a=-1$或$a\geqslant 0$时,$y=f(x)$的图象与直线$y=a$有1个交点,则方程$f(x)=a$有1个解,故D正确.故选BCD.

三、填空题

13.$\frac{13}{2}$ **提示**:原式$=\log_3 3^{\frac{3}{2}}+\lg(125\times 8)+2=\frac{3}{2}+3+2=\frac{13}{2}$.

14.$y=ex-e$ **提示**:由$f(x)=-e^x+ex^2$,得$f'(x)=-e^x+2ex$,则$f'(1)=e$,又$f(1)=0$,所以曲线$y=f(x)$在$x=1$处的切线方程是$y=e(x-1)=ex-e$.

15.-1或2,$\left(1,1+\frac{1}{e}\right)$ **提示**:当$x\leqslant 0$时,$f(x)=xe^x+\frac{1}{e}$,所以$f'(x)=(x+1)e^x$,令$f'(x)=0$,得$x=-1$,当$x<-1$时,$f'(x)<0$,当$-1<x<0$时,$f'(x)>0$,所以$f(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递减,在$(-1,0)$上单调递增,又$f(-1)=0$,故当$x\leqslant 0$时,$f(x)=0$有唯一的根-1.当$x>0$时,$f(x)=x^2-2x$,令$f(x)=0$,解得$x=0$(舍去)或$x=2$,故当$x>0$时,$f(x)=0$的根为2.综上,$f(x)=0$根为-1或2.当$x\leqslant 0$时,$f(x)_{\min}=f(-1)=0$,且$0\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{e}$;当$x>0$时,$f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$,所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,且$f(x)\geqslant-1$,如图,作出$y=f(x)$的大致图象,$y=f(f(x)-a)$的零点,即方程$f(f(x)-a)=0$的根,由$f(f(x)-a)=0$,得$f(x)-a=2$或$f(x)-a=-1$,即$f(x)=a+2$或$f(x)=a-1$,由图象得,要使函数$y=f(f(x)-a)$有四个零点,只需$y=f(x)$的图象与直线$y=a+2$和$y=a-1$共有4个交点,则$\begin{cases}a+2>\frac{1}{e},\\0<a-1<\frac{1}{e},\end{cases}$或$\begin{cases}-1<a+2<0,\\-1<a-1<0,\end{cases}$解得$1<a<1+\frac{1}{e}$,即实数$a$的取值范围是$\left(1,1+\frac{1}{e}\right)$.



(第15题图)

16.$\frac{2}{e}$ **提示**:由题意,得$a>0$,原不等式可转化为$\ln e^{ax}(e^{ax}+1)\geqslant(x^2+1)\ln x^2$在$(0,+\infty)$上恒成立.令$f(x)=(x+1)\ln x(x>0)$,则$f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}+1$,$f''(x)=\frac{x-1}{x^2}$,所以$f'(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,所以$f'(x)\geqslant f'(1)=2>0$,所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.当$x>0$时,$ax>0$,$x^2>0$,又原不等式转化为$f(e^{ax})\geqslant f(x^2)$,所以$e^{ax}\geqslant x^2$,则$ax\geqslant 2\ln x$,即$a\geqslant\frac{2\ln x}{x}$在$(0,+\infty)$上恒成立.设$h(x)=\frac{2\ln x}{x}$,则$h'(x)=\frac{2-2\ln x}{x}$,当$x\in(0,e)$时,$h'(x)>0$,$h(x)$单调递增,当$x\in(e,+\infty)$时,$h'(x)<0$,$h(x)$单调递减,所以$h(x)_{\max}=h(e)=\frac{2}{e}$,所以$a\geqslant\frac{2}{e}$.

四、解答题

17.**解**:(1)$f(3)=6$,$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}$,$f(f(0))=f(2)=4$.

(2)原不等式可转化为$\begin{cases}a\leqslant 1,\\a+2\leqslant 5,\end{cases}$或$\begin{cases}1<a<2,\\a^2\leqslant 5,\end{cases}$或$\begin{cases}a\geqslant 2,\\2a\leqslant 5,\end{cases}$解得$a\leqslant 1$或$1<a<2$或$2\leqslant a\leqslant\frac{5}{2}$,所以实数$a$的取值范围是$\left(-\infty,\frac{5}{2}\right]$.

18.**解**:(1)由题意,得$a^2-2a-2=1$,解得$a=3$,或$a=-1$,又$a>0$且$a\neq 1$,所以$a=3$,所以$g(x)=\log_3(x+1)+\log_3(3-x)$,所以$\begin{cases}x+1>0,\\3-x>0,\end{cases}$解得$-1<x<3$,则$g(x)$的定义域为$(-1,3)$,因为$g(x)=\log_3(x+1)+\log_3(3-x)=\log_3(-x^2+2x+3)$.令$u(x)=-x^2+2x+3(-1<x<3)$,由对称轴为$x=1$知,$u(x)$在$(-1,1)$上单调递增,在$(1,3)$上单调递减.又$y=\log_3 u$在$(0,+\infty)$上单调递增,故$g(x)$的单调递增区间为$(-1,1)$,单调递减区间为$(1,3)$.

(2)因为不等式$g(x)-m+3\leqslant 0$的解集非空,所以$m-3\geqslant g(x)_{\min}$,$x\in\left[\frac{1}{3},2\right]$,由(1)知,当$x\in\left[\frac{1}{3},2\right]$时,函数$g(x)$的单调递增区间为$\left[\frac{1}{3},1\right]$,单调递减区间为$[1,2]$,且$g\left(\frac{1}{3}\right)=\log_3\frac{32}{9}$,$g(2)=1$,所以$g(x)_{\min}=1$,所以$m-3\geqslant 1$,解得$m\geqslant 4$,所以实数$m$的取值范围为$[4,+\infty)$.

19.**解**:(1)函数$f(x)=ax^2+2\ln(1-x)$的定义域为$(-\infty,1)$,$f'(x)=2ax-\frac{2}{1-x}$,因为$f(x)$在$x=-1$处有极值,所以$f'(-1)=-2a-1=0$,解得$a=-\frac{1}{2}$,此时$f'(x)=-x-\frac{2}{1-x}=\frac{(x-2)(x+1)}{1-x}$,因为$x<1$,令$f'(x)<0$,得$-1<x<1$,所以$f(x)$的单调递减区间为$(-1,1)$.

(2)因为$f(x)$在$[-3,-2]$上是增函数,所以$f'(x)\geqslant 0$(且不恒为0)对$\forall x\in[-3,-2]$恒成立,所以$2ax-\frac{2}{1-x}\geqslant 0$,即$a\leqslant\frac{1}{(1-x)x}$在$[-3,-2]$上恒成立,因为$g(x)=(1-x)x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$在$[-3,-2]$上单调递增,所以$g(x)_{\max}=g(-2)=-6$,则$\frac{1}{(1-x)x}$的最小值为$-\frac{1}{6}$,所以$a\leqslant-\frac{1}{6}$,即$a$的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{1}{6}\right]$.

