第8期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.D

提示:四棱台的每个侧面都是梯形,故选D.

2.D

提示:因为六棱柱的底面是边长为3的正六边形,所以底面周长$C=6\times3=18$,又侧面是矩形,侧棱长为4,所以该六棱柱的侧面积$S=18\times4=72$.故选D.

3.D

提示:由题意,这个直平行六面体的表面积$S=2S_{底面}+S_{侧面}=2\times2\times2\times\sin60^\circ+4\times2\times2=4\sqrt{3}+16$.故选D.

4.C

提示:由题意,可知该圆锥的底面半径和高都是$\sqrt{3}$,故其体积$V=\frac{1}{3}\times\pi\times(\sqrt{3})^2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}\pi$.故选C.

5.B

提示:由题意,得圆台的高为2.5 m,下底面圆的半径为1.4 m,上底面圆的半径为0.5 m,所以体积$V=\frac{1}{3}\pi\times2.5\times(0.5^2+0.5\times1.4+1.4^2)=2.425\pi\approx7.6(m^3)$.故选B.

6.B

提示:设三个球的半径分别为r_1,r_2,r_3,由题设,得$\frac{4}{3}\pi r_1^3:\frac{4}{3}\pi r_2^3:\frac{4}{3}\pi r_3^3=1:27:64$,所以$r_1:r_2:r_3=1:3:4$.所以表面积之比为$4\pi r_1^2:4\pi r_2^2:4\pi r_3^2=r_1^2:r_2^2:r_3^2=1:9:16$.故选B.

7.A

提示:依题图可得,半球的半径为5cm,体积$V_1=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times5^3=\frac{250}{3}\pi\ (cm^3)$,大圆柱的体积$V_2=\pi\times5^2\times20=500\pi\ (cm^3)$,小圆柱的体积$V_3=\pi\times2^2\times2=8\pi(cm^3)$.所以盖上瓶塞后,水瓶的最大盛水量$V=\frac{250}{3}\pi+500\pi+8\pi+52\pi-\frac{10}{3}\pi=640\pi(cm^3)$.故选A.

8.C

提示:设甲、乙两个圆锥的底面半径分别为r_1,r_2,高分别为h_1,h_2,母线长为l,侧面展开图的圆心角分别为α,β,由$\frac{S_甲}{S_乙}=\frac{\pi r_1l}{\pi r_2l}=2$,得$\frac{r_1}{r_2}=2$,又$\begin{cases}\alpha l=2\pi r_1,\\ \beta l=2\pi r_2,\end{cases}$所以$\frac{\alpha}{\beta}=2$.根据题意,$\alpha+\beta=2\pi$,所以$\alpha=\frac{4\pi}{3}$,$\beta=\frac{2\pi}{3}$.所以$r_1=\frac{\alpha l}{2\pi}=\frac{2}{3}l$,$r_2=\frac{\beta l}{2\pi}=\frac{1}{3}l$.所以$h_1=\sqrt{l^2-r_1^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}l$,$h_2=\sqrt{l^2-r_2^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}l$.

所以$\frac{V_甲}{V_乙}=\frac{\frac{1}{3}\pi r_1^2h_1}{\frac{1}{3}\pi r_2^2h_2}=\sqrt{10}$.故选C.

二、多项选择题

9.CD

提示:若矩形的长所在直线为旋转轴,则几何体是底面半径为3,高为4的圆柱,其体积$V=\pi\times3^2\times4=36\pi$;若矩形的宽所在直线为旋转轴,则几何体是底面半径为4,高为3的圆柱,其体积$V=\pi\times4^2\times3=48\pi$.故选CD.

10.BD

提示:由题意,截得的上部分为小棱锥,下部分为棱台,小棱锥与原棱锥的高之比为1:3,则底面边长之比为1:3,所以小棱锥与原棱锥的侧面积之比为1:9,体积之比为1:27,所以小棱锥与棱台的侧面积之比为1:8,体积之比为1:26.故选BD.

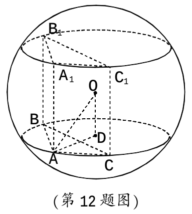
11.AD

提示:由图知$R=3r$,故A正确,B错误;易知包装盒的高为$2r$,故$V_2=\pi R^2\times2r=18\pi r^3$,又$V_1=\frac{4}{3}\pi r^3$,所以$2V_2=27V_1$,故C错误,D正确.故选AD.

12.CD

提示:由题意知,三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$为直三棱柱,设该三棱柱的高为h,球的半径为R,$\triangle ABC$外接圆的圆心为D,半径为r,则$OD=\frac{h}{2}$.设$AB=AC=m$,由$\angle BAC=120^\circ$,得$BC=\sqrt{3}m$,$2r=\frac{BC}{\sin\angle BAC}=2m\Rightarrow r=AD=m$.所以三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧面积为$(AB+AC+BC)\cdot h=(2+\sqrt{3})mh=8+4\sqrt{3}$,得$mh=4$.

