$MN=N$,所以 $A'M\perp$ 平面 $BCNM$.

若选②, 因为平面 $A'MN\perp$ 平面 $BCNM$,$A'M\perp MN$,$A'M\subset$ 平面 $A'MN$,平面 $A'MN\cap$ 平面 $BCNM=MN$,所以 $A'M\perp$ 平面 $BCNM$.

若选③,设 A' 到平面 $BCNM$ 的距离为 h,则 $V_{A'-BCNM}=\frac{1}{3}S_{BCNM}\cdot h=\frac{1}{3}\times(S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AMN})\times h=\frac{1}{3}\times\left(3^2\times\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\right)\times h=\frac{7\sqrt{3}}{12}h=\frac{7\sqrt{3}}{12}$,所以 $h=1$,即 $h=A'M$,所以 $A'M\perp$ 平面 $BCNM$.

故以 M 为坐标原点,MB,MN,MA' 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,则 $A'(0,0,1)$,$C\left(\frac{1}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2},0\right)$,$B(2,0,0)$,$N(0,\sqrt{3},0)$,所以 $\overrightarrow{A'C}=\left(\frac{1}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2},-1\right)$,$\overrightarrow{A'B}=(2,0,-1)$,$\overrightarrow{A'N}=(0,\sqrt{3},-1)$,设平面 $A'BC$ 与平面 $A'CN$ 的法向量分别为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$, 则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A'C}=\frac{1}{2}x_1+\frac{3\sqrt{3}}{2}y_1-z_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A'B}=2x_1-z_1=0,\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A'C}=\frac{1}{2}x_2+\frac{3\sqrt{3}}{2}y_2-z_2=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A'N}=\sqrt{3}y_2-z_2=0,\end{cases}$ 取 $x_1=\sqrt{3}$,$y_2=1$, 则 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},1,2\sqrt{3})$,$\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},1,\sqrt{3})$, 设平面 $A'BC$ 和平面 $A'CN$ 的夹角为 θ, 则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{4}{4\times\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$,故平面 $A'BC$ 和平面 $A'CN$ 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

3.(1)**证明**:因为矩形 $ABCD$,所以 $AB\perp BC$,又平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABEF$,矩形 $ABCD\cap$ 菱形 $ABEF=AB$,$BC\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $BC\perp$ 平面 $ABEF$,又 $AG\subset$ 平面 $ABEF$,所以 $BC\perp AG$,在菱形 $ABEF$ 中,因为 $AE=AF$,所以 $AE=AB$,又 G 为 BE 边中点,所以 $AG\perp BE$,因为 $BC\cap BE=B$,所以 $AG\perp$ 平面 BCE.

(2)**解**:由(1)可知 AD,AF,AG 两两垂直,以 A 为坐标原点,AG,AF,AD 所在直线为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系.

若选①,因为 $AF=2$,所以 $AB=2$,$BC=2\sqrt{2}$,$AG=\sqrt{3}$,则 $A(0,0,0)$,$C(\sqrt{3},-1,2\sqrt{2})$,$G(\sqrt{3},0,0)$,则 $\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},-1,2\sqrt{2})$,$\overrightarrow{AG}=(\sqrt{3},0,0)$,设平面 ACG 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$, 由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{3}x_1-y_1+2\sqrt{2}z_1=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AG}=\sqrt{3}x_1=0,\end{cases}$ 取 $z_1=1$,可得 $\boldsymbol{n}=(0,2\sqrt{2},1)$,易知 $AD\perp$ 平面 $ABEF$,即 $AD\perp$ 平面 AGF,所以平面 AGF 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$,则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{3}$,由图知,二面角 $C-AG-F$ 的平面角为钝角, 所以二面角 $C-AG-F$ 的余弦值为 $-\frac{1}{3}$.

若选②,因为 $AF=2$,所以 $AB=2$,$BC=AG=\sqrt{3}$,则 $A(0,0,0)$,$C(\sqrt{3},-1,\sqrt{3})$,$G(\sqrt{3},0,0)$,则 $\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},-1,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{AG}=(\sqrt{3},0,0)$,设平面 ACG 的法向量为 $\boldsymbol{a}=(x_2,y_2,z_2)$, 由 $\begin{cases}\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{3}x_2-y_2+\sqrt{3}z_2=0,\\ \boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AG}=\sqrt{3}x_2=0,\end{cases}$ 取 $z_2=1$,可得平面 ACG 的一个法向量为 $\boldsymbol{a}=(0,\sqrt{3},1)$,易知 $AD\perp$ 平面 $ABEF$, 即 $AD\perp$ 平面 AGF, 所以平面 AGF 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$, 则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{m}|}=\frac{1}{2}$,由图知,二面角 $C-AG-F$ 的平面角为钝角,所以二面角 $C-AG-F$ 的余弦值为 $-\frac{1}{2}$.

4.**解**:(1)连接 A_1D,选择① $A_1B\perp B_1C$,② $BD\perp B_1C$,证明③ $A_1B_1=A_1C_1$, 如下: 因为 $A_1B\perp B_1C$,$BD\perp B_1C$,$A_1B\cap BD=B$, 所以 $B_1C\perp$ 平面 A_1BD, 又 $A_1D\subset$ 平面 A_1BD,所以 $B_1C\perp A_1D$,因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱,所以 $CC_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$,因为 $A_1D\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$,所以 $A_1D\perp CC_1$, 又 $CC_1\cap B_1C=C$, 所以 $A_1D\perp$ 平面 CC_1B_1B,因为 $B_1C_1\subset$ 平面 CC_1B_1B,所以 $A_1D\perp B_1C_1$,又 D 是 B_1C_1 的中点,所以 A_1D 垂直平分 B_1C_1,所以 $A_1B_1=A_1C_1$.

选择① $A_1B\perp B_1C$,③ $A_1B_1=A_1C_1$,证明② $BD\perp B_1C$,如下:因为 D 为 B_1C_1 的中点,且 $A_1B_1=A_1C_1$,所以 $A_1D\perp B_1C_1$,因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱,所以 $CC_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$,因为 $A_1D\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$,所以 $A_1D\perp CC_1$,因为 $CC_1\cap B_1C_1=C_1$,所以 $A_1D\perp$ 平面 CC_1B_1B,则 $A_1D\perp B_1C$, 又 $B_1C\perp A_1B$,$A_1D\cap A_1B=A_1$, 所以 $B_1C\perp$ 平面 A_1BD,又 $BD\subset$ 平面 A_1BD,所以 $BD\perp B_1C$.

选择② $BD\perp B_1C$,③ $A_1B_1=A_1C_1$,证明① $A_1B\perp B_1C$,如下:因为 D 为 B_1C_1 的中点,且 $A_1B_1=A_1C_1$,所以 $A_1D\perp B_1C_1$,因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱,所以 $CC_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$,又 $A_1D\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$,所以 $A_1D\perp CC_1$,又 $CC_1\cap B_1C_1=C_1$,所以 $A_1D\perp$ 平面 CC_1B_1B,又 $B_1C\subset$ 平面 CC_1B_1B,所以 $B_1C\perp A_1D$,又 $B_1C\perp BD$,所以 $B_1C\perp$ 平面 A_1BD,又 $A_1B\subset$ 平面 A_1BD,所以 $B_1C\perp A_1B$.

(2)因为 $AB=AC=2$,$BC=2\sqrt{2}$,所以 $AB^2+AC^2=BC^2$,所以 $AB\perp AC$, 所以 $A_1B_1\perp A_1C_1$, 因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱,所以 $AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$,所以 $AA_1\perp A_1B_1$, 所以 AA_1,A_1B_1,A_1C_1 两两垂直, 以 A_1 为坐标原点,以 A_1B_1,A_1C_1,A_1A 所在直线为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,设 $AA_1=a$,则 $A_1(0,0,0)$,$A(0,0,a)$,$B_1(2,0,0)$,$B(2,0,a)$,$C_1(0,2,0)$,$C(0,2,a)$,$D(1,1,0)$,所以 $\overrightarrow{BD}=(-1,1,-a)$,$\overrightarrow{B_1C}=(-2,2,a)$,因为 $BD\perp B_1C$,所以 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{B_1C}=4-a^2=0$,解得 $a=2$,所以 $A(0,0,2)$,$B(2,0,2)$,$C(0,2,2)$,$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$,$\overrightarrow{AD}=(1,1,-2)$,$\overrightarrow{B_1C}=(-2,2,2)$,设平面 ABD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=2x=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=x+y-2z=0,\end{cases}$ 取 $z=1$,得平面 ABD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,2,1)$,设直线 B_1C 与平面 ABD 所成角为 θ, 所以 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{B_1C}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{B_1C}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{B_1C}|}=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

5.(1)**证明**:在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AA_1/\!/BB_1$,又 $BB_1\not\subset$ 平面 ACC_1A_1,$AA_1\subset$ 平面 ACC_1A_1, 所以 $BB_1/\!/$ 平面 ACC_1A_1,又平面 $B_1BDE\cap$ 平面 $ACC_1A_1=DE$,$BB_1\subset$ 平面 B_1BDE,所以 $BB_1/\!/DE$.