20.**解**:(1)当$a=0$时,$f(x)=x\ln x+x$,$f'(x)=\ln x+2$,所以切线的斜率为$f'(1)=2$,又$f(1)=1$,所以切线方程为$y-1=2(x-1)$,即$2x-y-1=0$.

(2)当$0<x<1$时,$f(x)>0$恒成立,即$a>\frac{x\ln x+x}{x-1}$在$(0,1)$上恒成立.令$g(x)=\frac{x\ln x+x}{x-1}$,则$g'(x)=\frac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$,令$h(x)=x-\ln x-2$,则$h'(x)=1-\frac{1}{x}$,由$h'(x)=0$,得$x=1$,当$0<x<1$时,$h'(x)<0$,$h(x)$单调递减,因为$h(1)=-1<0$,$h\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{1}{e^2}-\ln\frac{1}{e^2}-2=\frac{1}{e^2}>0$,所以$h(x)$在$(0,1)$存在唯一零点$x_0$,且$h(x_0)=x_0-\ln x_0-2=0$,即$\ln x_0=x_0-2$,所以当$0<x<x_0$时,$h(x)>0$,即$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增;当$x_0<x<1$时,$h(x)<0$,即$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减,所以$g(x)_{\max}=g(x_0)=\frac{x_0\ln x_0+x_0}{x_0-1}=\frac{x_0(x_0-2)+x_0}{x_0-1}=x_0$,所以$a>x_0$,因为$x_0\in(0,1)$,所以正整数$a$的最小值为1.

21.(1)**解**:易知$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=\frac{8x^2+(8-a)x-a}{x}=\frac{(8x-a)(x+1)}{x}$,当$a\leqslant 0$时,$f'(x)>0$,$f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$,无单调递减区间;当$a>0$时,令$f'(x)>0$,得$x>\frac{a}{8}$;令$f'(x)<0$,得$0<x<\frac{a}{8}$,所以$f(x)$的单调递减区间为$\left(0,\frac{a}{8}\right)$,单调递增区间为$\left(\frac{a}{8},+\infty\right)$.

综上,当$a\leqslant 0$时,$f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$,无单调递减区间;当$a>0$时,$f(x)$的单调递减区间为$\left(0,\frac{a}{8}\right)$,单调递增区间为$\left(\frac{a}{8},+\infty\right)$.

(2)**证明**:当$a=2$时,原不等式等价于$e^x-\ln x-2>0$.令$\varphi(x)=e^x-\ln x-2$,则$\varphi'(x)=e^x-\frac{1}{x}$,易知$\varphi'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,且$\varphi'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$,$\varphi'(1)=e-1>0$,所以$\varphi'(x)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上存在唯一零点$x_0$,且$\varphi'(x_0)=0$,所以$\varphi(x)$在$(0,x_0)$上单调递减,在$(x_0,+\infty)$上单调递增.要证$\varphi(x)>0$,即证$\varphi(x)_{\min}=\varphi(x_0)>0$,由$\varphi'(x_0)=e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$,得$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$,$x_0=\frac{1}{e^{x_0}}$,则$\varphi(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-2=\frac{1}{x_0}+x_0-2$,因为$x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,所以$\varphi(x_0)=\frac{1}{x_0}+x_0-2>2\sqrt{\frac{1}{x_0}\cdot x_0}-2=0$,所以$\varphi(x)>0$,即$f(x)>4x^2-2e^x+6x+4$.

22.**解**:(1)当$a=-1$时,$f(x)=-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x-\frac{5}{3}$,$f'(x)=-(x-1)(x+3)$,$x\in[-4,2]$,令$f'(x)>0$,解得$-3<x<1$,令$f'(x)<0$,解得$-4\leqslant x<-3$或$1<x\leqslant 2$,所以函数$f(x)$在$(-3,1)$上单调递增,在$[-4,-3)$和$(1,2]$上单调递减,又$f(-4)=-\frac{25}{3}$,$f(-3)=-\frac{32}{3}$,$f(1)=0$,$f(2)=-\frac{7}{3}$,所以函数$f(x)$在$[-4,2]$上的最大值为0,最小值为$-\frac{32}{3}$.

(2)存在实数m,使得不等式$f(x)<0$的解集为$(m,+\infty)$,等价于函数$f(x)$只有一个零点,因为$f'(x)=-x^2+2ax+3a^2=-(x-3a)(x+a)$.①当$a<0$时,令$f'(x)>0$,解得$3a<x<-a$,令$f'(x)<0$,解得$x<3a$或$x>-a$,所以函数$f(x)$在$(3a,-a)$上单调递增,在$(-\infty,3a)$,$(-a,+\infty)$上单调递减,又$f(0)=-\frac{5}{3}<0$,故只需$f(-a)<0$,即$-\frac{1}{3}(-a)^3+a\cdot(-a)^2+3a^2\cdot(-a)-\frac{5}{3}<0$,解得$a>-1$,所以$-1<a<0$;②当$a=0$时,$f(x)=-\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}$,所以$f(x)$只有一个零点,符合题意;③当$a>0$时,令$f'(x)>0$,解得$-a<x<3a$,令$f'(x)<0$,解得$x<-a$或$x>3a$,所以$f(x)$在$(-a,3a)$上单调递增,在$(-\infty,-a)$,$(3a,+\infty)$上单调递减,又$f(0)=-\frac{5}{3}<0$,故只需$f(3a)<0$,即$-\frac{1}{3}(3a)^3+a\cdot(3a)^2+3a^2\cdot 3a-\frac{5}{3}<0$,解得$a<\frac{\sqrt[3]{5}}{3}$,所以$0<a<\frac{\sqrt[3]{5}}{3}$.

综上,实数a的取值范围为$\left(-1,\frac{\sqrt[3]{5}}{3}\right)$.

第34期

第2~3版专题检测

一、单项选择题

1.B **提示**:因为$f(x-1)=x^2-2x=(x-1)^2-1$,所以$f(x)=x^2-1$,故选B.

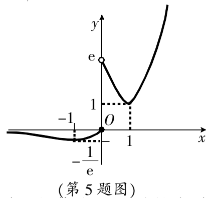
2.B **提示**:由$a=\log_2 6$,得$\frac{1}{a}=\log_6 2$,由$3^b=36$,得$\log_6 3^b=\log_6 36$,则$b\log_6 3=2$,所以$\frac{2}{b}=\log_6 3$,所以$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\log_6 2+\log_6 3=\log_6 6=1$.故选B.

3.A **提示**:因为$f(x)$是$\mathbf{R}$上的奇函数,所以$f(0)=0$,由$f(x+3)=-f(x)$,得$f(x+6)=-f(x+3)=f(x)$,所以$f(x)$是周期为6的周期函数,又当$x\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$时,$f(x)=2x-1$,所以$f(-2021)=f(-5)=f(1)=1$,又$f(2022)=f(0)=0$,所以$f(-2021)+f(2022)=1$.故选A.