在$Rt\triangle ODA$中,有$OA^2=OD^2+AD^2$,即$R^2=\left(\frac{h}{2}\right)^2+m^2$,所以球的表面积$S=4\pi R^2=4\pi\left(\frac{h^2}{4}+m^2\right)\geqslant4\pi\times2\sqrt{\frac{h^2}{4}\cdot m^2}=4\pi mh=16\pi$,当且仅当$m=\frac{h}{2}$时,等号成立.结合选项可知选CD.



(第12题图)

三、填空题

13.2V

提示:设圆柱和圆锥的底面积为S,圆柱的高为h,则圆锥的高为3h,且V=Sh.所以这个漏斗的容积为$V+\frac{1}{3}S\cdot3h=V+Sh=2V$.

14.6

提示:设上底面的半径为r,则下底面的半径为$3r$,又母线长为3,侧面积为72π,

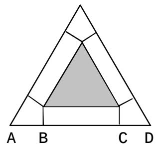
所以$\pi\times(r+3r)\times3=72\pi$,解得$r=6$.

15.26π

提示:将两个相同的斜截圆柱上下对接为一个圆柱,则圆柱的侧面积为斜截圆柱的侧面积的2倍,所以$S=\frac{1}{2}\times2\pi\times2\times(5+8)=26\pi(cm^2)$.

16.$\frac{1}{64}$

提示:如图所示,由三棱柱的上、下底面全等,可得底面边长$a=BC=AB+CD$,又$AB=CD$,$AB+BC+CD=1$,解得$a=\frac{1}{2}$.所以上、下底面面积和为$2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{8}$.因为纸片的面积为$\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}$,所以每个小长方形的面积为$\frac{1}{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)=\frac{\sqrt{3}}{24}$,所以三棱柱的高$h=\frac{\frac{\sqrt{3}}{24}}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{12}$,所以三棱柱的体积$V=\frac{\sqrt{3}}{16}\times\frac{\sqrt{3}}{12}=\frac{1}{64}$.



(第16题图)

四、解答题

17.**解**:(1)由已知,得底面积为$5\times5=25$,侧面积为$4\times\frac{1}{2}\times5\times5\times\sin60^\circ=25\sqrt{3}$.所以四棱锥S-ABCD的表面积$S=25+25\sqrt{3}$.

(2)连接AC,BD,交于点O,连接SO,则SO为四棱锥S-ABCD的高.由四边形ABCD是边长为5的正方形,得$OB=\frac{1}{2}BD=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.又$SB=5$,所以$SO=\sqrt{SB^2-OB^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.故四棱锥S-ABCD的体积$V=\frac{1}{3}\times25\times\frac{5\sqrt{2}}{2}=\frac{125\sqrt{2}}{6}$.

18.**解**:(1)因为长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的体积是24,$AB=2$,$BC=3$,

所以$2\times3\times AA_1=24$,解得$AA_1=4$.

又E为CC_1的中点,所以$CE=2$.

所以三棱锥$E-BCD$的体积$V=\frac{1}{3}\times S_{\triangle BCD}\times CE=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times3\times2=2$.

(2)多面体$EDBAA_1B_1C_1D_1$的表面积S=长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的表面积$-\triangle BCD$的面积$-\triangle BCE$的面积$-\triangle DCE$的面积$+\triangle BDE$的面积.

因为$S_{长方体}=2\times(2\times3+2\times4+3\times4)=52$,$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times2\times3=3$,$S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}\times3\times2=3$,$S_{\triangle DCE}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$,

又$BE^2=BC^2+CE^2=13$,$BD^2=BC^2+CD^2=13$,$DE^2=CD^2+CE^2=8$,所以$BE=BD$,

所以$S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}DE\cdot\sqrt{BD^2-\left(\frac{DE}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{11}=\sqrt{22}$,所以$S=52-3-3-2+\sqrt{22}=44+\sqrt{22}$.

19.**解**:(1)设球半径为r,则圆柱的高为$2r$,底面圆半径为r,

所以图案中球与圆柱的体积比为$\frac{V_球}{V_{圆柱}}=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2\cdot2r}=\frac{2}{3}$.

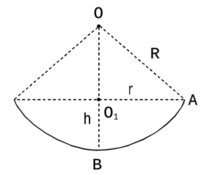
(2)由题意,得圆锥的体积$V=\frac{1}{3}\cdot\pi r^2\cdot2r=\frac{2000\pi}{3}(cm^3)$,又母线长$l=\sqrt{r^2+(2r)^2}=\sqrt{5}r=10\sqrt{5}(cm)$,

所以表面积$S=\pi r^2+\pi rl=100\pi+100\sqrt{5}\pi=100(1+\sqrt{5})\pi(cm^2)$.

20.**解**:(1)如图所示,O为球心,O_1为球冠底面圆的圆心,O_1A为球冠底面圆的半径,O_1B为球冠的高,

在$Rt\triangle OO_1A$中,$OA^2=OO_1^2+O_1A^2$,

即$R^2=(R-h)^2+r^2$,解得$R=\frac{h^2+r^2}{2h}$.



