取值范围为$[1,5]$,故C错误;对于D,$g(x)$恰好有5个不同的零点,即方程$[f(x)]^2-(m+3)f(x)+3m=0$恰好有5个根,由$[f(x)]^2-(m+3)f(x)+3m=0$,解得$f(x)=3$或$f(x)=m$,不妨设5个零点,依次为$x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$,可知$x_2=\frac{1}{8}$,$x_5=8$,$x_1\leqslant 0$,$|\log_2x_4|=|\log_2x_3|$,则$x_3x_4=1$,所以$x_1x_2x_3x_4x_5=x_1\in(-\infty,0]$,故D正确,故选BD.

三、填空题

13.177　**提示**:因为$8\times 75\%=6$,所以第75百分位数是从低到高排列的第6个和第7个数据的平均数,即$\frac{175+179}{2}=177$.

14.$\frac{\sqrt{2}}{6}$　**提示**:以D为坐标原点,DA,DC,DD_1所在直线为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系(图略),设正方体的棱长为2,则$B(2,2,0)$,$M(1,0,2)$,$A(2,0,0)$,$C(0,2,0)$,则$\overrightarrow{BM}=(-1,-2,2)$,$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$,因为$BB_1\perp$平面$ABCD$,所以$BB_1\perp AC$,又$AC\perp BD$,$BB_1\cap BD=B$,所以$AC\perp$平面$DBB_1D_1$,所以平面$DBB_1D_1$的一个法向量是$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$,设$BM$与平面$DBB_1D_1$所成角为$\theta$,则$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BM}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BM}|}=\frac{\sqrt{2}}{6}$.

15.3　**提示**:原不等式可化为$\ln x_1-\ln x_2<\frac{3(x_1-x_2)}{x_1x_2}=\frac{3}{x_2}-\frac{3}{x_1}$,则$\ln x_1+\frac{3}{x_1}<\ln x_2+\frac{3}{x_2}$,令$f(x)=\ln x+\frac{3}{x}$,则对任意的$x_1,x_2\in(m,+\infty)$,当$x_1<x_2$时,都有$f(x_1)<f(x_2)$,所以$f(x)$在$(m,+\infty)$上单调递增,又$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}=\frac{x-3}{x^2}$,令$f'(x)>0$,得$x>3$,所以$f(x)$在$(3,+\infty)$上单调递增,所以$m\geqslant 3$,即$m$的最小值为3.

16.$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　**提示**:由题意,得$C(a,0)$,设$A(x_1,y_1)$,$B(-x_1,-y_1)$,$k_{AC}=k_1=\frac{y_1}{x_1-a}$,$k_{BC}=k_2=\frac{y_1}{x_1+a}$,因为$\frac{x_1^2}{a^2}+y_1^2=1$,所以$k_1\cdot k_2=\frac{y_1}{x_1-a}\cdot\frac{y_1}{x_1+a}=\frac{y_1^2}{x_1^2-a^2}=-\frac{1}{a^2}$,又$k_1=\frac{y_1}{x_1-a}$,$k_1^2=\frac{y_1^2}{(x_1-a)^2}=\frac{a^2-x_1^2}{a^2(x_1-a)^2}=\frac{x_1+a}{a^2(a-x_1)}$ ①,$k_2^2=\frac{a-x_1}{a^2(a+x_1)}$ ②,由$5|AC|^2\geqslant|BC|\cdot|CD|$,得$5(1+k_1^2)(a-x_1)^2\geqslant(1+k_2^2)(a+x_1)(a-x_1)$ ③,将①②代入③式,消去k_1,k_2,得$(a^2-1)\cdot(a^2-5)x_1\geqslant(a^2-5)(a^2+1)a$,又$a^2-1>0$,$0<x_1<a$,所以$a^2-5\leqslant 0$,即$a^2\leqslant 5$,所以$e^2=\left(\frac{c}{a}\right)^2=1-\frac{1}{a^2}\leqslant 1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$,即$e$的最大值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

选择题和填空题题组训练(7)

一、单项选择题

1.B　**提示**:由$\frac{x}{2-x}\geqslant 1$,即$\frac{x-1}{2-x}\geqslant 0$,解得$1\leqslant x<2$,则$S=[1,2)$,所以$S\cap T=\{1\}$.故选B.

2.C　**提示**:由题意,得方程$mx^2+nx+3=0$的两根分别为-1和3,所以$\begin{cases}-1+3=-\frac{n}{m},\\ -1\times 3=\frac{3}{m},\\ m<0,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=-1,\\ n=2,\end{cases}$则不等式$nx^2-mx-1<0$,即$2x^2+x-1<0$,解得$-1<x<\frac{1}{2}$,所以所求不等式的解集为$\left\{x\,\middle|\,-1<x<\frac{1}{2}\right\}$.故选C.

3.B　**提示**:由题意,得$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影向量的坐标为$|\boldsymbol{a}|\cos\theta\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=(1,1)$.故选B.

4.B　**提示**:若$a/\!/b$,$b\subset\alpha$,则$a/\!/\alpha$或$a\subset\alpha$,故A错误;若$a\perp\alpha$,$\alpha/\!/\beta$,又$a\perp\beta$,又$b\subset\beta$,则$a\perp b$,故B正确;若$a/\!/\alpha$,$a/\!/\beta$,则$\alpha/\!/\beta$或α与β相交,故C错误;若$\alpha\cap\beta=b$,$a\subset\alpha$,$a\perp b$,不能判定α与β是否垂直,故D错误.故选B.

5.C　**提示**:因为$(1+2x-x^2)^n$展开式中各项系数的和为$2^n=64$,所以$n=6$,所以$(1+2x-x^2)^6$展开式中含x^3的项为$C_6^3\cdot(2x)^3\cdot 1^3+C_6^1\cdot(2x)\cdot C_5^1\cdot(-x^2)\cdot 1^4=100x^3$,所以该展开式中的$x^3$项的系数为100.故选C.

6.C　**提示**:由题意,知圆C的圆心为$C(3,-2)$,半径为$r=3$,则圆心C到直线$l:3x+4y+19=0$的距离$d=\frac{|3\times 3+4\times(-2)+19|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$,因为$|PQ|=\sqrt{|CP|^2-|CQ|^2}=\sqrt{|CP|^2-9}$,所以当直线$l$与$CP$垂直,即$|CP|=d$时,$|CP|$最小,则$|PQ|$最小,所以$|PQ|_{\min}=\sqrt{7}$.故选C.

7.A　**提示**:设事件B_1为“取到的是含有四个次品的包”,事件B_2为“取到的是含有一个次品的包”,事件A为“采购员拒绝购买”,由题意,得$P(B_1)=0.3$,$P(B_2)=0.7$,由古典概型,知$P(A|B_1)=1-\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{5}{6}$,$P(A|B_2)=1-\frac{C_9^3}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$,则$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=\frac{3}{10}\times\frac{5}{6}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{10}=0.46$.故选A.

8.C　**提示**:因为$y=f(x)$的图象可由$y=f(x-1)$的图象向左平移一个单位得到,$y=f(x-1)$的图象关于$x=1$对称,所以$y=f(x)$的图象关于y轴对称,即函数$f(x)$为偶函数,故①正确;由定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递增,得函数$f(x)$在区间$(-\infty,0]$上单调递减,若$f(\log_2a)<f(2)$,则$|\log_2a|<2$,解得$\frac{1}{4}<a<4$,故②正确;$f\left(\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}\right)=f(3)$,$f(-\log_313)=f(\log_313)$,由$\log_313\in(2,3)$,$2^{0.6}\in(1,2)$,所以$f(3)>f(\log_313)>f(2^{0.6})$,故③正确;因为$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,在$(-\infty,0]$上单调递减,所以$f(x)_{\min}=f(0)$,无最大值,故④错误.故选C.

二、多项选择题

9.AD　**提示**:$z=(3+2i)(1-i^3)=(3+2i)(1+i)=1+5i$.对于A,$z$的实部为1,故A正确;对于B,$z$的虚部为5,故B错误;对于C,$\bar{z}=1-5i$,故C错误;对于D,$\bar{z}$在复平面内对应的点为$(1,-5)$,位于第四象限,故D正确.故选AD.

10.BCD　**提示**:由$a+b=2$,得$\frac{3a}{b}+\frac{4}{ab}=\frac{3(2-b)}{b}+\frac{2(a+b)}{ab}=2\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)-3$,因为$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)(a+b)=\frac{1}{2}\left(5+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\right)\geqslant\frac{1}{2}\times(5+2\sqrt{4})=\frac{9}{2}$,当且仅当$b=2a$,即$a=\frac{2}{3}$,$b=\frac{4}{3}$时,等号成立,所以$\frac{3a}{b}+\frac{4}{ab}=2\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)-3\geqslant 6$,故选BCD.

11.BD　**提示**:设$f(x)=\frac{\ln x}{x}$,则$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,当$0<x<e$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,当$x>e$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减.对于A,$f(2)<f(e)$,即$\frac{\ln 2}{2}<\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$,故A错误;对于B,$f(3)<f(e)$,即$\frac{\ln 3}{3}<\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$,故B正确;对于C,因为$\frac{\ln 2}{2}=\frac{2\ln 2}{4}=\frac{\ln 4}{4}$,$f(4)<f(3)$,所以$\frac{\ln 4}{4}<\frac{\ln 3}{3}$,即$\frac{\ln 2}{2}<\frac{\ln 3}{3}$,故C错误;对于D,$f(3)>f(\pi)$,即$\frac{\ln 3}{3}>\frac{\ln\pi}{\pi}$,故D正确.故选BD.

12.CD　**提示**:由$f(x)+xf'(x)=\frac{1}{x}$,将$x=1$代入得$f(1)+f'(1)=1$,因为$f(1)=1$,所以$f'(1)=0$,故A错误;令$g(x)=xf(x)$,则$g'(x)=f(x)+xf'(x)=\frac{1}{x}$,又$(\ln x)'=\frac{1}{x}$,所以可设$g(x)=\ln x+t$,$t\in\mathbf{R}$,又$g(1)=f(1)=t=1$,所以$g(x)=\ln x+1$,所以$f(x)=\frac{\ln x+1}{x}$,则$f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$,当$x\in(0,1)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增;当$x\in(1,+\infty)$,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,所以$f(x)$在$x=1$处取最大值1,当$x\to 0$时,$f(x)\to-\infty$,当$x\to+\infty$时,$f(x)\to 0$,作出$f(x)$的大致图象(图略),由图象知,要使方程$f(x)=a$有两个解,则需$y=a$与$y=f(x)$的图象有两个交点,所以$0<a<1$,故B错误;由图可知,$f(x)\leqslant 1$,故C正确;由图可知,当$a=1$时,$y=a$与$y=f(x)$的图象只有一个交点,所以方程$f(x)=a$有且只有一个解,故D正确.故选CD.

