第4期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A

提示:在$\triangle ABC$中,$a=2$,$b=\sqrt{3}$,$C=30°$,由余弦定理,得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=2^2+(\sqrt{3})^2-2\times2\times\sqrt{3}\times\cos30°=1$,所以$c=1$.故选A.

2.A

提示:因为$c>b>a$,所以C为最大内角.由余弦定理的推论,得$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{9+16-37}{2\times3\times4}=-\frac{1}{2}$,又$C\in(0°,180°)$,所以$C=120°$.故选A.

3.B

提示:由正弦定理,得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,所以$\sin C=\frac{c\cdot\sin A}{a}=\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.因为$a>c$,所以$A>C$,且$C\in(0,\pi)$,所以$C=\frac{\pi}{4}$.故选B.

4.C

提示:若$C>B$,由三角形中"大角对大边"可知$c>b$,结合正弦定理,得$\sin C>\sin B$;反之亦成立,故"$C>B$"是"$\sin C>\sin B$"的充要条件.故选C.

5.C

提示:在$\triangle ABC$中,$\sin B=\sin[\pi-(\alpha+\beta)]=\sin(\alpha+\beta)$,由正弦定理,得$\frac{AB}{\sin\beta}=\frac{AC}{\sin B}$,所以$AB=\frac{AC\cdot\sin\beta}{\sin B}=\frac{m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.故选C.

6.B

提示:由题意可知,在$\triangle ABC$中,$\angle BAC=25°+35°=60°$,$AC=24$km,$BC=31$km,设$AB=x$km,由余弦定理,得$31^2=x^2+24^2-2\cdot x\cdot24\cdot\cos60°$,整理得$x^2-24x-385=0$,解得$x=35$,或$x=-11$(不合题意,舍去).所以$AB=35$km,$35\div5=7$(小时),所以此人到达$A$地所需的时间是7小时.故选B.

7.C

提示:因为$c^2+2b^2=3a^2$,所以$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3b^2+3c^2-3a^2}{6bc}=\frac{b^2+2c^2}{6bc}=\frac{1}{6}\left(\frac{b}{c}+\frac{2c}{b}\right)\geqslant\frac{1}{6}\times2\sqrt{\frac{b}{c}\cdot\frac{2c}{b}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$,当且仅当$\frac{b}{c}=\frac{2c}{b}$,即$b=\sqrt{2}c$时,等号成立.所以$\sin A\leqslant\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{3}$.故$\sin A$的最大值为$\frac{\sqrt{7}}{3}$.故选C.

8.D

提示:因为$AB=3$,$AC=4$,$BC=5$,满足$AB^2+AC^2=BC^2$,所以$A=90°$,故$\cos B=\frac{3}{5}$.因为AD是$\angle A$的平分线,所以$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{3}{4}$,所以$BD=\frac{15}{7}$.在$\triangle ABD$中,由余弦定理,得$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos B=3^2+\left(\frac{15}{7}\right)^2-2\times3\times\frac{15}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{288}{49}$,解得$AD=\frac{12\sqrt{2}}{7}$(负值舍去).故选D.

二、多项选择题

9.AC

提示:由正弦定理,得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,所以$\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{6\sin30°}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.因为$a>b$,所以$A>B$.又$A\in(0°,180°)$,所以$A=45°$或$135°$.故选AC.

10.AD

提示:若$\triangle ABC$为钝角三角形,则最大角为钝角,故最大角的余弦值小于0.结合余弦定理的推论,因为$a<b$,若c为最长边,由$\cos C<0$,得$a^2+b^2-c^2=4+9-c^2<0$,所以$c>\sqrt{13}$,又$a+b=5>c$,所以$\sqrt{13}<c<5$,可得选项D正确;若b为最长边,由$\cos B<0$,得$c^2+a^2-b^2=c^2+4-9<0$,所以$0<c<\sqrt{5}$,又$c>b-a=1$,所以$1<c<\sqrt{5}$,可得选项A正确.故选AD.

11.AD

提示:因为$b=2$,$c=3$,对于选项A,由于$c\sin B=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,且$c\sin B<b<c$,因此有两解;对于选项B,由正弦定理,得$\sin B=\frac{b\sin C}{c}=\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$,且$b<c$,因此$B$只能是锐角,故只有一解;对于选项C,由$S=\frac{1}{2}bc\sin A\Rightarrow\sin A=\frac{2S}{bc}=1\Rightarrow A=90°$,故只有一解;对于选项D,由$\frac{b}{\sin B}=2R$,得$\sin B=\frac{b}{2R}=\frac{1}{2}$,又$b<c$,所以$B<C$,所以$B=30°$,由选项A可知有两解.故选AD.

12.ABD

提示:对于选项A,在$\triangle ACD$中,$\angle CAD=\beta-\alpha$,由正弦定理,得$AC=\frac{CD\sin\angle ADC}{\sin\angle CAD}=\frac{a\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$,在$Rt\triangle ABC$中,$AB=AC\sin\angle ACB=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$,故选项A满足;对于选项B,在$\triangle ACD$中,$\angle CAD=\pi-(\beta+\gamma)$,由正弦定理,得$AC=\frac{CD\sin\angle ADC}{\sin\angle CAD}=\frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$,在$Rt\triangle ABC$中,$AB=AC\sin\angle ACB=\frac{a\sin\alpha\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$,故选项B满足;对于选项C,在$\triangle BCD$中,已知一边一角无法解三角形,不能求出$BC$,则在$\triangle ABC$中,无法解三角形求$AB$,故选项C不满足;对于选项D,设$AB=h$,则有$BC=\frac{h}{\tan\alpha}$,$BD=\frac{h}{\tan\beta}$,$BE=\frac{h}{\tan\gamma}$,在$\triangle BCD$与$\triangle BED$中,由余弦定理,得

$$\begin{cases}BD^2+CD^2-BC^2=2BD\cdot CD\cos\angle BDC,\\BD^2+ED^2-BE^2=2BD\cdot ED\cos\angle BDE,\end{cases}$$

即$\begin{cases}BD^2+a^2-BC^2=2a\cdot BD\cos\angle BDC,\\BD^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-BE^2=-a\cdot BD\cos\angle BDC,\end{cases}$因此$3BD^2+\frac{3}{2}a^2-BC^2-2BE^2=0$,将$BC$,$BD$,$BE$代入解方程即可得出$h$,故选项D满足.故选ABD.

