



扫码免费下载
习题讲解 ppt

第 29 期

第 2-3 版综合测试(五)参考答案

一、单项选择题

1.C 提示:直线 l 的倾斜角 $\alpha = \frac{5\pi}{6}$, 则直线 l 的斜率 $\tan \alpha = \tan \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, 故选 C.

2.A 提示:事件 E 为“第一枚硬币正面向上”,事件 F 为“第二枚硬币反面向上”,可知两事件互不影响,即 E 与 F 相互独立,故 A 正确;因为事件 E 与事件 F 能同时发生,所以不为互斥事件,故 B 错误;显然事件 E 和事件 F 不相等,故 C 错误;因为 $P(E) = \frac{1}{2}$, $P(F) = \frac{1}{2}$, 所以 $P(E \cup F) = 1 - P(\bar{E})P(\bar{F}) = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$, 故 D 错误,故选 A.

3.B 提示:由 $P(A) = 0.5$, $P(B|A) = 0.3$, 得 $P(AB) = P(B|A) \cdot P(A) = 0.15$, 所以 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.15}{0.4} = 0.375$, 故选 B.

4.B 提示:因为 $P(\xi < -1) = 0.5$, 所以由正态曲线的对称性可知 $\mu = -1$, 又 $\sigma = 1$, 所以 $\mu - \sigma = -2$, $\mu + \sigma = 0$, $\mu - 2\sigma = -3$, $\mu + 2\sigma = 1$.

所以 $P(0 < \xi \leq 1) = \frac{1}{2} [P(-3 < \xi \leq 1) - P(-2 < \xi \leq 0)] \approx \frac{0.9544 - 0.6826}{2} \approx 0.1359$, 故选 B.

5.C 提示:对于①②③, 两两相邻, 依次用不同颜色涂, 共有 $4 \times 3 \times 2 = 24$ 种涂色方法; 对于④, 与②③相邻, 但与①相隔, 此时可利用下的一种颜色或者与①同色, 共 2 种涂色方法, 则由分步乘法计数原理, 得共有 $24 \times 2 = 48$ 种不同的涂色方法, 故选 C.

6.B 提示:将 4 名医护人员分为 3 组: 2, 1, 1, 则有 $C_4^2 = 6$ 种分组方法, 再将分好的 3 组全排列, 对应 3 个社区, 有 $A_3^3 = 6$ 种情况, 所以有 $6 \times 6 = 36$ 种不同的选派方法, 故选 B.

7.D 提示:依题意, 抛物线 C 的方程为 $y^2 = 12x$, 显然直线 l 不垂直于 y 轴, 设其方程为 $x = ky + 3$, 由 $\begin{cases} x = ky + 3, \\ y^2 = 12x, \end{cases}$ 消去 x , 得 $y^2 - 12ky - 36 = 0$. 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = 12k$, $y_1 y_2 = -36$, 而直线 l 的斜率为正, 且 $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{FB}$, 即 $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}$. 有 $y_1 > 0$, $y_2 < 0$, 即有 $y_1 = -3y_2$, 则 $y_2^2 = 12$, 解得 $y_2 = -2\sqrt{3}$, 因此 $12k = -2y_2 = 4\sqrt{3}$, 解得 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以直线 l 的方程为 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}y + 3$, 即 $\sqrt{3}x - y - 3\sqrt{3} = 0$, 故选 D.

8.A 提示: 以 A 为坐标原点, AD, AB, AP 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系. 由二面角 $Q-PD-A$ 的大小为 30° , 可知 Q 的轨迹是过点 D 的一条直线, 又 Q 是四边形 $ABCD$ 内部一点(包括边界), 则 Q 的轨迹是过点 D 的一条线段. 设 Q 的轨迹与 y 轴的交点坐标为 $G(0, b, 0)$ ($b > 0$), 由题意可知 $A(0, 0, 0)$, $D(2, 0, 0)$, $P(0, 0, 1)$, 所以 $\overrightarrow{DP} = (-2, 0, 1)$, $\overrightarrow{DG} = (-2, b, 0)$, $\overrightarrow{AD} = (2, 0, 0)$, 易知平面 APD 的一个法向量为 $n_1 = (0, 1, 0)$. 设平面 PDC 的法向量为 $n_2 = (x_2, y_2, z_2)$, 则 $\begin{cases} n_2 \cdot \overrightarrow{DP} = 0, \\ n_2 \cdot \overrightarrow{DG} = 0, \end{cases}$

$\begin{cases} -2x_2 + z_2 = 0, \\ -2x_2 + by_2 = 0, \end{cases}$ 令 $z_2 = 2$, 得 $x_2 = 1$, $y_2 = \frac{2}{b}$, 所以 $n_2 = (1, \frac{2}{b}, 2)$ 是平面 PDC 的一个法向量, 则二面角 $G-PD-A$ 的余弦值为

$|\cos \langle n_1, n_2 \rangle| = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{\frac{2}{b}}{\sqrt{5 + \frac{4}{b^2}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 解得 $b = \frac{2\sqrt{15}}{15}$ 或 $b = -\frac{2\sqrt{15}}{15}$ (舍去), 因为 Q 在 DG 上运动,

$0 < S_{\triangle ADQ} \leq S_{\triangle ADC}$, 又 $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot b = b = \frac{2\sqrt{15}}{15}$, 所以 $\triangle ADQ$ 面积的取值范围为 $(0, \frac{2\sqrt{15}}{15}]$, 故选 A.