三、填空题

13.12　**提示**:应该从青年员工中抽取的人数为$120\times\frac{30}{80+100+120}=12$.

14.1　**提示**:因为$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$,所以$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=1+1+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$,所以$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{1+1-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=1$.

15.$-\frac{7}{9}$　**提示**:因为$\sin 15^\circ\cos 15^\circ\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\alpha=\frac{1}{6}$,所以$\frac{1}{2}\sin 30^\circ\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\alpha=\frac{1}{4}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\alpha=\frac{1}{6}$,即$\frac{1}{2}\cos(\alpha+60^\circ)=\frac{1}{6}$,所以$\cos(\alpha+60^\circ)=\frac{1}{3}$,所以$\cos(2\alpha+120^\circ)=2\cos^2(\alpha+60^\circ)-1=-\frac{7}{9}$.

16.$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{3}-1\right]$　**提示**:因为$|MN|=|F_1F_2|$,所以由椭圆的对称性,得四边形MF_1NF_2为矩形,所以$|NF_1|=|MF_2|$,因为$|MF_1|^2+|MF_2|^2=4c^2$,$|MF_1|+|MF_2|=2a$,所以$2|MF_2|^2-4a|MF_2|+4a^2=4c^2$,即$|MF_2|^2-2a|MF_2|+2b^2=0$,由$\Delta=4a^2-8b^2>0$,得$a^2>2b^2=2a^2-2c^2$,所以$a^2<2c^2$,得$\frac{c}{a}>\frac{\sqrt{2}}{2}$,因为点$M$在第一象限,所以由上述方程解得$|MF_2|=a-\sqrt{a^2-2b^2}$,因为$\frac{|NF_1|}{|MF_1|}=\frac{|MF_2|}{|MF_1|}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$,$|MF_1|+|MF_2|=2a$,所以$|MF_2|\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}(2a-|MF_2|)$,即$a>|MF_2|\geqslant(\sqrt{3}-1)a$,所以$a>a-\sqrt{a^2-2b^2}\geqslant(\sqrt{3}-1)a$,化简得$(4-2\sqrt{3})a^2\geqslant c^2$,解得$\frac{c}{a}\leqslant\sqrt{3}-1$.综上,$\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{c}{a}\leqslant\sqrt{3}-1$.

选择题和填空题题组训练(8)

一、单项选择题

1.C　**提示**:因为集合$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$,所以$\complement_{\mathbf{R}}A=\{x|x<-2$或$x>2\}$,又$B=\{x|x^2-5x-6\leqslant 0\}=\{x|-1\leqslant x\leqslant 6\}$,所以$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cup B=\{x|x<-2$或$x\geqslant-1\}$.故选C.

2.D　**提示**:由$\frac{2z+i}{1-i}=3+i$,得$z=\frac{(3+i)(1-i)-i}{2}=\frac{4-3i}{2}=2-\frac{3}{2}i$,故$|z|=\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$.故选D.

3.B　**提示**:因为$x^2+1\geqslant 1$,所以命题p是假命题,故A错误;命题“$\neg p:\exists x\in\mathbf{R},x^2+1\geqslant 0$”是真命题,故B正确,C,D错误.故选B.

4.A　**提示**:由题意,得基本事件总数为$3\times 2=6$,数字不大于2.78的基本事件有2.17,2.18,2.78,2.71,个数为4,所以所求概率$P=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.故选A.

5.B　**提示**:由$f(x)=(e^{-x}-e^x)\cos 2x$,得$f(-x)=(e^x-e^{-x})\cdot\cos(-2x)=-(e^{-x}-e^x)\cos 2x=-f(x)$,所以$f(x)$是奇函数,排除A,C;当$x=1$时,$f(1)=(e^{-1}-e)\cos 2>0$,排除D.故选B.

6.A　**提示**:根据题意,得$C=56\cdot 10^n$,当$I=15$A时,$56\cdot 10^n=15^n\cdot t$,所以$t=56\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n=56\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{3}{2}}2}=56\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{2}}=56\times\frac{1}{2}=28$,即当放电电流$I=15$A,放电时间为28h.故选A.

7.C　**提示**:因为$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数,所以$f(-x)=f(x)$,又函数$f(x+1)$的图象关于原点对称,所以函数$f(x)$的图象关于$(1,0)$对称,即$-f(x)=f(2-x)$,所以$-f(1)=f(1)$,则$f(1)=0$,又$f(0)=1$,则$f(2)=-f(0)=-1$,又$f(x)=f(-x)$,所以$-f(-x)=f(2-x)$,即$f(x+2)=-f(x)$,所以$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$,所以$f(x)$的周期为4,所以$f(2022)=f(505\times 4+2)=f(2)=-1$,$f(2023)=f(505\times 4+3)=f(3)=f(2+1)=-f(1)=0$,所以$f(2022)+f(2023)=-1$.故选C.

8.C　**提示**:由$y=\log_a(x+1)+1$在$[0,+\infty)$上单调递减,得$0<a<1$,因为函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递减,所以$\begin{cases}\frac{3-4a}{2}\geqslant 0,\\ 3a\geqslant\log_a1+1,\end{cases}$解得$\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{3}{4}$,作出$|f(x)|$的大致图象(图略),由图象知,$|f(x)|=2-x$在$[0,+\infty)$上有且仅有一个解,故$|f(x)|=2-x$在$(-\infty,0)$上同样有且仅有一个解.①当$3a>2$,即$a>\frac{2}{3}$时,由$x^2+(4a-3)x+3a=2-x$,得$\Delta=(4a-2)^2-4(3a-2)=0$,解得$a=\frac{3}{4}$或$a=1$(舍去);②当$1\leqslant 3a\leqslant 2$,即$\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{2}{3}$时,由图象可知,符合题意.综上,$a$的取值范围为$\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\cup\left\{\frac{3}{4}\right\}$.故选C.

二、多项选择题

9.AD　**提示**:对于A,因为平面$A_1ABB_1/\!/$平面D_1C_1CD,$D_1C\subset$平面D_1C_1CD,所以$D_1C/\!/$平面A_1ABB_1,故A正确;对于B,平面BCD_1,即平面BCD_1A_1,则$A_1D_1\subset$平面BCD_1,故B错误;对于C,因为$AD\cap BD=D$,且$\angle ADB=45^\circ$,所以AD与平面D_1DB不垂直,故C错误;对于D,易知$BC\perp$平面A_1ABB_1,又$BC\subset$平面BCD_1,所以平面$BCD_1\perp$平面A_1ABB_1,故D正确.故选AD.

10.AC　**提示**:由$\hat{y}=0.28x+\hat{a}$,$0.28>0$,可知y随着x增大而增大,所以变量y与x正相关,相关系数$r>0$,故A正确,B错误;$\bar{x}=\frac{1}{5}\times(1+2+3+4+5)=3$,$\bar{y}=\frac{1}{5}\times(0.5+0.6+1+1.4+1.5)=1$,则回归直线过点$(3,1)$,所以$1=0.28\times 3+\hat{a}$,得$\hat{a}=0.16$,故C正确;由回归直线可知,2022年7月该地新能源汽车的销量的估计值是$\hat{y}=0.28\times 7+0.16=2.12$万辆,而不一定是2.12万辆,故D错误.故选AC.

11.CD　**提示**:因为函数$f(x)=\ln(x^2-ax+1)$在$[2,+\infty)$上单调递增,所以$g(x)=x^2-ax+1$在$[2,+\infty)$上单调递增,且$g(x)>0$在$[2,+\infty)$上恒成立,则$\begin{cases}\frac{a}{2}\leqslant 2,\\ g(2)=5-2a>0,\end{cases}$解得$a<\frac{5}{2}$,所以$a$的取值范围为$\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)$.故选CD.

12.AB　**提示**:因为$f(x)=\frac{1+\ln(x+1)}{x}(x>0)$,所以$f(x)>\frac{k}{x+1}$恒成立等价于$k<\frac{(x+1)[1+\ln(x+1)]}{x}$在$(0,+\infty)$上恒成立.令$h(x)=\frac{(x+1)[1+\ln(x+1)]}{x}(x>0)$,则$k<h(x)_{\min}$,$h'(x)=\frac{x-\ln(x+1)-1}{x^2}$,令$g(x)=x-\ln(x+1)-1(x>0)$,则$g'(x)=\frac{x}{1+x}>0$,所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,又$g(2)=1-\ln 3<0$,$g(3)=2-2\ln 2>0$,所以$g(x)=0$存在唯一实根$a$,且$a\in(2,3)$,$g(a)=0$,即$a=\ln(a+1)+1$,当$x>a$时,$g(x)>0$,$h'(x)>0$,$h(x)$单调递增,当$0<x<a$时,$g(x)<0$,$h'(x)<0$,$h(x)$单调递减,所以$h(x)_{\min}=h(a)=\frac{(a+1)[1+\ln(a+1)]}{a}=a+1\in(3,4)$,所以$k<a+1$,所以$k\leqslant 3$.故选AB.

三、填空题

13.5　**提示**:由$\boldsymbol{a}=(2,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,3)$,得$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,4)$,所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=5$.

14.3　**提示**:因为$x>0$,$y>0$,$x+2y=3$,所以$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)(x+2y)=\frac{1}{3}\left(5+\frac{2y}{x}+\frac{2x}{y}\right)\geqslant\frac{1}{3}\left(5+2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{2x}{y}}\right)=3$,当且仅当$\frac{2y}{x}=\frac{2x}{y}$,即$x=y=1$时,等号成立.

15.e+1　**提示**:由$f(x)=(x+1)e^x+\ln x$经过点$(1,a)$,得$a=2e$,因为$f'(x)=(x+2)e^x+\frac{1}{x}$,所以$f(x)$在$x=1$处的切线的斜率为$f'(1)=3e+1$,由题意,得$b=3e+1$,所以$b-a=e+1$.

16.16,4　**提示**:由题可知,$H\left(-\frac{p}{2},0\right)$,设直线$AB$:$x=ty-\frac{p}{2}$,代入抛物线方程,得$y^2-2pty+p^2=0$,则$y_1y_2=p^2$,因为$|BF|=4|AF|$,所以$|y_2|=4|y_1|$,又$x_1=\frac{y_1^2}{2p}$,$x_2=\frac{y_2^2}{2p}$,所以$\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2^2}{y_1^2}=16$,$x_1x_2=\frac{y_1^2y_2^2}{4p^2}=\frac{p^2}{4}=16x_1^2$,所以$x_1=\frac{p}{8}$,$x_2=2p$,又$AB$的中点到准线$l$的距离为$\frac{25}{4}$,所以$\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{p}{2}=\frac{25}{4}$,即$x_1+x_2+p=\frac{25}{2}$,所以$\frac{p}{8}+2p+p=\frac{25}{2}$,解得$p=4$.