(2)**解**:选条件①②,连接 A_1C,取 AC 的中点 O,连接 A_1O,BO. 在菱形 ACC_1A_1 中,$\angle A_1AC=60°$, 所以 $\triangle A_1AC$ 为等边三角形,又 O 为 AC 中点,所以 $A_1O\perp AC$, 又平面 $ABC\perp$ 平面 ACC_1A_1, 平面 $ABC\cap$ 平面 $ACC_1A_1=AC$,$A_1O\subset$ 平面 ACC_1A_1,所以 $A_1O\perp$ 平面 ABC,又 $OB\subset$ 平面 ABC, 所以 $A_1O\perp OB$, 又 $AB=BC$, 所以 $BO\perp AC$.以 O 为坐标原点,以 OB,OC,OA_1 分别为 x 轴、y 轴、z 轴,建立空间直角坐标系,则 $A(0,-2,0)$,$E(0,3,2\sqrt{3})$,$B(3,0,0)$,$D(0,1,0)$,所以 $\overrightarrow{BD}=(-3,1,0)$,$\overrightarrow{DE}=(0,2,2\sqrt{3})$,设平面 B_1BDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$, 则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-3x_1+y_1=0,\\ 2y_1+2\sqrt{3}z_1=0,\end{cases}$ 取 $z_1=-\sqrt{3}$,则平面 B_1BDE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,3,-\sqrt{3})$,又 $\overrightarrow{AB}=(3,2,0)$,设直线 AB 与平面 B_1BDE 所成角为 θ, 所以 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AB},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{9}{13}$.

选条件②③,连接 A_1C,取 AC 中点 O,连接 A_1O,BO,在菱形 ACC_1A_1 中,$\angle A_1AC=60°$,所以 $\triangle A_1AC$ 为等边三角形,又 O 为 AC 中点,故 $A_1O\perp AC$,且 $A_1O=2\sqrt{3}$,又 $OB=3$,$A_1B=\sqrt{21}$,所以 $A_1O^2+OB^2=A_1B^2$,所以 $A_1O\perp OB$,又 $AC\cap OB=O$,所以 $A_1O\perp$ 平面 ABC,以下同选①②.

选条件①③, 取 AC 中点 O, 连接 BO,A_1O,在 $\triangle ABC$ 中,因为 $BA=BC$,所以 $BO\perp AC$,且 $AO=2$,$OB=3$, 又平面 $ABC\perp$ 平面 ACC_1A_1,$BO\subset$ 平面 ABC, 平面 $ABC\cap$ 平面 $ACC_1A_1=AC$,所以 $BO\perp$ 平面 ACC_1A_1,因为 $OA_1\subset$ 平面 ACC_1A_1, 所以 $BO\perp OA_1$, 在 $\mathrm{Rt}\triangle BOA_1$ 中,$A_1B=\sqrt{21}$,$OB=3$,则 $A_1O=2\sqrt{3}$,又 $OA=2$,$AA_1=4$,所以 $AO_1^2+OA^2=AA_1^2$,所以 $A_1O\perp AO$,以下同选①②.

专题四　解析几何

1.**解**:(1)直线 $l:x-2ay-1+3a=0(a\in\mathbf{R})$,即 $(x-1)-a(2y-3)=0$,由 $\begin{cases}x-1=0,\\2y-3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=\frac{3}{2},\end{cases}$ 所以直线 l 过定点 $P\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

(2)圆 $C:x^2+y^2-4x-4y=0$,即 $(x-2)^2+(y-2)^2=8$,则圆心为 $C(2,2)$,半径 $r=2\sqrt{2}$.

若选①,直线 l 平分圆 C,则直线 l 过圆心 C,所以 $2-2a\times2-1+3a=0$,所以 $a=1$,所以直线 l 的方程为 $x-2y+2=0$.

若选②,当直线 l 与 PC 垂直时弦长 $|AB|$ 最短,由 $k_{PC}=\frac{1}{2}$,所以直线 l 的斜率为 -2,故直线 l 的方程为 $y-\frac{3}{2}=-2(x-1)$,即 $4x+2y-7=0$.

若选③,设圆心到直线 l 的距离为 d,由 $|AB|=2\sqrt{7}$,得 $d^2+(\sqrt{7})^2=8$,所以 $d=1$,即 $\frac{|2-4a-1+3a|}{\sqrt{1+4a^2}}=1$,解得 $a=0$ 或 $a=-\frac{2}{3}$,又直线 l 斜率存在,则 $a\neq0$,所以直线 l 的方程为 $x+\frac{4}{3}y-3=0$,即 $3x+4y-9=0$.

2.(1)**解**:因为椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$,焦点 $F(1,0)$,所以 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$,$c=1$,则 $a=2$,$b=\sqrt{3}$,故椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)**证明**:若选① $|AB|=\frac{15}{4}$ 作为已知,证明②直线 l 的斜率 k 满足 $k^2=\frac{1}{4}$.设直线 $l:y=k(x-1)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,联立 $\begin{cases}y=k(x-1),\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得 $(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$,$\Delta=(-8k^2)^2-4(4k^2+3)(4k^2-12)=144(k^2+1)>0$,$x_1+x_2=\frac{8k^2}{4k^2+3}$,$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{4k^2+3}$,则 $|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{12\sqrt{k^2+1}}{4k^2+3}=\frac{12(k^2+1)}{4k^2+3}=\frac{15}{4}$,得 $k^2=\frac{1}{4}$.

若选②直线 l 的斜率 k 满足 $k^2=\frac{1}{4}$ 作为已知,证明① $|AB|=\frac{15}{4}$.由 $k^2=\frac{1}{4}$,得 $k=\pm\frac{1}{2}$,则直线 $l:y=\pm\frac{1}{2}(x-1)$,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,联立 $\begin{cases}y=\pm\frac{1}{2}(x-1),\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得 $4x^2-2x-11=0$,所以 $x_1+x_2=\frac{1}{2}$,$x_1x_2=-\frac{11}{4}$,所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{1+\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}+4\times\frac{11}{4}}=\frac{15}{4}$.

3.**解**:(1)选择①,因为 $F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$,$P(-\sqrt{2},\sqrt{3})$,所以 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=(-c+\sqrt{2},-\sqrt{3})\cdot(c+\sqrt{2},-\sqrt{3})=5-c^2=1$,解得 $c=2$,又 $\begin{cases}\frac{2}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1,\\ a^2=b^2+4,\end{cases}$ 解得 $a=2\sqrt{2}$,$b=2$,所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

选择②,因为 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$,则 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$,所以 $a^2=2b^2$,又 $\frac{2}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1$,解得 $a=2\sqrt{2}$,$b=2$,所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)圆 O 的圆心为 $O(0,0)$,半径 $r=2$,由直线 $l:y=kx+m$ 与圆 $O:x^2+y^2=4$ 相切,得 $\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=2$,即 $m^2=4(1+k^2)$,联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2(m^2-4)=0$.由题意,知 $k\neq0$,所以 $\Delta=8(8k^2-m^2+4)=32k^2>0$.设点 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\frac{-4km}{2k^2+1}$,$x_1\cdot x_2=\frac{2m^2-8}{2k^2+1}$,所以 $S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}|MN|\times2=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\frac{4\sqrt{2k^2(k^2+1)}}{2k^2+1}$.令 $t=2k^2+1$, 则 $t>1$,$k^2=\frac{t-1}{2}$, 所以 $S_{\triangle OMN}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}\in(0,2\sqrt{2})$.

4.(1) **解**: 若选①, 依题意, 得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\ \frac{a^2}{c}-c=3,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=\sqrt{3},\\c=1,\end{cases}$ 所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

若选②,圆 M 的圆心为 $M(6,0)$,半径为 4,由椭圆 C 与圆 M 外切,得切点必为 $(2,0)$,故 $a=2$,圆 N 的圆心为 $N(0,2\sqrt{3})$,半径为 $\sqrt{3}$,由椭圆 C 与圆 N 外切,得切点必为 $(0,\sqrt{3})$,故 $b=\sqrt{3}$,所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)**证明**:设 $A(x_1,y_1)$,$B(-x_1,-y_1)$,$D(x_2,y_2)$,$E(x_3,y_3)$,因为 $F(1,0)$,A,F,D 三点共线,$\overrightarrow{FA}=(x_1-1,y_1)$,$\overrightarrow{FD}=(x_2-1,y_2)$,所以 $y_2(x_1-1)=y_1(x_2-1)$,即 $y_1x_2-y_2x_1=y_1-y_2$,①又点 A,D 在椭圆上,则 $\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$,即 $3=\frac{y_1^2}{1-\frac{x_1^2}{4}}$,代入 $\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1$,化简得 $y_1^2x_2^2-y_2^2x_1^2=4(y_1^2-y_2^2)$,结合①,得 $y_1x_2+y_2x_1=4(y_1+y_2)$,② 联立①②,得 $\begin{cases}x_2=\frac{5x_1-8}{2x_1-5},\\ y_2=\frac{3y_1}{2x_1-5},\end{cases}$ 同理得 $\begin{cases}x_3=\frac{5x_1+8}{2x_1+5},\\ y_3=\frac{3y_1}{2x_1+5},\end{cases}$ 所以直线 DE 方程为 $y-y_2=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}(x-x_2)$, 即 $y=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}x+\frac{y_2x_3-y_3x_2}{x_3-x_2}$,又 $\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\frac{5y_1}{3x_1}$,$\frac{y_2x_3-y_3x_2}{x_3-x_2}=-\frac{8y_1}{3x_1}$,所以直线 DE 方程为 $y=\frac{y_1}{3x_1}(5x-8)$,故直线 DE 过定点 $\left(\frac{8}{5},0\right)$.

5. **解**:(1) 若选①②, 可知 $\begin{cases}c^2=a^2+b^2,\\ \frac{c}{a}=2,\\ 2b=2\sqrt{3},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=\sqrt{3},\\c=2,\end{cases}$ 所以双曲线 C 的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

若选①③, 因为 $b>a$, 所以 $\begin{cases}\frac{b}{a}=\sqrt{3},\\ 2b=2\sqrt{3},\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}a=1,\\b=\sqrt{3},\end{cases}$ 所以双曲线 C 的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

若选②③,因为 $b>0$,所以 $\begin{cases}\frac{c}{a}=2,\\ \frac{b}{a}=\sqrt{3},\\ a^2+b^2=c^2,\end{cases}$ 此时无法确定 a,b,c.