4.B **提示**:因为幂函数$f(x)=x^a$的图象过点$(9,3)$,所以$9^a=3$,得$a=\frac{1}{2}$,所以$f(x)=\sqrt{x}$,$y=\frac{1-f(x)}{f(x)+1}=\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=\frac{2-(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}=\frac{2}{\sqrt{x}+1}-1$.因为$1\leqslant x\leqslant 9$,所以$2\leqslant\sqrt{x}+1\leqslant 4$,故$y=\frac{2}{1+\sqrt{x}}-1\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$,所以

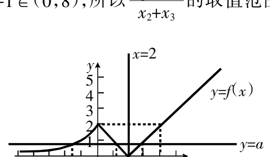
$y=\frac{1-f(x)}{1+f(x)}$在$[1,9]$上的值域为$\left[-\frac{1}{2},0\right]$.故选B.

5.B **提示**:方程$(f(x))^2-(1+m)f(x)+m=0$,即$(f(x)-1)\cdot(f(x)-m)=0$,则$f(x)=1$或$f(x)=m$,由题意得,$y=f(x)$的图象与直线$y=1$和$y=m$共有3个交点,作出$y=f(x)$的大致图象(如图),因为$y=f(x)$的图象与$y=1$有且仅有1个交点,所以$y=f(x)$的图象与直线$y=m$有2个交点,所以$m\in\left(-\frac{1}{e},0\right)\cup(1,e)$.故选B.



(第5题图)

6.C **提示**:如图,作出$y=f(x)$的大致图象,因为$x_1<x_2<x_3$,且$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$,令$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=a$,由图象知,$x_2+x_3=4$,$f(0)=2$,令$x-2=2$,得$x=4$,所以$2<x_3<4$,$f(x_1)=f(x_3)=x_3-2$,所以$\frac{x_3f(x_1)}{x_2+x_3}=\frac{x_3f(x_3)}{4}=\frac{x_3(x_3-2)}{4}=\frac{(x_3-1)^2-1}{4}$,由函数$y=(x-1)^2-1$在$(2,4)$上单调递增,得$(x_3-1)^2-1\in(0,8)$,所以$\frac{x_3f(x_1)}{x_2+x_3}$的取值范围是$(0,2)$.故选C.



(第6题图)

7.C **提示**:由$f(x)=e^x-\frac{1}{2}ax^2$,得$f'(x)=e^x-ax$,因为$x=x_1$和$x=x_2$分别是$f(x)$的两个极值点,则$e^{x_1}-ax_1=0$,$e^{x_2}-ax_2=0$,即$e^{x_1}=ax_1$,$e^{x_2}=ax_2$,又$x_2=2x_1$,所以$e^{x_2-x_1}=\frac{x_2}{x_1}=2$,则$x_2-x_1=\ln2$,即$2x_1-x_1=x_1=\ln2$,所以$a=\frac{e^{x_1}}{x_1}=\frac{2}{\ln2}$.故选C.

8.C **提示**:由$e^x>a\ln(ax-2a)-2a(a>0)$,得$\frac{e^x}{a}>\ln a+\ln(x-2)-2$,则$e^{x-\ln a}+x-\ln a>\ln(x-2)+x-2=e^{\ln(x-2)}+\ln(x-2)$.设$g(x)=e^x+x$,易知$g(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增,所以原不等式转化为$g(x-\ln a)>g(\ln(x-2))$恒成立,所以$x-\ln a>\ln(x-2)$,即$\ln a<x-\ln(x-2)$恒成立.设$h(x)=x-\ln(x-2)$,则$h'(x)=\frac{x-3}{x-2}$,当$x\in(2,3)$时,$h'(x)<0$,$h(x)$单调递减,当$x\in(3,+\infty)$时,$h'(x)>0$,$h(x)$单调递增,所以$h(x)_{min}=h(3)=3$,所以$\ln a<3$,解得$0<a<e^3$.故选C.

二、多项选择题

9.AC **提示**:由$y=(x+1)e^x$,得$y'=(x+2)e^x$,设切点的横坐标为x_0,则切线的斜率$k=(x_0+2)e^{x_0}$,切线方程为$y-(x_0+1)e^{x_0}=(x_0+2)e^{x_0}(x-x_0)$,因为切线过点$A(a,0)$,所以$-(1+x_0)e^{x_0}=(2+x_0)e^{x_0}(a-x_0)$,化简得$x_0^2+(1-a)x_0-2a-1=0$,又切线有且仅有1条,则$\Delta=(1-a)^2+4(2a+1)=a^2+6a+5=0$,解得$a=-1$或$a=-5$.故选AC.

10.BC **提示**:由$f(-x)=e(-x)^2+|-x|=f(x)$,且$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,得$f(x)$为偶函数,当$x>0$时,$f(x)=ex^2+x$,对称轴为$x=-\frac{1}{2e}<0$,所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,因为$f(x)$是偶函数,$f(1)=e+1$,所以$f(\ln x)<e+1=f(1)$,即$f(|\ln x|)<f(1)$,所以$|\ln x|<1$,则$-1<\ln x<1$,解得$\frac{1}{e}<x<e$.故选BC.

11.AC **提示**:$f'(x)=(x^2+2x)e^x$,当$x>0$或$x<-2$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,当$-2<x<0$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,所以当$x=-2$时,$f(x)$取得极大值,$x=0$时,$f(x)$取得极小值,若函数$f(x)$在区间$\left(k,k+\frac{3}{2}\right)$上不存在极值点,则$k+\frac{3}{2}\leqslant-2$或$k\geqslant0$或$-2\leqslant k\leqslant k+\frac{3}{2}\leqslant0$,解得$k\leqslant-\frac{7}{2}$或$k\geqslant0$或$-2\leqslant k\leqslant-\frac{3}{2}$,所以当$-\frac{7}{2}<k<-2$或$-\frac{3}{2}<k<0$时,$f(x)$在区间$\left(k,k+\frac{3}{2}\right)$上存在极值点,又$k$为整数,所以$k=-1$或$-3$.故选AC.

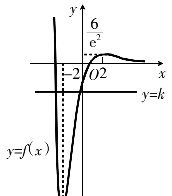
12.BD **提示**:因为$f(x)=(x^2-3)e^x$,所以$f'(x)=(x^2+2x-3)e^x$,由$f'(x)>0$,得$x<-3$或$x>1$,由$f'(x)<0$得$-3<x<1$,所以$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,-3)$和$(1,+\infty)$,单调递减区间为$(-3,1)$,所以当$x=-3$时,$f(x)$取得极大值$f(-3)=6e^{-3}$,当$x=1$时,$f(x)$取得极小值$f(1)=-2e$,又当$x\to-\infty$时,$f(x)\to0$;当$x\to+\infty$时,$f(x)\to+\infty$,作出$y=f(x)$的大致图象(图略).对于A,$f(x)$的极小值,也是最小值,且$f(x)_{min}=f(1)=-2e$,故A错误;对于B,$f(x)$有极大值$f(-3)=6e^{-3}$,但无最大值,故B正确;对于C,方程$f(x)=b$的根的个数,即$y=f(x)$的图象与直线$y=b$的交点个数,若函数$y=f(x)$的图象与直线$y=b$有1个交点,则$b=-2e$或$b>6e^{-3}$,故C错误;对于D,若$y=f(x)$的图象与直线$y=b$图象有3个交点,则$0<b<6e^{-3}$,故D正确.故选BD.