扫码免费下载习题讲解ppt

第31期

选择题和填空题题组训练(1)

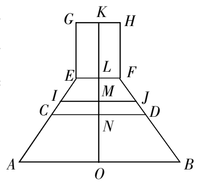
一、单项选择题

1.D　**提示**:因为$A=\{x|x^2+x-2\leqslant 0\}=\{x|-2\leqslant x\leqslant 1\}$,$B=\left\{x\,\middle|\,\frac{x-2}{x+1}\geqslant 0\right\}=\{x|x<-1$或$x\geqslant 2\}$,所以$A\cap B=\{x|-2\leqslant x<-1\}$.故选D.

2.B　**提示**:因为$z(1+i)=1-3i$,所以$z=\frac{1-3i}{1+i}=\frac{(1-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2-4i}{2}=-1-2i$,所以$\bar{z}=-1+2i$.故选B.

3.D　**提示**:由题意,得$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=-\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$.故选D.

4.B　**提示**:作出截面图如图,由$AB=9$cm,$EF=GH=3$cm,$LO=3\sqrt{3}$cm,得$\tan A=\frac{LO}{\frac{1}{2}(AB-EF)}=\sqrt{3}$,所以$\angle A=60^\circ$.因为投入石子前水位线的长$CD=6$cm,投入石子后,水位线的长$IJ=9-2\times\frac{2\sqrt{3}}{\tan 60^\circ}=5$cm,所以$V_{石子}=\frac{1}{3}\pi\cdot MN(CN^2+IM^2+CN\cdot IM)=\frac{91\sqrt{3}\pi}{24}$cm³.因为需要填充的石子的体积是由圆台和圆柱体构成,即$V=V_{圆台}+V_{圆柱体}=\frac{1}{3}\pi\cdot LN(CN^2+EL^2+CN\cdot EL)+\pi\cdot EL^2\cdot(KL-\sqrt{3})=\frac{63\sqrt{3}\pi}{8}+\frac{9\sqrt{3}\pi}{4}=\frac{81\sqrt{3}\pi}{8}$cm³,所以需要石子的个数为$\frac{V}{V_{石子}}=\frac{243}{91}\approx 2.7$,所以至少需要3颗石子.故选B.



(第4题图)

5.C　**提示**:7个小球任取3个有$C_7^3=35$种情况,其中所取出的小球上数字的最小值为2的有$C_1^1C_4^2+C_2^2\cdot C_4^1=16$种情况,所以所求概率为$\frac{16}{35}$.故选C.

6.A　**提示**:由题意,得$2\times\frac{\pi}{6}+\varphi+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,则$\varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=-\frac{\pi}{6}$,$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,得$-\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,所以$f(x)$包含原点的一个单调递增区间为$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$,又$f(x)$在区间$[-a,a](a>0)$上单调递增,则$a\leqslant\frac{\pi}{6}$,即$a$的最大值为$\frac{\pi}{6}$.故选A.

7.C　**提示**:令$f(x)=\sin x-x\cos x$,则$f'(x)=x\sin x$,当$0<x<1$时,$f'(x)>0$,所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递增,则$f(0.1)=\sin 0.1-0.1\cos 0.1>f(0)=0$,因为$a=0.1\cos 0.1$,$c=\sin 0.1$,所以$c>a$.令$g(x)=\sin x+\ln(1-x)$,则$g'(x)=\cos x+\frac{-1}{1-x}$,因为当$0<x<1$时,$\frac{-1}{1-x}<-1$,$\cos x\in[-1,1]$,则$g'(x)<0$,故$g(x)$在$(0,1)$上单调递减,$g(0.1)=\sin 0.1+\ln\frac{9}{10}<g(0)=0$,因为$b=\ln\frac{10}{9}$,$c=\sin 0.1$,所以$\sin 0.1<-\ln\frac{9}{10}=\ln\frac{10}{9}$,即$c<b$.综上,$a<c<b$,故选C.

8.B　**提示**:取AB的中点N,连接PN,ON,由题意,设圆柱O_1O的上底面圆O_1与侧面的斜高PN相切于M,且$O_1M/\!/ON$,设$O_1M=x(0<x<\sqrt{3})$,则$\frac{PO_1}{PO}=\frac{O_1M}{ON}$,由$PA=PB$,得$PN\perp AB$,易得$ON\perp AB$,所以$\angle PNO$是侧面与底面所成二面角的平面角,所以$\angle PNO=60^\circ$,由正六棱锥$P$-$ABCDEF$的底面边长为2,得$ON=\sqrt{3}$,所以$PO=\sqrt{3}\tan 60^\circ=3$,所以$\frac{PO_1}{3}=\frac{x}{\sqrt{3}}$,所以$PO_1=\sqrt{3}x$,$OO_1=3-\sqrt{3}x$,所以$V_{圆柱OO_1}=\pi\times O_1M^2\cdot OO_1=\pi x^2(3-\sqrt{3}x)=\sqrt{3}\pi x^2(\sqrt{3}-x)$,令$y=\sqrt{3}x^2-x^3$,$y'=x(2\sqrt{3}-3x)$,令$y'=0$,得$x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,当$0<x<\frac{2\sqrt{3}}{3}$时,$y'>0$,当$\frac{2\sqrt{3}}{3}<x<\sqrt{3}$时,$y'<0$,所以当$x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$时,$y$取得最大值$\frac{4\sqrt{3}}{9}$,所以圆柱$O_1O$体积的最大值为$\frac{4}{3}\pi$.故选B.

二、多项选择题

9.ABD　**提示**:因为$PA\perp$底面$ABCD$,$AB\subset$平面$ABCD$,所以$PA\perp AB$,又$AD/\!/BC$,$AB\perp BC$,所以$AB\perp AD$,又$PA\cap AD=A$,所以$AB\perp$平面PAD,故A正确;设$AC\cap BD=E$,连接ME,因为$AD/\!/BC$,$AD=2BC$,所以$\frac{AE}{EC}=2$,又M是靠近P点的三等分点,所以$\frac{AM}{MP}=2$,所以$ME/\!/PC$,又$ME\subset$平面MBD,$PC\not\subset$平面MBD,所以$PC/\!/$平面MBD,故B正确;因为$BC/\!/AD$,所以异面直线BC与PD所成的角为$\angle PDA$,因为$\triangle PAD$是等腰直角三角形,所以$\angle PDA=\frac{\pi}{4}$,故C错误;因为$PA\perp$底面$ABCD$,所以$PA\perp AC$,直线PC与底面$ABCD$所成的角为$\angle PCA$,又$AC=\sqrt{2}AB$,$PA=2AB$,则$PC=\sqrt{AC^2+PA^2}=\sqrt{6}AB$,所以$\cos\angle PCA=\frac{AC}{PC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,故D正确.故选ABD.

10.CD　**提示**:因为$f(x)=-x^2\ln x$,$x>0$,所以$f'(x)=-x(2\ln x+1)$,当$0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,当$x>\frac{1}{\sqrt{e}}$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,故B错误;所以当$x=\frac{1}{\sqrt{e}}$时,$f(x)$取得极大值$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\frac{1}{2e}$,故C正确;当$0<x<1$时,$\ln x<0$,此时$f(x)=-x^2\ln x>0$,故A错误;因为$f(x)$在$\left(\frac{1}{\sqrt{e}},e\right)$内单调递减,且$f(1)=0$,所以$f(x)$在$\left(\frac{1}{\sqrt{e}},e\right)$内只有一个零点,故D正确.故选CD.

11.AB　**提示**:由抛物线$C:y^2=4x$,得其准线为$x=-1$,故A正确;抛物线的焦点为$F(1,0)$,所以点F到直线l的距离$d=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故B正确;由$\begin{cases}y=x-2,\\ y^2=4x,\end{cases}$得$y^2-4y-8=0$,设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则$y_1+y_2=4$,$y_1y_2=-8$,所以$x_1x_2=\frac{1}{16}(y_1y_2)^2=4$,所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=-4$,故$\angle AOB>\frac{\pi}{2}$,故C错误;$|AB|=\sqrt{\left(1+\frac{1}{k^2}\right)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}=4\sqrt{6}$,故D错误.故选AB.

12.ACD　**提示**:由题意,得$f(-x)=-f(x)$,两边求导数,得$-f'(-x)=-f'(x)$,即$f'(-x)=f'(x)$,因为$g(x)=f'(x)$,所以$g(x)=g(-x)$,则$g(x)$是偶函数,所以$g'(x)=-g'(-x)$,所以$g'(x)$为奇函数,又$g'(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,所以$g'(0)=0$,故A正确;函数$g(2x-1)$的图象是将函数$g(x)$图象向右平移一个单位长度,再将横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$得到的,因为$g(x)$的图象关于$x=0$对称,所以函数$g(2x-1)$的图象关于直线$x=\frac{1}{2}$对称,故B错误;因为$h(x)=f(x-4)+(x-4)+4$,由$f(x)$为奇函数,$u(x)=f(x)+x$为奇函数,图象关于$(0,0)$对称,$h(x)$可以看作将$u(x)$向右平移4个单位长度,向上平移4个单位得到的,故$h(x)$图象关于$(4,4)$对称,故C正确;由C项知,当$x_1+x_2=8$时,$h(x_1)+h(x_2)=8$,由等差数列的性质,得$a_1+a_{11}=8$,所以$h(a_1)+h(a_{11})=8$,同理可得,$h(a_2)+h(a_{10})=8$,$h(a_3)+h(a_9)=8$,$h(a_4)+h(a_8)=8$,$h(a_5)+h(a_7)=8$,$a_1+a_{11}=2a_6=8$,即$a_6=4$,故$h(a_6)=4$,所以$h(a_1)+h(a_2)+\cdots+h(a_{11})=5\times 8+4=44$,故D正确.故选ACD.

三、填空题

13.-192　**提示**:该二项展开式的通项为$T_{r+1}=C_6^r(2\sqrt{x})^{6-r}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=C_6^r\cdot 2^{6-r}\cdot(-1)^rx^{3-r}$,$r=0,1,\cdots,6$,令$3-r=2$,得$r=1$,则$x^2$的系数为$C_6^1\times 2^5\times(-1)^1=-192$.

14.$x=-1$或$4x-3y+4=0$　**提示**:圆$C:x^2+(y-3)^2=1$的圆心为$C(0,3)$,半径为1,当切线斜率不存在时,切线方程为$x=-1$,圆心到$x=-1$的距离为1,符合题意;当切线斜率存在时,可设切线方程为$y=k(x+1)$,即$kx-y+k=0$,圆心$(0,3)$到直线$kx-y+k=0$的距离为$\frac{|-3+k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$,解得$k=\frac{4}{3}$,则切线方程为$4x-3y+4=0$.