(2)$F(2,0)$,由题意知,直线 l 斜率不为 0,设直线 $l:x=ty+2$,联立 $\begin{cases}x=ty+2,\\ x^2-\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得 $(3t^2-1)y^2+12ty+9=0$,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,且 $|y_1|>|y_2|$,由题意,得 $\frac{1}{|t|}<\sqrt{3}$,则 $t^2>\frac{1}{3}$,所以 $3t^2-1>0$ 且 $\Delta=36(t^2+1)>0$ 恒成立,$y_1+y_2=\frac{-12t}{3t^2-1}$,$y_1y_2=\frac{9}{3t^2-1}$, 因为 $\frac{S_1}{S_2}=\sqrt{3}+1$, 即 $\frac{|y_1|-|y_2|}{|y_2|}=\sqrt{3}+1$,故 $\frac{y_1}{y_2}=2+\sqrt{3}$,由 $\frac{y_1^2+y_2^2}{y_1y_2}=\frac{(y_1+y_2)^2-2y_1y_2}{y_1y_2}=\frac{10t^2+2}{3t^2-1}$,得 $\frac{y_1}{y_2}+\frac{y_2}{y_1}=\frac{10t^2+2}{3t^2-1}$,所以 $\frac{10t^2+2}{3t^2-1}=2+\sqrt{3}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}=4$,解得 $t=\pm\sqrt{3}$,满足 $t^2>\frac{1}{3}$,所以直线 l 的方程为 $x\pm\sqrt{3}y-2=0$.

第 29 期

扫码免费下载习题讲解 ppt

专题一　函数与导数

专项训练(1)

1.$y=2x+2$ **提示**:由 $f(x)=xe^x+x+2$,得 $f'(x)=(x+1)e^x+1$,所以 $f'(0)=2$,又 $f(0)=2$,所以所求切线方程是 $y-2=2x$,即 $y=2x+2$.

2.$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\cup\left[1,\frac{3}{2}\right)$ **提示**:因为 $f(x)$ 是定义在 $(-2b,b+1)$ 上的偶函数,所以 $b+1+(-2b)=0$,解得 $b=1$,又 $f(x)$ 是定义在 $(-2,2)$ 上的偶函数,且在 $(-2,0]$ 上为增函数,所以 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上为减函数,所以 $f(2x-1)\leqslant f(x)$,则 $2>|2x-1|\geqslant|x|$,即 $\begin{cases}-2<2x-1<2,\\-2<x<2,\\(2x-1)^2\geqslant x^2,\end{cases}$ 解得 $-\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{1}{3}$ 或 $1\leqslant x<\frac{3}{2}$.

3.$(0,1]$ **提示**:由 $x\in\left[\frac{7\pi}{12},\frac{13\pi}{12}\right]$,得 $2x-\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{5\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right]$,结合 $y=\sin x$ 在 $\left[\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递减,在 $\left[\frac{3\pi}{2},\frac{11\pi}{6}\right]$ 上单调递增,结合图象知,$f(x)\in(0,2]$,或 $f(x)=-1$ 时,原方程中 $f(x)$ 对应的 x 值只有一个,令 $t=f(x)$,则方程 $[f(x)]^2-(2m+1)f(x)+m^2+m=0$,即 $t^2-(2m+1)t+m^2+m=0$, 解得 $t_1=m$,$t_2=m+1$, 则必有 $\begin{cases}m=-1,\\0<m+1\leqslant2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0<m\leqslant2,\\0<m+1\leqslant2,\end{cases}$ 解得 $0<m\leqslant1$.

4.$(0,e)$ **提示**:不等式 $e^{x^2}-\frac{1}{2}x^4-x^2-x^{mx}+mx\ln x+\frac{1}{2}\cdot(mx\ln x)^2>0(m>0)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立 $\Leftrightarrow e^{x^2}-\frac{1}{2}(x^2)^2-x^2>e^{mx\ln x}-\frac{1}{2}(mx\ln x)^2-mx\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.构造函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x$,$x\in(0,+\infty)$,$f'(x)=e^x-x-1$,令 $g(x)=f'(x)$,则 $g'(x)=e^x-1>g'(0)=0$,所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $f'(x)=g(x)>g(0)=0$,所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,又原不等式等价于 $f(x^2)>f(mx\ln x)$,所以 $x^2>mx\ln x$,即 $\frac{1}{m}>\frac{\ln x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.令 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$,$x\in(0,+\infty)$,则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,当 $x\in(0,e)$ 时,$h'(x)>0$,$h(x)$ 单调递增,当 $x\in(e,+\infty)$ 时,$h'(x)<0$, $h(x)$ 单调递减,所以 $h(x)_{\max}=h(e)=\frac{1}{e}$,所以 $\frac{1}{m}>\frac{1}{e}$,解得 $0<m<e$.

专项训练(2)

1.-4 **提示**:记 $f(x)=(ax+3)e^x$,则 $f'(x)=(ax+3+a)e^x$,由题意,得 $f'(0)=3+a=-1$,解得 $a=-4$.

2.1 **提示**:因为 $f(x)=\log_4(4^x+m)-\frac{1}{2}x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,所以 $4^x+m>0$ 恒成立,则 $m\geqslant0$,又对任意实数 a,都满足 $f(a)\geqslant f(-a)$,所以对任意实数 $-a$,都满足 $f(-a)\geqslant f(a)$,所以 $f(a)=f(-a)$,所以 $f(x)$ 为偶函数,则 $\log_4(4^{-x}+m)+\frac{1}{2}x=\log_4(4^x+m)-\frac{1}{2}x$,化简得 $(4^x-1)(m-1)=0$,要使上式对任意实数 x 恒成立,则 $m-1=0$,得 $m=1$.

3.$\left[-\frac{5}{2},-2\right)$ **提示**:作出函数 $f(x)$ 的大致图象(图略),令 $f(x)=t$,则 $[f(x)]^2+af(x)+1=0$ 可化为 $t^2+at+1=0$,依题意,要使函数 $g(x)$ 恰好有 5 个零点,则方程 $t^2+at+1=0$ 在 $(1,2]$ 内有一个实数根,且在 $(0,1]\cup(2,+\infty)$ 内有一个实数根.设 $h(t)=t^2+at+1$,则 $\begin{cases}\Delta=a^2-4>0,\\h(0)=1>0,\\h(1)=a+2\leqslant0,\\h(2)=2a+5\geqslant0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\Delta=a^2-4>0,\\h(1)=a+2>0,\\h(2)=2a+5\leqslant0,\\-\frac{a}{2}>1,\end{cases}$ 解得 $-\frac{5}{2}\leqslant a<-2$.

4.$\left(-\infty,-\frac{2}{e}\right]$ **提示**:$\forall x_1\in(0,1]$,$\exists x_2\in[-1,1]$,都有 $g(x_2)\geqslant f(x_1)$,等价于 $g(x)_{\max}\geqslant f(x)_{\max}$,由 $g(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2$,得 $g'(x)=x(x-2)$,所以当 $x\in[-1,0]$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增,当 $x\in[0,1]$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减,所以 $g(x)_{\max}=g(0)=2$,所以 $f(x)\leqslant2$,即 $a\leqslant x\ln x+ex^2-2x$ 在 $(0,1]$ 上恒成立.设 $h(x)=x\ln x+ex^2-2x$,则 $h'(x)=\ln x+2ex-1$,所以 $h'(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增,当 $x\to0$ 时,$h'(x)<0$,当 $x=1$ 时,$h'(1)=2e-1>0$,则 $h'(x)$ 必然存在唯一的零点,又 $h'\left(\frac{1}{e}\right)=0$,所以 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\frac{1}{e},1\right]$ 上单调递增,所以 $h(x)_{\min}=h\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{2}{e}$,所以 $a\leqslant-\frac{2}{e}$.

专题二　立体几何、空间向量

专项训练(1)

1.$\frac{3\pi}{4}$ **提示**:设圆锥的底面半径为 R,母线长为 l,由题意,得 $\begin{cases}2\pi R=\frac{2\pi}{3}\cdot l,\\ \pi R^2+\pi Rl=\pi,\end{cases}$ 解得 $R=\frac{1}{2}$,$l=\frac{3}{2}$,所以该圆锥的侧面积为 $\pi Rl=\frac{3\pi}{4}$.

2.①③ **提示**:连接 AD_1,易知 $AB\perp$ 平面 ADD_1A_1,则 $AB\perp A_1D$, 又 $A_1D\perp AD_1$,$AB\cap AD_1=A$,$AB,AD_1\subset$ 平面 AD_1B,所以 $A_1D\perp$ 平面 AD_1B,所以 $A_1D\perp D_1B$,故①正确,②错误;因为 M 是 A_1D 的中点,所以 M 是 AD_1 的中点,又 N 是 D_1B 的中点,所以 $MN/\!/AB$,又 $AB/\!/A_1B_1$, 则 $MN/\!/A_1B_1$, 又 $MN\not\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,$A_1B_1\subset A_1B_1C_1D_1$, 所以 $MN/\!/$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 故③正确; 假设 $MN\perp$ 平面 BDD_1B_1, 则 $AB\perp$ 平面 BDD_1B_1, 所以 $AB\perp BD$,这与 $\angle ABD=45°$ 矛盾,故假设不成立,故④错误.

3.2,$\frac{4}{3}$ **提示**:由图可知,$C(0,2,0)$,$E(2,0,1)$,$D(0,0,0)$,$B_1(2,2,2)$,$D_1(0,0,2)$,则 $\overrightarrow{CE}=(2,-2,1)$,$\overrightarrow{CD_1}=(0,-2,2)$,$\overrightarrow{CB_1}=(2,0,2)$,$\overrightarrow{CD}=(0,-2,0)$,所以 $\overrightarrow{CB_1}$ 在 $\overrightarrow{CE}$ 上的投影数量为 $\frac{\overrightarrow{CB_1}\cdot\overrightarrow{CE}}{|\overrightarrow{CE}|}=2$,又 $|\overrightarrow{CB_1}|=2\sqrt{2}$,则点 B_1 到直线 CE 的距离为 $\sqrt{(2\sqrt{2})^2-2^2}=2$. 设平面 CD_1E 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=2x-2y+z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD_1}=-2y+2z=0,\end{cases}$ 取 $z=1$,得平面 CD_1E 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{1}{2},1,1\right)$,所以点 D 到平面 CD_1E 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{4}{3}$.