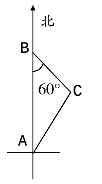
三、填空题

13.1

提示:因为$a=3$,$b=3$,所以$A=B$,

故$\frac{\sin2A}{\sin C}=\frac{\sin2A}{\sin(\pi-2A)}=\frac{\sin2A}{\sin2A}=1$.

14.70米



(第14题图)

提示:设点A为李华的家,点B为有害垃圾桶所在位置,点C为可回收物垃圾桶所在位置,根据题意作出示意图如右图所示,其中$AB=80$米,$BC=30$米,$\angle ABC=60°$,在$\triangle ABC$中,由余弦定理,得$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC=80^2+30^2-2\times80\times30\times\cos60°=4900$,所以$AC=70$米.故他回到自家楼下至少还需走70米.

15.$\frac{\sqrt{21}}{3}$

提示:在$\triangle ABC$中,由余弦定理,得$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A=2^2+3^2-2\times2\times3\times\cos\frac{\pi}{3}=7$,所以$BC=\sqrt{7}$.设$\triangle ABC$的外接圆半径为$R$,则$\frac{BC}{\sin A}=2R$,所以$R=\frac{BC}{2\sin A}=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

16.$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=1$;9

提示:根据题意,由$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}$,得$\frac{1}{2}\times ac\sin120°=\frac{1}{2}c\times1\times\sin60°+\frac{1}{2}a\times1\times\sin60°$,可得$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=1$.所以$a+4c=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)(a+4c)=5+\frac{4c}{a}+\frac{a}{c}\geqslant5+2\times\sqrt{\frac{4c}{a}\cdot\frac{a}{c}}=9$,当且仅当$\frac{4c}{a}=\frac{a}{c}$,即$a=3$,$c=\frac{3}{2}$时,等号成立.故$a+4c$的最小值为9.

四、解答题

17.**解**:由已知,得$C=180°-A-B=105°$,$\sin105°=\sin(45°+30°)=\sin45°\cos30°+\cos45°\sin30°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

根据正弦定理,得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,所以$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{2\sqrt{2}\sin30°}{\sin45°}=2$,$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{2\sqrt{2}\sin105°}{\sin45°}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

18.**解**:(1)因为$A+B+C=\pi$,所以$\cos C=-\cos(A+B)=\frac{1}{2}$.又$0<C<\pi$,所以$C=\frac{\pi}{3}$.

(2)由余弦定理的推论,得$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$,所以$a^2+b^2-c^2=ab$.

又$a^2+b^2=5$,$c=\sqrt{3}$,所以$ab=2$.

与$a^2+b^2=5$联立,解得$\begin{cases}a=1,\\b=2,\end{cases}$或$\begin{cases}a=2,\\b=1.\end{cases}$

19.**解**:(1)由已知条件及正弦定理,可得$\frac{a}{b}=\frac{3\sin B}{\sin A}=\frac{3b}{a}$,则$\left(\frac{a}{b}\right)^2=3$,故$\frac{a}{b}=\sqrt{3}$.

(2)因为$A=\frac{2\pi}{3}$,所以$b=\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又$\frac{a}{b}=\sqrt{3}$,所以$a=\sqrt{3}b=\frac{3}{2}$.

由余弦定理,得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,即$\frac{9}{4}=\frac{3}{4}+c^2-2\times\frac{\sqrt{3}}{2}c\times\left(-\frac{1}{2}\right)$,解得$c=\frac{\sqrt{3}}{2}$(负值舍去).

故$\triangle ABC$的周长为$a+b+c=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$.

20.**解**:假设t小时后缉私艇在点M处将走私船截获.

(1)在$\triangle APM$中,$AM=20t$,$PM=10\sqrt{2}t$,$P=135°$,根据正弦定理,$\frac{AM}{\sin P}=\frac{PM}{\sin A}$,得$\sin A=\frac{1}{2}$,则$A=30°$,故缉私艇应该往东偏北30°方向进行追缉.

(2)在$\triangle APM$中,根据余弦定理,得$AM^2=AP^2+PM^2-2AP\cdot PM\cdot\cos135°$,

将$AM=20t$,$AP=40$,$PM=10\sqrt{2}t$代入,化简得$t^2-4t-8=0$,解得$t=2\sqrt{3}+2$(负值舍去),此时走私船前进的路程为$10\sqrt{2}t=20(\sqrt{2}+\sqrt{6})$n mile$<35\sqrt{6}$n mile.所以缉私艇可以在该走私船进入公海前将其截获.

21.**解**:将$C=60°$看作已知条件,由$\cos A=\frac{2\sqrt{7}}{7}$,得$\sin A=\frac{\sqrt{21}}{7}$,$\sin B=\sin(A+60°)=\sin A\cos60°+\cos A\sin60°=\frac{\sqrt{21}}{7}\times\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{7}}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{21}}{14}$.

由正弦定理,得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,则$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{21}}{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$,$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{\sqrt{7}\times\frac{3\sqrt{21}}{14}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=3$.

若横线上的条件是$a=2$,由正弦定理,得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,则$\sin C=\frac{c\sin A}{a}=\frac{\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{21}}{7}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以$C=60°$或$C=120°$,因为$c>a$,所以C有两解,不合题意.

若横线上的条件是$b=3$,由余弦定理,得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=9+7-2\times3\sqrt{7}\times\frac{2\sqrt{7}}{7}=4$,则$a=2$,所以$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{4+9-7}{2\times2\times3}=\frac{1}{2}$,故$C=60°$,符合题意.

综上,横线处的条件是$b=3$.

22.**解**:(1)连接OC,在$\triangle OBC$中,$OB=10$,$BC=6$,$\angle ABC=120°$,

由余弦定理,得$OC^2=OB^2+BC^2-2OB\cdot BC\cos\angle ABC=10^2+6^2-2\times10\times6\times\cos120°=196$,所以$OC=14$.

由正弦定理,得$\frac{OC}{\sin\angle OBC}=\frac{BC}{\sin\angle COB}$,

所以$\sin\angle COB=\frac{BC\sin\angle OBC}{OC}=\frac{6\sin120°}{14}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

因为点P与点C重合,所以$\sin\angle POB=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

(2)连接OP,PB,AQ,由(1)知$OC=14$,所以$OP=OM=14$.

因为点P,Q关于OM对称,所以五边形$ABPMQ$的面积$S=2S_{四边形MOBP}$.