综上,切线方程为$x=-1$或$4x-3y+4=0$.

15.$\left(0,\frac{5}{e^2}\right)$　**提示**:设过$A(-1,t)$的直线与$f(x)=\frac{x}{e^x}$相切于$P\left(x_0,\frac{x_0}{e^{x_0}}\right)$,$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}$,$f'(x_0)=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}$,所以切线方程为$y-\frac{x_0}{e^{x_0}}=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}(x-x_0)$,因为它过$(-1,t)$,所以$t-\frac{x_0}{e^{x_0}}=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}(-1-x_0)$,则$t=\frac{x_0^2+x_0-1}{e^{x_0}}$.令$g(x)=\frac{x^2+x-1}{e^x}$,问题转化为方程$g(x)=t$有3个不等的实根,即$y=t$与$y=g(x)$的图象有3个不同的交点,$g'(x)=\frac{-(x-2)(x+1)}{e^x}$,令$g'(x)=0$,得$x=-1$或$x=2$,且当$x<-1$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减;当$-1<x<2$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增;当$x>2$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减,又$x\to-\infty$时,$g(x)\to+\infty$;$x\to+\infty$时,$g(x)\to 0$,且$g(x)>0$;$g(-1)=-e$,$g(2)=\frac{5}{e^2}$,作出$g(x)$的大致图象(图略),则$0<t<\frac{5}{e^2}$,所以$t$的取值范围为$\left(0,\frac{5}{e^2}\right)$.

16.4　**提示**:由题意知,直线AB的斜率存在,且不为0,设直线AB为$x=my+1$,设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,联立$\begin{cases}x=my+1,\\ 3x^2+4y^2=12,\end{cases}$得$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$,则$y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}$,$y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$,$x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2=\frac{8}{3m^2+4}$,所以$AB$的中点坐标为$\left(\frac{4}{3m^2+4},\frac{-3m}{3m^2+4}\right)$,所以$|AB|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{12(1+m^2)}{3m^2+4}$,由题意,得$G$是线段$AB$与线段$AQ$的垂直平分线的交点,又$AB$,$AQ$的垂直平分线方程分别为$y+\frac{3m}{3m^2+4}=-m\left(x-\frac{4}{3m^2+4}\right)$,$y=0$,联立方程,得$x=\frac{1}{3m^2+4}$,所以外心为$G\left(\frac{1}{3m^2+4},0\right)$,所以$|GF_2|=\left|\frac{1}{3m^2+4}-1\right|=\frac{3(m^2+1)}{3m^2+4}$,所以$\frac{|AB|}{|GF_2|}=4$.

选择题和填空题题组训练(2)

一、单项选择题

1.B　**提示**:由题意,得$A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3,x\in\mathbf{Z}\}=\{-1,0,1,2,3\}$,因为$B=\{x|x=2n,n\in\mathbf{Z}\}$,所以$A\cap B=\{0,2\}$.故选B.

2.B　**提示**:因为$z=\frac{1+5i}{1+i}=\frac{(1+5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=3+2i$,所以$z$的虚部为2.故选B.

3.D　**提示**:由题意,知每月还款的本金为$\frac{720\,000}{30\times 12}=2000$元,则$a_n=2000+[720\,000-(n-1)\times 2000]\times 0.4\%=4888-8n$.故选D.

4.C　**提示**:因为$\boldsymbol{a}=(-1,2)$,$\boldsymbol{b}=(2,1)$,所以$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-3,1)$,所以$\cos\langle\boldsymbol{b},(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\rangle=\frac{\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,又$\langle\boldsymbol{a},(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\rangle\in[0,\pi]$,则$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的夹角为$\frac{3\pi}{4}$.故选C.

5.C　**提示**:分2种情况,①若甲、丙之间的为乙,将甲、乙、丙三人看成一个整体,与其他2人全排列,有$A_2^2A_3^3=12$种排法;②若甲、丙之间的不是乙,在丁、戊中选出1人,安排在甲、丙之间,将四人看成一个整体,与剩下的1人排列,有$C_2^1A_2^2A_2^2=8$种排法.所以共有$12+8=20$种排法,故选C.

6.D　**提示**:因为$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{5}\right)=\frac{2}{5}$,所以$\cos\left(2\alpha+\frac{2\pi}{5}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{5}\right)=\frac{17}{25}$,所以$\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{10}\right)=\sin\left(2\alpha+\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(2\alpha+\frac{2\pi}{5}\right)=-\frac{17}{25}$.故选D.

7.B　**提示**:设$\triangle ABC$的外心为D,$\triangle A_1B_1C_1$的外心为E,由$AB=2\sqrt{3}$,$A_1B_1=6$,则$BD=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=2$,$B_1E=6\times\frac{\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$,则$DE=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3}-2)^2}=2\sqrt{3}+2$,设该正三棱台的外接球的球心为$O$,半径为$R$,则$R^2=BD^2+OD^2$,$R^2=B_1E^2+(2\sqrt{3}+2-OD)^2$,则$OD=2\sqrt{3}$,$R=4$,所以该正三棱台的外接球体积为$\frac{4\pi}{3}\times 4^3=\frac{256\pi}{3}$.故选B.

8.C　**提示**:因为$f(1+x)=f(1-x)$,所以$y=f(x)$的图象关于$x=1$对称,由$f(x)=-f(4-x)$,得$f(x+2)=-f(2-x)$,所以$y=f(x)$的图象关于点$(2,0)$中心对称,由$f(1+x)=f(1-x)$,得$f(x)=f(2-x)$,所以$f(x+2)=-f(x)$,则$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$,所以$y=f(x)$是周期为4的函数,因为$f(1)=2$,所以$f(3)=-f(1)=-2$,由$f(2)=-f(2)$,得$f(2)=0$,所以$f(0)=f(2)=0$,$f(4)=f(0)=0$,所以$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=2+0-2+0=0$,又$2022=505\times 4+2$,所以$\sum_{i=1}^{2022}f(i)=505\times 0+f(1)+f(2)=2$.故选C.

二、多项选择题

9.AC　**提示**:由$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$,得$f\left(\frac{3\pi}{8}\right)=1$,则点$\left(\frac{3\pi}{8},1\right)$是该函数图象的一个对称中心,故A正确,B错误;$x\in[0,\pi]$时,$2x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{9\pi}{4}\right]$,故当$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{6}$或$\frac{11\pi}{6}$时,$f(x)=0$,则$f(x)$在$[0,\pi]$上有两个零点,当$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$或$\frac{3\pi}{2}$时,$f(x)$取得极值,则$f(x)$在$[0,\pi]$上有两个极值点,故C正确,D错误.故选AC.

10.ACD　**提示**:对于A,由抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点F到准线的距离为4,得$p=4$,故A正确;对于B,抛物线的方程为$y^2=8x$,故B错误;对于C,由题意,得$\begin{cases}y_1^2=8x_1,\\ y_2^2=8x_2,\end{cases}$两式作差,得$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{8}{y_1+y_2}=2$,又$F(2,0)$,所以直线$l$的方程为$y=2(x-2)$,即$y=2x-4$,故C正确;对于D,联立$\begin{cases}y=2x-4,\\ y^2=8x,\end{cases}$得$x^2-6x+4=0$,则$x_1+x_2=6$,所以$|AB|=x_1+x_2+p=10$,故D正确.故选ACD.

11.AD　**提示**:连接PB,BD,AE,因为$PA\perp$平面$ABCD$,所以点P到平面$ABCD$的距离为PA,又四边形$ABCD$为矩形,所以$BC\perp AB$,又$PA\perp$平面$ABCD$,$BC\subset$平面$ABCD$,故$BC\perp PA$,又$AB\cap PA=A$,故$BC\perp$平面PBE,故点C到平面PAB的距离为BC,不妨设$PA=BC=2BE=2BA=2$,则$BE=BA=1$,则$V_1=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ACD}\cdot PA=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 2\times 1\right)\times 2=\frac{2}{3}$,$V_2=V_{C\text{-}PBE}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle PBE}\cdot BC=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\times 1\times 2=\frac{1}{3}$,$V_3=V_{C\text{-}PAE}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle PAE}\cdot BC=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 1\times 2=\frac{2}{3}$,所以$V_1=2V_2$,$2V_2=V_3$,$2V_1=\frac{4}{3}\neq 3V_3$,故A,D正确,B错误;$V_1+V_3=\frac{4}{3}\neq 2V_2$,故C错误.故选AD.

12.ACD　**提示**:对于 A,由 $a,b>0,a+2b=ab$,即 $b(a-2)=a$,则 $a-2>0$,得 $a>2$,由 $a+2b=ab$,得 $a(b-1)=2b$,则 $b-1>0$,得 $b>1$,故 A 正确;对于 B,因为 $a,b>0,a+2b=ab$,则 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$,所以 $a+b=(a+b)\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)=3+\frac{a}{b}+\frac{2b}{a}\geqslant 3+2\sqrt{2}$,当且仅当 $\frac{a}{b}=\frac{2b}{a}$,即 $a=2+\sqrt{2}$,$b=\sqrt{2}+1$ 时,等号成立,故 B 错误;对于 C,$a+2b=ab\geqslant 2\sqrt{2ab}$,因为 $a,b>0$,解得 $ab\geqslant 8$,当且仅当 $a=2b$,即 $a=4,b=2$ 时,等号成立,故 C 正确;对于 D,由 A 项知,$b=\frac{a}{a-2}$,$a>2$,则 $(a-2)^2+(b-1)^2=(a-2)^2+\left(\frac{a}{a-2}-1\right)^2=(a-2)^2+\frac{4}{(a-2)^2}\geqslant 2\sqrt{4}=4$,当且仅当 $(a-2)^2=\frac{4}{(a-2)^2}$,即 $a=2+\sqrt{2}$,$b=\sqrt{2}+1$ 时,等号成立,故 D 正确.故选 ACD.

三、填空题

13.0.17　**提示**:由随机变量 X 服从正态分布 $N(2,\sigma^2)$,得 $P(X>2)=0.5$,又 $P(2<X\leqslant 3)=0.33$,则 $P(X>3)=P(X>2)-P(2<X\leqslant 3)=0.17$.

14.$3x-y-5=0$　**提示**:由 $y=\ln x-\frac{2}{x}$,得 $y'=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}$,则 $y|_{x=1}=-2$,$y'|_{x=1}=3$,故切线方程为 $y+2=3(x-1)$,即 $3x-y-5=0$.