三、填空题

13.$3a-b$ **提示**:$\lg\frac{8}{3}=\lg8-\lg3=\lg2^3-\lg3=3\lg2-\lg3=3a-b$.

14.1 **提示**:由$f(x)=e^x+ax$,得$f'(x)=e^x+a$,由题意,得$f'(0)=a+1=2$,解得$a=1$.

15.$(-2e^2,0)\cup\left\{\frac{6}{e^2}\right\}$ **提示**:由$f(x)=\frac{x^2+2x-2}{e^x}$,得$f'(x)=\frac{-x^2+4}{e^x}$,令$f'(x)>0$,得$-2<x<2$;令$f'(x)<0$,得$x>2$或$x<-2$,所以$f(x)$在$(-\infty,-2)$和$(2,+\infty)$上单调递减,在$(-2,2)$上单调递增,如图,作出函数$f(x)$的大致图象,所以$f(x)_{min}=f(-2)=-2e^2$,当$x=2$时,函数$f(x)$取得极大值$f(2)=\frac{6}{e^2}$,当$x>2$时,$f(x)>0$,因为方程$f(x)=k$有两个不相等的实数根,即$y=f(x)$的图象与直线$y=k$有两个交点,所以$-2e^2<k\leqslant0$或$k=\frac{6}{e^2}$.



(第15题图)

16.3 **提示**:由$f(x)=x+x\ln x$,得$f(x)-m(x-1)>0$对任意的$x>1$恒成立,即$m(x-1)<x+x\ln x$在$(1,+\infty)$上恒成立,所以$m<\frac{x\ln x+x}{x-1}$在$(1,+\infty)$上恒成立.令$h(x)=\frac{x\ln x+x}{x-1}(x>1)$,则$h'(x)=\frac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$,令$g(x)=x-\ln x-2(x>1)$,则$g'(x)=\frac{x-1}{x}>0$,所以$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增.因为$g(3)=1-\ln3<0$,$g(4)=2-2\ln2>0$,所以$g(x)=0$在$(1,+\infty)$上存在唯一实根$x_0$,且$x_0\in(3,4)$.当$1<x<x_0$时,$g(x)<0$,即$h'(x)<0$,当$x>x_0$时,$g(x)>0$,即$h'(x)>0$,所以$h(x)$在$(1,x_0)$上单调递减,在$(x_0,+\infty)$上单调递增.又$g(x_0)=x_0-\ln x_0-2=0$,所以$\ln x_0=x_0-2$,所以$h(x)_{min}=h(x_0)=\frac{x_0(\ln x_0+1)}{x_0-1}=\frac{x_0(x_0-2+1)}{x_0-1}=x_0\in(3,4)$,所以$m<h(x)_{min}=x_0$,又$x_0\in(3,4)$,故整数$m$的最大值为3.

四、解答题

17.**解**:(1)$f'(x)=x^2-ax-2$,因为$f(x)$在$x=2$处取得极值,所以$f'(2)=0$,即$4-2a-2=0$,解得$a=1$,所以$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$,$f'(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$,所以$f(x)$在$(-2,-1)$上单调递增,在$(-1,1)$上单调递减,又$f(-2)=-\frac{2}{3}$,$f(1)=-\frac{13}{6}$,所以$f(x)$在$[-2,1]$上的最小值为$-\frac{13}{6}$.

(2)由(1)知,$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$,因为关于$x$的方程$f(x)+b=0$有唯一解,即$y=-b$与$y=f(x)$的图象只有一个交点.由(1)知,$f(x)$在$(-\infty,-1)$,$(2,+\infty)$上单调递增,在$(-1,2)$上单调递减,又$f(-1)=\frac{7}{6}$,$f(2)=-\frac{10}{3}$,所以$-b<-\frac{10}{3}$或$-b>\frac{7}{6}$,解得$b>\frac{10}{3}$或$b<-\frac{7}{6}$,所以实数$b$的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{7}{6}\right)\cup\left(\frac{10}{3},+\infty\right)$.

18.**解**:(1)因为当$a=0$时,$f(x)=e^x-x^2-1$,$f'(x)=e^x-2x$,所以曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线的斜率为$f'(0)=1$,又$f(0)=0$,所以切线方程为$y=x$.

(2)对任意的实数$x\in(0,+\infty)$,$f(x)\geqslant0$恒成立,即$2a\leqslant\frac{e^x}{x}-x-\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上恒成立.设$g(x)=\frac{e^x}{x}-x-\frac{1}{x}(x>0)$,$g'(x)=\frac{(x-1)(e^x-x-1)}{x^2}$,令$h(x)=e^x-x-1$,则$h'(x)=e^x-1>h'(0)=0$,所以$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,即有$h(x)>h(0)=0$,所以当$x>1$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增;当$0<x<1$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减,所以$g(x)_{min}=g(1)=e-2$.所以$2a\leqslant e-2$,得$a\leqslant\frac{e-2}{2}$,所以$a$的最大值为$\frac{e-2}{2}$.

19.**解**:(1)$f(x)=\ln x-ex+2$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=\frac{1}{x}-e=\frac{1-ex}{x}$,令$f'(x)>0$,解得$0<x<\frac{1}{e}$;令$f'(x)<0$,解得$x>\frac{1}{e}$.所以$f(x)$的单调递增区间为$\left(0,\frac{1}{e}\right)$,单调递减区间为$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

(2)$g(x)=f(x)-ax^2=\ln x-ex+2-ax^2$,$g'(x)=\frac{-2ax^2-ex+1}{x}$,因为$g(x)$在定义域上单调且有唯一零点,令$h(x)=-2ax^2-ex+1$,则函数$h(x)$在$(0,+\infty)$上不存在变号零点.①当$a<0$时,则$-\frac{e}{4a}>0$,所以$e^2+8a\leqslant0$,解得$a\leqslant-\frac{e^2}{8}$,故$a\leqslant-\frac{e^2}{8}$,当$x\to0$时,$g(x)\to-\infty$,当$x\to+\infty$时,$g(x)\to+\infty$,故$g(x)$在定义域上单调且有唯一零点.②当$a=0$时,由(1)知$g(x)$在定义域上不单调,不符合题意.③当$a>0$时,易知$-\frac{e}{4a}<0$,$e^2+8a>0$,且$h(0)=1$,所以$h(x)$在$(0,+\infty)$上有一个变号零点,不符合题意.

综上,实数a的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{e^2}{8}\right]$.