设$\angle POB=\alpha$,则$\angle POM=\frac{\pi}{2}-\alpha$,

所以$S=2S_{四边形MOBP}=2(S_{\triangle POB}+S_{\triangle POM})$

$=2\left[\frac{1}{2}\times10\times14\sin\alpha+\frac{1}{2}\times14\times14\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]$

$=2\times14(5\sin\alpha+7\cos\alpha)=28\sqrt{74}\sin(\alpha+\varphi)$,

其中$\tan\varphi=\frac{7}{5}$.

所以当$\sin(\alpha+\varphi)=1$时,S取得最大值$28\sqrt{74}$,即五边形$ABPMQ$面积的最大值为$28\sqrt{74}$.

扫码免费下载习题讲解ppt

第1期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B

提示:长度相等且方向相同的向量叫做相等向量,所以若$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,那么要使$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,则两向量还需要具备方向相同,故选B.

2.B

提示:因为D,E分别是AB,AC的中点,所以$DE\parallel BC$,故$\overrightarrow{DE}$与$\overrightarrow{CB}$共线.故选B.

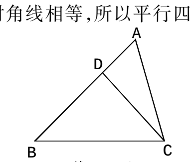
3.A

提示:因为$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$,所以$3(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})-2(3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}-2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-2(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.故选A.

4.C

提示:由$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$,可得$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$且$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$,所以四边形$ABCD$是平行四边形.由$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|$,可得$|\overrightarrow{DB}|=|\overrightarrow{AC}|$,即四边形对角线相等,所以平行四边形$ABCD$是矩形.故选C.

5.B



(第5题图)

提示:$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+3(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA})=-2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CD}=-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$.故选B.

6.C

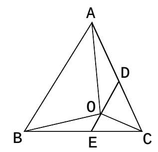
提示:因为C为直角,$BC=4$,所以$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{BA}|\cos B=|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{BC}|=4\times4=16$.故选C.

7.D

提示:因为$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$,所以$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$.

又$\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{j}$,$|\boldsymbol{i}|=|\boldsymbol{j}|=2$,所以$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=(4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j})^2=16\boldsymbol{i}^2-16\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{j}^2=16\times2^2-0+4\times2^2=80$,所以$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=4\sqrt{5}$.故选D.

8.C



(第8题图)

提示:如图所示,分别取AC,BC的中点D,E,因为$\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$,

所以$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+3(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\boldsymbol{0}$,

即$2\overrightarrow{OD}+3\times2\overrightarrow{OE}=\boldsymbol{0}$,

所以$\overrightarrow{OD}=-3\overrightarrow{OE}$,

所以O,D,E三点共线.

因为DE是$\triangle ABC$的中位线,所以点O到AB的距离等于点C到AB距离的$\frac{1}{2}$,所以$\frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{2}$.故选C.

二、多项选择题

9.AC

提示:对于A,模为0的向量是零向量,零向量的方向不确定,充分性成立;方向不确定的向量的模为0,必要性成立,故A正确.对于B,向量不能比较大小,故B错误.对于C,由$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{0}$,可得$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$,即$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$的模相等,方向相反,所以$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}$互为相反向量,故C正确.对于D,由于向量可以平行移动,所以由$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$不一定能得到$A$与$C$重合,$B$与$D$重合,故D错误.故选AC.

10.AB

提示:由题意得$AB=3AC$,则$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$,故A正确;$DA=2DC$,则$\overrightarrow{DA}=2\overrightarrow{DC}=-2\overrightarrow{CD}$,故B正确;$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{0}$,故C错误;$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{AD}$,故D错误.故选AB.

11.BC

提示:向量平行要求向量的方向相同或相反,选项A,D无法确定两向量的方向,故A,D错误;对于B,$|\boldsymbol{a}|=0$或$|\boldsymbol{b}|=0$,说明$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$至少有一个为零向量,而零向量与任意向量都平行,故B正确;C显然正确.故选BC.

12.AD

提示:由已知条件,可得$|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$,且$\lambda\in\mathbf{R}$时,$(\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2)^2$的最小值为$\frac{3}{4}$,即$\lambda^2+2\lambda\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+1$的最小值为$\frac{3}{4}$,所以$\frac{4-(2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2)^2}{4}=\frac{3}{4}$,得$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\pm\frac{1}{2}$.设$\boldsymbol{e}_1$与$\boldsymbol{e}_2$的夹角为$\theta$,则$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2}{|\boldsymbol{e}_1|\cdot|\boldsymbol{e}_2|}=\pm\frac{1}{2}$,因为$\theta\in[0,\pi]$,所以$\theta=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$,故A正确,C错误.因为$|\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2|^2=|\boldsymbol{e}_1|^2+2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+|\boldsymbol{e}_2|^2=2\pm1$,即$|\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2|^2=1$或3,所以$|\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2|=1$或$\sqrt{3}$,故B错误,D正确.故选AD.

三、填空题

13.$\overrightarrow{BC}$(答案不唯一)

提示:由题意,可得$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$,$EF\parallel BC$,$AD\perp BC$,所以与向量$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$垂直的向量有:$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{CB}$,$\overrightarrow{EF}$,$\overrightarrow{FE}$,$\overrightarrow{BD}$,$\overrightarrow{DB}$,$\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{CD}$,写出其中一个即可.

14.4,20

提示:当$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$同向时,$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$取得最小值,其最小值为$12-8=4$;当$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$反向时,$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$取得最大值,其最大值为$12+8=20$.

15.$2\sqrt{15}$

提示:设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为θ,由向量$\boldsymbol{b}$在向量$\boldsymbol{a}$上的投影向量为$-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$,

得$|\boldsymbol{b}|\cos\theta\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$,即$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$,

又$|\boldsymbol{a}|=2$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|^2=-2$.

所以$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4|\boldsymbol{b}|^2=2^2+4\times(-2)+4\times4^2=60$,故$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=2\sqrt{15}$.

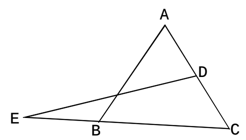
16.$\frac{3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{2}$;$\frac{\pi}{6}$

提示:由已知,得$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\frac{3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{2}$.