15.$[2-\sqrt{3},3)$　**提示**:由圆 $C:x^2-2x+y^2-4y+3=0$,即 $(x-1)^2+(y-2)^2=2$,得圆心为 $C(1,2)$,半径为 $r=\sqrt{2}$,由直线 $l:kx-y+k=0$,即 $y=k(x+1)$,得直线 l 过定点 $A(-1,0)$,当直线 l 与圆 C 在第一象限相切于点 M 时,直线 l 的斜率最小,当直线过 $B(0,3)$ 时直线 l 的斜率最大,由 $\frac{|k-2+k|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}$,解得 $k=2\pm\sqrt{3}$,则 $k_{AM}=2-\sqrt{3}$,$k_{AB}=3$,所以 k 的取值范围是 $[2-\sqrt{3},3)$.

16.$y=2x-1$　**提示**:由题意,得 $F_1(-2,0)$,$F_2(2,0)$,由 $A(2,3)$,得 $AF_2\perp x$ 轴,设 $\angle F_1AF_2$ 的角平分线交 x 轴于 $T(m,0)(m<2)$,则 $\tan\angle TAF_2=\frac{2-m}{3}$,因为 $\angle F_1AF_2=2\angle TAF_2$,所以 $\tan\angle F_1AF_2=\tan 2\angle TAF_2=\frac{2\tan\angle TAF_2}{1-\tan^2\angle TAF_2}=\frac{12-6m}{9-(2-m)^2}$,又 $\tan\angle F_1AF_2=\frac{|F_1F_2|}{|AF_2|}=\frac{4}{3}$,所以 $\frac{12-6m}{9-(2-m)^2}=\frac{4}{3}$,即 $2m^2-17m+8=0$,解得 $m=\frac{1}{2}$ 或 $m=8$(舍去),则 $T\left(\frac{1}{2},0\right)$,所以直线 l 的斜率为 $\frac{3}{2-\frac{1}{2}}=2$,所以直线 l 的方程为 $y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)$,即 $y=2x-1$.

选择题和填空题题组训练(3)

一、单项选择题

1.C　**提示**:由 $x^2-3x-4<0$,解得 $-1<x<4$,则 $A=\{x|-1<x<4\}$,由 $x^2-16\leqslant 0$,解得 $-4\leqslant x\leqslant 4$,则 $U=\{x\in\mathbf{Z}|-4\leqslant x\leqslant 4\}=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$,所以 $\complement_U A=\{-4,-3,-2,-1,4\}$.故选 C.

2.D　**提示**:由 $z=\frac{1+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$,得 $|z|=\frac{|1+\mathrm{i}|}{|1+2\mathrm{i}|}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.故选 D.

3.A　**提示**:因为 $\mathrm{e}^a>\mathrm{e}^b\Leftrightarrow a>b$,所以“$a>0>b$”是“$\mathrm{e}^a>\mathrm{e}^b$”的充分不必要条件.故选 A.

4.B　**提示**:设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由题意,得 $\frac{x_1+x_2}{2}=4$,由抛物线的定义,得 $|AB|=x_1+x_2+p=9$.故选 B.

5.D　**提示**:因为 $-\pi<\alpha<0$,所以 $-\frac{3\pi}{4}<\alpha+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$,又 $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=-\frac{3}{5}$,所以 $-\frac{3\pi}{4}<\alpha+\frac{\pi}{4}<-\frac{\pi}{2}$,所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{4}{5}$,则 $\cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$.故选 D.

6.A　**提示**:设 CB 靠近点 C 的三等分点为点 F,底面 ABC 水平放置时,液面高度为 h,此时液体体积 $V_{液}=S_{\triangle CAB}\cdot h$,因为 $\frac{CE}{CA}=\frac{1}{3}$,所以 $\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CAB}}=\frac{1}{9}$,则 $S_{ABFE}=\frac{8}{9}\cdot S_{\triangle CAB}$,$V_{液}=S_{ABFE}\cdot 8=\frac{64}{9}S_{\triangle CAB}$,所以 $S_{\triangle CAB}\cdot h=\frac{64}{9}S_{\triangle CAB}$,解得 $h=\frac{64}{9}$.故选 A.

7.C　**提示**:4 名专家派到 3 个乡镇,每个乡镇至少派遣 1 名,不同的派法共有 $C_4^2A_3^3=36$ 种,甲镇恰好派遣 2 名专家,不同的派法共有 $C_4^2A_2^2=12$ 种,4 名技术员派到 3 个乡镇,每个乡镇至少派遣 1 名,不同的派法共有 $C_4^2A_3^3=36$ 种,甲镇恰好派遣 1 名技术员,不同的派法共有 $C_4^1C_3^2A_2^2=24$ 种,所以甲镇恰好派遣 2 名专家和 1 名技术员的概率是 $\frac{12\times 24}{36\times 36}=\frac{2}{9}$,故选 C.

8.C　**提示**:由 $f(x)=x\mathrm{e}^x-mx$,得 $f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-m$,因为函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有极值点,所以方程 $f'(x)=0$,即 $m=(x+1)\mathrm{e}^x$ 在 $(0,1)$ 内有实根.令 $g(x)=(x+1)\mathrm{e}^x(0<x<1)$,则 $g'(x)=(x+2)\mathrm{e}^x$,$x\in(0,1)$ 时,$g'(x)>0$,所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,所以 $g(0)<g(x)<g(1)$,即 $1<g(x)<2\mathrm{e}$,所以 $1<m<2\mathrm{e}$.故选 C.

二、多项选择题

9.ABD　**提示**:因为 $S_{2020}=S_{2023}$,所以 $a_{2021}+a_{2022}+a_{2023}=3a_{2022}=0$,则 $a_{2022}=0$,故 B 正确;由 $a_1<0$,$a_{2022}=a_1+2021d=0$,得 $d>0$,故 A 正确;因为 $a_1<0,d>0,a_{2022}=0$,所以 $a_n<0$ $(1\leqslant n\leqslant 2021,n\in\mathbf{Z})$,$S_{2021}=S_{2022}$,它们均是 S_n 的最小值,故 D 正确;由 $a_6<0$,得 $S_6-S_5=a_6<0$,故 C 错误.故选 ABD.

10.ABC　**提示**:取 CD 的中点 O,连接 AO,BO.对于 A,由题意,得点 A,F,O 和点 B,E,O 分别共线,$\frac{AF}{FO}=\frac{BE}{EO}=2$,所以 $EF/\!/AB$,故 A 正确;对于 B,因为 $AO\perp CD$,$BO\perp CD$,且 $AO\cap BO=O$,所以 $CD\perp$ 平面 ABO,又 $AB\subset$ 平面 ABO,所以 $CD\perp AB$,故 B 正确;对于 C,由 B 项知,$CD\perp$ 平面 ABO,所以 $CD\perp$ 平面 $ABEF$,故 C 正确;对于 D,设 $AB=1$,则 $EF=\frac{1}{3}$,连接 AE,在 Rt$\triangle AEB$ 中,$BE=\frac{2}{3}BO=\frac{\sqrt{3}}{3}$,则 $AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,所以 $AE=\sqrt{6}EF$,故 D 错误.故选 ABC.

11.ABC　**提示**:对于 A,因为正实数 x,y 满足 $2x+y=1$,所以 $xy=\frac{1}{2}\cdot 2xy\leqslant\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2x+y}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$,当且仅当 $2x=y$,即 $x=\frac{1}{4}$,$y=\frac{1}{2}$ 时,取等号,故 A 正确;对于 B,$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)(2x+y)=5+\frac{2y}{x}+\frac{2x}{y}\geqslant 5+2\sqrt{4}=9$,当且仅当 $\frac{2y}{x}=\frac{2x}{y}$,即 $x=y=\frac{1}{3}$ 时,取等号,故 B 正确;对于 C,$4x^2+y^2\geqslant\frac{(2x+y)^2}{2}=\frac{1}{2}$,当且仅当 $2x=y$,即 $x=\frac{1}{4}$,$y=\frac{1}{2}$ 时,取等号;故 C 正确;对于 D,由 A 项,得 $xy\leqslant\frac{1}{8}$,则 $(\sqrt{2x}+\sqrt{y})^2=2x+y+2\sqrt{2xy}\leqslant 1+1=2$,当且仅当 $2x=y$,即 $x=\frac{1}{4}$,$y=\frac{1}{2}$ 时,等号成立,故 $\sqrt{2x}+\sqrt{y}$ 的最大值为 $\sqrt{2}$,故 D 错误.故选 ABC.

12.ABC　**提示**:对于 A,由黄金分割比为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,得离心率 $e=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$,故 A 正确;对于 B,由 $|OA|\cdot|OF|=ac$,$c=ae$,得 $ac=a^2e$,又 $b^2=c^2-a^2=a^2(e^2-1)=\frac{\sqrt{5}+1}{2}a^2=a^2e$,所以 $|OA|\cdot|OF|=|OB|^2$,故 B 正确;对于 C,设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,则 $k_{OM}\cdot k_{PQ}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2}{a^2}-1=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2-1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=e$,故 C 正确;对于 D,设直线 PQ 的方程为 $y=kx+m$,联立 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 得 $(b^2-a^2k^2)x^2-2kma^2x-a^2m^2-a^2b^2=0$,则 $x_1+x_2=\frac{2kma^2}{b^2-a^2k^2}$,$x_1x_2=-\frac{a^2m^2+a^2b^2}{b^2-a^2k^2}$,由 $OP\perp OQ$,得 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2=0$,即 $x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=0$,即 $(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=0$,化简得 $(b^2-a^2)m^2=a^2b^2(1+k^2)$,所以 $\frac{m^2}{1+k^2}=\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}$,又 O 到直线 PQ 的距离为 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$,$\triangle OPQ$ 为直角三角形,所以 $S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}|PQ|\cdot d=\frac{1}{2}|OP|\cdot|OQ|$,所以 $d=\frac{|OP||OQ|}{|PQ|}=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$,所以 $\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{|OP|^2+|OQ|^2}{(|OP||OQ|)^2}=\frac{|PQ|^2}{(|OP||OQ|)^2}=\left(\frac{1}{d}\right)^2=\frac{1+k^2}{m^2}=\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}$,与 a,b 的值有关,故 D 错误.故选 ABC.

三、填空题

13.60　**提示**:由题意,得 $\left(x-\frac{2}{x}\right)^n$ 的展开式共有 7 项,则 $n=6$,所以展开式的通项为 $T_{k+1}=C_6^kx^{6-k}\left(-\frac{2}{x}\right)^k=C_6^k(-2)^kx^{6-2k}$,令 $6-2k=2$,得 $k=2$,所以展开式中 x^2 项的系数为 $C_6^2(-2)^2=60$.