(第20题图)

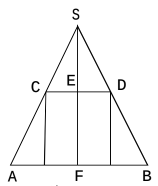
(2)由$C=2\pi r=500\pi$,得$r=250$.

由$S=2\pi Rh=2\pi\cdot\frac{h^2+r^2}{2h}\cdot h=65\ 000\pi$,

得$h^2+r^2=65\ 000$,所以$h=50$,$R=\frac{h^2+r^2}{2h}=650$.

所以$\frac{r}{R}=\frac{250}{650}=\frac{5}{13}$,球冠所在球的表面积$S_球=4\pi R^2=4\pi\times650^2=1\ 690\ 000\pi$.

21.**解**:(1)画圆锥的轴截面如图所示,其中CD是正四棱柱上底面的对角线,EF是正四棱柱的高,SF是圆锥的高,AB是圆锥底面圆的直径,正四棱柱的高与底面边长都是x.因为$CD//AB$,所以$\frac{SE}{SF}=\frac{CD}{AB}$,即$\frac{2\sqrt{2}-x}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}x}{2}$,解得$x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.所以正四棱柱外接球的半径$R=\frac{1}{2}\times\sqrt{3\times\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.所以这个正四棱柱的外接球体积$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3=\frac{8\sqrt{6}\pi}{27}$.



(第21题图)

(2)正四棱柱的高为$x(0<x<2\sqrt{2})$,设底面边长为y,由$\frac{SE}{SF}=\frac{CD}{AB}$,得$\frac{2\sqrt{2}-x}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}y}{2}$,解得$y=\sqrt{2}-\frac{x}{2}$.

所以正四棱柱的表面积为$4xy+2y^2=4x\left(\sqrt{2}-\frac{x}{2}\right)+2\left(\sqrt{2}-\frac{x}{2}\right)^2=-\frac{3}{2}x^2+2\sqrt{2}x+4=-\frac{3}{2}\left(x-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2+\frac{16}{3}$.

所以当$x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$时,这个正四棱柱的表面积最大,最大值是$\frac{16}{3}$.

22.**解**:(1)因为陀螺T_2中圆锥的底面半径为r,所以该圆锥的高$h=\frac{r}{\tan\theta}=\frac{3r}{2}$,陀螺$T_2$中圆柱的底面半径和高均为$\frac{r}{3}$,所以陀螺$T_2$的体积为$\frac{1}{3}\cdot\pi r^2\cdot\frac{3r}{2}+\pi\cdot\left(\frac{r}{3}\right)^2\cdot\frac{r}{3}=\frac{29\pi r^3}{54}$.

(2)当陀螺T_2转动一圈时,$\overset{\frown}{PP_1}=2\pi r$,陀螺$T_1$中圆锥的底面半径$R$为陀螺$T_2$中圆锥的高,故$R=\frac{3r}{2}$,所以$\overset{\frown}{PP_1}$所对的圆心角为$\frac{2\pi r}{\frac{3r}{2}}=\frac{4\pi}{3}$,可知P与$P_1$之间的距离$PP_1=2\cdot\frac{3r}{2}\cdot\sin\left[\frac{1}{2}\left(2\pi-\frac{4\pi}{3}\right)\right]=\frac{3\sqrt{3}r}{2}$.

扫码免费下载习题讲解ppt

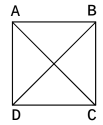
第5期

第2~3版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.C

提示:如图所示,可知满足要求的不同向量有$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DA},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{DB}$,共8个.故选C.



(第1题图)

2.B

提示:当m=0时,ma=m**b**,但**a**=**b**不一定成立,故充分性不成立;当**a**=**b**时,显然ma=m**b**,故必要性成立,所以"ma=m**b**"是"**a**=**b**"的必要不充分条件.故选B.

3.A

提示:$\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MN}=0$.故选A.

4.C

提示:因为$a=(-1,1)$,$\boldsymbol{b}=(m,3)$,所以$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{3-m}{\sqrt{2}\times\sqrt{m^2+9}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,解得$m=0$.故选C.

5.C

提示:由向量$a=(x-1,1)$,$\boldsymbol{b}=(3,x+1)$,假设$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,则$\begin{cases}x-1=3,\\1=x+1,\end{cases}$无解,所以$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$.故选C.

6.B

提示:在$\triangle ABC$中,由余弦定理,得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,将$b=6$,$a=2c$,$B=\frac{\pi}{3}$代入,可得$6^2=(2c)^2+c^2-2\times2c\times c\times\cos\frac{\pi}{3}=3c^2$,解得$c=2\sqrt{3}$,$a=4\sqrt{3}$.所以$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times\sin\frac{\pi}{3}=6\sqrt{3}$.

故选B.

7.C

提示:设向量a与b的夹角为θ,则向量a在向量b上的投影向量为$|a|\cos\theta\cdot\frac{b}{|b|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|b|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|b|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|b|^2}\boldsymbol{b}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\boldsymbol{b}$,所以$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|b|^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.又$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6\sqrt{2}$,代入上式,解得$|b|=3$.故选C.