4.$-\frac{\sqrt{7}}{7}$ **提示**: 取 AD 的中点 F,BC 的中点 E,连接 PF,FE, 由已知可得 $FE/\!/AB$,$FE/\!/DC$, 因为 $\angle BAP=\angle CDP=90°$,即 $AB\perp PA$,$DC\perp PD$,所以 $FE\perp PA$,$FE\perp PD$,又 $PA\cap PD=P$,所以 $FE\perp$ 平面 PAD,所以 $FE\perp AD$,$FE\perp PF$,又 $PA=PD$,所以 $PF\perp AD$,所以以点 F 为坐标原点,建立空间直角坐标系,不妨设 $AB=2$,则 $PA=PD=AB=DC=2$,因为 $\angle APD=60°$,所以 $AD=2$,易证四边形 $ABCD$ 是正方形,则 $A(1,0,0)$,$P(0,0,\sqrt{3})$,$B(1,2,0)$,$C(-1,2,0)$,所以 $\overrightarrow{BC}=(-2,0,0)$,$\overrightarrow{BP}=(-1,-2,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{BA}=(0,-2,0)$,设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x_1=0,\\-x_1-2y_1+\sqrt{3}z_1=0,\end{cases}$ 取 $y_1=\sqrt{3}$,则平面 PBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{3},2)$.设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$, 则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BP}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BA}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x_2-2y_2+\sqrt{3}z_2=0,\\-2y_2=0,\end{cases}$ 取 $z_2=1$, 则平面 PAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},0,1)$,则 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{\sqrt{7}}{7}$,由图可知,二面角 $A-PB-C$ 的平面角为钝角,所以二面角 $A-PB-C$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{7}}{7}$.

专项训练(2)

1.$\frac{9}{2}$ **提示**:连接 FA_1,A_1B,CD_1,因为 E,F 分别为 CD,DD_1 的中点, 所以 $EF/\!/CD_1$, 又 $CD_1/\!/BA_1$, 所以 $EF/\!/BA_1$,则 A_1,B,E,F 四点共面,故梯形 A_1BEF 为所求截面,易知 $A_1F=BE$,则四边形 A_1BEF 为等腰梯形,又正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 则 $EF=\sqrt{2}$,$BA_1=2\sqrt{2}$,$BE=A_1F=\sqrt{5}$, 所以该梯形的高 $h=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,所以截面的面积 $S=\frac{1}{2}(EF+BA_1)\cdot h=\frac{9}{2}$.

2.②④ **提示**:由题意,知 B_1D_1 与 D_1C_1 不垂直,因为 $EF/\!/C_1D_1$,所以 B_1D_1 与 EF 不垂直,所以 B_1D_1 与平面 B_1EF 不垂直, 故①错误; 因为平面 D_1EF 即平面 CDD_1C_1,B_1 到平面 CDD_1C_1 的距离为 B_1C_1 的长度,是定值,$\triangle D_1EF$ 中,EF 的长度不变,D_1 到 EF 的距离为 DD_1 的长度,是定值,则 $S_{\triangle D_1EF}$ 为定值,又 $V_{D_1-B_1EF}=V_{B_1-D_1EF}$,所以三棱锥 D_1-B_1EF 的体积为定值, 故②正确; 平面 B_1EF 即平面 B_1A_1DC, 又 A_1A 与平面 B_1A_1DC 相交,所以 A_1A 与平面 B_1EF 相交,故③错误;因为 $CD\perp$ 平面 A_1D_1DA,$CD\subset$ 平面 B_1A_1DC, 所以平面 $A_1D_1DA\perp$ 平面 B_1A_1DC,所以平面 $A_1ADD_1\perp$ 平面 B_1EF,故④正确.

3.$\frac{\sqrt{5}}{5}$ **提示**:取 AD 的中点 M,连接 MB,MP,因为 $BA=BD=\sqrt{2}$,$PA=PD=\sqrt{5}$,$AD=2$, 所以 $AB\perp AD$,$BM\perp AD$,$PM\perp AD$, 所以 $\angle PMB$ 为二面角 $P-AD-B$ 的平面角,又二面角 $P-AD-B$ 为 $60°$,所以 $\angle PMB=60°$,在 $\mathrm{Rt}\triangle ABM$ 中,得 $BM=1$,在 $\mathrm{Rt}\triangle APM$ 中,得 $PM=2$,在 $\triangle PBM$ 中,由余弦定理,得 $PB^2=PM^2+BM^2-2PM\cdot BM\cos\angle PMB=3$,故 $PM^2=BM^2+PB^2$,所以 $PB\perp BM$,又 $BM\perp AD$,$PM\perp AD$,$PM\cap BM=M$,所以 $AD\perp$ 平面 PBM,则 $AD\perp PB$,又四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 则 $AD/\!/BC$, 所以 $PB\perp BC$,$BM\perp BC$,以 B 为坐标原点,以 BC,BM,BP 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,则 $B(0,0,0)$,$M(0,1,0)$,$A(-1,1,0)$,$P(0,0,\sqrt{3})$,易知 $\overrightarrow{BM}=(0,1,0)$ 为平面 PBC 的一个法向量, 又 $\overrightarrow{PA}=(-1,1,-\sqrt{3})$, 设 AP 与平面 PBC 所成的角为 θ,所以 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PA},\overrightarrow{BM}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{BM}|}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

4.21π **提示**:因为 $AB=AC$,D 是 BC 的中点,所以 $AD\perp BC$, 因为 $BC=4$,$AD=\sqrt{5}$, 则 $BD=CD=2$,$AB=AC=3$,设 $\triangle BCD$ 外接圆的圆心为 O_1,外接圆的半径为 r, 三棱锥 $A-BCD$ 外接球的球心为 O, 外接球半径为 R, 连接 OD,OA,OO_1,O_1D, 在三棱锥 $A-BCD$ 中,由 $\angle BDC=120°$ 及余弦定理, 得 $BC^2=BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cdot\cos\angle BDC=12$, 则 $BC=2\sqrt{3}$, 由正弦定理, 得 $2r=\frac{BC}{\sin\angle BDC}=4$,则 $r=2$,因为 $AD\perp DC$,$DB\cap DC=D$,DB,$DC\subset$ 平面 BCD, 则 $AD\perp$ 平面 BCD, 又 $OO_1\perp$ 平面 BCD, 则 $AD/\!/OO_1$, 又 $OA=OD$, 所以 $OO_1=\frac{1}{2}AD=\frac{\sqrt{5}}{2}$, 则 $R=\sqrt{r^2+O_1O^2}=\frac{\sqrt{21}}{2}$, 所以三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的表面积 $S=4\pi R^2=4\pi\times\frac{21}{4}=21\pi$.

专题三　三角函数、平面向量、解三角形

专项训练(1)

1.$\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$ **提示**:因为 $\overrightarrow{AB}=(2,3)$,$\overrightarrow{AC}=(3,t)$,所以 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(1,t-3)$,又 $|\overrightarrow{BC}|=1$,所以 $\sqrt{1^2+(t-3)^2}=1$,解得 $t=3$,则 $\overrightarrow{AC}=(3,3)$,$|\overrightarrow{AC}|=3\sqrt{2}$,所以 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 方向上的投影向量为 $\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}=\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$.

2.$\sqrt{7}$ **提示**:因为 $A=60°$,$b=3$,$S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot3\cdot c\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,得 $c=2$,所以由余弦定理,得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=7$,则 $a=\sqrt{7}$.

3.$\frac{1}{3}$ **提示**: 因为 $\cos2\beta=2\cos^2\beta-1=-\frac{7}{9}$, 所以 $\cos^2\beta=\frac{1}{9}$, 又 $\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, 所以 $\cos\beta=-\frac{1}{3}$,$\sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,所以 $\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$,因为 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{7}{9}>0$,所以 $\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,则 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$,所以 $\sin\alpha=\sin(\alpha+\beta-\beta)=\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\sin\beta=\frac{1}{3}$.

4.②③ **提示**:$f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\cos2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos2x-\frac{1}{2}\sin2x=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\cdot\cos2x+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\sin2x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cos2x+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\sin2x\right)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{5\pi}{12}\right)$.函数 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$,故①不正确;$f(x)$ 的最小正周期 $T=\pi$,故②正确;当 $x\in\left(\frac{\pi}{24},\frac{13\pi}{24}\right)$ 时,$2x+\frac{5\pi}{12}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$,所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{24},\frac{13\pi}{24}\right)$ 上单调递减,故③正确;将函数 $y=\sqrt{2}\cos2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位长度后,得到 $y=\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x-\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\sin\left(-2x+\frac{5\pi}{12}\right)\neq f(x)$,故④错误.

专项训练(2)

1.$5\sqrt{2}$ **提示**:因为向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$,$\boldsymbol{b}=(-3,t)$,$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3+2t=0$,解得 $t=\frac{3}{2}$,则 $\boldsymbol{b}=\left(-3,\frac{3}{2}\right)$,$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(-5,5)$,所以 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=5\sqrt{2}$.

2.$-\sqrt{6}$ **提示**: 因为 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},m)$,$\boldsymbol{b}=(\sin x,-\cos x)$,所以 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sqrt{3}\sin x-m\cos x$,又函数 $f(x)$ 的一个零点为 $\frac{\pi}{3}$,所以 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}-m\cos\frac{\pi}{3}=0$,解得 $m=3$,所以 $f(x)=\sqrt{3}\sin x-3\cos x=2\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$,则 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{6}$.