20.(1)**解**:$f(x)=x-1-a\ln x$,$x>0$,$f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$,且$f(1)=0$.当$a\leqslant0$时,$f'(x)>0$,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,又$f(1)=0$,所以当$0<x<1$时,$f(x)<0$,不符合题意.当$a>0$时,当$0<x<a$时,$f'(x)<0$,$f(x)$在$(0,a)$上单调递减;当$x>a$时,$f'(x)>0$,$f(x)$在$(a,+\infty)$上单调递增.①若$a<1$,$f(x)$在$(a,1)$上单调递增,所以当$x\in(a,1)$时,$f(x)<f(1)=0$,不符合题意;②若$a>1$,$f(x)$在$(1,a)$上单调递减,所以当$x\in(1,a)$时,$f(x)<f(1)=0$,不符合题意;③若$a=1$,$f(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,所以$f(x)\geqslant f(1)=0$,符合题意.

综上所述,$a=1$.

(2)**证明**:先证:$\ln x-x+1\leqslant0(x>0)$,设$g(x)=\ln x-x+1$,则$g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$,当$x\in(0,1)$时,$g'(x)>0$,所以$g(x)$单调递增;当$x\in(1,+\infty)$时,$g'(x)<0$,所以$g(x)$单调递减,所以$x=1$为$g(x)$的极大值点,也是最大值点,所以$g(x)\leqslant g(1)=0$,即$\ln x-x+1\leqslant0$,所以$\ln x\leqslant x-1$,又$x>0$,所以$\frac{\ln x}{x}\leqslant\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x}$,因为$n\in\mathbf{N}_+$,$n\geqslant2$,令$x=n^2$,得$\frac{\ln n^2}{n^2}<1-\frac{1}{n^2}$,所以$\frac{\ln n}{n^2}\leqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$,所以$\frac{\ln2}{2^2}+\frac{\ln3}{3^2}+\cdots+\frac{\ln n}{n^2}\leqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^2}+1-\frac{1}{3^2}+\cdots+1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\left[n-1-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\right]<\frac{1}{2}\left[(n-1)-\left(\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[n-1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[n-1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{2n^2-n-1}{4(n+1)}$,所以原不等式成立.

21.**解**:(1)当$b=0$时,$f(x)=x^2e^x$,$f'(x)=x(x+2)e^x$.令$f'(x)=0$,解得$x=-2$,或$x=0$.

当$x\in(-\infty,-2)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增;当$x\in(-2,0)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;当$x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.所以函数$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,-2)$,$(0,+\infty)$,单调递减区间为$(-2,0)$.

(2)$f'(x)=(x^2+2x+b)e^x$,因为函数$f(x)$有两个不同的极值点,即$f'(x)$有两个不同的零点,所以方程$f'(x)=0$即$x^2+2x+b=0$有两个不同的实数根,所以判别式$\Delta=4-4b>0$,解得$b<1$.设方程$x^2+2x+b=0$的两根分别为x_1,x_2不妨设$x_1<x_2$,则$x_1+x_2=-2$,$x_1x_2=b$.随着x的变化,$f(x)$和$f'(x)$的变化情况如下表:

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以x_1是函数$f(x)$的极大值点,x_2是函数$f(x)$的极小值点,符合题意.

所以$f(x_1)\cdot f(x_2)=e^{x_1}(x_1^2+b)\cdot e^{x_2}(x_2^2+b)=[x_1^2x_2^2+b(x_1^2+x_2^2)+b^2]e^{x_1+x_2}=[b^2+b(4-2b)+b^2]e^{-2}=4be^{-2}$,因为$f(x_1)\cdot f(x_2)=4e^{-2}$,则$4be^{-2}=4e^{-2}$,得$b=1$,不符合$b<1$,故不存在实数$b$使得$f(x_1)\cdot f(x_2)=4e^{-2}$.

22.(1)**解**:当$x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$时,$f(x)<0$,无零点;当$x\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$时,$f'(x)=\cos x-x\sin x$,因为$\tan x>\frac{1}{x}$,所以$f'(x)=\cos x-x\sin x<0$,则$f(x)$在$\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减,又$f(-\pi)=\pi-\frac{3}{2}>0$,$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{3}{2}<0$,所以$f(x)$在$\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$内有1个零点,故$f(x)$在$(-\pi,0)$内有1个零点.

(2)**证明**:由$g(x)\geqslant f(x)$,得$a\leqslant\frac{2\sin x-x\cos x}{x}$,令$h(x)=\frac{2\sin x-x\cos x}{x}$,$x\in(0,\pi)$,$h'(x)=\frac{2x\cos x-2\sin x+x^2\sin x}{x^2}$,令$m(x)=2x\cos x-2\sin x+x^2\sin x$,$m'(x)=x^2\cos x$,当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$m'(x)>0$,$m(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,所以$m(x)>m(0)=0$,$h'(x)>0$,$h(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增.当$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时,$m'(x)=x^2\cos x<0$,所以$m(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递减,又$m\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}-2>0$,$m(\pi)=-2\pi$,故$m(x)$在$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$上存在唯一的零点$x_0$,所以$m(x_0)=0$,即$2x_0\cos x_0-2\sin x_0+x_0^2\sin x_0=0$,所以$2\sin x_0=2x_0\cos x_0+x_0^2\sin x_0$.

所以当$x\in\left(\frac{\pi}{2},x_0\right)$时,$m(x)>0$,$x\in(x_0,\pi)$时,$m(x)<0$,故$h(x)$在$(0,x_0)$上单调递增,在$(x_0,\pi)$上单调递减,所以$h(x)_{max}=h(x_0)=\frac{2\sin x_0-x_0\cos x_0}{x_0}=\cos x_0+x_0\sin x_0$,$x_0\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.令$\varphi(x)=\cos x+x\sin x$,$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,$\varphi'(x)=x\cos x<0$,所以$\varphi(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递减,即$h(x_0)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递减,$h(x_0)<h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$,故$a\leqslant h(x)_{max}<\frac{\pi}{2}$,所以$a<\frac{\pi}{2}$.

第35期

第2~3版专题检测

一、单项选择题

1.C **提示**:在正方形ABB_1A_1中,$AB_1\perp A_1B$,因为$BC\perp$平面ABB_1A_1,所以$BC\perp AB_1$,连接B_1C,AC,因为$B_1C\parallel A_1D$,所以AB_1与A_1D所成的角为$\angle AB_1C=60°$,即AB_1与A_1D不垂直,易证$AB_1\perp$平面A_1D_1CB,所以$AB_1\perp BD_1$,故选C.

2.D **提示**:对于A,若$m\parallel n$,$n\subset\alpha$,则$m\parallel\alpha$或$m\subset\alpha$,故A错误;对于B,若$m\perp n$,$n\subset\alpha$,则$m\perp\alpha$或$m\parallel\alpha$或$m\subset\alpha$或m与α相交(不垂直),故B错误;对于C,若$m\perp n$,$n\parallel\alpha$,则$m\perp\alpha$或$m\parallel\alpha$或$m\subset\alpha$或m与α相交(不垂直),故C错误;对于D,假设$n\subset\beta$,$\alpha\cap\beta=l$,由$n\parallel\alpha$,得$n\parallel l$,又$m\perp\alpha$,则$m\perp l$,所以$m\perp n$,故D正确,故选D.