二、多项选择题

9.ABC 提示: 对于 A, 分三类, 老师有 3 种选法, 男生有 8 种选法, 女生有 5 种选法, 故共有 16 种选法, 故 A 正确;

对于 B, 分三步, 第一步选老师, 第二步选男生, 第三步选女生, 故共有 $3 \times 8 \times 5 = 120$ 种选法, 故 B 正确;

对于 C, 分两步, 第一步选老师, 第二步选学生, 故共有 $3 \times (8+5) = 39$ 种选法, 故 C 正确;

对于 D, 若需 3 名老师 1 名学生参加, 则有 13 种不同选法, 故 D 错误, 故选 ABC.

10.AB 提示: 对于 A, C, 圆 C_1 的标准方程为 $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 50$, 圆心为 $(5, 5)$, 半径为 $r_1 = 5\sqrt{2}$. 圆 C_2 的标准方程为 $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 50$, 圆心为 $(3, -1)$, 半径为 $r_2 = 5\sqrt{2}$. 所以两圆心的距离 $d = \sqrt{(5-3)^2 + (5+1)^2} = 2\sqrt{10}$, 所以 $0 < d < r_1 + r_2$, 所以两圆相交, 故 A 正确, C 错误;

对于 B, D, 设两圆公共弦长为 L , 则 $(\frac{L}{2})^2 + (\frac{d}{2})^2 = 50$, 所以 $L = 4\sqrt{10}$, 故 B 正确, 因为两圆半径相等, 所以公切线长等于圆心距 d , 故 D 错误, 故选 AB.

11.BCD 提示: 对于 A, 易知 $OP \perp PD$, $PD \cap PA = P$, 所以 OF 不会平行于 AP , 故 A 错误;

对于 B, 以 O 为坐标原点, OA 为 x 轴, OB 为 y 轴, OP 为 z 轴, 建立空间直角坐标系, 则 $B(0, \sqrt{2}, 0)$, $A(\sqrt{2}, 0, 0)$, $P(0, 0, \sqrt{2})$, $E(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $D(0, -\sqrt{2}, 0)$, 所以 $\overrightarrow{AE} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $\overrightarrow{DE} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, 所以 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$, 故 $AE \perp DE$, 故 A 正确;

对于 B, 由 A 为坐标原点, AB 为 x 轴, AC 为 y 轴, AD 为 z 轴, 建立空间直角坐标系, 则 $B(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $D(0, 0, 1)$, $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $Q(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 所以 $\overrightarrow{PQ} = (0, 0, 0)$, 故 P, Q 重合, 故 B 错误;

对于 C, 由 A 为坐标原点, AB 为 x 轴, AC 为 y 轴, AD 为 z 轴, 建立空间直角坐标系, 则 $B(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $D(0, 0, 1)$, $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $Q(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 所以 $\overrightarrow{PQ} = (0, 0, 0)$, 故 P, Q 重合, 故 C 错误;

对于 D, 由 A 为坐标原点, AB 为 x 轴, AC 为 y 轴, AD 为 z 轴, 建立空间直角坐标系, 则 $B(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $D(0, 0, 1)$, $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $Q(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 所以 $\overrightarrow{PQ} = (0, 0, 0)$, 故 P, Q 重合, 故 D 错误, 故选 ABC.

综上, 直线 PQ 恒过定点 $(-2, 0)$.

所以 $A \perp F \perp C_1E$.
(2)解: 当 $a=1$ 时, $E(0, 1, 0)$, $F(1, 0, 0)$, $A(0, 2, 0)$, $C_1(2, 0, 2)$, 则 $\overrightarrow{EF} = (1, -1, 0)$, $\overrightarrow{FC_1} = (1, 0, 2)$, $\overrightarrow{AE} = (0, -1, 0)$, 设 $n = (x, y, z)$ 是平面 C_1EF 的法向量,

则由 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{EF} = x - y = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{FC_1} = x + 2z = 0, \end{cases}$ 取 $x=2$, 得 $n = (2, 2, -1)$, 设点 A 到平面 C_1EF 的距离为 d , 则 $d = \frac{|\overrightarrow{AE} \cdot n|}{|n|} = \frac{|-2|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2}{3}$, 所以点 A 到平面 C_1EF 的距离为 $\frac{2}{3}$.

20.解: (1)根据题意可得, ξ 的所有可能取值为 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30.

$P(\xi=24) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$, $P(\xi=25) = \frac{1}{10} \times \frac{3}{10} \times 2 = \frac{3}{50}$, $P(\xi=26) = \frac{1}{10} \times \frac{2}{5} \times 2 + \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{17}{100}$, $P(\xi=27) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{5} \times 2 + \frac{3}{10} \times \frac{2}{5} \times 2 = \frac{7}{25}$, $P(\xi=28) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{5} \times 2 + \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{7}{25}$, $P(\xi=29) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times 2 = \frac{4}{25}$, $P(\xi=30) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$.

所以 ξ 的分布列如下:

ξ	24	25	26	27	28	29	30
P	$\frac{1}{100}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{17}{100}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{25}$

$E\xi = 24 \times \frac{1}{100} + 25 \times \frac{3}{50} + 26 \times \frac{17}{100} + 27 \times \frac{7}{25} + 28 \times \frac{7}{25} + 29 \times \frac{4}{25} + 30 \times \frac{1}{25} = 27.4$.