8.A

提示:在$\triangle ABC$中,由正弦定理,可得$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{\sin C}=\frac{|\overrightarrow{AC}|}{\sin B}$,设比值为$k$,则$\overrightarrow{AP}=\frac{\lambda}{k}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,可知点$P$在边$BC$的中线上,故点$P$一定经过$\triangle ABC$的重心.故选A.

二、多项选择题

9.ACD

提示:在正$\triangle ABC$中,对于选项A,$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}|$,$|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{AC}|$,故选项A正确;对于选项B,设AC的中点为D,$|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{AB}|$,$|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}|=2|\overrightarrow{BD}|$,显然$|\overrightarrow{AB}|=\frac{2}{\sqrt{3}}|\overrightarrow{BD}|\neq2|\overrightarrow{BD}|$,故选项B错误;对于选项C,设BC,AB的中点分别为E,F,$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=2|\overrightarrow{AE}|$,$|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|=2|\overrightarrow{CF}|=2|\overrightarrow{AE}|$,故选项C正确;对于D,$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}|=2|\overrightarrow{AC}|$,$|\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}|=2|\overrightarrow{CA}|=2|\overrightarrow{AC}|$,故选项D正确.故选ACD.

10.ABD

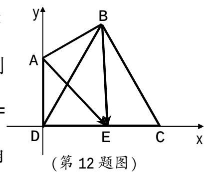
提示:由已知,得$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3,4-m)$,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,2+m)$,因为$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$,所以$3^2+(4-m)^2=3^2+(2+m)^2$,解得$m=1$,故C错误;$\boldsymbol{b}=(1,1)$,则$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$,故D正确;$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times1+2\times1=4$,故A正确;因为$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}$,所以$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$,故B正确.故选ABD.

11.ACD

提示:对于A,已知两边及夹角,可知$\triangle ABC$是唯一确定的,故A符合题意;对于B,由正弦定理,得$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{2}\sin30^\circ}{1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,因为$b>a$,所以$B>A$,所以$B=45^\circ$或$135^\circ$,有两解,故B不符合题意;对于C,由三角形内角和定理可得$A=105^\circ$,结合$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$可求得b,c,$\triangle ABC$是唯一确定的,故C符合题意;对于D,因为$a>b$,且$A=30^\circ$,所以$B<30^\circ$,则C一定为钝角,故$\triangle ABC$必有唯一解,故D符合题意.故选ACD.

12.BC

提示:由$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$,$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}=0$,得$AB\perp BC$,$AD\perp CD$.因为$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=1$,$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}$,所以$\cos\angle DAB=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|}=-\frac{1}{2}$,又$\angle DAB\in(0,\pi)$,所以$\angle DAB=\frac{2\pi}{3}$,则$\angle ADB=\angle ABD=\frac{\pi}{6}$,$\angle BDC=\angle DBC=\frac{\pi}{3}$,$\triangle BCD$为正三角形,所以$DC=BD=\sqrt{AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\angle DAB}=\sqrt{3}$.以D为坐标原点,DC,DA所在直线分别为$x$轴、$y$轴,建立平面直角坐标系,如图所示,则$A(0,1)$,$C(\sqrt{3},0)$,$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$,设$E(x,0)$,$x\in[0,\sqrt{3}]$,则$\overrightarrow{AE}=(x,-1)$,$\overrightarrow{BE}=\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)$,所以$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=x^2-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}=\left(x-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\frac{21}{16}\in\left[\frac{21}{16},3\right]$.故选BC.



(第12题图)

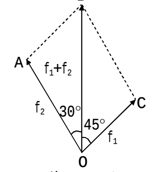
三、填空题

13.$\subseteq$

提示:共线向量是方向相同或相反的向量,因为集合$A=\{$与$\boldsymbol{a}$共线的向量$\}$,$C=\{$与$\boldsymbol{a}$长度相等、方向相反的向量$\}$,所以$A\cap C=C$.因为与$\boldsymbol{a}$长度相等的向量方向任意,所以$C\subseteq B$,故$A\cap C\subseteq B$.

14.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

提示:如图所示,以f_1,f_2为邻边构造平行四边形OABC,在$\triangle OAB$中,由正弦定理,得$\frac{|f_1|}{\sin30^\circ}=\frac{|f_2|}{\sin45^\circ}$,所以$\frac{|f_1|}{|f_2|}=\frac{\sin30^\circ}{\sin45^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



(第14题图)

15.6

提示:由$a\sin A-b\sin B=4c\sin C$,结合正弦定理,得$a^2-b^2=4c^2$,所以$a^2-3c^2=b^2+c^2$.又$\cos A=-\frac{1}{4}$,在$\triangle ABC$中,由余弦定理,得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=a^2-3c^2+\frac{1}{2}bc$,即$\frac{1}{2}bc=3c^2$,得$b=6c$,所以$\frac{b}{c}=6$.