3.$\sqrt{3}$ **提示**:由题意及余弦定理的推论,得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-c^2}{4a}=\frac{a}{2}-\frac{c}{4}$,则 $a^2+c^2-ac=b^2$,所以 $\cos B=\frac{1}{2}$,又 $B\in(0,\pi)$,所以 $B=\frac{\pi}{3}$,由余弦定理,得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\geqslant2ac-2ac\cdot\frac{1}{2}=ac$,所以 $ac\leqslant4$,当且仅当 $a=c=2$ 时,取等号,所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B\leqslant\frac{1}{2}\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$,即 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 $\sqrt{3}$.

4.①④ **提示**:由图象,得 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}$,则 $T=\pi$,即 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,得 $\omega=2$,因为 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$,即 $2\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=0$,所以 $\frac{2\pi}{3}+\varphi=k_1\pi$,$k_1\in\mathbf{Z}$,得 $\varphi=k_1\pi-\frac{2\pi}{3}$,$k_1\in\mathbf{Z}$,又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,则 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.对于①,$f(x)$ 的最小正周期为 π,故①正确;对于②,$g(x)=2\sin\left(2x+2\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

9

的图象，由 $g(x)$ 图象的一个对称中心是 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$，得 $2\times\frac{\pi}{6}+2\theta+\frac{\pi}{3}=k_2\pi,k_2\in\mathbf{Z}$，解得 $\theta=\frac{k_2\pi}{2}-\frac{\pi}{3}$，$k_2\in\mathbf{Z}$，又 $\theta>0$，则 θ 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$，故②错误；对于③，由 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\neq2$，得 $x=\frac{\pi}{6}$ 不是 $f(x)$ 的图象的对称轴，故③错误；对于④，由题意结合图象可知，$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{12}$，则 $x_1+x_2=\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x_1+x_2)=2\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$，故④正确.

专题四　数列和不等式

专项训练(1)

1.81　**提示**：设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，因为 $a_2+a_4=14$，所以 $2a_3=14$，则 $a_3=7$，又 $a_1=3$，所以 $d=\frac{1}{2}(a_3-a_1)=2$，所以 $a_{40}=a_1+39d=81$.

2.$2\sqrt{2}+3$　**提示**：因为 $a>1,b>0$，且 $a+\frac{1}{b}=2$，所以 $a-1>0$，且 $(a-1)+\frac{1}{b}=1$，所以 $\frac{1}{a-1}+2b=\left(\frac{1}{a-1}+2b\right)\cdot\left[(a-1)+\frac{1}{b}\right]=2b(a-1)+\frac{1}{b(a-1)}+3\geqslant2\sqrt{2b(a-1)\cdot\frac{1}{b(a-1)}}+3=2\sqrt{2}+3$，当且仅当 $2b(a-1)=\frac{1}{b(a-1)}$，即 $a=\sqrt{2}$，$b=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，取等号.

3.2,3　**提示**：由题意，得公比 $q>0$，因为 $a_3=18,S_3=26$，所以 $\begin{cases}a_1q^2=18,\\ \frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=26,\end{cases}$ 得 $4q^2-9q-9=0$，解得 $q=3$（舍去负值），则 $a_1=2$.

4.$[2027,+\infty)$　**提示**：因为 $2S_n=3a_n-3$，所以当 $n=1$ 时，$2S_1=2a_1=3a_1-3$，得 $a_1=3$，当 $n\geqslant2$ 时，则 $2S_{n-1}=3a_{n-1}-3$，两式作差，得 $2S_n-2S_{n-1}=3a_n-3a_{n-1}$，则 $a_n=3a_{n-1}(n\geqslant2)$，所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为3，公比为3的等比数列，所以 $a_n=3^n$，则 $\frac{n}{a_n}=\frac{n}{3^n}$，所以 $T_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{n-1}{3^{n-1}}+\frac{n}{3^n}$，则 $\frac{1}{3}T_n=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{3^4}+\cdots+\frac{n-1}{3^n}+\frac{n}{3^{n+1}}$，两式作差，得 $\frac{2}{3}T_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]-\frac{n}{3^{n+1}}$，所以 $T_n=\frac{3}{4}-\frac{3+2n}{4}\cdot\frac{1}{3^n}$. 由 $\log_2(a-2019)>4T_n$ 恒成立，得 $\log_2(a-2019)>3-\frac{2n+3}{3^n}$ 恒成立，因为 $3-\frac{2n+3}{3^n}<3$，所以 $\log_2(a-2019)\geqslant3$，则 $a-2019\geqslant8$，所以 $a\geqslant2027$.

专项训练(2)

1.9　**提示**：设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则 $q>0$，由 $3a_1,\frac{1}{2}a_3,2a_2$ 成等差数列，得 $a_3=3a_1+2a_2$，即 $a_1q^2=3a_1+2a_1q$，所以 $q^2-2q-3=0$，解得 $q=-1$（舍去），或 $q=3$，所以 $\frac{a_{2022}+a_{2021}}{a_{2020}+a_{2019}}=\frac{q^2(a_{2020}+a_{2019})}{a_{2020}+a_{2019}}=q^2=9$.

2.$(-1,4)$　**提示**：因为 $x+y=3$，所以 $x+1+y=4$，所以 $\frac{4}{x+1}+\frac{16}{y}=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{x+1}+\frac{16}{y}\right)(x+1+y)=\frac{y}{x+1}+\frac{4(x+1)}{y}+5\geqslant2\sqrt{4}+5=9$，当且仅当 $\frac{y}{x+1}=\frac{4(x+1)}{y}$，即 $x=\frac{1}{3},y=\frac{8}{3}$ 时，等号成立，所以 $\left(\frac{4}{x+1}+\frac{16}{y}\right)_{\min}=9$，因为不等式 $\frac{4}{x+1}+\frac{16}{y}>m^2-3m+5$ 恒成立，所以 $m^2-3m+5<9$，即 $m^2-3m-4<0$，解得 $-1<m<4$，故实数 m 的取值范围为 $(-1,4)$.

3.$\frac{1}{2n-1}$　**提示**：由 $a_n=\frac{a_{n-1}}{2a_{n-1}+1}(n\geqslant2)$，两边取倒数，得 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_{n-1}}+2$，即 $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=2(n\geqslant2)$，又 $a_1=1$，所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为1，公差为2的等差数列，所以 $\frac{1}{a_n}=1+2(n-1)=2n-1$，所以 $a_n=\frac{1}{2n-1}$.

4.$\frac{1011}{2023}$　**提示**：由 $a_n=\frac{S_n}{n}+2(n-1)$，得 $S_n=na_n-2n(n-1)$，当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=na_n-(n-1)a_{n-1}-4(n-1)$，则 $a_n-a_{n-1}=4(n\geqslant2)$，又 $a_1=1$，故数列 $\{a_n\}$ 是首项为1，公差为4的等差数列，所以 $a_n=1+4(n-1)=4n-3$，$S_n=n(4n-3)-2n\cdot(n-1)=2n^2-n$，则 $\frac{1}{S_n+3n}=\frac{1}{2n^2+2n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，所以数列 $\left\{\frac{1}{S_n+3n}\right\}$ 的前2022项的和是 $\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2022}-\frac{1}{2023}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2023}\right)=\frac{1011}{2023}$.

专题五　直线和圆、圆锥曲线

专项训练(1)

1.$x=1$ 或 $3x+4y-11=0$　**提示**：联立 $\begin{cases}x-2y+3=0,\\2x+3y-8=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$ 所以直线 l_1 与直线 l_2 的交点为 $Q(1,2)$. 当直线 l 的斜率不存在时，其方程为 $x=1$，满足题意；当直线 l 的斜率存在时，设其方程为 $y-2=k(x-1)$，由题意，得 $\frac{|-2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，解得 $k=-\frac{3}{4}$，则直线 l 的方程为 $3x+4y-11=0$. 综上，直线 l 的方程为 $x=1$ 或 $3x+4y-11=0$.

2.$4\sqrt{5}$　**提示**：因为直线 $l:mx-y-3m+1=0$，即 $(x-3)m-y+1=0$，令 $\begin{cases}x-3=0,\\-y+1=0,\end{cases}$ 解得 $x=3,y=1$，所以点 $P(3,1)$，因为圆 $C:(x-1)^2+(y-2)^2=25$，所以圆心为 $C(1,2)$，半径 $r=5$，因为 $|CP|=\sqrt{5}<5$，所以点 P 在圆 C 内，所以当直线 CP 与直线 AB 垂直时，$|AB|$ 取得最小值，所以 $|AB|_{\min}=2\sqrt{r^2-|CP|^2}=4\sqrt{5}$.

3.$\frac{\sqrt{21}}{6}$　**提示**：设椭圆 E 的右焦点为 F'，连接 PF',QF'，根据椭圆的对称性知，四边形 $PFF'Q$ 为平行四边形，则 $|QF|=|PF'|$，由 $\angle PFQ=120°$，得 $\angle FPF'=60°$，因为 $|PF|=5|QF|$，所以 $|PF|+|PF'|=6|PF'|=2a$，则 $|PF'|=\frac{1}{3}a,|PF|=\frac{5}{3}a$，在 $\triangle FPF'$ 中，由余弦定理，得 $(2c)^2=|PF|^2+|PF'|^2-2|PF|\cdot|PF'|\cdot\cos60°=(|PF|+|PF'|)^2-3|PF|\cdot|PF'|$，即 $4c^2=4a^2-\frac{5}{3}a^2=\frac{7}{3}a^2$，所以椭圆 E 的离心率 $e=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{7}{12}}=\frac{\sqrt{21}}{6}$.