(2)当每两天生产配送 27 百份时, 利润为 $(24 \times 2 - 3 \times 6) \times \frac{1}{100} + (25 \times 2 - 2 \times 6) \times \frac{3}{50} + (26 \times 2 - 1 \times 6) \times \frac{17}{100} + 27 \times 2 \times (1 - \frac{1}{100} - \frac{50}{100} - \frac{100}{100}) = 51.44$ (百元).

当每两天生产配送 28 百份时, 利润为 $(24 \times 2 - 4 \times 6) \times \frac{1}{100} + (25 \times 2 - 3 \times 6) \times \frac{3}{50} + (26 \times 2 - 2 \times 6) \times \frac{17}{100} + (27 \times 2 - 1 \times 6) \times \frac{7}{25} + 28 \times 2 \times (\frac{7}{25} + \frac{7}{25} + \frac{4}{25}) = 49.28$ (百元).

由于 $51.44 > 49.28$, 所以选择每两天生产配送 27 百份.

21.解: (1)样本 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, 20$) 的相关系数为

$r = \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{20} (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{800}{\sqrt{806} \sqrt{9000}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0.94$.

(2)(i)设事件 A 为“随机抽取一件该企业生产的药品为合格”.
事件 B_1 为“随机抽取一件药品为第 1 条生产线生产”, 事件 B_2 为“随机抽取一件药品为第 2 条生产线生产”, 则 $P(B_1) = \frac{2}{3}$, $P(B_2) = \frac{1}{3}$, 又 $P(A|B_1) = 0.009$, $P(A|B_2) = 0.006$.

于是 $P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) = \frac{2}{3} \times 0.009 + \frac{1}{3} \times 0.006 = 0.008$.

(ii)在抽查中发现的任一件不合格药品来自第 1 条生产线的概率为

$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)} = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3} \times 0.009}{0.008} = \frac{3}{4}$, 故 3 件不合格药品中至少有 2 件药品来自第 1 条生产线的概率为 $P = C_3^2 \cdot (\frac{3}{4})^2 \times \frac{1}{4} + C_3^1 \cdot (\frac{3}{4}) \times \frac{1}{4} = \frac{27}{32}$.

22.(1)解: 因为 $AF \perp AB$, 所以 $|AF| = 2$, $|BF| = 4$, $|AB| = 2\sqrt{3}$. 设双曲线 C 的焦距为 $2c$, 由双曲线的对称性, 知 $|AB| = 2c = 2\sqrt{3}$, 得 $c = \sqrt{3}$. 设双曲线 C 的右焦点为 F' , 则 $|BF'| = |AF| = |BF| - |BF'| = 2a = 2$, 得 $a = 1$.

则 $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{2}$, 故双曲线 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$.

(2)证明: 由已知得 $M(1, 0)$, 设直线 MP 与 MQ 的斜率分别为 k_1, k_2 .

①当直线 PQ 不垂直于 x 轴时, 设直线 PQ 的斜率为 k , PQ 的方程为 $y = kx + m$, $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} y = kx + m, \\ x^2 - \frac{y^2}{2} = 1, \end{cases}$ 得 $(k^2 - 2)x^2 + 2kmx + m^2 + 2 = 0$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{-2km}{k^2 - 2}$, $x_1 x_2 = \frac{m^2 + 2}{k^2 - 2}$, 那么 $k_1 k_2 = \frac{y_1 y_2}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} = \frac{(kx_1 + m)(kx_2 + m)}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} = \frac{k^2(m^2 + 2) - 2k^2 m^2}{k^2 - 2} + m^2 = \frac{k^2 x_1 x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2}{x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1} = \frac{\frac{k^2(m^2 + 2)}{k^2 - 2} + \frac{2km^2}{k^2 - 2} + m^2}{\frac{m^2 + 2}{k^2 - 2} - \frac{-2km}{k^2 - 2} + 1} = \frac{2(k+m)(k-m)}{(k+m)^2} = \frac{2(k-m)}{k+m} = -\frac{2}{3}$, 得 $m = 2k$, 符合题意.

所以直线 PQ 的方程为 $y = k(x+2)$, 恒过定点 $(-2, 0)$.

②当直线 PQ 垂直于 x 轴时, 设 $P(t, h)$, 因为 P 是 C 上的点, 所以 $t^2 = 2h^2 - 2$.

则 $k_1 k_2 = \frac{-h^2}{(t-1)^2} = \frac{-2t^2}{(t-1)^2} = \frac{2(1+t)}{1-t} = -\frac{2}{3}$, 解得 $t = -2$, 故直线 PQ 过点 $(-2, 0)$.

综上, 直线 PQ 恒过定点 $(-2, 0)$.

生, 所以该班级共有 36 名学生, 故 A 正确; 对于 B, 易知第 1 个小组的男生甲被抽去参加社区服务的概率为 $\frac{1}{6}$, 故 B 错误;

对于 C, 每组男生被抽取的概率为 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, 女生被抽取的概率为 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, 则抽取的 6 名学生中男、女生人数相同的概率是 $C_6^3 (\frac{2}{3})^3 \times (\frac{1}{3})^3 = \frac{160}{729}$, 故 C 错误; 对于 D, 设抽取的 6 名学生中女生人数为 X , 则 $X \sim B(6, \frac{1}{3})$, 所以 $DX = 6 \times \frac{1}{3} \times (1 - \frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$, 故 D 正确, 故选 AD.