14.$(x+1)^2+(y-3)^2=5$　**提示**:圆 $M:x^2+y^2-6x-2y+5=0$,即 $(x-3)^2+(y-1)^2=5$,该圆的圆心为 $M(3,1)$,所以圆 C 的圆心在过点 $M(3,1)$ 和点 $B(1,2)$ 的直线 $y-2=-\frac{1}{2}\cdot(x-1)$ 上,即 $x+2y-5=0$,同时也在点 $A(1,4)$ 和点 $B(1,2)$ 的垂直平分线 $y=3$ 上,则联立 $\begin{cases}x+2y-5=0,\\ y=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1,\\ y=3,\end{cases}$ 圆 C 的圆心为 $C(-1,3)$,半径 $R=|CA|=\sqrt{5}$,所以圆 C 的方程为 $(x+1)^2+(y-3)^2=5$.

15.$\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\frac{5}{6}$　**提示**:由题意,得 $g(x)=\cos\left(\omega x+\omega\pi+\frac{\pi}{6}\right)$,则 $g(-\pi)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.由 $g(x)=\cos\left(\omega x+\omega\pi+\frac{\pi}{6}\right)$ 为偶函数,得 $\omega\pi+\frac{\pi}{6}=k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,则 $\omega=k-\frac{1}{6}$,$k\in\mathbf{Z}$,又 $\omega>0$,所以 ω 的最小值为 $\frac{5}{6}$.

16.$[4\ln 2-6,+\infty)$　**提示**:因为 $f(x)=ax^2-2x+2\ln x$ $(x>0)$,所以 $f'(x)=\frac{2ax^2-2x+2}{x}$,令 $f'(x)=0$,则方程 $ax^2-x+1=0$ 有两个正根,分别为 x_1,x_2,所以 $\begin{cases}\Delta=1-4a>0,\\ x_1+x_2=\frac{1}{a}>0,\end{cases}$ 解得 $0<a<\frac{1}{4}$,又 $ax_1^2-x_1+1=0$,$ax_2^2-x_2+1=0$,$x_1+x_2=\frac{1}{a}$,$x_1x_2=\frac{1}{a}$,所以 $\lambda>f(x_1)+f(x_2)=ax_1^2-2x_1+2\ln x_1+ax_2^2-2x_2+2\ln x_2=x_1-1-2x_1+2\ln x_1+x_2-1-2x_2+2\ln x_2=-(x_1+x_2)+2\ln x_1x_2-2=-\frac{1}{a}+2\ln\frac{1}{a}-2$,令 $g(x)=-x+2\ln x-2(x>4)$,则 $g'(x)=\frac{2}{x}-1\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$,所以 $g(x)$ 在 $(4,+\infty)$ 上单调递减,所以 $\lambda\geqslant g(4)=4\ln 2-6$.

选择题和填空题题组训练(4)

一、单项选择题

1.D　**提示**:由集合 $A=\{x|-1<x<2\}$,$B=\{x|\log_2(x-1)<1\}=\{x|1<x<3\}$,得 $A\cap B=\{x|1<x<2\}$.故选 D.

2.A　**提示**:“$\forall x\in[1,2]$,$2x+\frac{a}{x}\geqslant 0$”为真命题,则 $a\geqslant -2x^2$ 在 $x\in[1,2]$ 上恒成立,因为 $y=-2x^2$ 在 $[1,2]$ 上单调递减,所以 $y_{\max}=-2$,则 $a\geqslant -2$,所以“$a\geqslant -2$”的一个充分不必要条件是 $a\geqslant -1$.故选 A.

3.C　**提示**:函数 $f(x)=\frac{2\ln|x|}{2^x+2^{-x}}$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$,由 $f(-x)=\frac{2\ln|-x|}{2^x+2^{-x}}=f(x)$,得 $f(x)$ 为偶函数,其图象关于 y 轴对称,可排除 A,B;又 $0<x<1$ 时,$f(x)<0$,可排除 D.故选 C.

4.D　**提示**:由题意,得 $a_n>0$,由 $a_8^2-a_7-a_9=3$,得 $a_8^2-2a_8-3=0$,解得 $a_8=3$ 或 $a_8=-1$(舍去),则 $S_{15}-a_8=\frac{15(a_1+a_{15})}{2}-a_8=15a_8-a_8=14a_8=42$.故选 D.

5.A　**提示**:先将 6 名志愿者分成 3 组,再分配到 3 个社区,可分为 3 种情况:①6 名志愿者分成 1,2,3 三组,共有 $C_6^1C_5^2C_3^3A_3^3=360$ 种选派方案;②6 名志愿者分成 1,1,4 三组,共有 $\frac{C_6^1C_5^1C_4^4}{A_2^2}A_3^3=90$ 种选派方案;③6 名志愿者平均分为 3 组,共有 $\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}A_3^3=90$ 种选派方案.所以共有 360+90+90=540 种选派方案,故选 A.

6.C　**提示**:由图象可知,$f(0)=2\sin\varphi=1$,则 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$,因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$,由图象可知,$\frac{1}{2}T>\frac{5}{2}$,即 $T=\frac{2\pi}{\omega}>5$,所以 $0<\omega<\frac{2\pi}{5}$,又 $f\left(\frac{5}{2}\right)=2\sin\left(\frac{5}{2}\omega+\frac{\pi}{6}\right)=0$,则 $\frac{5}{2}\omega+\frac{\pi}{6}=k_1\pi$,$k_1\in\mathbf{Z}$,得 $\omega=-\frac{\pi}{15}+\frac{2}{5}k_1\pi$,$k_1\in\mathbf{Z}$,所以 $\omega=\frac{\pi}{3}$,故 $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$.令 $\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k_2\pi$,$k_2\in\mathbf{Z}$,得 $x=3k_2+1$,$k_2\in\mathbf{Z}$,所以 $f(x)$ 的对称轴为 $x=3k_2+1$,$k_2\in\mathbf{Z}$,由图象可知,$x=x_1$ 与 $x=x_2$ 关于直线 $x=-2$ 对称,则 $x_1+x_2=-4$,所以 $x_2=-4-x_1$,且 $x_1\in\left(-\frac{7}{2},-2\right)$,因为 $f(x_1)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x_1+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{3}{2}$,则 $\sin\left(\frac{\pi}{3}x_1+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{3}{4}$,所以 $\cos\left[\frac{\pi}{6}(x_2-x_1)\right]=\cos\left[\frac{\pi}{6}(-4-2x_1)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{3}x_1+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}x_1+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}$.故选 C.

7.D　**提示**:因为 M 为 PQ 的中点,$\overrightarrow{F_1Q}\perp\overrightarrow{F_2M}$,所以 $\triangle F_2PQ$ 为等腰三角形,即 $|F_2P|=|F_2Q|$,因为 $\overrightarrow{F_1Q}=9\overrightarrow{F_1P}$,设 $|F_1P|=x$,则 $|QP|=8x$,$|MP|=|MQ|=4x$,由双曲线的定义,知 $|PF_2|-|PF_1|=2a$,所以 $|PF_2|=2a+x$,则 $|QF_2|=2a+x$,又 $|QF_1|-|QF_2|=2a$,所以 $9x-(2a+x)=2a$,解得 $x=\frac{a}{2}$,所以 $|F_2M|=\sqrt{|F_2Q|^2-|QM|^2}=\frac{3}{2}a$,在 $\triangle F_1MF_2$ 中,$|F_1M|^2+|F_2M|^2=|F_2F_1|^2$,即 $\left(\frac{5}{2}a\right)^2+\left(\frac{3}{2}a\right)^2=4c^2$,得离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{34}}{4}$.故选 D.

8.A　**提示**:作出函数 $f(x)$ 的大致图象(图略),令 $f(x)=t$,则 $F(x)=g(f(x))-m$ 恰有三个不同的零点,只需 $g(t)=m$,即 $-t^2+2t-m=0$ 有两个实数根 t_1,t_2,且 $t_1\in(0,1]$,$t_2\in(1,+\infty)$,则 $t_1+t_2=2$,故结合 $f(x)$ 图象可知,$\mathrm{e}^{3x_1}=3x_2=t_1$,$3x_3=t_2$,所以 $3x_1=\ln 3x_2$,$3x_3=2-3x_2$,所以 $3x_1-x_2+3x_3=\ln 3x_2-x_2+2-3x_2=\ln 3x_2-4x_2+2$,$0<x_2\leqslant\frac{1}{3}$.令 $h(x)=\ln 3x-4x+2$,$x\left(0,\frac{1}{3}\right]$,则 $h'(x)=\frac{1}{x}-4$,令 $h'(x)=0$,得 $x=\frac{1}{4}$,所以 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$ 上单调递增,在 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right]$ 上单调递减,故 $h(x)_{\max}=h\left(\frac{1}{4}\right)=\ln\frac{3}{4}+1$,即 $3x_1-x_2+3x_3$ 的最大值为 $\ln\frac{3}{4}+1$.故选 A.

二、多项选择题

9.BCD　**提示**:对于 A,复数不能比较大小,故 A 错误;对于 B,$\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4=\mathrm{i}-1-\mathrm{i}+1=0$,故 B 正确;对于 C,$z=(2+3\mathrm{i})^2=-5+12\mathrm{i}$ 则复平面内 z 对应的点位于第二象限,故 C 正确;对于 D,复数 z 满足 $|z-1+\mathrm{i}|=|z+2|$,根据复数的几何意义,得复数 z 对应的点到点 $(1,-1)$ 和 $(0,-2)$ 的距离相等,则轨迹是点 $(1,-1)$ 和点 $(0,-2)$ 的连线的垂直平分线,故 D 正确.故选 BCD.

10.AD　**提示**:对于 A,因为 $AC/\!/A_1C_1$,$AC\not\subset$ 平面 A_1BC_1,$A_1C_1\subset$ 平面 A_1BC_1,所以 $AC/\!/$ 平面 A_1BC_1,故 A 正确;对于 B,由 $AD/\!/A_1D_1$,得 AD 与 A_1C_1 所成角,即 A_1D_1 与 A_1C_1 的夹角,为 45°,故 B 错误;对于 C,由 $AD_1/\!/BC_1$,得 A_1C_1 与 AD_1 所成角,即 A_1C_1 与 BC_1 的夹角,为 60°,故 C 错误;对于 D,因为 $A_1C_1\perp B_1D_1$,$A_1C_1\perp BB_1$,且 $B_1D_1\cap BB_1=B_1$,所以 $A_1C_1\perp$ 平面 BB_1D_1D,又 $A_1C_1\subset$ 平面 A_1BC_1,所以平面 $A_1BC_1\perp$ 平面 BB_1D_1D,故 D 正确.故选 AD.