4.$8\sqrt{2},\frac{2}{3}$　**提示**：设 $P(x,y)$，因为 $|PF_1|=\sqrt{2}|PF_2|$，$F_1(-2,0),F_2(2,0)$，所以 $\sqrt{(x+2)^2+y^2}=\sqrt{2}\sqrt{(x-2)^2+y^2}$，化简得 $(x-6)^2+y^2=32$，所以点 $P(x,y)$ 在圆 $(x-6)^2+y^2=32$ 上，则 $P(x,y)$ 到 x 轴的最大距离为 $4\sqrt{2}$，所以 $\triangle PF_1F_2$ 的面积最大值为 $\frac{1}{2}\times|F_1F_2|\times4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$. 由题意，得渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 与圆 $(x-6)^2+y^2=32$ 有交点，所以 $\frac{6b}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant4\sqrt{2}$，即 $8a^2\geqslant b^2$，又 $a^2+b^2=c^2=4$，所以 $8a^2\geqslant4-a^2$，则 $a^2\geqslant\frac{4}{9}$，解得 $a\geqslant\frac{2}{3}$，即实数 a 的最小值为 $\frac{2}{3}$.

专项训练(2)

1.2 或 $\frac{9}{2}$　**提示**：因为 $A(-2,0),B(4,a)$ 两点到直线 $l:3x-4y+1=0$ 的距离相等，所以 $\frac{|-2\times3-4\times0+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|3\times4-4a+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$，即 $|13-4a|=5$，解得 $a=2$ 或 $a=\frac{9}{2}$.

2.$(-\infty,-5]\cup[-1,+\infty)$　**提示**：因为圆 C 的方程可化为 $(x-a)^2+(y-2)^2=16$，所以圆心为 $C(a,2)$，半径 $r=4$，因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}r^2\sin\angle ACB\leqslant\frac{1}{2}r^2=8$，当且仅当 $\angle ACB=90°$ 时，$\triangle ABC$ 的面积最大. ①当点 $P(-3,0)$ 在圆外或圆上，即 $|CP|\geqslant r$ 时，满足题意；②当点 $P(-3,0)$ 在圆内时，要使满足题意，则需 $\angle ACB$ 的最小值小于或等于 $90°$，又 $\angle ACB$ 最小时，$CP\perp AB$，所以 $r>|CP|\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}r=2\sqrt{2}$. 综上，$|CP|\geqslant2\sqrt{2}$，即 $\sqrt{(a+3)^2+4}\geqslant2\sqrt{2}$，解得 $a\leqslant-5$ 或 $a\geqslant-1$.

3.$3\sqrt{2}$　**提示**：由抛物线 $C:y^2=4x$，得其焦点为 $F(1,0)$，准线为 $l:x=-1$，因为点 $B(4,0)$，所以 $|FB|=3$，又 $\angle FMB=\angle FBM$，所以 $|MF|=|FB|=3$，由题意及抛物线的定义，得 $|MA|=|MF|=3$，即 $x_M+1=3$，所以 $x_M=2$，代入 $y^2=4x$，得 $y_M=\pm2\sqrt{2}$，即 $M(2,\pm2\sqrt{2})$，则 $A(-1,\pm2\sqrt{2})$，所以 $S_{\triangle MAB}=\frac{1}{2}\cdot|MA|\cdot|y_M|=\frac{1}{2}\times3\times2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$.

4.$\left(0,\frac{\sqrt{7}}{3}\right]$　**提示**：设椭圆的左焦点为 E，由椭圆的定义，得 $|BE|+|BF|=2a$，因为点 A,B 关于原点对称，所以四边形 $EBFA$ 为平行四边形，又 $|FA|=2|BF|$，$|BE|=|FA|$，所以 $|BF|=\frac{2}{3}a,|BE|=\frac{4}{3}a$，在 $\triangle EBF$ 中，由余弦定理的推论，得 $\cos\angle EBF=\frac{|BE|^2+|BF|^2-|EF|^2}{2|BE||BF|}=\frac{\frac{16}{9}a^2+\frac{4}{9}a^2-4c^2}{2\cdot\frac{4}{3}a\cdot\frac{2}{3}a}=\frac{5}{4}-\frac{9}{4}e^2$，所以 $\cos\angle BFA=-\cos\angle EBF=\frac{9}{4}e^2-\frac{5}{4}$，又 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}\leqslant\frac{4}{9}a^2$，所以 $|\overrightarrow{FA}|\cdot|\overrightarrow{FB}|\cdot\cos\angle BFA=\frac{4}{3}a\cdot\frac{2}{3}a\left(\frac{9}{4}e^2-\frac{5}{4}\right)\leqslant\frac{4}{9}a^2$，化简得 $e^2\leqslant\frac{7}{9}$，又 $0<e<1$，所以 $0<e\leqslant\frac{\sqrt{7}}{3}$，即离心率的取值范围是 $\left(0,\frac{\sqrt{7}}{3}\right]$.

专题六　统计与概率

专项训练(1)

1.20　**提示**：由题意，得 A,B,C 三个部门的总人数为 $40+60+80=180$，则部门 A 抽检的人数为 $40\times\frac{90}{180}=20$.

2.57　**提示**：由表中数据，得 $\bar{x}=\frac{1}{4}\times(2+3+5+6)=4$，$\bar{y}=\frac{1}{4}\times(28+31+41+48)=37$，因为回归方程为 $\hat{y}=5x+\hat{a}$，所以 $5\times4+\hat{a}=37$，解得 $\hat{a}=17$，则 $\hat{y}=5x+17$，故据此模型预计广告费用为8万元时，销售额为 $5\times8+17=57$（万元）.

3.$\frac{2}{3}$　**提示**：因为甲、乙、丙三人每人有3种选择，所以三人共有 $3^3=27$ 种选择，其中恰有两人参加同一项活动共有 $C_3^2C_3^1C_2^1=18$ 种选择，所以三人中恰有两人参加同一项活动的概率为 $P=\frac{18}{27}=\frac{2}{3}$.

4.$\frac{3}{10},\frac{6}{5}$　**提示**：由题意得，基本事件总数 $n=C_5^3=10$，其中恰有2个小球颜色相同包含的基本事件个数 $m=C_2^2C_3^1=3$，所以所求概率 $P=\frac{m}{n}=\frac{3}{10}$. 由题意，得 X 的所有可能的取值为0，1，2，$P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$，$P(X=1)=\frac{C_2^1C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{5}$，$P(X=2)=\frac{C_2^2C_3^1}{C_5^3}=\frac{3}{10}$，所以数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$.

专项训练(2)

1.9.2　**提示**：由频率分布直方图可知，前两组的频率为 $0.05\times2+0.10\times2=0.3<0.6$，所以高中学生每天的平均学习时间的60%分位数在第3组，设其为 x 小时，则 $0.05\times2+0.10\times2+0.25\times(x-8)=0.6$，解得 $x=9.2$，所以估计该市高中学生每天的平均学习时间的60%分位数为9.2小时.

2.50　**提示**：由题意可分为两类：①若乙只完成 E 工作，即甲、丙二人完成 A,B,C,D 四项工作，则一共有 $\left(C_4^1C_3^3+\frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}\right)A_2^2=14$ 种安排方式；②若乙不止完成 E 工作，即甲、乙、丙三人完成 A,B,C,D 四项工作，则一共有 $\frac{C_4^2C_2^1C_1^1}{A_2^2}\times A_3^3=36$ 种安排方式. 综上，共有 $14+36=50$ 种安排方式.

3.$\sqrt{3}$　**提示**：因为二项式 $(a^2+1)^n$ 的展开式的各项系数之和为 $(1+1)^n=2^n$，二项式 $\left(\frac{16}{5}x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中的常数项为 $C_5^4\left(\frac{16}{5}x^2\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4=16$，所以 $2^n=16$，解得 $n=4$，所以 $(a^2+1)^4$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_4^r(a^2)^{4-r}=C_4^ra^{8-2r}$，$r=0,1,\cdots,4$，所以 $(a^2+1)^4$ 的展开式中系数最大的项为 $T_3=C_4^2a^4=6a^4=54$，解得 $a=\sqrt{3}$ 或 $a=-\sqrt{3}$（舍去）.

4.$\frac{3}{7},\frac{2}{3}$　**提示**：(1)由题意，得 $P(M)=\frac{C_4^2+C_3^2}{C_7^2}=\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$.

(2)由题意，得 $P(MN)=\frac{C_4^2}{C_7^2}\cdot\frac{C_3^1}{C_5^1}+\frac{C_3^2}{C_7^2}\cdot\frac{C_4^1}{C_5^1}=\frac{6}{21}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{21}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{7}$，由(1)得，$P(M)=\frac{3}{7}$，所以 $P(N|M)=\frac{P(MN)}{P(M)}=\frac{2}{3}$.

第30期

专题一　数　列

1.**解**：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，则 $q>0$，由 $b_2=8,b_1-3b_3=4$，得 $b_1q=8,b_1-3b_1q^2=4$，解得 $b_1=16,q=\frac{1}{2}$（舍去负值），所以 $a_1=b_4=16\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=2$.

若选①：$S_4=4a_1+6d=20$，所以 $d=2$，$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=n^2+n$，所以 $\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，$T_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$，所以 $T_k=1-\frac{1}{k+1}>\frac{15}{16}$，解得 $k>15$，所以正整数 k 的最小值为16.

若选②：$S_3=a_1+a_2+a_3=2a_3$，则 $a_1+a_2=a_3$，即 $2+2+d=2+2d$，得 $d=2$，下同①.

若选③：$3a_3-a_4=b_2$，即 $3(2+2d)-(2+3d)=8$，解得 $d=\frac{4}{3}$，$S_n=2n+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{2}{3}n(n+2)$，所以 $\frac{1}{S_n}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n(n+2)}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$，$T_n=\frac{3}{4}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]=\frac{3}{4}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$，所以 $T_k=\frac{9}{8}-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)>\frac{15}{16}$，则 $\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}<\frac{1}{4}$，即 $k^2-5k-10>0$，又 k 为正整数，解得 $k\geqslant7$，所以 k 的最小值为7.