12.ABD 提示: 由题意, 得 $|F_1 F_2| = 2c = 4$, 则 $c = 2$, 设 $A(x_1, y_1)$, $B(-x_1, -y_1)$, $P(x_0, y_0)$, 则 $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$, $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, 两式作差, 得 $\frac{x_1^2 - x_0^2}{y_1^2 - y_0^2} = \frac{a^2}{b^2}$, 因为 $k_{AP} \cdot k_{BP} < 1$, 即 $\frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{y_0 + y_1}{x_0 + x_1} = \frac{y_0^2 - y_1^2}{x_0^2 - x_1^2} = \frac{b^2}{a^2} = 1$, 所以 $a = b$, 又 $a^2 + b^2 = c^2 = 4$, 所以 $a = b = \sqrt{2}$, 故 A 正确; 离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$, 故 B 正确; 因为双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm x$, 由题意, 得 $\frac{1}{3} < k_{AB} < 1$, 所以直线 AB 倾斜角的取值范围为 $[0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \pi]$, 故 C 错误; 若 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$, 则 $\angle F_1 P F_2 = \frac{\pi}{2}$, $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 4c^2 = 16$, 由双曲线的定义, 得 $||PF_1| - |PF_2|| = 2a = 2\sqrt{2}$, 两边平方, 得 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| = 8$, 即 $16 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| = 8$, 所以 $|PF_1| \cdot |PF_2| = 4$, 所以 $S_{\triangle P F_1 F_2} = \frac{1}{2} |PF_1| \cdot |PF_2| = 2$, 故 D 正确, 故选 ABD.

三、填空题

13.1 提示: 由 $l_1 \parallel l_2$, 得 $\frac{3}{6} = \frac{m}{3-m} \neq \frac{-2}{1}$, 解得 $m = 1$, 经检验, 符合题意.

14.6% 提示: 设事件 A_1 为“甲厂中的配件”, 则 $P(A_1) = 0.4$, 事件 A_2 为“乙厂中的配件”, 则 $P(A_2) = 0.6$, 事件 B 为“该配件为次品”, 则 $P(B|A_1) = 0.09$, $P(B|A_2) = 0.04$, 所以 $P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) = 0.4 \times 0.09 + 0.6 \times 0.04 = 0.06 = 6\%$.

15.2:4 提示: 抛物线的焦点为 $F(\frac{p}{2}, 0)$, 准线为 $x = -\frac{p}{2}$, 设点 $M(x_0, y_0)$, 则 $N(-\frac{p}{2}, y_0)$, 线段 FN 的中点为 $(0, \frac{y_0}{2})$, 由抛物线定义知 $|MN| = |MF|$, 即点 M 在线段 FN 的垂直平分线上, 因此 $\begin{cases} -\sqrt{3} \cdot \frac{y_0}{2} + 3 = 0, \\ x_0 - \sqrt{3} \cdot \frac{y_0}{2} + 3 = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_0 = 3, \\ y_0 = 2\sqrt{3}, \end{cases}$ 而 $y_0^2 = 2px_0$, 则有 $p = 2$, $|MF| = |x_0 - (-\frac{p}{2})| = 4$.

16.①②③ 提示: 取棱 BC_1 的中点 F , 以 OB 为 x 轴, OA 为 y 轴, OF 为 z 轴, 建立空间直角坐标系, 则 $O(0, 0, 0)$, $E(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, 1)$, $B(\frac{1}{2}, 0, 0)$, $C(-\frac{1}{2}, 0, 0)$, $\overrightarrow{CB} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{CE} = (\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, 1)$, \overrightarrow{CE} 绕着 BC 旋转即绕着 x 轴旋转, 设旋转后的向量为 a , 则 $|a| = |\overrightarrow{CE}| = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 故①正确;

由②知 $y^2 \in [0, \frac{19}{16}]$, a 在平面 α 上的投影向量为其在 xOy 平面上的投影向量 $b = (\frac{1}{4}, y, 0)$, $|b| = \sqrt{\frac{1}{16} + y^2} \in [\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{5}}{2}]$, 故③正确; 设直线 OE 在平面 α 内的投影与直线 BC 所成的角为 θ , 则 $\cos \theta = |\cos \langle b, \overrightarrow{CB} \rangle| = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{16} + y^2}} \in [\frac{\sqrt{5}}{10}, 1]$, 故④错误. 综上, 正确的是①②③.

四、解答题

17.解: (1)因为抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的准线 $x = -\frac{p}{2}$ 过 $M(-1, 0)$, 所以 $-\frac{p}{2} = -1$, 则 $p = 2$, 故抛物线方程为 $y^2 = 4x$.

(2)设切线方程为 $x = my - 1$, 与抛物线 C 的方程联立有 $y^2 - 4my + 4 = 0$, 所以 $\Delta = (4m)^2 - 16 = 0$, 故 $m = \pm 1$, 故直线 l 的方程为 $x - y + 1 = 0$ 或 $x + y + 1 = 0$.

18.解: (1)设“从所有试验动物中任取一只, 取到‘注射疫苗’动物”为事件 M .