16.$\sqrt{3}-1$

提示:设$BD=x$,则$CD=2x$,在$\triangle ACD$中,由余弦定理,得$AC^2=4x^2+4-2\cdot2x\cdot2\cdot\cos60^\circ=4x^2-4x+4$;在$\triangle ABD$中,由余弦定理,得$AB^2=x^2+4-2\cdot x\cdot2\cdot\cos120^\circ=x^2+2x+4$.要使$\frac{AC}{AB}$最小,则$\frac{AC^2}{AB^2}$最小.$\frac{AC^2}{AB^2}=\frac{4x^2-4x+4}{x^2+2x+4}=\frac{4(x^2+2x+4)-12x-12}{x^2+2x+4}=4-\frac{12(x+1)}{(x+1)^2+3}=4-\frac{12}{x+1+\frac{3}{x+1}}\geqslant4-\frac{12}{2\sqrt{3}}$,当且仅当$x+1=\frac{3}{x+1}$,即$x=\sqrt{3}-1$时,等号成立,所以当$\frac{AC}{AB}$取得最小值时,$BD=\sqrt{3}-1$.

四、解答题

17.(1)**证明**:因为$\overrightarrow{AB}=a+b$,$\overrightarrow{BC}=2a+8b$,$\overrightarrow{CD}=3(a-b)$,所以$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=5a+5b=5(a+b)=5\overrightarrow{AB}$,所以$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BD}$共线,又它们有公共点B,所以A,B,D三点共线.

(2)**解**:由$ka+b$和$a+kb$共线,得存在实数λ,使$ka+b=\lambda(a+kb)$,所以$\begin{cases}k=\lambda,\\1=k\lambda,\end{cases}$解得$k=\pm1$.

(3)**解**:若$ka+b$和$a+kb$反向共线,则存在实数$\lambda<0$,使$ka+b=\lambda(a+kb)$,结合(2)可得$k=-1$.

18.**解**:(1)因为点$A(1,-2)$,$B(2,1)$,$C(3,2)$,$D(-2,3)$,

所以$\overrightarrow{AB}=(1,3)$,$\overrightarrow{AC}=(2,4)$,$\overrightarrow{AD}=(-3,5)$,$\overrightarrow{BD}=(-4,2)$,$\overrightarrow{CD}=(-5,1)$,所以$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=(-12,8)$.

设$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$,

则$(-12,8)=m(1,3)+n(2,4)=(m+2n,3m+4n)$,

所以$\begin{cases}m+2n=-12,\\3m+4n=8,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=32,\\n=-22.\end{cases}$

所以$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=32\overrightarrow{AB}-22\overrightarrow{AC}$.

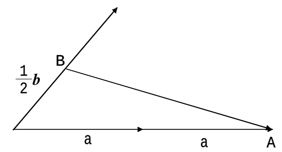
(2)由(1)知$\overrightarrow{AB}=(1,3)$,$\overrightarrow{AC}=(2,4)$,所以$\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}=(1+2\lambda,3+4\lambda)$.

设点$P(x,y)$,因为$A(1,-2)$,所以$\overrightarrow{AP}=(x-1,y+2)$,又$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$,所以$\begin{cases}x-1=1+2\lambda,\\y+2=3+4\lambda,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2+2\lambda,\\y=1+4\lambda.\end{cases}$

因为点P在第四象限,所以$\begin{cases}2+2\lambda>0,\\1+4\lambda<0,\end{cases}$解得$-1<\lambda<-\frac{1}{4}$.

所以λ的取值范围是$\left(-1,-\frac{1}{4}\right)$.

19.**解**:(1)先作$2\boldsymbol{a}$,再作$\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,最后运用向量减法的三角形法则可知$2\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$即为图中的向量$\overrightarrow{BA}$.



(第19题图)

(2)设$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的夹角为$\theta$.因为$|a|=1$,$|b|=2$,且$\boldsymbol{a}$与b的夹角为$45^\circ$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times2\times\cos45^\circ=\sqrt{2}$.

所以$|\boldsymbol{a}+b|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+b)^2}=\sqrt{1^2+2\sqrt{2}+2^2}=\sqrt{5+2\sqrt{2}}$,

$|\boldsymbol{a}-b|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-b)^2}=\sqrt{1^2-2\sqrt{2}+2^2}=\sqrt{5-2\sqrt{2}}$,

$(\boldsymbol{a}+b)\cdot(\boldsymbol{a}-b)=\boldsymbol{a}^2-b^2=-3$.

所以$\cos\theta=\frac{(\boldsymbol{a}+b)\cdot(\boldsymbol{a}-b)}{|\boldsymbol{a}+b|\cdot|\boldsymbol{a}-b|}$

$=\frac{-3}{\sqrt{5+2\sqrt{2}}\times\sqrt{5-2\sqrt{2}}}=-\frac{3\sqrt{17}}{17}$.

20.**解**:设经过t小时后,小船甲到达点E,小船乙到达点F.