3.D **提示**:对于A,由$PA\perp$平面ABC,得$PA\perp AD$,若$PB\perp AD$,则$AD\perp$平面PAB,所以$AD\perp AB$,与$\angle BAD=60°$矛盾,故A错误;对于B,过A作$AG\perp PB$于G,若平面$PAB\perp$平面PBC,则$AG\perp$平面PBC,所以$AG\perp BC$,由$PA\perp$平面ABC,得$PA\perp BC$,所以$BC\perp$平面PAB,所以$BC\perp AB$,与$\angle ABC=120°$矛盾,故B错误;对于C,BC与AE是相交直线,所以BC一定与平面PAE相交,故C错误;对于D,在$Rt\triangle PAD$中,易知$AD=2AB=2PA$,则$PD=\sqrt{5}PA$,所以$\sin\angle PDA=\frac{PA}{PD}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,故D正确.故选D.

4.B **提示**:设三棱锥$P-ABC$的外接球的半径为R,由$AB=BC=AC=4$,得$\triangle ABC$为等边三角形,$\triangle ABC$的外接圆半径$r=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times4=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,又$PA=3$,$PB=PC=5$,$AB=AC=4$,所以$PA\perp AB$,$PA\perp AC$,所以$PA\perp$平面$ABC$,则$R^2=r^2+\left(\frac{PA}{2}\right)^2=\frac{91}{12}$,所以该三棱锥的外接球的表面积$S=4\pi R^2=\frac{91}{3}\pi$.故选B.

5.D **提示**:连接AC,因为$PA\perp$平面$ABCD$,所以$PA\perp AC$,$\angle PCA$是PC与平面$ABCD$所成的角,由题意,得$AC=\sqrt{3}$,又$PA=1$,则$\tan\angle PCA=\frac{PA}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以$\angle PCA=30°$.故选D.

6.D **提示**:取B_1C_1的中点M,连接EM,FM,则$EM\parallel BB_1$,又$AA_1\parallel BB_1$,所以$EM\parallel AA_1$,$EM\perp$底面$A_1B_1C_1$,所以$EM\perp FM$,$\angle FEM$为异面直线AA_1与EF所成的角,则$\angle FEM=45°$,所以$FM=EM$,设$AB=a$,$AA_1=b$,则$FM=\frac{1}{2}A_1B_1=\frac{1}{2}a$,所以$b=\frac{1}{2}a$,即$a=2b$,所以该三棱柱的侧面积与表面积的比值为$\frac{3ab}{3ab+2\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}=\frac{6b^2}{6b^2+2\sqrt{3}b^2}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$.故选D.

7.D **提示**:以D为坐标原点,DA,DC,DD_1所在直线分别为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系$Dxyz$,则$G(1,\lambda,1)$,$D_1(0,0,1)$,$E\left(1,0,\frac{1}{2}\right)$,$F\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$,所以$\overrightarrow{D_1E}=\left(1,0,-\frac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{D_1F}=\left(1,1,-\frac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{GE}=\left(0,-\lambda,-\frac{1}{2}\right)$,

设平面D_1EF的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{D_1E}=x-\frac{1}{2}z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{D_1F}=x+y-\frac{1}{2}z=0,\end{cases}$取$x=1$,则平面$D_1EF$的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(1,0,2)$,所以点$G$到平面$D_1EF$的距离为$\frac{|\overrightarrow{GE}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.故选D.

8.C **提示**:因为$PA\perp$平面$ABCD$,$AC\subset$平面$ABCD$,所以$PA\perp AC$,若$AC\perp EF$,即$AC\perp PD$,又$PA\cap PD=P$,PA,$PD\subset$平面PAD,所以$AC\perp$平面PAD,又$AD\subset$平面PAD,所以$AC\perp AD$,与$\angle CAD=45°$矛盾,故(1)错误;设$AC\cap BD=O$,若$PB\parallel$平面AEC,又平面$PBD\cap$平面$AEC=EO$,$PB\subset$平面PBD,则$PB\parallel EO$,又O是BD的中点,所以E是PD的中点,所以只有E是PD的中点时,才有$PB\parallel$平面AEC,当E不是PD的中点时,$PB\parallel$平面AEC不成立,故(2)错误;二面角$E-BD-C$即二面角$P-BD-C$,其大小为定值,故(3)正确;因为$EF=\frac{\sqrt{2}}{2}$,EF在PD上,A到PD的距离为定值,所以$\triangle AEF$的面积为定值,又C到平面AEF的距离,即C到平面PAD的距离,其为定值,所以三棱锥$C-AEF$,即四面体$ACEF$的体积为定值,故(4)正确.故选C.

二、多项选择题

9.AC **提示**:设圆锥的底面半径为r,母线长为l,因为圆锥的侧面展开图是一个半圆,所以$2\pi r=\frac{1}{2}\times2\pi\times l$,解得$l=2r$,又圆锥的表面积为$3\pi$,所以$\pi rl+\pi r^2=3\pi r^2=3\pi$,解得$r=1$,则$l=2$,所以圆锥的高$h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{3}$,所以侧面积为$\pi rl=2\pi$,体积$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$.故选AC.

10.ABC **提示**:对于A,因为平面$ABD\perp$平面ACD,$BD\perp AD$,平面$ABD\cap$平面$ACD=AD$,所以$BD\perp$平面ACD,又$AC\subset$平面ACD,所以$BD\perp AC$,故A正确;对于B,C,由A项可知,$BD\perp$平面ACD,又$DC\subset$平面ACD,所以$BD\perp DC$,又$AD\perp BD$,$AD\perp DC$,且$AD=BD=DC$,所以$AB=BC=AC$,所以$\triangle ABC$是等边三角形,三棱锥$D-ABC$是正三棱锥,故B,C正确;对于D,假设平面$ABC\perp$平面ACD,又平面$ABC\cap$平面$ACD=AC$,过点B作$BH\perp AC$于点H,则$BH\perp$平面ACD,由A项知,$BD\perp$平面ACD,这与"过平面外一点有且仅有一条直线垂直于该平面"矛盾,故D错误.故选ABC.

11.ABD **提示**:对于A,连接BD,则$A_1D=BD=\sqrt{2}$,所以$\triangle A_1DB$为等腰三角形,又E为BA_1的中点,所以$DE\perp A_1B$,故A正确;对于B,取AB中点H,连接EH,CH,则$EH\parallel FC$,$EH=FC$,所以四边形$EHCF$是平行四边形,所以$EF\parallel HC$,又$HC\subset$平面$ABCD$,所以$EF\parallel$平面$ABCD$,故B正确;对于C,取BB_1的中点G,连接FG,则$FG\parallel BC$,因为$BC\perp$平面ABB_1A_1,所以$FG\perp$平面ABB_1A_1,所以BF与平面ABB_1A_1所成的角为$\angle GBF$,所以$\tan\angle GBF=\frac{GF}{BG}=2$,故C错误;对于D,设点$B$到平面$A_1CD$的距离为$h$,由$V_{A_1-BCD}=V_{B-A_1CD}$,即$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{2}\times h$,解得$h=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故D正确.故选ABD.