11.ABD　**提示**:抛掷两颗质地均匀的骰子有 6×6=36 种情况,“两颗骰子的点数之和为偶数”即两个骰子都为奇数或都为偶数,都为奇数有 3×3=9 种,都为偶数 3×3=9 种情况,共有 18 种情况,所以 $P(A)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$,故 A 正确;因为 A 与 B 不能同时发生,所以 A 与 B 为互斥事件,故 B 正确;事件 A 与事件 C 同时发生包含 (1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3),(6,6),共 6 种情况,则 $P(AC)=\frac{1}{6}$,所以 $P(C|A)=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{1}{3}$,故 C 错误;$P(B)=\frac{3\times 3\times 2}{6\times 6}=\frac{1}{2}$,事件 C 包含 (1,2),(2,1),(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3),(3,6),(6,3),(4,5),(5,4),(6,6),共 12 种情况,所以 $P(C)=\frac{1}{3}$,事件 B 与事件 C 同时发生包含 (1,2),(2,1),(3,6),(6,3),

(4,5),(5,4),共有 6 种情况,所以 $P(BC)=\frac{1}{6}=P(B)P(C)$,所以 B 与 C 相互独立,故 D 正确.故选 ABD.

12.ABD　**提示**:因为 $a_3=28$,所以 $a_3=\left(\frac{1}{2}+3\right)a_2=28$,解得 $a_2=8$,则 $a_2=(2+2)a_1=8$,解得 $a_1=2$,$a_4=(2+4)a_3=168$,所以 $\frac{a_4}{a_2}=21$,$a_1\cdot a_2=16$,故 A 正确,B 正确;由 $a_n=[2^{(-1)^n}+n]a_{n-1}(n\geqslant 2)$,得 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=2^{(-1)^n}+n(n\geqslant 2)$,所以 $\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}=2^{(-1)^{2n}}+2n=2n+2$,所以数列 $\left\{\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}\right\}$ 为单调递增数列,则数列 $\left\{\frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}\right\}$ 是单调递减数列,故C 错误;$\frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}}=2^{(-1)^{2n+2}}+2n+2=2n+4$,则 $b_n=\log_2(a_{2n+2}\cdot a_{2n-1})-\log_2(a_{2n}\cdot a_{2n+1})=\log_2\frac{a_{2n+2}\cdot a_{2n-1}}{a_{2n}\cdot a_{2n+1}}=\log_2\frac{n+2}{n+1}$,又 $S_n-5>0$,则 $S_n=\log_2\frac{3}{2}+\log_2\frac{4}{3}+\cdots+\log_2\frac{n+2}{n+1}=\log_2\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+2}{n+1}\right)=\log_2\frac{n+2}{2}>5$,解得 $n>62$,所以正整数 n 的最小值为 63,故 D 正确.故选ABD.

三、填空题

13.$-\frac{3}{4}$　**提示**:将原式化简,得 $\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{1}{2}$,两边平方,得 $1+\sin 2\alpha=\frac{1}{4}$,则 $\sin 2\alpha=-\frac{3}{4}$.

14.$\frac{\pi}{4}$　**提示**:设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,由 $\boldsymbol{a}=(1,1)$,得 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$,因为 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$,$|\boldsymbol{b}|=2$,所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$,得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$,所以 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,又 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$,所以 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

15.$S=60-30\cos\frac{\pi}{3}t$,4　**提示**:因为风车 6 秒旋转一圈,则其转动的角速度为 $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$,经过 t 秒,叶片转过的圆心角为 $\frac{\pi}{3}t$,此时离地面的距离 $S=30+30-30\cos\frac{\pi}{3}t$,故 $S=60-30\cos\frac{\pi}{3}t(t>0)$.由 $S=60-30\cos\frac{\pi}{3}t\geqslant 45$,得 $\cos\frac{\pi}{3}t\leqslant\frac{1}{2}$,因为 $0\leqslant t\leqslant 6$,则 $0\leqslant\frac{\pi}{3}t\leqslant 2\pi$,所以 $\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{3}t\leqslant\frac{5\pi}{3}$,解得 $1\leqslant t\leqslant 5$,故一圈内 P 离地面的高度不低于 45 米的时长为 4 秒.

16.(1,5)　**提示**:构造函数 $g(x)=\frac{f(x)}{\mathrm{e}^{2x}}$,则 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}g(x)$,由已知,得 $f(x)+\mathrm{e}^{4x}f(-x)=0$,所以 $\mathrm{e}^{2x}\cdot g(x)+\mathrm{e}^{4x}\cdot\mathrm{e}^{-2x}g(-x)=0$,所以 $g(x)+g(-x)=0$,所以 $g(x)$ 是 $(-3,3)$ 上的奇函数,因为 $g'(x)=\frac{f'(x)-2f(x)}{\mathrm{e}^{2x}}$,由已知,得当 $x\in[0,3)$ 时,$f'(x)>2f(x)$,则 $g'(x)>0$,所以 $g(x)$ 在 $[0,3)$ 上单调递增,又 $g(x)$ 是 $(-3,3)$ 上的奇函数,所以 $g(x)$ 在 $(-3,3)$ 上单调递增,又 $f(1)=\mathrm{e}^2$,得 $g(1)=1$,由 $\mathrm{e}^{2x}f(2-x)<\mathrm{e}^4$,且 $f(2-x)=\mathrm{e}^{2(2-x)}g(2-x)$,则 $\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{2(2-x)}g(2-x)<\mathrm{e}^4$,即 $g(2-x)<1=g(1)$,因为 $g(x)$ 在 $(-3,3)$ 上单调递增,所以 $\begin{cases}-3<2-x<3,\\ 2-x<1,\end{cases}$ 解得 $1<x<5$,所以所求不等式的解集是 (1,5).

第 32 期

选择题和填空题题组训练(5)

一、单项选择题

1.D　**提示**:因为 $z=\frac{2-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(2-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{3+\mathrm{i}}{2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$,所以 $\bar{z}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$,所以复数 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点为 $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$,位于第四象限.故选 D.

2.C　**提示**:因为 $A=\{x\in\mathbf{Z}|-3\leqslant x<4\}=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$,$B=\{x|\log_2(x+2)<2\}=\{x|-2<x<2\}$,所以 $A\cap B=\{-1,0,1\}$,所以 $A\cap B$ 的子集个数为 $2^3=8$.故选C.

3.A　**提示**:由 $\frac{1+x}{1-x}>0$,得 $-1<x<1$,则 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$,因为 $f(-x)=\ln\frac{1-x}{1+x}=-\ln\frac{1+x}{1-x}=-f(x)$,所以 $f(x)$ 为奇函数,可排除 C 与 D;当 $0<x<1$ 时,$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}>0$,可排除 B.故选 A.

4.C　**提示**:设底面半径为 r,则底面圆的周长为 $2\pi r$,因为斗笠母线长 $l=2\sqrt{2}$,侧面展开图是一个半圆,所以 $\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot l=2\pi r$,解得 $r=\frac{1}{2}l=\sqrt{2}$.故选 C.

5.C　**提示**:当 $l_1/\!/l_2$ 时,$a(a-2)=3$,且 $a^2\neq 1$,解得 $a=3$.故“$l_1/\!/l_2$”是“$a=3$”的充要条件.故选 C.

6.C　**提示**:由 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$,推不出 $a^3>b^3$,比如 $a=-1,b=1$,故 A 错误;由 $\frac{|a|}{a^2}>\frac{|b|}{b^2}$,得 $\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$,所以 $0<|a|<|b|$,推不出 $2^a<2^b$,比如,$a=-3,b=-4$,故 B 错误;由 $\ln a^2>\ln b^2$,得 $|a|>|b|>0$,所以 $2^{|a|}>2^{|b|}$,故 C 正确;由 $\tan a>\tan b$,推不出 $a>b$,比如 $a=\frac{\pi}{3}$,$b=\frac{7\pi}{6}$,故 D 错误.故选C.

7.D　**提示**:由题意及抛物线的定义,得 $1+\frac{p}{2}=5$,解得 $p=8$,则抛物线方程为 $y^2=16x$,因为 $M(1,m)$,所以 $m^2=16$,则 $m\pm 4$,又双曲线的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$,故 $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$,则其渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$,不妨设 $M(1,4)$,又 $A(-a,0)$,则此时与直线 AM 垂直的渐近线方程为 $y=-\frac{1}{2}x$,故 $\frac{4}{1+a}=2$,解得 $a=1$,则 $b=\frac{1}{2}$,双曲线的方程为 $x^2-4y^2=1$.故选 D.

8.C　**提示**:易知 $f(x)$ 为奇函数,因为 $f'(x)=3x^2+2-2\cos x=3x^2+2(1-\cos x)\geqslant 0$,所以 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数,由 $f(\ln x-1)+f(ax)\leqslant 0$,得 $f(\ln x-1)\leqslant -f(ax)=f(-ax)$,则 $\ln x-1\leqslant -ax$,所以问题等价于 $-a\geqslant\frac{\ln x-1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.令 $h(x)=\frac{\ln x-1}{x}$,得 $h'(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$,令 $h'(x)=0$,得 $x=\mathrm{e}^2$,当 $0<x<\mathrm{e}^2$ 时,$h'(x)>0$,$h(x)$ 单调递增,当 $x>\mathrm{e}^2$ 时,$h'(x)<0$,$h(x)$ 单调递减,故 $h(x)_{\max}=h(\mathrm{e}^2)=\frac{1}{\mathrm{e}^2}$,所以 $-a\geqslant\frac{1}{\mathrm{e}^2}$,则 $a\leqslant -\frac{1}{\mathrm{e}^2}$.故选 C.

二、多项选择题

9.AD　**提示**:若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 $-6-t=0$,即 $t=-6$,故 A 正确;若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,则 $2t-3=0$,即 $t=\frac{3}{2}$,故 B 错误;若 $t=-6$,则 $\boldsymbol{b}=(-3,-6)$,$5\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=(1,-23)\neq\boldsymbol{c}$,故 C 错误;若 $t=-6$,则 $\boldsymbol{b}=(-3,-6)$,$2\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}=(6,2)=\boldsymbol{c}$,故 D 正确.故选 AD.

10.CD　**提示**:对于 A,最高的矩形为第三个矩形,其中点的横坐标为 45,因此估计众数为 45,故 A 正确;对于 B,前三个矩形的面积和为 0.01×10+0.024×10+0.036×10=0.7,则第四个矩形的面积为 1-0.7=0.3,第 80 百分位数位于第四组 [50,60),设为 x,则 $0.7+0.03\cdot(x-50)=0.8$,解得 $x=\frac{160}{3}$,故 B 正确;对于 C,估计平均数为 0.01×10×25+0.024×10×35+0.036×10×45+0.03×10×55=43.6,故 C 错误;对于 D,由 B 项知,第四个矩形的面积为 0.30,则支出在 [50,60) 内的频率为 0.3,故 D 错误.故选 CD.