(1)经过1小时后,$AE=10-2=8$,$AF=2$,$\angle EAF=60^\circ$,在$\triangle AEF$中,由余弦定理,得$EF^2=AE^2+AF^2-2AE\cdot AF\cdot\cos60^\circ=8^2+2^2-2\times8\times2\times\frac{1}{2}=52$,故$EF=2\sqrt{13}$.

故经过1小时后,甲、乙两小船相距$2\sqrt{13}$海里.

(2)设经过t小时$(0<t<5)$,小船甲处于小船乙的正东方向,则$AE=10-2t$,$AF=2t$,$\angle FEA=45^\circ$,$\angle EFA=75^\circ$,在$\triangle AEF$中,由正弦定理,得$\frac{AF}{\sin45^\circ}=\frac{AE}{\sin75^\circ}$,即$\frac{2t}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{10-2t}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$,解得$t=\frac{5(3-\sqrt{3})}{3}<5$.

故经过$\frac{5(3-\sqrt{3})}{3}$小时,小船甲处于小船乙的正东方向.

21.**解**:(1)由$\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$,$A=2B$,得$\sin C\sin B=\sin B\sin(C-A)$,因为在三角形中$\sin B\neq0$,所以$\sin C=\sin(C-A)$,所以$C=C-A$(舍去),或$C+C-A=\pi$.

联立$\begin{cases}A=2B,\\2C-A=\pi,\\A+B+C=\pi,\end{cases}$解得$C=\frac{5\pi}{8}$.

(2)**证明**:由$\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$,得$\sin C\sin A\cdot\cos B-\sin C\cos A\sin B=\sin B\sin C\cos A-\sin B\cos C\sin A$,结合正弦定理,得$ac\cdot\cos B-bc\cdot\cos A=bc\cdot\cos A-ab\cdot\cos C$,即$ac\cdot\cos B+ab\cdot\cos C=2bc\cdot\cos A$,结合余弦定理的推论,得$ac\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=2bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,化简整理,得$2a^2=b^2+c^2$.

22.**解**:(1)因为$t=\frac{1}{2}$,所以D为BC的中点,所以$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.因为$AC=2$,$AB=4$,$\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$,所以$|\overrightarrow{AD}|^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2)=\frac{1}{4}\times\left(4^2+2\times4\times2\times\cos\frac{2\pi}{3}+2^2\right)=3$,所以$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{3}$.

(2)若$t=\frac{1}{5}$,AD恰为BC边上的高,设$CD=x$,则$BD=4x$.在$Rt\triangle ACD$中,$AD^2=4-x^2$;在$Rt\triangle ABD$中,$AD^2=16-16x^2$,所以$4-x^2=16-16x^2$,得$x^2=\frac{4}{5}$,所以$BC^2=(5x)^2=20$.

在$\triangle ABC$中,由余弦定理的推论,得$\cos\angle BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{16+4-20}{2\times4\times2}=0$,所以$\angle BAC=90^\circ$.

(3)由$\overrightarrow{CD}=t\overrightarrow{CB}$,得$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+t\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+t(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=t\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AC}$,

所以$\overrightarrow{AD}^2=t^2\overrightarrow{AB}^2+2t(1-t)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+(1-t)^2\overrightarrow{AC}^2$.又$AD=3$,$AC=2$,$AB=4$,代入,得$9=16t^2+2t(1-t)\times4\times2\cos\angle BAC+4(1-t)^2$,

所以$\cos\angle BAC=\frac{20t^2-8t-5}{16t^2-16t}$.因为$-1<\cos\angle BAC<1$,

所以$-1<\frac{20t^2-8t-5}{16t^2-16t}<1$.(*)

因为$0<t<1$,所以$16t^2-16t<0$,故由(*)式,可得$16t^2-16t<20t^2-8t-5<-(16t^2-16t)$,解得$\frac{1}{2}<t<\frac{5}{6}$.

所以t的取值范围是$\left(\frac{1}{2},\frac{5}{6}\right)$.

第 6 期

第3~4版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.B

提示:$i^2+i=-1+i$是虚数,故选B.

2.A

提示:由题意,得$\begin{cases}m^2-m-6<6,\\m^2+2m-8=0,\end{cases}$解得$m=2$.故选A.

3.A

提示:若复数$z=a+bi$是虚数但不是纯虚数,则$a\neq0$且$b\neq0$,故$a^2+b^2\neq0$,充分性成立;若$a\neq0$且$b=0$,则$a^2+b^2\neq0$,但$z=a+bi=a$不是虚数,必要性不成立.故选A.

4.B

提示:$z=i(3+2i)=-2+3i$,则z的虚部是3.故选B.

5.C

提示:因为$z=-1+\sqrt{3}i$,所以$z\bar{z}=(-1+\sqrt{3}i)\cdot(-1-\sqrt{3}i)=(-1)^2-(\sqrt{3}i)^2=4$,则$\frac{z}{z\bar{z}-1}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{4-1}=-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}i$.故选C.