因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{DE}$,所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot\frac{3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{2}=\frac{1}{2}(3\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}^2)=0$,得$4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^2+3\boldsymbol{b}^2$,

即$4|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\angle ACB=|\boldsymbol{a}|^2+3|\boldsymbol{b}|^2$,

所以$\cos\angle ACB=\frac{|\boldsymbol{a}|^2+3|\boldsymbol{b}|^2}{4|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}\geqslant\frac{2\sqrt{3}|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}{4|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,当且仅当$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}|\boldsymbol{b}|$时,等号成立.又$\angle ACB\in[0,\pi]$,故$\angle ACB\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$,即$\angle ACB$的最大值为$\frac{\pi}{6}$.



(第16题图)

四、解答题

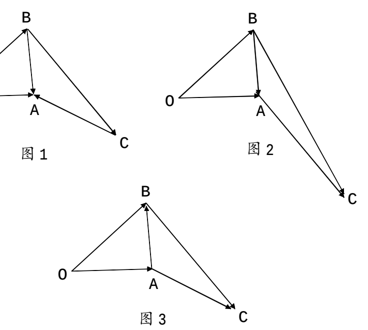
17.**解**:(1)因为四边形$ABCD$是边长为1的正方形,所以$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}$.

(2)$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}|=|2\overrightarrow{CB}|=2|\overrightarrow{CB}|=2$.

18.**解**:(1)如图1所示,在平面内任取一点O,作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.作$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$,则$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.故$\overrightarrow{CA}$为所作.

(2)如图2所示,在平面内任取一点O,作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.作$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$,则$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$.故$\overrightarrow{BC}$为所作.

(3)如图3所示,在平面内任取一点O,作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.作$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$,则$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$.故$\overrightarrow{AC}$为所作.



(第18题图)

19.(1)**解**:因为$AB\parallel CD$,$AB=2CD$,且E为AB的中点,所以$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,且$AE\parallel DC$,$AE=DC$,

所以四边形$AECD$为平行四边形,所以$AD\parallel CE$,$AD=CE$,即$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{EC}$.

又$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,所以$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{EB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\left(\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)=\frac{2}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$.

(2)**证明**:由(1)知$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}=\frac{2}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,则$\overrightarrow{AG}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AF}$,由共线向量定理可知$\overrightarrow{AG}\parallel\overrightarrow{AF}$,又因为$\overrightarrow{AG}$,$\overrightarrow{AF}$有公共点$A$,所以$A$,$F$,$G$三点共线.

20.**解**:(1)若$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CD}$方向相反,则存在$\lambda<0$,使得$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}$,即$k\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2=\lambda(-\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2)$,整理得$(k+\lambda)\boldsymbol{e}_1=(\lambda k+4)\boldsymbol{e}_2$.

因为$\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$不共线,所以$\begin{cases}k+\lambda=0,\\\lambda k+4=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lambda=2,\\k=-2\end{cases}$(舍去),或$\begin{cases}\lambda=-2,\\k=2.\end{cases}$所以$k$的值为2.

(2)由已知,得$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=(k+1)\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$.由$A$,$C$,$D$三点共线,可知存在$\mu\in\mathbf{R}$,使得$\overrightarrow{AD}=\mu\overrightarrow{CD}$,即$(k+1)\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2=\mu(-\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2)$,整理得$(k+1+\mu)\boldsymbol{e}_1=(\mu k+2)\boldsymbol{e}_2$.

因为$\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$不共线,所以$\begin{cases}k+1+\mu=0,\\\mu k+2=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=1,\\\mu=-2,\end{cases}$或$\begin{cases}k=-2,\\\mu=1.\end{cases}$所以$k$的值为1或-2.

21.**解**:(1)由$|k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}|\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}|$,两边平方,得$k^2|\boldsymbol{a}|^2+2k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=3(|\boldsymbol{a}|^2-2k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+k^2|\boldsymbol{b}|^2)$,

又$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$,整理得$k^2-4k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+1=0$.

若$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$,当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同方向时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times1\times\cos0°=1$,则$k^2-4k+1=0$,解得$k=2\pm\sqrt{3}>0$,符合题意;

当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$反方向时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times1\times\cos180°=-1$,则$k^2+4k+1=0$,又$k>0$,可知此方程无正解.

综上,实数k的值为$2\pm\sqrt{3}$.

(2)设向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为θ.由(1)可得$k^2-4k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+1=0$,又$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$,$k>0$,

则$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{k^2+1}{4k}=\frac{k}{4}+\frac{1}{4k}\geqslant2\sqrt{\frac{k}{4}\cdot\frac{1}{4k}}=\frac{1}{2}$,当且仅当$\frac{k}{4}=\frac{1}{4k}$,即$k=1$时,等号成立.

结合$\theta\in[0,\pi]$,得$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$,

所以向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$夹角的最大值为$\frac{\pi}{3}$.

22.**解**:(1)设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,则$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$,$\overrightarrow{AP_1}=\frac{3}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AP_3}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}+\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$,

则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP_1}+\overrightarrow{AP_1}\cdot\overrightarrow{AP_3}=\overrightarrow{AP_1}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AP_3})=\left(\frac{3}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}\right)\cdot\left(\frac{5}{4}\boldsymbol{a}+\frac{3}{4}\boldsymbol{b}\right)=\frac{1}{16}(15\boldsymbol{a}^2+14\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{b}^2)=\frac{25}{16}$.

(2)由题意可得$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AQ_1}+\overrightarrow{AQ_{2021}}=\cdots=\overrightarrow{AQ_{2021}}+\overrightarrow{AQ_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,则$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AQ_1}+\overrightarrow{AQ_2}+\cdots+\overrightarrow{AQ_{2021}}+\overrightarrow{AC}|=\left|\frac{2023}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\right|=\frac{2023}{2}\sqrt{\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\frac{2023\sqrt{3}}{2}$.

(3)设$\overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{BC}$,则$0\leqslant\lambda\leqslant1$,且$|\overrightarrow{PC}|=\lambda|\overrightarrow{BC}|=\lambda$.

所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}^2+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{PC}=\lambda^2+\lambda\cos120°=\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda=\left(\lambda-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}$.

当$\lambda=\frac{1}{4}$时,$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$取最小值,此时$\overrightarrow{AP}^2=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP})^2=\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CP}^2=1+2\times\frac{1}{4}\times\cos120°+\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{13}{16}$,

所以$|\overrightarrow{AP}|=\frac{\sqrt{13}}{4}$.故$AP$的长为$\frac{\sqrt{13}}{4}$.

第 2 期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B

提示：可以作为平面向量的一组基底的两个向量必不共线，由此可排除A，C，D，故选B.