由已知得 $P(M) = \frac{y+30}{100} = \frac{2}{5}$, 所以 $y = 10$, 代入可得 $B = 40$, $x = 40$, $A = 60$.

(2) $\lambda^2 = \frac{100 \times (20 \times 10 - 30 \times 40)^2}{50 \times 50 \times 40 \times 60} = \frac{50}{3} \approx 16.67 > 6.635$, 所以有 99% 的把握认为疫苗有效.

19.(1)证明: 以 BC 为 x 轴, BA 为 y 轴, BB_1 为 z 轴, 建立空间直角坐标系, 则 $E(0, 2-a, 0)$, $F(a, 0, 0)$, $A_1(0, 2, 2)$, $C_1(2, 0, 2)$, 所以

高二选择性必修(第一册)答案页第 8 期

⑧ (2)解: $\overrightarrow{AD}=(0,-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3})$, $\overrightarrow{DF}=(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6})$, $\overrightarrow{BD}=(-1,\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3})$.

设平面 ADF 的法向量为 $n=(x,y,z)$,

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD} \cdot n=0, \\ \overrightarrow{DF} \cdot n=0, \end{cases} \text{得} \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{6}}{3}z=0, \\ \frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{6}y-\frac{\sqrt{6}}{6}z=0, \end{cases} \text{令 } z=\sqrt{2},$$

则 $x=2\sqrt{3}$, $y=4$, 可得 $n=(2\sqrt{3}, 4, \sqrt{2})$.

设平面 BDF 的法向量为 $m=(a,b,c)$, 由 $\begin{cases} \overrightarrow{DF} \cdot m=0, \\ \overrightarrow{BD} \cdot m=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{6}b-\frac{\sqrt{6}}{6}c=0, \\ -a+\frac{2\sqrt{3}}{3}b+\frac{2\sqrt{6}}{3}c=0, \end{cases} \text{令 } c=1, \text{得 } a=0, b=-\sqrt{2},$$

$$\text{则 } m=(0, -\sqrt{2}, 1), \text{ 所以 } |\cos \langle m, n \rangle| = \frac{|\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{m}| \cdot |\overrightarrow{n}|} = \frac{|-4\sqrt{2}+2\sqrt{2}|}{\sqrt{3} \times \sqrt{30}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

所以平面 ADF 与平面 BDF 所成的锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

22.解:(1)因为椭圆 E 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 即 $a^2=2c^2$, 所以 $b^2=a^2-c^2=\frac{1}{2}a^2$.

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \\ y=x+\sqrt{3}, \end{cases} \text{得 } x^2+2(x+\sqrt{3})^2=2b^2,$$

化简得 $3x^2+4\sqrt{3}x+6-2b^2=0$, 因为直线 $x-y+\sqrt{3}=0$ 与该椭圆仅有一个公共点, 所以 $\Delta=(4\sqrt{3})^2-4 \times 3 \times (6-2b^2)=0$, 解得 $b^2=1$.

所以 $a^2=2$, 椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)设 l_1 与椭圆 E 的交点分别为 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, l_2 与椭圆 E 的交点为 C, D ,

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{2}+y^2=1, \\ y=kx+2, \end{cases} \text{消去 } y \text{ 得 } (1+2k^2)x^2+8kx+6=0.$$

$$\Delta=64k^2-4 \times 6 \times (1+2k^2)=8(2k^2-3)>0, \text{解得 } k>\frac{3}{2},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AB}=\sqrt{(1+k^2)\left[\left(\frac{-8k}{1+2k^2}\right)^2-4\right] \cdot \frac{6}{1+2k^2}}=2\sqrt{2} \cdot \sqrt{(1+k^2) \cdot \frac{2k^2-3}{(1+2k^2)^2}}.$$

由椭圆的对称性及 l_1 与 l_2 关于原点对称, 知四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

$$\text{设 } l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 间的距离为 } d=\frac{4}{\sqrt{1+k^2}},$$

$$\text{所以四边形面积 } S=|\overrightarrow{AB}| \cdot d=8\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2k^2-3}}{1+2k^2}=4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{4(2k^2-3)}}{1+2k^2},$$

$$\text{而 } \frac{\sqrt{4(2k^2-3)}}{1+2k^2} \leq \frac{4+(2k^2-3)}{1+2k^2} = \frac{1}{2}, \text{ 当且仅当 } k^2=\frac{7}{2} \text{ 时, 等号成立,}$$

所以 $S \leq 2\sqrt{2}$, 当 $k^2=\frac{7}{2}>\frac{3}{2}$ 时, S 取最大值 $2\sqrt{2}$.

第 30 期

第 2-3 版综合测试(六)参考答案

一、单项选择题

1.B 提示:直线 $y=mx-2$, 即 $mx-y-2=0$, 因为直线 $y=mx-2$ 与直线 $x+ny=0$ 平行, 所以 $mn-(-1)=0$, 即 $mn+1=0$, 故选 B.

2.B 提示:从 2,4 中选一个数字, 有 C_2^1 种方法; 从 1,3,5 中选两个数字, 有 C_3^2 种方法, 组成无重复数字的三位数, 有 $C_2^1 C_3^2 A_3^3=36$ 个, 故选 B.

3.A 提示:因为随机变量 X 服从正态分布 $N(2, 7)$, $P(X>1)=0.8$, 所以 $P(X \leq 1)=1-0.8=0.2$, 所以 $P(X \geq 3)=P(X \leq 1)=0.2$, 故选 A.