6.A

提示:因为四边形OABC为平行四边形,所以$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}$,则$z_1+z_3=z_2$,所以$z_3=z_2-z_1=-1+2i-(3+i)=-4+i$.所以$|z_3|=\sqrt{(-4)^2+1^2}=\sqrt{17}$.故选A.

7.A

提示:由$|z|^2-2|z|-3=0$,得$(|z|-3)(|z|+1)=0$,所以$|z|=3$,或$|z|=-1$(舍去).所以复数z在复平面内对应的点的集合是以原点为中心,半径为3的圆.故选A.

8.B

提示:设$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$.由$(z+1)^{2n}+(z-1)^{2n}=0$,得$(z+1)^{2n}=-(z-1)^{2n}$,则$|(z+1)^{2n}|=|-(z-1)^{2n}|$,即$|(z+1)^{2n}|=|(z-1)^{2n}|$,即$|z+1|^{2n}=|z-1|^{2n}$,所以$|z+1|=|z-1|$,即$|a+1+bi|=|a-1+bi|$,得$\sqrt{(a+1)^2+b^2}=\sqrt{(a-1)^2+b^2}$,解得$a=0$.所以$z=bi$.若$b=0$,则$z=0$,$(z+1)^{2n}+(z-1)^{2n}=1+1=2\neq0$,不合题意,所以$z=bi$($b\neq0$)为纯虚数.故选B.

二、多项选择题

9.CD

提示:由$x^3=1$,得$(x-1)(x^2+x+1)=0$,所以$x=1$,或$x^2+x+1=0$.由$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=0$,得$x+\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$,解得$x_1=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$,$x_2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$.故选CD.

10.AB

提示:因为$i^{2021}=(i^4)^{505}\cdot i=i$,$i^{2022}=(i^4)^{505}\cdot i^2=-1$,所以$(a+1)i^{2021}+(a-1)i^{2022}=1-a+(a+1)i$.因为复数$(a+1)i^{2021}+(a-1)i^{2022}$对应的点在第四象限,所以$\begin{cases}1-a>0,\\a+1<0,\end{cases}$解得$a<-1$,结合选项可知选AB.

11.ABC

提示:设$z_1=a+bi$,$z_2=c+di(a,b,c,d\in\mathbf{R})$,

则$\overline{z_1}=a-bi$,$\overline{z_2}=c-di$.对于A,

$|z_1-z_2|=|a-c+(b-d)i|=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$,

$|\overline{z_1}-\overline{z_2}|=|a-c-(b-d)i|=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$,故A正确;

对于B,

$|z_1+\overline{z_2}|=|a+c+(b-d)i|=\sqrt{(a+c)^2+(b-d)^2}$,

$|\overline{z_1}+z_2|=|a+c+(d-b)i|=\sqrt{(a+c)^2+(d-b)^2}$,故B正确;

对于C,

$|z_1-\overline{z_2}|=|a-c+(b+d)i|=\sqrt{(a-c)^2+(b+d)^2}$,

$|\overline{z_1}-z_2|=|a-c-(b+d)i|=\sqrt{(a-c)^2+(b+d)^2}$,故C正确;

对于D,

$|z_1-\overline{z_2}|=|a-c+(b+d)i|=\sqrt{(a-c)^2+(b+d)^2}$,

$|\overline{z_1}+z_2|=|a+c+(d-b)i|=\sqrt{(a+c)^2+(d-b)^2}$,故D错误.

故选ABC.

12.CD

提示:对于A,若$|\overrightarrow{OZ_1}|=1$,则点$Z_1$在单位圆上,故A错误;对于B,$\overrightarrow{Z_1Z_2}=\overrightarrow{OZ_2}-\overrightarrow{OZ_1}=(3,4)-(4,3)=(-1,1)$,故B错误;对于C,由$|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$,得$|\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}|=|\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2}|$,可知以$\overrightarrow{OZ_1}$,$\overrightarrow{OZ_2}$为邻边的平行四边形为矩形,所以$\overrightarrow{OZ_1}\perp\overrightarrow{OZ_2}$,故C正确;对于D,由$(\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2})\perp(\overrightarrow{OZ_1}-\overrightarrow{OZ_2})$,知以$\overrightarrow{OZ_1}$,$\overrightarrow{OZ_2}$为邻边的平行四边形为菱形,所以$|\overrightarrow{OZ_1}|=|\overrightarrow{OZ_2}|$,即$|z_1|=|z_2|$,故D正确.故选CD.

三、填空题

13.1-5i

提示:$\frac{11-3i}{1+2i}=\frac{(11-3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{5-25i}{5}=1-5i$.

14.$\sqrt{5}$

提示:设$z=a+2i(a\in\mathbf{R})$,则$z^2+3=(a+2i)^2+3=(a^2-1)+4ai$.因为$z^2+3$为纯虚数,所以$a^2-1=0$且$a\neq0$,解得$a=\pm1$.所以$z=\pm1+2i$.所以$|z|=\sqrt{(\pm1)^2+4}=\sqrt{5}$.