2.D

提示：$\overrightarrow{MN}=(2,3)$，但点$M$不确定，则点$N$的位置不确定，故选D.

3.D

提示：由已知，得$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(4,-3)$，所以$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$.故选D.

4.D

提示：因为向量$\boldsymbol{m}=(2k-1,k)$与向量$\boldsymbol{n}=(3,1)$共线，所以$(2k-1)\times1-3k=0$，解得$k=-1$.所以$\boldsymbol{m}=(-3,-1)$，则$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=-3\times3+(-1)\times1=-10$.故选D.

5.C

提示：因为$\boldsymbol{a}=(3,4)$，$\boldsymbol{b}=(1,0)$，所以$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}=(3+t,4)$.因为$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle$，所以$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{c}|}=\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|}$，即$\frac{25+3t}{5}=\frac{3+t}{1}$，解得$t=5$.故选C.

6.A

提示：因为$\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{BD}$，所以$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\frac{3}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.故选A.

7.D

提示：以$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$为一组基底，可得$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{e}=-3\boldsymbol{a}$，所以$\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{e}=6\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.故选D.

8.C

提示：由已知，得$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+(1-\lambda)\cdot\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BC}+\lambda\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{AF}$，所以$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=[\overrightarrow{AB}+(1-\lambda)\overrightarrow{BC}]\cdot(\overrightarrow{BC}+\lambda\overrightarrow{AB})=(1+3\lambda)\cdot|\overrightarrow{BC}|^2=0$，所以$1+3\lambda=0$，解得$\lambda=-\frac{1}{3}$.所以$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$.所以$|\overrightarrow{EF}|^2=\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}\right)^2=\frac{1}{9}|\overrightarrow{BC}|^2+\frac{16}{9}|\overrightarrow{AB}|^2=\frac{1}{9}|\overrightarrow{AD}|^2+\frac{16}{9}\times(2|\overrightarrow{AD}|)^2=\frac{65}{9}|\overrightarrow{AD}|^2$.所以$\frac{EF}{AD}=\frac{\sqrt{65}}{3}$.故选C.

二、多项选择题

9.BC

提示：$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{BC}$共线，$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{BD}$不共线，$\overrightarrow{CA}$与$\overrightarrow{DC}$不共线，$\overrightarrow{OD}$与$\overrightarrow{OB}$共线，故选BC.

10.ACD

提示：因为$\overrightarrow{OC}=(-2,1)$，$\overrightarrow{BA}=(2,-1)$，所以$\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{BA}$，又直线OC，$BA$不重合，所以直线OC与$BA$平行，故A正确；$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\neq\overrightarrow{CA}$，故B错误；$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=(0,2)=\overrightarrow{OB}$，故C正确；因为$\overrightarrow{AC}=(-4,0)$，$\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA}=(0,2)-2(2,1)=(-4,0)=\overrightarrow{AC}$，故D正确.故选ACD.

11.ABD

提示：若点A，B，C能构成三角形，则三点不能共线.因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(1,2)$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(m,m+1)$，所以$1\times(m+1)-2m\neq0$，即$m\neq1$.故选ABD.

12.AD

提示：设$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC}$，由$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{7}\overrightarrow{AC}$，可得$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{7x}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{7}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AP}=\frac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{7y}\overrightarrow{AN}$.因为$C$，$P$，$M$共线，$N$，$P$，$B$共线，所以$\begin{cases}\frac{3}{7x}+\frac{1}{7}=1,\\ \frac{3}{7}+\frac{1}{7y}=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\frac{1}{2},\\ y=\frac{1}{4}.\end{cases}$故$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，即$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{NC}$.故选AD.

三、填空题

13.(2,3)

提示：由题意，点P分有向线段$\overrightarrow{MN}$的比为$\frac{1}{2}$，设$P(x,y)$，

则$x=\frac{-2+\frac{1}{2}\times10}{1+\frac{1}{2}}=2$，$y=\frac{5+\frac{1}{2}\times(-1)}{1+\frac{1}{2}}=3$，

故点P的坐标为(2,3).

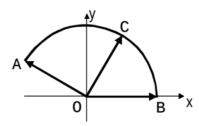
14.$-\frac{3}{4}$

提示：由$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=m+3(m+1)=0$，解得$m=-\frac{3}{4}$.

15.$\frac{\sqrt{3}}{2}$

提示：建立如图所示平面直角坐标系，则$B(1,0)$.因为$\angle COB=60°$，$OC=1$，所以$C\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.因为$\angle BOA=150°$，所以$A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.又$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，所以$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\lambda\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)+\mu(1,0)$，得$\begin{cases}\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda+\mu,\\ \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\lambda,\end{cases}$

解得$\begin{cases}\lambda=\sqrt{3},\\ \mu=2.\end{cases}$所以$\frac{\lambda}{\mu}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.



(第 15 题图)

16.$\left(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

提示：由$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(1,2\sqrt{2})$，得$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}=3$.又$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|$.所以$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$同向共线.故$\boldsymbol{c}$为与$(1,2\sqrt{2})$同向的单位向量，故$\boldsymbol{c}=\left(\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

四、解答题

17.(1)**解：**由已知，因为$|\overrightarrow{OA}|=2$，所以$\overrightarrow{OA}=(2,0)$.

因为$\angle OAB=\frac{2\pi}{3}$，$|\overrightarrow{AB}|=1$，

所以$\overrightarrow{AB}=\left(\cos\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

故$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=(2,0)+\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

又$O(0,0)$，故点B的坐标为$\left(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(2)**证明：**由题意知，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\left(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+(-1,\sqrt{3})=\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，

又$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，故$\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{AB}$，

又OC，AB不共线，故OC∥AB.

18.(1)**解：**$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{12}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$.

(2)**证明：**因为$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{12}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right)$，所以$\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MN}$，所以$\overrightarrow{MN}\parallel\overrightarrow{MC}$.又$\overrightarrow{MN}$与$\overrightarrow{MC}$有公共点$M$，所以$M$，$N$，$C$三点共线.

19.(1)**证明：**根据题意，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$为非零向量，若$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$共线，则存在$k\in\mathbf{R}$，使得$\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$，

所以$\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2=k(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)$，即$(1-k)\boldsymbol{e}_1+(3+2k)\boldsymbol{e}_2=\mathbf{0}$.

因为$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$不共线，所以$\begin{cases}1-k=0,\\ 3+2k=0,\end{cases}$该方程组无解，所以$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$不共线.所以$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$可以作为一组基底.