4.B 提示:由题意可知, $2^n=64$, 解得 $n=6$, 则 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$

展开式的通项为 $C_6^r x^{6-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r=C_6^r x^{6-2r}$,

令 $6-2r=0$, 得 $r=3$, 所以常数项为 $C_6^3=20$, 故选 B.

5.C 提示:连接 AM, AN , 因为 G 是 MN 的中点, 所以 $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, 因为 $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AA_1}+z\overrightarrow{AC}$, 所以 $x+y+z=\frac{3}{2}$, 故选 C.

6.C 提示:因为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$, 所以 $\left(\frac{p}{2}\right)^2+(\sqrt{3}\frac{p}{2})^2=4$, 解得 $p=2$, 故选 C.

7.A 提示:由题意知, 首先求出摸一次中奖的概率, 从 8 个球中摸出 3 个, 共有 $C_8^3=56$ 种结果, 3 个球号码之积能被 10 整除, 则其中一个必为 5, 另外两个号码从 1,2,3,4,6,7,8 中抽取, 且 2 个号码的乘积必须为偶数, 即抽取的另外两个号码为:一奇一偶或两偶, 则 $C_4^1 C_2^1+C_2^2=18$, 所以共有 18 种结果, 使得 3 个球号码之积能被 10 整除,

所以摸一次中奖的概率是 $\frac{18}{56}=\frac{9}{28}$, 又 2 个人摸奖, 相

当于发生 2 次试验, 且每一次发生的概率都是 $\frac{9}{28}$.

所以有 2 人参加摸奖, 恰好有 2 人获奖的概率是 $C_2^2 \times \left(\frac{9}{28}\right)^2=\frac{81}{784}$, 故选 A.

8.D 提示:若在椭圆 C_1 上存在点 P , 使得由点 P 所作的圆 C_2 的两条切线互相垂直, 设切点为 A, B , 则只需当点 P 为椭圆 C_1 的左顶点或右顶点时, 满足 $\angle APB \leq 90^\circ$,

$$\text{即 } \alpha=\angle APO \leq 45^\circ (O \text{ 为坐标原点}), \sin \alpha=\frac{\sqrt{5}}{a} \leq \sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 即 } 8b^2 \leq 5a^2, \text{ 因为 } a^2=b^2+c^2, \text{ 所以 } 3a^2 \leq 8c^2, \text{ 又 } 0 < e < \frac{\sqrt{2}}{2},$$

1, 所以 $\frac{\sqrt{6}}{4} \leq e < 1$, 即 $e \in \left[\frac{\sqrt{6}}{4}, 1\right)$, 故选 D.

二、多项选择题

9.AC 提示:因为 $a=(-1, \lambda, -2)$, $b=(2, -1, 1)$, a 与 b 的夹角为 120° , 所以 $\cos 120^\circ=\frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}=\frac{-2-\lambda-2}{\sqrt{5+\lambda^2} \cdot \sqrt{6}}=-\frac{1}{2}$, 解得 $\lambda=-1$ 或 $\lambda=17$, 故选 AC.

10.AC

提示:对于 A, $P(X<4)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=\frac{3}{n}=0.3$, 所以 $n=10$, 故 A 正确;

对于 B, 设随机变量 X 服从二项分布 $X \sim B\left(6, \frac{1}{2}\right)$, 则 $P(X=2)=C_6^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(1-\frac{1}{2}\right)^4=\frac{15}{64}$, 故 B 错误;

对于 C, 因为 $P(\eta=1)=2P(\eta=0)$ 且 $P(\eta=1)+P(\eta=0)=1$, 所以 $P(\eta=0)=\frac{1}{3}$, 故 C 正确;

对于 D, 随机变量 X 服从正态分布 $N(2, \sigma^2)$, 所以正态曲线的对称轴是 $x=2$, 因为 $P(X<4)=0.9$, 所以 $P(X \geq 4)=1-P(X<4)=0.1$, 所以 $P(0 \leq X<4)=1-P(X<0)-P(X \geq 4)=0.8$, 所以 $P(0 \leq X<2)=P(2 \leq X<4)=0.4$, 故 D 错误. 故选 AC.

11.BD 提示:对于 A, 抛物线 $y^2=-4\sqrt{7}x$ 的准线方程为 $x=\sqrt{7}$, 故 A 错误; 对于 B, 依题意, $a^2+3=7$, 解得 $a=2$, 故双曲线的实轴长为 4, 故 B 正确; 对于 C, 由选项 B 知, 双曲线方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$, 其渐近线方程为 $\sqrt{3}x \pm 2y=0$, 故 C 错误; 对于 D, 由双曲线的定义知, $||PF_1|-|PF_2||=4$, 即 $\left|\frac{9}{2}-|PF_2|\right|=4$, 解得 $|PF_2|=\frac{1}{2}<\sqrt{7}-2$ (舍去), 或 $|PF_2|=\frac{17}{2}$, 故 D 正确. 故选 BD.