11.ACD　**提示**:由题意,得 $2\times\frac{\pi}{8}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,则 $\varphi=\frac{\pi}{4}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,又 $0<\varphi<\pi$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$,则 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.对于 A,$f\left(\frac{3\pi}{8}\right)=0$,故 A 正确;对于 B,当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时,$2x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$,则 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上只有一个零点,故 B 错误;对于 C,当 $x\in\left[\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right]$ 时,$2x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{4}\right]$,则 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减,故 C正确;对于 D,因为 $g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\pi-2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=f(x)$,所以 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称,故 D正确.故选 ACD.

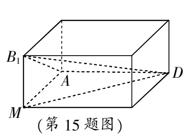
12.ABD　**提示**:由 $a_n\cdot a_{n+1}\cdot a_{n+2}=1$,得 $a_{n+1}\cdot a_{n+2}\cdot a_{n+3}=1$,所以两式相除,得 $\frac{a_{n+3}}{a_n}=1$,即 $a_n-a_{n+3}=0$,故 D正确,C错误;因为 $a_n\cdot a_{n+1}\cdot a_{n+2}=1$,$a_1=\frac{1}{2}$,$a_2=2$,所以当 $n=1$ 时,$a_1\cdot a_2\cdot a_3=1$,解得 $a_3=1$,当 $n=2$ 时,$a_2\cdot a_3\cdot a_4=1$,解得 $a_4=\frac{1}{2}$,同理可得,$a_5=2$,$a_6=1$,…,所以数列 $\{a_n\}$ 是周期为 3 的数列,所以 $a_{100}=a_{3\times 33+1}=a_1=\frac{1}{2}$,故 A正确;所以 $S_{100}=33\times\left(\frac{1}{2}+2+1\right)+\frac{1}{2}=116$,故 B正确.故选 ABD.

三、填空题

13.0　**提示**:$(x+1)^8$ 的展开式通项为 $T_{r+1}=C_8^rx^{8-r}$,则 $T_8=C_8^7x=8x$,$T_6=C_8^5x^3=56x^3$,所以 x^2 的系数为 7×8-56=0.

14.10　**提示**:若丙由一名男生一名女生承担,则有 $C_2^1\cdot C_2^1\cdot A_2^2=8$ 种不同的安排方法;若丙由两名男生承担,则有 $C_2^2\cdot A_2^2=2$ 种不同的安排方法.所以共有 8+2=10 种不同的安排方法.

15.$\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$　**提示**:易知平面 $AB_1M\perp$ 平面 AMD 时,三棱锥 B_1-AMD 的体积最大,由题意,知 $BM\perp AM$,则 $B_1M\perp AM$,当平面 $AB_1M\perp$ 平面 AMD 时,$B_1M\perp$ 平面 AMD,又 $AM\perp AD$,如图,要求三棱锥 B_1-AMD 外接球的体积,即求如图所示的长方体外接球的体积,由已知得,长方体的长、宽、高分别为 $4,2\sqrt{3}$,2,则长方体外接球的半径 $R=\frac{\sqrt{4^2+(2\sqrt{3})^2+2^2}}{2}=2\sqrt{2}$,则球的体积是 $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$.



(第 15 题图)

16.$\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\sqrt{3}-1$　**提示**:连接 PF_2,因为 l 是圆 F_2 的切线,所以 $PF_1\perp PF_2$.在 Rt$\triangle PF_1F_2$ 中,$|PF_2|=|OF_1|=|OF_2|=c$,所以 $|PF_2|=\frac{1}{2}|F_1F_2|$,所以 $\angle PF_1F_2=\frac{\pi}{6}$,所以直线 l 的斜率 $k=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,又 $|F_1F_2|=2c$,则 $|PF_1|=\sqrt{|F_1F_2|^2-|PF_2|^2}=\sqrt{3}c$,由椭圆的定义,得 $2a=|PF_1|+|PF_2|=(\sqrt{3}+1)c$,所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$.

选择题和填空题题组训练(6)

一、单项选择题

1.B　**提示**:由 $A=\{0,1,-1\}$,$B=\{x|x^2-x=0\}=\{0,1\}$,得 $A\cap B=\{0,1\}$,则 $A\cap B$ 的真子集个数为 $2^2-1=3$.故选B.

2.D　**提示**:该命题的否定为 $\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2-2x+1\geqslant 0$.故选 D.

3.A　**提示**:因为 $|\boldsymbol{b}|=1$,$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$,所以 $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=0$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$,又 $|\boldsymbol{a}|=2$,所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{4}$.故选 A.

4.C　**提示**:因为 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$,所以 $\sin\left(2\alpha+\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{7}{25}$.故选C.

5.C　**提示**:用 $\{a_1,a_2\}$,$\{b_1,b_2\}$,$\{c_1,c_2\}$ 分别表示 3 双鞋的左脚和右脚,则所有可能发生的情况有 (a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,c_1),(a_1,c_2),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,c_1),(a_2,c_2),(b_1,b_2),(b_1,c_1),(b_1,c_2),(b_2,c_1),(b_2,c_2),(c_1,c_2),共 15 种,设“取出的鞋子是一只左脚一只右脚的,但不是一双”为事件 A,则 A 包含的情况有 (a_1,b_2),(a_1,c_2),(a_2,b_1),(a_2,c_1),(b_1,c_2),(b_2,c_1),共 6 种,所以 $P(A)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$.故选 C.

6.B　**提示**:令 $g(x)=\frac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$,因为 $f(x)-f'(x)>0$,所以 $g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{\mathrm{e}^x}<0$,则 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,由 $f(0)=1$,得 $g(0)=1$,不等式 $f(x)>\mathrm{e}^x$ 可化为 $g(x)>1=g(0)$,所以 $x<0$,所以不等式 $f(x)>\mathrm{e}^x$ 的解集为 $\{x|x<0\}$.故选 B.

7.D　**提示**:$f(x)=2\log_2(x+c)-\log_2x=\log_2\frac{(x+c)^2}{x}$,由题意,得 $\log_2\frac{(x+c)^2}{x}\geqslant -1$,即 $\frac{(x+c)^2}{x}\geqslant\frac{1}{2}$,即 $2x^2+(4c-1)x+2c^2\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,所以 $-\frac{4c-1}{4}\leqslant 0$ 或 $\Delta=(4c-1)^2-16c^2\leqslant 0$,解得 $c\geqslant\frac{1}{8}$.故选 D.

8.C　**提示**:当 $x\leqslant 0$ 时,$g(x)=f(x)-x=-\frac{1}{2}x=0$,则 $x=0$,即 $a_1=0$,由题意,得 $a_{n+1}>0$,则 $g(a_{n+1})=f(a_{n+1})-a_{n+1}=f(a_{n+1}-1)-(a_{n+1}-1)=0$,$g(a_n)=f(a_n)-a_n=0$,所以 $a_{n+1}-1=a_n$,即 $a_{n+1}-a_n=1$,所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 0,公差为 1 的等差数列,则 $S_n=\frac{n(n-1)}{2}$,当 $n\geqslant 2$ 时,则 $\frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(n-1)}=2\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$,所以 $\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right]=2\left(1-\frac{1}{n}\right)<2$,则 $k\geqslant 2$.故选 C.

二、多项选择题

9.BD　**提示**:因为 $0<|\sin x|\leqslant 1$,而对勾函数 $y=t+\frac{4}{t}$ 在 $(0,1]$ 上单调递减,当 $t=|\sin x|=1$ 时,该函数取得最小值 5,故 A错误;令 $t=\mathrm{e}^x>0$,则 $y=t+\frac{4}{t}\geqslant 2\sqrt{4}=4$,当且仅当 $t=2$,即 $x=\ln 2$ 时,取等号,故 B正确;$y=2^x+4>4$,故 C错误;$y=x^2+2x+5=(x+1)^2+4\geqslant 4$,故 D正确.故选 BD.

10.AC　**提示**:以 D 为坐标原点,DA,DC,DD_1 所在直线为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,设正方体棱长为 2,则 $M(2,0,1)$,$O(1,1,1)$,$A(2,0,0)$,$C(0,2,0)$,$\overrightarrow{OM}=(1,-1,0)$,因为 $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$,$DC\perp$ 平面 BCC_1B_1,$AC\perp$ 平面 BB_1D_1D,所以平面 $ABCD$,平面 BCC_1B_1,平面 BB_1D_1D 的法向量可分别取 $\boldsymbol{a}=(0,0,1)$,$\boldsymbol{b}=(0,1,0)$,$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$.对于 A,因为 $\overrightarrow{OM}\cdot\boldsymbol{a}=0$,且 $OM\not\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $OM/\!/$ 平面 $ABCD$,故 A正确;对于 B,$\overrightarrow{OM}\cdot\boldsymbol{b}=-1\neq 0$,故 B错误;对于 C,因为 $\boldsymbol{c}=-2\overrightarrow{OM}$,即 $\overrightarrow{OM}/\!/\boldsymbol{c}$,故 $OM\perp$ 平面 BB_1D_1D,故 C正确;对于 D,$\overrightarrow{OM}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线,故 D错误.故选 AC.

11.AB　**提示**:$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-2\sqrt{3}\sin x\cos x=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.对于 A,函数 $f(x)$ 的最大值为 2,故 A 正确;对于 B,$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2$,故 B 正确;对于 C,由 $x\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$,得 $2x-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,则 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递增,故 C 错误;对于 D,$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{\pi}{6}=1$,故 D 错误.故选 AB.

12.BD　**提示**:作出函数 $f(x)$ 的大致图象(图略).对于 A,由 $f(x)$ 的大致图象,知 $f(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$,故 A 错误;对于 B,当 $m>1$ 时,若 $f(m)=f(-m)$,则 $\log_2m=\left(\frac{1}{2}\right)^m$,易知函数 $y=\log_2x$ 和 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象在 $(1,+\infty)$ 上有交点,故 B 正确;对于 C,令 $f(x)=t$,则 $t\geqslant 0$,设 $h(t)=t^2-(m+3)t+3m$,①当 $\frac{m+3}{2}\leqslant 0$,即 $m\leqslant -3$ 时,$h(t)_{\min}=3m\geqslant -1$,得 $m\geqslant -\frac{1}{3}$,解集为 $\varnothing$;②当 $\frac{m+3}{2}>0$,即 $m>-3$ 时,$h(t)_{\min}=\frac{12m-(m+3)^2}{4}\geqslant -1$,解得 $1\leqslant m\leqslant 5$,所以 m 的