(2)**解：**设$x,y\in\mathbf{R}$，$\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=x(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)+y(\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)=(x+y)\boldsymbol{e}_1+(3y-2x)\boldsymbol{e}_2$，

又$\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，由平面向量基本定理，得$\begin{cases}x+y=3,\\ 3y-2x=-1,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=2,\\ y=1.\end{cases}$所以$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

(3)**解：**$4\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)+\mu(\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2)=(\lambda+\mu)\boldsymbol{e}_1-(2\lambda-3\mu)\boldsymbol{e}_2$，

因为$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$不共线，由平面向量基本定理，得$\begin{cases}\lambda+\mu=4,\\ 2\lambda-3\mu=3,\end{cases}$解得$\lambda=3$，$\mu=1$.

20.**解：**(1)设$\boldsymbol{c}=(x,y)$，由题意得$3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(0,-2)$，因为$\boldsymbol{c}\parallel(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，所以$-2\cdot x=0\cdot y$，解得$x=0$.

因为$|\boldsymbol{c}|=2$，所以$\sqrt{x^2+y^2}=|y|=2$，解得$y=\pm2$.所以向量$\boldsymbol{c}$的坐标为(0,2)或(0,-2).

(2)$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=(1-3\lambda,-2+4\lambda)$，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})=1\times(1-3\lambda)+(-2)\times(-2+4\lambda)=5-11\lambda$.

若选①，则$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})=5-11\lambda>0$，解得$\lambda<\frac{5}{11}$，又$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$不能共线，所以$1\times(-2+4\lambda)\neq(1-3\lambda)\times(-2)$，解得$\lambda\neq0$，所以实数$\lambda$的取值范围为$(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{5}{11}\right)$.

若选②，则$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})=5-11\lambda<0$，解得$\lambda>\frac{5}{11}$，所以实数$\lambda$的取值范围是$\left(\frac{5}{11},+\infty\right)$.

21.**解：**(1)因为$BC\parallel AD$，$AD=3BC$，$A(1,1)$，$D(7,4)$，

所以$\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=(2,1)$，又$C(2,3)$，所以$B(0,2)$.

因为E是线段CD的中点，所以$E\left(\frac{9}{2},\frac{7}{2}\right)$.

所以$\overrightarrow{BE}=\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$，$|\overrightarrow{BE}|=\frac{3\sqrt{10}}{2}$.

故与$\overrightarrow{BE}$同向的单位向量为$\frac{\overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{BE}|}=\left(\frac{3\sqrt{10}}{10},\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$.

(2)因为$\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{EC}$，所以$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{9}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{5}{9}\boldsymbol{b}$.

因为$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AP}$，所以$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{9}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{2}{3\lambda}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{9\lambda}\overrightarrow{AD}$，又$B$，$P$，$D$三点共线，所以$\frac{2}{3\lambda}+\frac{5}{9\lambda}=1$，解得$\lambda=\frac{11}{9}$.

22.**证明：**(1)因为P，R，Q三点共线，所以存在$x\in\mathbf{R}$，使得$\overrightarrow{PR}=x\overrightarrow{PQ}$，

即$\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=x(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})$，得$\overrightarrow{OR}=(1-x)\overrightarrow{OP}+x\overrightarrow{OQ}$.

令$\lambda=1-x$，$\mu=x$，则存在实数λ，μ，使得$\overrightarrow{OR}=\lambda\overrightarrow{OP}+\mu\overrightarrow{OQ}$，且$\lambda+\mu=1$.

(2)在$\triangle ABC$中，设D，E，F分别为BC，AC，AB的中点，BE与AD的交点为G，

设$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

设$\overrightarrow{BG}=\lambda\overrightarrow{BE}$，则$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{BA}=\lambda\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BA}=\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)\boldsymbol{a}+\frac{\lambda}{2}\boldsymbol{b}$.

因为$\overrightarrow{AG}$，$\overrightarrow{AD}$共线，设$\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AD}$，则$\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)\boldsymbol{a}+\frac{\lambda}{2}\boldsymbol{b}=x\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\right)$，所以$\frac{\lambda}{2}-1=-x$，且$\frac{\lambda}{2}=\frac{x}{2}$，解得$\lambda=\frac{2}{3}$.

所以$\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CG}$，所以$\overrightarrow{CG}$与$\overrightarrow{CF}$共线.

又CG与CF有公共点C，所以C，G，F三点共线，所以点G在CF上.所以三角形的三条中线交于一点.

第 3 期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A

提示：设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为θ，若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$，则$\theta$为锐角或$\theta=0°$，充分性不成立；若$\theta$为锐角，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta>0$，必要性成立.故选A.

2.B

提示：在矩形$ABCD$中，$|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{BC}|=4$，所以$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}|=|2\overrightarrow{AC}|=2|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{2^2+4^2}=4\sqrt{5}$.故选B.

3.A

提示：设河水的流速为$\boldsymbol{v}_1$，小船的静水速度为$\boldsymbol{v}_2$，实际航行的速度为$\boldsymbol{v}$，则$|\boldsymbol{v}_1|=5$m/s，$|\boldsymbol{v}|=12$m/s，$\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{v}_1$，所以$|\boldsymbol{v}_2|=\sqrt{|\boldsymbol{v}_1|^2+|\boldsymbol{v}|^2}=13$m/s.故选A.

4.A

提示：由已知，得$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=(3,4)+(2,-5)+(3,1)=(8,0)$.设合力$\boldsymbol{F}$的终点为$B(x,y)$，因为$A(1,1)$，所以$(x,y)-(1,1)=(8,0)$，所以$(x,y)=(9,1)$.故选A.

5.C

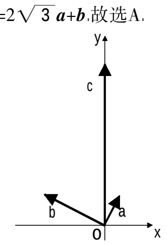
提示：$\boldsymbol{F}_1=(1,1)$，$\boldsymbol{F}_2=(4,-5)$的合力为$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=(5,-4)$.因为$A(20,15)$，$B(7,0)$，所以$\overrightarrow{AB}=(-13,-15)$.所以这两个力的合力对质点所做的功$W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}=5\times(-13)+(-4)\times(-15)=-5$.故选C.

6.D

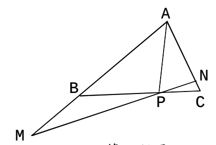
提示：因为$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=-5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，所以$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=-8\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{BC}$，所以$AD\parallel BC$，且$AD\neq BC$，所以四边形$ABCD$为梯形.故选D.