2.**解**：(1)若选①，由 $S_{n+1}+S_{n-1}=2S_n+4$，得 $S_{n+1}-S_n=S_n-S_{n-1}+4(n\geqslant2)$，则 $a_{n+1}=a_n+4$，即 $a_{n+1}-a_n=4(n\geqslant2)$，又 $a_2-a_1=4$，所以 $\{a_n\}$ 是以1为首项，4为公差的等差数列，所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=1+4(n-1)=4n-3$.

若选②，由 $\frac{S_{n+1}}{n+1}=\frac{S_n}{n}+2$，得 $\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=2$，所以数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是以 $\frac{a_1}{1}=1$ 为首项，2为公差的等差数列，则 $\frac{S_n}{n}=1+2(n-1)=2n-1$，则 $S_n=2n^2-n$，当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2-n-[2\cdot(n-1)^2-(n-1)]=4n-3$，当 $n=1$ 时，$a_1=1$ 满足上式，所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=4n-3(n\in\mathbf{N}_+)$.

若选③，由 $(4n+1)a_n=(4n-3)a_{n+1}$，得 $\frac{a_{n+1}}{4n+1}=\frac{a_n}{4n-3}$，所以数列 $\left\{\frac{a_n}{4n-3}\right\}$ 是常数列，则 $\frac{a_n}{4n-3}=\frac{a_1}{4\times1-3}=1$，得 $a_n=4n-3$，所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=4n-3$.

(2)由(1)知，$a_n=4n-3$，由题意，得 $b_n^2=a_na_{n+1}=(4n-3)\cdot(4n+1)$，则 $\frac{1}{b_n^2}=\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)$，所以 $T_n=\frac{1}{b_1^2}+\frac{1}{b_2^2}+\cdots+\frac{1}{b_n^2}=\frac{1}{4}\left[\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)\right]=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)=\frac{n}{4n+1}$，所以数列 $\left\{\frac{1}{b_n^2}\right\}$ 的前 n 项和 $T_n=\frac{n}{4n+1}$.

3.**解**：(1)若选①，可得 $a_2=3,a_1=1,a_{n+2}-2a_{n+1}=S_{n+1}-S_n-2a_n=a_{n+1}-2a_n$，设 $D_n=a_{n+1}-2a_n$，则 $D_{n+1}=a_{n+2}-2a_{n+1}$，所以 $D_{n+1}=D_n=\cdots=D_1=a_2-2a_1=1$，所以 $a_{n+1}=2a_n+1$，则 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，所以 $\{a_n+1\}$ 是首项和公比均为2的等比数列，则 $a_n+1=2^n$，所以 $a_n=2^n-1$.

若选②，由 $(1+a_n)(1+a_{n+1})=2^{n+1}(a_{n+1}-a_n)$，得 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\cdot(1+a_n)(1+a_{n+1})=(1+a_{n+1})-(1+a_n)$，又 $a_1=1$，所以 $\frac{1}{1+a_n}-\frac{1}{1+a_{n+1}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，则 $\frac{1}{1+a_n}=\frac{1}{1+a_1}-\left(\frac{1}{1+a_1}-\frac{1}{1+a_2}\right)-\left(\frac{1}{1+a_2}-\frac{1}{1+a_3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{1+a_{n-1}}-\frac{1}{1+a_n}\right)=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}$，所以 $a_n+1=2^n$，则 $a_n=2^n-1$.

(2)由(1)知，$b_n=n(a_n+1)=n\cdot2^n$，则 $T_n=1\cdot2+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+(n-1)\cdot2^{n-1}+n\cdot2^n$，$2T_n=1\cdot2^2+2\cdot2^3+3\cdot2^4+\cdots+(n-1)\cdot2^n+n\cdot2^{n+1}$，两式作差，得 $-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot2^{n+1}=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n\cdot2^{n+1}=(1-n)\cdot2^{n+1}-2$，则 $T_n=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$，所以 $(n-1)^2\leqslant m(T_n-n-1)=m(n-1)(2^{n+1}-1)$，因为 $n\geqslant2$，所以

$m\geqslant\frac{n-1}{2^{n+1}-1}$ 对 $n\geqslant2$ 恒成立. 设 $c_n=\frac{n-1}{2^{n+1}-1}$，对 $c_{n+1}-c_n=\frac{n}{2^{n+2}-1}-\frac{n-1}{2^{n+1}-1}=\frac{(2-n)\cdot2^{n+1}-1}{(2^{n+2}-1)(2^{n+1}-1)}<0$，所以 $\{c_n\}$ 为递减数列，所以 $c_n\leqslant c_2=\frac{1}{7}$，所以 $m\geqslant\frac{1}{7}$，即 m 的取值范围是 $\left[\frac{1}{7},+\infty\right)$.

4.**解**：(1)因为 $S_n+S_{n+1}=2a_{n+1}-3$，所以 $S_{n-1}+S_n=2a_n-3(n\geqslant2)$，两式作差，得 $S_{n+1}-S_{n-1}=2a_{n+1}-2a_n$，所以 $a_{n+1}+a_n=2a_{n+1}-2a_n$，即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=3(n\geqslant2)$，当 $n=1$ 时，$S_1+S_2=2a_2-3$，即 $a_1+a_1+a_2=a_2-3$...

$a_1+a_1=a_2-3$，则 $a_2=9$，所以 $\frac{a_2}{a_1}=3$，所以数列 $\{a_n\}$ 是以3为首项，3为公比的等比数列，所以 $a_n=3\cdot3^{n-1}=3^n$.

(2)若选①，$b_n=a_n\log_3a_n=n\cdot3^n$，所以 $T_n=1\times3+2\times3^2+3\times3^3+\cdots+n\cdot3^n$，所以 $3T_n=1\times3^2+2\times3^3+\cdots+(n-1)\cdot3^n+n\cdot3^{n+1}$，两式作差，得 $-2T_n=3+3^2+3^3+\cdots+3^n-n\cdot3^{n+1}=\frac{3(1-3^n)}{1-3}-n\cdot3^{n+1}=\frac{1}{2}\times3^{n+1}-\frac{3}{2}-n\cdot3^{n+1}$，所以 $T_n=\frac{(2n-1)\cdot3^{n+1}+3}{4}$.

若选②，$b_n=\frac{1}{\log_3a_n\cdot\log_3a_{n+2}}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$，所以 $T_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$.

若选③，$b_n=a_n-\log_3a_n=3^n-n$，所以 $T_n=(3-1)+(3^2-2)+(3^3-3)+\cdots+(3^n-n)=(3+3^2+3^3+\cdots+3^n)-(1+2+3+\cdots+n)=\frac{3(1-3^n)}{1-3}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{3^{n+1}-n^2-n-3}{2}$.

5.(1)**解**：若选①，因为数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是以 $\frac{3}{2}$ 为公差的等差数列，$\frac{S_1}{1}=a_1=1$，所以 $\frac{S_n}{n}=1+\frac{3}{2}(n-1)$，所以 $S_n=\frac{3n^2-n}{2}$，所以当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{3n^2-n}{2}-\frac{3(n-1)^2-(n-1)}{2}=3n-2$，当 $n=1$ 时，上式也成立，所以 $a_n=3n-2(n\in\mathbf{N}_+)$.

若选②，因为 $2na_{n+1}=2S_n+3n(n+1)$，所以当 $n\geqslant2$ 时，$2(n-1)a_n=2S_{n-1}+3(n-1)n$，两式相减，化简得 $a_{n+1}-a_n=3(n\geqslant2)$，当 $n=1$ 时，$2a_2=2\times1+6$，得 $a_2=4$，所以 $a_2-a_1=3$，所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为1，公差为3的等差数列，所以 $a_n=1+3(n-1)=3n-2$.

(2)**证明**：由(1)得，$a_n=3n-2$，$S_n=\frac{n(3n-1)}{2}$，所以 $b_n=\frac{3}{2S_n+7n}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$，所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}<\frac{3}{4}$，所以 $T_n<\frac{3}{4}$.

6.**解**：(1)若选①②，因为 $a_{n+1}-a_n=2$，所以数列 $\{a_n\}$ 是公差为 $d=2$ 的等差数列，又 $a_5=5$，所以 $a_n=a_5+(n-5)d$，则 $a_n=2n-5$.

若选②③，因为 $a_{n+1}-a_n=2$，所以数列 $\{a_n\}$ 是公差为 $d=2$ 的等差数列，又 $S_2=-4$，即 $a_1+a_2=-4$，得 $2a_1+2=-4$，所以 $a_1=-3$，所以 $a_n=-3+2(n-1)$，即 $a_n=2n-5$.

若选①③，则无法确定数列 $\{a_n\}$.

(2)因为 $b_n=\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{1}{(2n-5)(2n-3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-5}-\frac{1}{2n-3}\right)$，所以 $T_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{-3}-\frac{1}{-1}\right)+\left(\frac{1}{-1}-\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-5}-\frac{1}{2n-3}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{-3}-\frac{1}{2n-3}\right)=\frac{n}{-6n+9}$.

专题二　三角函数、解三角形

1.**解**：(1)若选①，$f(x)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\cos2\omega x+\sin2\omega x\cos\frac{\pi}{6}-\cos2\omega x\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin2\omega x+\frac{1}{4}\cos2\omega x=\frac{1}{2}\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，因为函数 $f(x)$ 的图象相邻两个对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，则 $\omega=1$，所以 $f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. 令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $-\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.

若选②，$f(x)=\cos\omega x\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{4}=\cos\omega x\left(\sin\omega x\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\cos\omega x\sin\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin2\omega x+\frac{1}{4}\cos2\omega x=\frac{1}{2}\cdot\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，因为函数 $f(x)$ 的图象相邻两个对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，则 $\omega=1$，所以 $f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. 令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $-\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.