12.AC **提示**:对于A,由$\angle DAB=\frac{\pi}{3}$,$AB=2AD$及余弦定理,得$BD^2=AD^2+AB^2-2AD\cdot AB\cos\angle DAB=3AD^2$,则$BD=\sqrt{3}AD$,所以$BD^2+AD^2=AB^2$,所以$BD\perp AD$,由$PD\perp$底面$ABCD$,得$PD\perp BD$,又$AD\cap PD=D$,所以$BD\perp$平面$PAD$,因为$PA\subset$平面$PAD$,所以$BD\perp PA$,故A正确;对于B,因为$PD\perp$底面$ABCD$,所以$\angle PBD$是$PB$与平面$ABCD$所成角,又$AD=PD$,$BD=\sqrt{3}AD$,则$\tan\angle PBD=\frac{PD}{BD}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以$\angle PBD=\frac{\pi}{6}$,故B错误;对于C,由$AB\parallel CD$,得$\angle PCD$是异面直线$AB$与$PC$所成角,由$PD\perp$平面$ABCD$,得$PD\perp CD$,又$AB=CD=2AD$,则$PC=\sqrt{5}AD$,所以$\cos\angle PCD=\frac{CD}{PC}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,所以异面直线$AB$与$PC$所成角的余弦值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$,故C正确;对于D,易知$DA$,$DB$,$DP$两两垂直,以$D$为坐标原点,$DA$,$DB$,$DP$所在直线分别为$x$轴,$y$轴,$z$轴,建立空间直角坐标系,设$AD=1$,则$A(1,0,0)$,$B(0,\sqrt{3},0)$,$C(-1,\sqrt{3},0)$,$P(0,0,1)$,所以$\overrightarrow{AB}=(-1,\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{PB}=(0,\sqrt{3},-1)$,设平面$PAB$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-x+\sqrt{3}y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=\sqrt{3}y-z=0,\end{cases}$取$y=1$,得$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$,易知平面$ABCD$的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(0,0,1)$,所以$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{21}}{7}\neq\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以平面$PAB$与平面$ABCD$所成的二面角的大小不为45°,故D错误.故选AC.

三、填空题

13.8π **提示**:由题意,得圆锥的底面圆的半径$r=2$,又母线长为4,所以圆锥的侧面积$S_{侧}=\pi rl=8\pi$.

14.$\frac{20}{3}$ **提示**:作$BM\perp CD$于点M,过点M作$MN\parallel FC$交EF于点N,连接BN,由题意,知$DM=2$,三棱柱$ADE-BMN$为直三棱柱,其体积为$\frac{1}{2}\times2\times2\times2=4$,四棱锥$B-MCFN$的底面$MCFN$为正方形,高为$BM$,则该锥体的体积为$\frac{1}{3}\times2\times2\times2=\frac{8}{3}$,故几何体$ADE-BCF$的体积为$4+\frac{8}{3}=\frac{20}{3}$.

15.$\frac{9\pi}{2}$ **提示**:由$PD=\sqrt{5}$,$AP=1$,$AD=2$,得$AD^2+AP^2=PD^2$,则$AP\perp AD$,因为侧面$PAD\perp$底面$ABCD$,$AP\subset$平面PAD,平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD$,所以$AP\perp$平面$ABCD$,又底面$ABCD$为正方形,所以$AB\perp AD$,所以四棱锥$P-ABCD$外接球的直径是以AB,AD,AP为棱的长方体的对角线,设外接球的半径为R,则$2R=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$,所以$R=\frac{3}{2}$,所以外接球的体积$V=\frac{4}{3}\pi R^3==\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{9\pi}{2}$.

16.45° **提示**:取AC的中点E,连接$D'E$,BE,则$D'E\perp AC$,$BE\perp AC$,所以$\angle D'EB$是二面角$D'-AC-B$的平面角,所以$\angle D'EB=90°$,由题意,得$D'E=BE=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以$\angle D'BE=45°$,因为$D'E\perp AC$,平面$D'AC\perp$平面$ABC$,平面$D'AC\cap$平面$ABC=AC$,$D'E\subset$平面$D'AC$,所以$D'E\perp$平面$ABC$,所以$\angle D'BE$是$BD'$与平面$ABC$所成的角,所以$BD'$与平面$ABC$所成角的大小是45°.

四、解答题

17.**证明**:(1)取BC中点O,连接EO,FO,因为E,F分别是A_1B,B_1C_1的中点,所以$EO\parallel A_1C$,$FO\parallel C_1C$,因为$A_1C\cap C_1C=C$,$EO\cap FO=O$,所以平面$ACC_1A_1\parallel$平面EOF,因为$EF\subset$平面EOF,所以$EF\parallel$平面ACC_1A_1.

(2)因为$AC\perp BC$,所以$BC\perp$平面ACC_1A_1,由(1)知$EF\parallel$平面ACC_1A_1,所以$BC\perp EF$.连接A_1F,BF,因为$AC=BC=CC_1=2$,所以$A_1F=\sqrt{5}$,$BF=\sqrt{5}$,又E是A_1B中点,所以$EF\perp A_1B$,因为$BC\cap A_1B=B$,所以$EF\perp$平面A_1BC.

18.(1)**证明**:因为N为底面$ABCD$的中心,则N为AC和BD的中点,因为E为PC的中点,所以$PA\parallel NE$,因为$PA\subset$平面PAD,$NE\not\subset$平面PAD,所以$NE\parallel$平面PAD,又M为AB的中点,所以$NM\parallel AD$,因为$AD\subset$平面PAD,$MN\not\subset$平面PAD,所以$MN\parallel$平面PAD,又MN,$NE\subset$平面NME,$MN\cap NE=N$,所以平面$NME\parallel$平面PAD.

(2)**解**:取PD的中点G,连AG,EG,则$EG\parallel CD$,$EG=\frac{1}{2}CD$,由$AM\parallel CD$,$AM=\frac{1}{2}CD$,所以$AM\parallel EG$,$AM=EG$,所以四边形$AMEG$为平行四边形,所以$AG\parallel ME$,则$\angle PAG$为异面直线ME与PA所成的角,又$\triangle PAD$为等边三角形,所以$\angle PAG=\frac{1}{2}\angle PAD=\frac{\pi}{6}$,则异面直线$ME$与$PA$所成的角为$\frac{\pi}{6}$.