7.A

提示：以步为单位长度，建立如图所示平面直角坐标系，则$\boldsymbol{a}=(50\cos60°,50\sin60°)=(25,25\sqrt{3})$，$\boldsymbol{b}=(100\cos150°,100\sin150°)=(-50\sqrt{3},50)$，$\boldsymbol{c}=(0,200)$.设$\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，则$\begin{cases}0=25x-50\sqrt{3}y,\\ 200=25\sqrt{3}x+50y,\end{cases}$解得$x=2\sqrt{3}$，$y=1$.所以$\boldsymbol{c}=2\sqrt{3}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.故选A.



(第 7 题图)



(第 8 题图)

8.D

提示：因为$BP=2PC$，$AB=mAM$，$AC=nAN$，

所以$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}m\overrightarrow{AM}+\frac{2}{3}n\overrightarrow{AN}$.

因为M，P，N三点共线，所以$\frac{1}{3}m+\frac{2}{3}n=1$，得$m+2n=3$.故选D.

二、多项选择题

9.ABC

提示：由已知，得$\overrightarrow{AB}=(5,-3)$，$\overrightarrow{CD}=(-5,3)$，$\overrightarrow{AD}=(3,5)$，$\overrightarrow{AC}=(8,2)$，$\overrightarrow{BD}=(-2,8)$.因为$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$，又AB与CD不在一条直线上，所以$AB\parallel CD$，故A正确；$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=5\times3-3\times5=0$，故B正确；$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{68}=|\overrightarrow{BD}|$，故C正确；$8\times8-2\times(-2)\neq0$，所以$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{BD}$不平行，故D错误.故选ABC.

10.AB

提示：由$\overrightarrow{AB}=(1,k)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,3)$，得$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(-3,3-k)$.若$A$是直角，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=-2+3k=0$，解得$k=\frac{2}{3}$；若$B$是直角，则$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}=-3+(3-k)k=0$，无解；若$C$是直角，则$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}=6+3(3-k)=0$，解得$k=5$.故选AB.

11.BC

提示：由题意可得$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OA})=|\overrightarrow{MO}|^2-|\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{MO}|^2-1$，又$|\overrightarrow{MO}|\in[\sqrt{3},2]$，所以$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}\in[2,3]$.故选BC.

12.ACD

提示：对于A，当该物体处于平衡状态时，$|\boldsymbol{F}_2|=|\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{G}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$N，故A正确；对于B，当$\boldsymbol{F}_2$与$\boldsymbol{F}_1$方向相反，且$|\boldsymbol{F}_2|=5$N时，物体所受合力大小为$\sqrt{(5-3)^2+4^2}=2\sqrt{5}$ N，故B错误；对于C，当物体所受合力为$\boldsymbol{F}_1$时，说明$\boldsymbol{G}$与$\boldsymbol{F}_2$的合力为$\mathbf{0}$，所以$|\boldsymbol{F}_2|=4$N，故C正确；对于D，当$|\boldsymbol{F}_2|=2$N时，因为$\boldsymbol{F}_1$与$\boldsymbol{G}$的合力大小为$|\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{G}|=5$N，所以$||\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{G}|-|\boldsymbol{F}_2||\leqslant|\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{G}|\leqslant|\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2|+|\boldsymbol{G}|$，即$3\text{N}\leqslant|\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{G}|\leqslant7$N，故D正确.故选ACD.

三、填空题

13.120°

提示：以AB，AC为邻边作平行四边形$ABDC$，由$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$，知四边形$ABDC$是菱形，$\triangle ADC$和$\triangle ADB$都是等边三角形，所以$\angle BAC=120°$.

14.$\frac{\pi}{4}$

提示：设$\boldsymbol{F}$与$\boldsymbol{s}$的夹角为θ，则$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{s}|\cdot\cos\theta=10\times50\times\cos\theta=250\sqrt{2}$，得$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又$\theta\in[0,\pi]$，所以$\theta=\frac{\pi}{4}$.

15.(-3,4)

提示：因为$\boldsymbol{s}_A=(3,-4)$，$\boldsymbol{s}_B=(4,3)$，所以粒子B相对于粒子A的位移$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_B-\boldsymbol{s}_A=(1,7)$.

设$\boldsymbol{s}$与$\boldsymbol{s}_A$的夹角为θ，则$\boldsymbol{s}$在$\boldsymbol{s}_A$上的投影向量是$|\boldsymbol{s}|\cdot\cos\theta\cdot\frac{\boldsymbol{s}_A}{|\boldsymbol{s}_A|}=\frac{\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{s}_A}{|\boldsymbol{s}_A|}\cdot\frac{\boldsymbol{s}_A}{|\boldsymbol{s}_A|}=\frac{\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{s}_A}{|\boldsymbol{s}_A|^2}\cdot\boldsymbol{s}_A=\frac{1\times3+7\times(-4)}{3^2+(-4)^2}\boldsymbol{s}_A=-\boldsymbol{s}_A=(-3,4)$.

16.$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

提示：以A为坐标原点，AB，AC所在直线分别为x，y轴，建立平面直角坐标系.由题意，得$B(2,0)$，$N(1,0)$，$C(0,3)$，$M(0,2)$.设$P(x,y)$，

因为C，P，N三点共线，$\overrightarrow{CP}=(x,y-3)$，$\overrightarrow{CN}=(1,-3)$，所以$-3x-(y-3)=0$. ①

因为M，P，B三点共线，$\overrightarrow{MP}=(x,y-2)$，$\overrightarrow{MB}=(2,-2)$，所以$-2x-2(y-2)=0$. ②

联立①②，解得$x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{3}{2}$，所以$P\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

所以$\overrightarrow{PB}=\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{PN}=\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$.

故$\cos\angle BPN=\frac{\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PN}}{|\overrightarrow{PB}|\cdot|\overrightarrow{PN}|}=\frac{\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

四、解答题

17.**解：**(1)因为$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{EC}$，所以$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

又$\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，所以$x=-\frac{1}{6}$，$y=\frac{2}{3}$.

(2)由(1)知$\overrightarrow{DE}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，

则$|\overrightarrow{DE}|^2=\left(-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2=\frac{1}{36}\overrightarrow{AB}^2-\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}^2=\frac{1}{36}\times3^2-\frac{2}{9}\times3\times2\times\frac{1}{2}+\frac{4}{9}\times2^2=\frac{49}{36}$，所以$|\overrightarrow{DE}|=\frac{7}{6}$.