12.ABD 提示:对于 A, 从中任取 3 球, 恰有 1 个白球的概率是 $\frac{C_3^1 C_2^2}{C_5^3}=\frac{12}{25}=\frac{2}{5}$, 故 A 正确;

对于 B, 从中放回地取球 6 次, 每次任取 1 球, 则取到白球的个数 X 服从二项分布 $B\left(6, \frac{1}{3}\right)$,

故恰好有 2 个白球的概率为 $C_6^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{243}$, 故 B 正确;

对于 C, 中不放回地取球 2 次, 每次任取 1 球, 若第一次取到红球, 则第二次取时有 3 个红球, 2 个白球, 所以取到红球的概率为 $\frac{3}{5}$, 故 C 错误;

对于 D, 中不放回地取球 3 次, 每次任取 1 球, 则取到红球的个数 Y 服从二项分布 $B\left(3, \frac{2}{3}\right)$, 至少有一次取到红球的概率为 $1-C_3^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{26}{27}$, 故 D 正确. 故选 ABD.

三、填空题

13.1.6 提示:因为 $\bar{x}=\frac{1}{5} \times (9+9.5+10+10.5+11)=10$,

$$\bar{y}=\frac{1}{5} \times (11+10+8+6+5)=8,$$

所以 $8=10\hat{b}+40$, 解得 $\hat{b}=-3.2$. 所以当 $x=12$ 时, $y=-3.2 \times 12+40=1.6$.

14.5 提示:因为 $(x+a)^5(2-x^2)$ 的展开式的各项系数和为 32, 令 $x=1$, 得 $(1+a)^5(2-1^2)=32$, 解得 $a=1$.

所以 $(x+a)^5(2-x^2)=2(x+1)^5-x^2(x+1)^5$, 所以该展开式中 x^4 的系数是 $2 \cdot C_5^1 \cdot C_4^3=5$.

15. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ 提示:因为 AB 是底面圆直径, 所以 $AO \perp BO$, 又 OP 是圆柱母线, 则 $OP \perp$ 平面 OAB , 以 OA, OB, OP 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系,

设 $OA=1$, 则 $AB=OP=\sqrt{2}$, 所以 $OB=\sqrt{(\sqrt{2})^2-1^2}=1$, 又 $AC \parallel OB$, 所以 $\angle OAC=90^\circ$, 而 $\angle ACB=90^\circ$, 所以四边形 $OACB$ 是正方形, 所以 $P(0,0,\sqrt{2})$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(1,1,0)$, $\overrightarrow{PC}=(1,1,-\sqrt{2})$, $\overrightarrow{AB}=(-1,-\sqrt{2})$, 设平面 PAB 的法向量为 $n=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases} \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB}=-x+y=0, \\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AP}=-x+\sqrt{2}z=0, \end{cases}$ 取 $z=1$, 得 $x=y=\sqrt{2}$, 则 $n=(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$, 设直线 PC 与平面 PAB 所成角为 θ , 所以 $\sin \theta=|\cos \langle n, \overrightarrow{PC} \rangle|=\frac{|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{PC}|}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{PC}|}=\frac{|\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{2}|}{\sqrt{5} \times 2}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

16. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 提示:因为 $|PA| \geq 2\sqrt{2} \cdot |PB|$,

$$\text{所以 } \sin \angle PBA=2\sqrt{2} \sin \angle PAB, \text{ 又 } \angle PBA-\angle PAB=\frac{\pi}{4},$$

所以 $\sin \angle PBA=2\sqrt{2} \sin \left(\angle PBA-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin \angle PBA-$

$2\cos \angle PBA$, 即 $\sin \angle PBA=2\cos \angle PBA$, 所以 $\tan \angle PBA=2$, $\tan \angle PAB=\tan \left(\angle PBA-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2-1}{1+2}=\frac{1}{3}$, 设 $P(m,n)$, 则 $\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}=1$, $n^2=\frac{b^2(a^2-m^2)}{a^2}$, 由题可知 $A(-a,0)$, $B(a,0)$, $k_{PA} \cdot k_{PB}=\frac{n}{m+a} \cdot \frac{n}{m-a}=\frac{n^2}{m^2-a^2}=-\frac{b^2}{a^2}$, 所以 $-\frac{b^2}{a^2}=-2 \times \frac{1}{3}$, 即 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{2}{3}$, 所以椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

四、解答题

17.解:(1)因为圆心 C 既在直线 $y=2x-4$ 上, 也在直线 $y=x-1$ 上, 所以由 $\begin{cases} y=2x-4, \\ y=x-1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=3, \\ y=2, \end{cases}$ 即圆心 C 的坐标为 $(3,2)$, 又圆 C 的半径为 1, 所以圆 C 的方程为 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$.

(2)当切线斜率不存在时, 切线方程为 $x=2$, 满足题意; 当切线斜率存在时, 设过 A 点的切线方程为 $y-4=k(x-2)$, 即 $kx-y-2k+4=0$, 则圆心 C 到切线的距离 $d=\frac{|3k-2-2k+4|}{\sqrt{1+k^2}}=1$, 解得 $k=-\frac{3}{4}$, 此时切线方程为 $3x+4y-22=0$.

综上, 所求切线的方程为 $x=2$ 或 $3x+4y-22=0$.

18.解:(1)因为该二项展开式有 6 项, 故 $n=5$, 所以展开式中所有二项式系数的和为 $2^5=32$.

(2) $(2x+1)^5$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^r (2x)^{5-r} \cdot 1^r$, 令 $5-r=2$, 得 $r=3$, 故展开式中含 x^2 的项为 $C_5^3 (2x)^2=40x^2$.