(2)因为 $f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，且 $f(\theta)=\frac{3}{10}$，所以 $f(\theta)=\frac{1}{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{10}$，则 $\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，又 $0<\theta<\frac{\pi}{6}$，所以 $\frac{\pi}{6}<2\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$，所以 $\cos2\theta=\cos\left[\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi}{6}=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$.

2.**解**：(1)若选①，因为 $\sin2B=\sin(A+C)$，所以 $2\sin B\cos B=\sin B$，又 $B\in(0,\pi)$，则 $\sin B\neq0$，所以 $\cos B=\frac{1}{2}$，故 $B=\frac{\pi}{3}$.

若选②，因为 $\sqrt{3}a\cos B=b\sin A$，所以由正弦定理，得 $\sqrt{3}\sin A\cos B=\sin B\sin A$，又 $A\in(0,\pi)$，则 $\sin A\neq0$，所以 $\sqrt{3}\cos B=\sin B$，即 $\tan B=\sqrt{3}$，又 $B\in(0,\pi)$，故 $B=\frac{\pi}{3}$.

若选③，因为 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}ac$，所以 $\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac$，则 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 B 为锐角，所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)得，$B=\frac{\pi}{3}$，因为 $a\sin A+c\sin C=2b\sin B$ 且 $b=3$，所以由正弦定理，得 $a^2+c^2=2b^2=18$，由余弦定理，得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，所以 $ac=9$，联立 $\begin{cases}a^2+c^2=18,\\ac=9,\end{cases}$ 解得 $a=c=3$，所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=9$.

3.**解**：(1)若选①，因为函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称，所以 $2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

若选②，因为函数 $y=f\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}+\varphi\right)$ 的图象关于原点对称，所以 $-\frac{\pi}{6}+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

若选③，因为函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减，在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $x=-\frac{\pi}{3}$ 时取得最小值，所以 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[2\times\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\varphi\right]=-1$，即 $-\frac{2\pi}{3}+\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

(2)由题意，得 $g(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，由 $x\in\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$，得 $x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，所以当 $x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$，即 $x=-\frac{\pi}{3}$ 时，$[g(x)]_{\min}=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$，当 $x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$[g(x)]_{\max}=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以函数 $g(x)$ 在 $\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域为 $\left[-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

4.**解**：(1)因为 $(b-a)(\sin B+\sin A)=c(\sqrt{3}\sin B-\sin C)$，所以由正弦定理，得 $(b-a)(b+a)=c(\sqrt{3}b-c)$，即 $b^2-a^2=\sqrt{3}bc-c^2$，由余弦定理的推论，得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{6}$.

(2)若选择①②，因为 $B=\frac{\pi}{4},A=\frac{\pi}{6}$，所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，由正弦定理，得 $\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{c}{b}$，即 $\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$，又 $c=2\sqrt{3}b$，则 $\frac{c}{b}=2\sqrt{3}$，两式矛盾，故不存在符合条件的 $\triangle ABC$.

若选择①③，由余弦定理的推论，得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，又 $c=2\sqrt{3}b,A=\frac{\pi}{6},a=2$，所以 $\cos A=\frac{13b^2-4}{4\sqrt{3}b^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $b=\frac{2}{\sqrt{7}}$，所以 $c=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{7}}\times\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\times\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{7}$.

若选择②③，因为 $B=\frac{\pi}{4},a=2,A=\frac{\pi}{6}$，由正弦定理，得 $\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}$，即 $\frac{b}{2}=\sqrt{2}$，则 $b=2\sqrt{2}$，又 $B=\frac{\pi}{4},A=\frac{\pi}{6}$，则 $\sin C=\sin(A+B)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\sqrt{3}+1$.

5.**解**：(1)选①，由 $2S=\sqrt{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$，得 $2\times\frac{1}{2}\times bc\sin A=\sqrt{3}bc\cos A$，所以 $\tan A=\sqrt{3}$，因为 $0<A<\frac{\pi}{2}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

若选②，由 $2\cos^2\frac{B+C}{2}=1+\cos2A$，得 $\cos(B+C)=\cos2A$，所以 $\cos(\pi-A)=2\cos^2A-1$，所以 $2\cos^2A+\cos A-1=0$，解得 $\cos A=\frac{1}{2}$ 或 $\cos A=-1$（舍去），又 $0<A<\frac{\pi}{2}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

若选③，由 $c=\sqrt{3}a\sin C-c\cos A$ 及正弦定理，得 $\sin C=\sqrt{3}\sin A\sin C-\sin C\cos A$，因为 $\sin C\neq0$，所以 $1=\sqrt{3}\sin A-\cos A=2\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)$，则 $\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，又 $0<A<\frac{\pi}{2}$，所以 $-\frac{\pi}{6}<A-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，所以 $A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，则 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)得，$A=\frac{\pi}{3}$，又 $a=\sqrt{3}$，所以由正弦定理，得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2$，所以 $b=2\sin B,c=2\sin C$，所以 $a+b+c=\sqrt{3}+2\sin B+2\sin C=\sqrt{3}+2\sin B+2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)=2\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}$，又在锐角 $\triangle ABC$ 中，$0<B<\frac{\pi}{2}$，$0<C=\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2}$，解得 $\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{3}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant1$，所以 $a+b+c=2\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\in(3+\sqrt{3},3\sqrt{3}]$，所以 $\triangle ABC$ 周长的取值范围为 $(3+\sqrt{3},3\sqrt{3}]$.

6.**解**：(1)选条件①②：因为 $c-a=\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，即 $T=\pi$，则 $\omega=2$，由图可知 $A=2$，则 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，又 $b=\frac{\pi}{3}$，$f(b)=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=0$，所以 $\frac{2\pi}{3}+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，则 $\varphi=-\frac{2\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，又 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

选条件①③：因为 $c-a=\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，即 $T=\pi$，则 $\omega=2$，由图可知，$A=2$，则 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，又 $c=\frac{7\pi}{12}$，$f(c)=2\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\varphi\right)=-2$，所以 $\frac{7\pi}{6}+\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，则 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，又 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

选条件②③：因为 $b=\frac{\pi}{3},c=\frac{7\pi}{12}$，所以 $c-b=\frac{\pi}{4}=\frac{T}{4}$，即 $T=\pi$，则 $\omega=2$，由图可知，$A=2$，则 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，由 $c=\frac{7\pi}{12}$，得 $f(c)=2\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\varphi\right)=-2$，所以 $\frac{7\pi}{6}+\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，则 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，又 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

(2)$g(x)=f(x)\cdot\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(4x+\frac{2\pi}{3}\right)$，由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant4x+\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $-\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，因为 $g(x)$ 在 $(0,m]$ 上单调递减，且 $0\in\left[-\frac{\pi}{24},\frac{5\pi}{24}\right]$，此时 $k=0$，所以 $0<m\leqslant\frac{5\pi}{24}$，则 m 的最大值是 $\frac{5\pi}{24}$.

专题三　立体几何

1.(1)**证明**：选①②，由 $AC=4,AB=3,BC=5$，得 $AB^2+AC^2=BC^2$，所以 $AB\perp AC$，因为 $AB\perp AA_1$，$AC\cap AA_1=A$，$AC,AA_1\subset$ 平面 AA_1C_1C，所以 $AB\perp$ 平面 AA_1C_1C.

选①③，由 $AC=4,AB=3,BC=5$，得 $AB^2+AC^2=BC^2$，所以 $AB\perp AC$，又平面 $ABC\perp$ 平面 AA_1C_1C，$AB\subset$ 平面 ABC，平面 $ABC\cap$ 平面 $AA_1C_1C=AC$，所以 $AB\perp$ 平面 AA_1C_1C.

选②③，无法证明 $AB\perp$ 平面 AA_1C_1C.

(2)**解**：由(1)知 $AB\perp AC,AB\perp AA_1$，又四边形 AA_1C_1C 是正方形，则 $AC\perp AA_1$，以 A 为坐标原点，AB,AA_1,AC 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，则 $A_1(0,4,0),B(3,0,0),C(0,0,4),C_1(0,4,4)$，$\overrightarrow{A_1B}=(3,-4,0)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(0,0,4)$，$\overrightarrow{BC}=(-3,0,4)$，设平面 A_1BC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=3x-4y=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=4z=0,\end{cases}$ 取 $y=3$，得 $\boldsymbol{n}=(4,3,0)$，设直线 BC 与平面 A_1BC_1 所成的角为 θ，所以直线 BC 与平面 A_1BC_1 所成角的正弦值 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{BC},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{BC}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{12}{25}$.

2.(1)**证明**：取 AB 中点 E 连接 EC，根据题意，得 $EC\perp AB$，因为 $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MA}$，所以 M 为线段 AB 上靠近 A 的三等分点，设 $\overrightarrow{CN}=\lambda\overrightarrow{CA}$，则 $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{BC}+\lambda\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}+\lambda(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})=\lambda\overrightarrow{BA}+(1-\lambda)\overrightarrow{BC}$，又 $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$，则 $\lambda=\frac{1}{3}$，所以 N 为线段 AC 上靠近 C 的三等分点，所以 $\frac{AM}{AE}=\frac{AN}{AC}=\frac{2}{3}$，所以 $MN/\!/EC$，又 $EC\perp AB$，所以 $MN\perp AB$，所以 $MN\perp BM,MN\perp A'M$，又 $BM\cap A'M=M$，所以 $MN\perp$ 平面 $A'BM$，又 $MN\subset$ 平面 $BCNM$，所以平面 $A'BM\perp$ 平面 $BCNM$.

(2)**解**：因为等边 $\triangle ABC$ 的边长为3，结合(1)可知，$AM=1,BM=2,ME=\frac{1}{2},MN=\sqrt{3},EC=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

若选①，由(1)知 $A'M\perp MN$，又 $A'M\perp CN,CN\cap$