18.**解：**(1)因为$AD\parallel BC$，且$AD=3BC$，所以$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{BC}$.又$A(-2,0)$，$B(-1,3)$，$C(1,4)$，$D(x,y)$，所以$\overrightarrow{AD}=(x+2,y)$，$\overrightarrow{BC}=(2,1)$.所以$\begin{cases}x+2=6,\\ y=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=4,\\ y=3.\end{cases}$所以点$D$的坐标为(4,3).

(2)由(1)知$\overrightarrow{AD}=(x+2,y)$，$\overrightarrow{BC}=(2,1)$，因为$\overrightarrow{AD}\parallel\overrightarrow{BC}$，所以$x+2-2y=0$. ①

因为$BC\perp CD$，所以$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，又$\overrightarrow{CD}=(x-1,y-4)$，所以$2(x-1)+(y-4)=0$. ②

联立①②，解得$\begin{cases}x=2,\\ y=2.\end{cases}$所以点$D$的坐标为(2,2).

(3)$|\overrightarrow{OP}|$的最大值为3.

19.(1)**证明：**由已知条件，可得

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{CQ}-\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})$.

在梯形$ABCD$中，$CD\parallel AB$，

设$\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{AB}$，

则$\overrightarrow{PQ}=\frac{1+\lambda}{2}\overrightarrow{AB}$.所以$\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{AB}$，

即$PQ\parallel AB$.

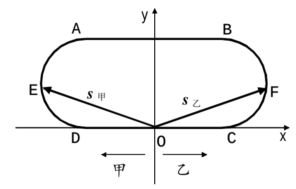
(2)**解：**若$AB=3CD$，则$\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{CD}$，结合(1)可知，$\lambda=-\frac{1}{3}$，所以$\overrightarrow{PQ}=\frac{1-\frac{1}{3}}{2}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.故$PQ:AB=\frac{1}{3}$.

20.**解：**(1)因为作用于同一点的三个力$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，$\boldsymbol{F}_3$处于平衡状态，所以$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=\mathbf{0}$，得$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=-\boldsymbol{F}_3$.因为$|\boldsymbol{F}_1|=1$，$|\boldsymbol{F}_2|=2$，且$\boldsymbol{F}_1$与$\boldsymbol{F}_2$的夹角为$\frac{2\pi}{3}$，所以$\boldsymbol{F}_3^2=(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)^2=\boldsymbol{F}_1^2+2\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_2^2=1^2+2\times1\times2\times\cos\frac{2\pi}{3}+2^2=3$，所以$|\boldsymbol{F}_3|=\sqrt{3}$.故$\boldsymbol{F}_3$的大小为$\sqrt{3}$.

(2)设$\boldsymbol{F}_2$与$\boldsymbol{F}_3$的夹角为θ.因为$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=\mathbf{0}$，所以$\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=-\boldsymbol{F}_1$.所以$\boldsymbol{F}_1^2=(\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3)^2=\boldsymbol{F}_2^2+2\boldsymbol{F}_2\cdot\boldsymbol{F}_3+\boldsymbol{F}_3^2$，即$1=2^2+2\times2\times\sqrt{3}\cos\theta+3$，得$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.又$\theta\in[0,\pi]$，所以$\theta=\frac{5\pi}{6}$.

故$\boldsymbol{F}_2$与$\boldsymbol{F}_3$的夹角为$\frac{5\pi}{6}$.

21.**解：**以O为原点，CD所在直线为x轴，建立如图所示的平面直角坐标系.



(第 21 题图)

(1)当甲到达$\overset{\frown}{AD}$的中点处时，乙到达$\overset{\frown}{BC}$的中点处，设此时甲的位置为点E，乙的位置为点F，

则$E(-80,30)$，$F(80,30)$，$\boldsymbol{s}_甲=\overrightarrow{OE}=(-80,30)$，$\boldsymbol{s}_乙=\overrightarrow{OF}=(80,30)$，所以$\boldsymbol{s}_甲\cdot\boldsymbol{s}_乙=-80\times80+30\times30=-5500$.

(2)20s后甲、乙的路程均为$20\times7=140$(m)，又$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}=\pi\times30=3\times30=90$(m)，$|OD|=|OC|=50$m，

所以20s后甲、乙分别到达点A，B处，所以$\boldsymbol{s}_甲=\overrightarrow{OA}=(-50,60)$，$\boldsymbol{s}_乙=\overrightarrow{OB}=(50,60)$.

所以$\boldsymbol{s}_甲\cdot\boldsymbol{s}_乙=-50\times50+60\times60=1100$，

$|\boldsymbol{s}_甲|=|\boldsymbol{s}_乙|=\sqrt{6100}$.

设$\boldsymbol{s}_甲$与$\boldsymbol{s}_乙$的夹角为θ，则$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{s}_甲\cdot\boldsymbol{s}_乙}{|\boldsymbol{s}_甲|\cdot|\boldsymbol{s}_乙|}=\frac{11}{61}$.

22.**解：**(1)因为点P的斜坐标为(2,-2)，所以$\overrightarrow{OP}=2\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$.

所以$|\overrightarrow{OP}|^2=(2\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)^2=4\boldsymbol{e}_1^2-8\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+4\boldsymbol{e}_2^2=4-8\cos60°+4=4$.所以$|\overrightarrow{OP}|=2$，即$|PO|=2$.

(2)因为$A(1,4)$，$B(4,2)$，$C(3,5)$，所以$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{OB}=4\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{OC}=3\boldsymbol{e}_1+5\boldsymbol{e}_2$.

所以$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，

可得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)\cdot(2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=6\boldsymbol{e}_1^2-\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_2^2=6-\cos60°-2=\frac{7}{2}$，

$|\overrightarrow{AB}|=|3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2|=\sqrt{9\boldsymbol{e}_1^2-12\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+4\boldsymbol{e}_2^2}=\sqrt{9-12\cos60°+4}=\sqrt{7}$，

$|\overrightarrow{AC}|=|2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2|=\sqrt{4\boldsymbol{e}_1^2+4\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_2^2}=\sqrt{4+4\cos60°+1}=\sqrt{7}$，

所以$\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2}$.

又$A\in(0,\pi)$，所以$A=\frac{\pi}{3}$.