19.解:(1)记该同学会做的题目数为 X , 由题意知, $X=1, 2, 3$,

$$P(X=1)=\frac{C_1^1 C_2^4}{C_7^5}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}, P(X=2)=\frac{C_2^1 C_5^4}{C_7^5}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5},$$

$$P(X=3)=\frac{C_3^1 C_4^4}{C_7^5}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5},$$

所以该同学会做的题目数 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$(2) \text{ 由 (1) 知, 该同学能及格 的概率为 } \frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{4}{5}.$$

20.(1)证明:由条件可知 $BE=2\sqrt{2}$, $BF=\sqrt{13}$, $EF=\sqrt{5}$, 所以 $BF^2=BE^2+EF^2$, 所以 $EF \perp BE$. 又 $BE=BE$, $E=2\sqrt{2}$, $BB_1=4$, 所以 $BE^2+BE^2=BB_1^2$, 所以 $BE \perp BE$, 又因为 $BE \cap EF=E$, 所以 $BE \perp$ 平面 BEF .

(2)解:以 AC 的中点 O 为坐标原点, OA 所在直线为 x 轴, OB 所在直线为 y 轴, 建立空间直角坐标系 $Oxyz$,

则 $A(1,0,0)$, $B(0,\sqrt{3},0)$, $E(-1,0,2)$, $F(1,0,3)$, 所以 $\overrightarrow{BF}=(1,-\sqrt{3},3)$, $\overrightarrow{BE}=(-1,-\sqrt{3},2)$, $\overrightarrow{AB}=(-1,\sqrt{3},0)$,

设平面 BEF 的法向量为 $n=(x,y,z)$,

因为 $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{BF}=0$, 所以 $\begin{cases} x-\sqrt{3}y+3z=0, \\ x+\sqrt{3}y-2z=0, \end{cases}$ 取 $y=5\sqrt{3}$, 得 $\overrightarrow{n}=(-3,5\sqrt{3},6)$.

设平面 ABF 的法向量为 $m=(a,b,c)$, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{AB}=0, \\ \overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{BF}=0, \end{cases}$

$$\begin{cases} -a+\sqrt{3}b=0, \\ a-\sqrt{3}b+3c=0, \end{cases} \text{ 取 } b=1, \text{ 则 } m=(\sqrt{3}, 1, 0), \cos |\langle m, n \rangle| = \frac{|\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{m}| \cdot |\overrightarrow{n}|} = \frac{-3\sqrt{3}+5\sqrt{3}}{2\sqrt{30} \times 2} = \frac{\sqrt{10}}{20},$$

所以平面 BEF 与平面 ABF 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{20}$.

21.解:(1)补充 2x2 列联表如下所示:

	优秀员工	非优秀员工	总计
男性	30	170	200
女性	20	180	200
总计	50	350	400

$$\chi^2=\frac{400 \times (30 \times 180 - 20 \times 170)^2}{200 \times 200 \times 50 \times 350} \approx 2.286 < 2.706,$$

故没有 90% 以上的把握认为“评定类型”与“性别”有关.

(2)由题意知, 从已选取的 400 人中随机抽取 1 人, 属于“非优秀员工”的频率为 $\frac{7}{8}$, 所以抽取 1 人属于“非优秀

员工”的概率为 $\frac{7}{8}$.

X 的所有可能取值为 0,1,2,3,

$$P(X=0)=\left(\frac{1}{8}\right)^3=\frac{1}{512}, P(X=1)=C_3^1 \times \left(\frac{1}{8}\right)^2 \times \frac{7}{8}=\frac{21}{512},$$

$$P(X=2)=C_3^2 \times \frac{1}{8} \times \left(\frac{7}{8}\right)^2=\frac{147}{512},$$

$$P(X=3)=\left(\frac{7}{8}\right)^3=\frac{343}{512},$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{512}$	$\frac{21}{512}$	$\frac{147}{512}$	$\frac{343}{512}$

所以 $EX=0 \times \frac{1}{512}+1 \times \frac{21}{512}+2 \times \frac{147}{512}+3 \times \frac{343}{512}=\frac{21}{8}$.

22.解:(1)设 E 的方程为 $mx^2+ny^2=1$, 将 $A(0,-2)$,

$$B\left(\frac{3}{2}, -1\right) \text{ 两点代入, 得 } \begin{cases} 4n=1, \\ \frac{9}{4}m+n=1, \end{cases} \text{ 解得 } m=\frac{1}{3}, n=\frac{1}{4}, \text{ 故 } E \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1.$$

(2)由 $A(0,-2)$, $B\left(\frac{3}{2}, -1\right)$, 得线段 AB : $y=\frac{2}{3}x-2(-2 \leq y \leq -1)$.

数学
北师大

①若过 $P(1,-2)$ 的直线的斜率不存在, 则直线方程为 $x=1$, 代入 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$, 可得 $M(1,-\frac{2\sqrt{6}}{3})$, $N(1,\frac{2\sqrt{6}}{3})$, 将

$$y=\frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ 代入线段 } AB \text{ 的方程 } y=\frac{2}{3}x-2(-2 \leq y \leq -1) \text{ 中, 可}$$

$$\text{得 } T(3-\sqrt{6}, -\frac{2\sqrt{6}}{3}).$$

$$\text{由 } \overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}, \text{ 得 } H(5-2\sqrt{6}, -\frac{2\sqrt{6}}{3}), \text{ 易求得此时直}$$