19.(1)**证明**:在图①中,连接BD,菱形$ABCD$中,$A=\frac{\pi}{3}$,所以$\triangle ABD$为等边三角形,因为E为AD的中点,所以$BE\perp AE$,$BE\perp DE$,又$AB=2$,则$AE=DE=1$,$BE=\sqrt{3}$.在图②中,$A_1D=\sqrt{2}$,则$A_1E^2+ED^2=A_1D^2$,所以$A_1E\perp ED$,因为$BC\parallel DE$,则$BC\perp BE$,$BC\perp A_1E$,又$BE\cap A_1E=E$,BE,$A_1E\subset$平面A_1BE,故$BC\perp$平面A_1BE,因为$BC\subset$平面A_1BC,所以平面$A_1BE\perp$平面A_1BC.

(2)**解**:连接EC交BD于点O,因为$ED\parallel BC$,则$\frac{EO}{OC}=\frac{ED}{BC}=\frac{1}{2}$,又$A_1E\parallel$平面$BPD$,且$A_1E\subset$平面$A_1EC$,平面$A_1EC\cap$平面$BPD=OP$,所以$OP\parallel A_1E$,则$\frac{OP}{A_1E}=\frac{OC}{CE}=\frac{2}{3}$,故点$P$到平面$A_1BE$的距离$h$为点$C$到平面$A_1BE$距离的$\frac{1}{3}$,由(1)知,$BC\perp$平面$A_1BE$,所以$h=\frac{1}{3}BC=\frac{2}{3}$,所以$V_{A_1-BPE}=V_{P-A_1BE}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle A_1BE}\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\times\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}$.

20.(1)**证明**:连接A_1E,B_1E,因为$A_1A=A_1C=AC$,所以$\triangle AA_1C$是等边三角形,又E是AC的中点,所以$A_1E\perp AC$,又平面$AA_1C_1C\perp$平面ABC,平面$ABC\cap$平面$A_1ACC_1=AC$,所以$A_1E\perp$平面ABC,故$A_1E\perp BC$,又$A_1B_1\parallel AB$,$\angle ABC=90°$,即$AB\perp BC$,所以$A_1B_1\perp BC$,又$A_1B_1\cap A_1E=A_1$,所以$BC\perp$平面A_1B_1E,因为$EF\subset$平面A_1B_1E,所以$EF\perp BC$.

(2)**解**:过点E作$EH\perp AC$,交AB于H,以点E为坐标原点,$\overrightarrow{EH}$,$\overrightarrow{EC}$,$\overrightarrow{EA_1}$分别为x轴,y轴,z轴正方向建立空间直角坐标系$Exyz$.由$AA_1=2\sqrt{3}$,$\angle ABC=90°$,$\angle BAC=30°$,所以$BC=\sqrt{3}$,$AB=3$,$EH=1$,$AE=EC=\sqrt{3}$,则$A(0,-\sqrt{3},0)$,$B\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$,$A_1(0,0,3)$,$C(0,\sqrt{3},0)$,由$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$,可得点$B_1$的坐标为$\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2},3\right)$,则$F\left(\frac{3}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4},3\right)$,所以$\overrightarrow{EF}=\left(\frac{3}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4},3\right)$,$\overrightarrow{A_1B}=\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},-3\right)$,$\overrightarrow{BC}=\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$,设平面$A_1BC$的法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-3z=0,\\ -\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=0,\end{cases}$令$z=1$,则平面$A_1BC$的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},1)$,设直线$EF$与平面$A_1BC$所成角为$\theta$,则$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{EF}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EF}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{EF}|}=\frac{4}{5}$,所以直线$EF$与平面$A_1BC$所成角的正弦值为$\frac{4}{5}$.

21.(1)**证明**:因为平面$PAB\perp$平面$ABCD$,平面$PAB\cap$平面$ABCD=AB$,且$\angle ABC=90°$,即$BC\perp AB$,$BC\subset$平面$ABCD$,所以$BC\perp$平面PAB,又$PA\subset$平面PAB,所以$BC\perp PA$.取CD的中点M,连接AM,PM,因为$\angle ABC=\angle BCD=90°$,所以$AB\parallel CD$,即$AB\parallel CM$,又$AB=BC=CM=1$,所以四边形$ABCM$为正方形,故$AM\perp CD$,又$PC=PD$,所以$PM\perp CD$,又$AM$,$PM\subset$平面$PAM$,$AM\cap PM=M$,所以$CD\perp$平面$PAM$,又$PA\subset$平面$PAM$,所以$CD\perp PA$,又$BC$,$CD\subset$平面$ABCD$,$BC\cap CD=C$,所以$PA\perp$平面$ABCD$.

(2)**解**:以点A为坐标原点,分别以AB,AM,AP所在直线为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系$Axyz$,所以$P(0,0,1)$,$C(1,1,0)$,$D(-1,1,0)$,则$\overrightarrow{AP}=(0,0,1)$,$\overrightarrow{AD}=(-1,1,0)$,$\overrightarrow{CD}=(-2,0,0)$,$\overrightarrow{PC}=(1,1,-1)$,设平面$PAD$的法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,所以$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}z=0,\\ -x+y=0,\end{cases}$令$x=1$,则平面$PAD$的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(1,1,0)$.设平面$PCD$的法向量为$\boldsymbol{n}=(a,b,c)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-2a=0,\\ a+b-c=0,\end{cases}$令$b=1$,则平面$PCD$的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(0,1,1)$,所以$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{2}$,故二面角$C-PD-A$的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

22.(1)**证明**:因为$BC\perp DC$,$BC=DC=\sqrt{2}$,$AB=2\sqrt{2}$,所以$BD=\sqrt{BC^2+DC^2}=2$,$AD=\sqrt{BC^2+(AB-DC)^2}=2$,在$\triangle ABD$中,$AD^2+BD^2=AB^2$,所以$\triangle ABD$是直角三角形,且$BD\perp AD$,因为四边形$BDMN$为矩形,所以$BD\perp DM$,又$DM\cap AD=D$,$DM$,$AD\subset$平面$ADM$,所以$BD\perp$平面$ADM$,又$BD\subset$平面$ABCD$,所以平面$ADM\perp$平面$ABCD$.

(2)**解**:线段MN上存在点H,使得二面角$H-AD-M$的余弦值为$\frac{3\sqrt{13}}{13}$,点H为靠近点M的三等分点.

证明如下:以点D为坐标原点,分别以DA,DB所在直线为x轴,y轴,建立空间直角坐标系$Dxyz$,则$D(0,0,0)$,$A(2,0,0)$,$B(0,2,0)$,$M(1,0,1)$,所以$\overrightarrow{DB}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{DA}=(2,0,0)$,设$\overrightarrow{MH}=\lambda\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{DB}=(0,2\lambda,0)$,其中$0\leqslant\lambda\leqslant1$,得$H(1,2\lambda,1)$,故$\overrightarrow{DH}=(1,2\lambda,1)$,设平面$ADH$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DH}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2x=0,\\ x+2\lambda y+z=0,\end{cases}$令$y=1$,则$z=-2\lambda$,故平面$ADH$的