15.1-2i

提示:由图可知,$z_1=2+i$,$z_2=-1+2i$,因为$zz_2=z_1^2$,所以$z=\frac{z_1^2}{z_2}=\frac{(2+i)^2}{-1+2i}=\frac{3+4i}{-1+2i}=\frac{(3+4i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}=1-2i$.

16.$[-8,8)$

提示:根据原方程有虚根,可得$\Delta=p^2-16<0$,解得$-4<p<4$.由根与系数的关系,得$\alpha+\beta=-p$,且$\alpha\beta=4$,所以$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=p^2-8\in[-8,8)$.

四、解答题

17.**解**:(1)因为点Z在实轴上,

所以$m^2-4m+3=0$,解得$m=3$,或$m=1$.

(2)因为点Z在虚轴上,

所以$m^2-2m-3=0$,解得$m=3$,或$m=-1$.

(3)因为点Z在第一象限,

所以$\begin{cases}m^2-2m-3>0,\\m^2-4m+3>0,\end{cases}$解得$m<-1$或$m>3$.

故实数m的取值范围为$(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.

18.**解**:(1)由$(1-i)z=1+i$,得$z=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{2}=i$,

所以$\bar{z}=-i$.

(2)由$i^{4n+1}+i^{4n+2}+i^{4n+3}+i^{4n+4}=0$,得$z+z^2+z^3+z^4+z^5+\cdots+z^{2022}=i^{2021}+i^{2022}=i^{4\times505+1}+i^{4\times505+2}=i+i^2=-1+i$.

19.**解**:(1)选①:因为$z^2=-16$,所以$z=\pm4i$.

若$z=4i$,则$\begin{cases}m^2-2m-3=0,\\m-3=4,\end{cases}$此方程组无解;

若$z=-4i$,则$\begin{cases}m^2-2m-3=0,\\m-3=-4,\end{cases}$解得$m=-1$.

综上,$m=-1$.

选②:因为z为纯虚数,

所以$\begin{cases}m^2-2m-3=0,\\m-3\neq0,\end{cases}$

解得$m=-1$.

选③:因为$2z=(1+i)^6=[(1+i)^2]^3=(2i)^3=-8i$,

所以$z=-4i$.

所以$\begin{cases}m^2-2m-3=0,\\m-3=-4,\end{cases}$解得$m=-1$.

(2)由(1)知,$z=-4i$,

故$\frac{z}{3-ai}=\frac{-4i}{3-ai}=\frac{-4i(3+ai)}{(3-ai)(3+ai)}=\frac{4a-12i}{9+a^2}$.

由复数$\frac{z}{3-ai}$对应的点在直线$x+y=0$上,

得$\frac{4a}{9+a^2}-\frac{12}{9+a^2}=0$,解得$a=3$.

20.**解**:(1)设$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,则$\bar{z}=a-bi$,

$2z+\bar{z}=2(a+bi)+(a-bi)=3a+bi$.

又$2z+\bar{z}=3+2i$,所以$\begin{cases}3a=3,\\b=2,\end{cases}$解得$a=1$,$b=2$.

故$z=1+2i$.

(2)因为$z=1+2i$是关于x的方程$x^2+px+q=0(p,q\in\mathbf{R})$的一个根,

所以$(1+2i)^2+p(1+2i)+q=0$,

整理得$p+q-3+(4+2p)i=0$,

所以$\begin{cases}p+q-3=0,\\4+2p=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}p=-2,\\q=5.\end{cases}$

所以$\frac{z}{p+(q+4)i}=\frac{1+2i}{-2+9i}=\frac{(1+2i)(-2-9i)}{(-2+9i)(-2-9i)}=\frac{16}{85}-\frac{13}{85}i$.

所以复数$\frac{z}{p+(q+4)i}$的模为

$\sqrt{\left(\frac{16}{85}\right)^2+\left(-\frac{13}{85}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{17}$.

21.**解**:(1)设$z_1=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,

因为$\bar{z}_2-z_1=2i$,所以$\bar{z}_2=z_1+2i=a+(b+2)i$,

所以$z_2=a-(b+2)i$.

因为$z_1z_2+2i\cdot z_1-2i\cdot z_2+1=0$,所以$(a+bi)[a-(b+2)i]+2i(a+bi)-2i[a-(b+2)i]+1=0$,

化简并整理,得$a^2+b^2-2b-3-2ai=0$,

所以$\begin{cases}a^2+b^2-2b-3=0,\\2a=0,\end{cases}$解得$a=0$,$b=3$或$b=-1$.

故$z_1=3i$,$z_2=-5i$,或$z_1=-i$,$z_2=-i$.

(2)设$z_1=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,则$a^2+b^2=3$.

由$z_1z_2+2i\cdot z_1-2i\cdot z_2+1=0$,

得$z_2=\frac{-2iz_1-1}{z_1-2i}$,

所以$z_2-4i=-\frac{3i(2z_1-3i)}{z_1-2i}$.

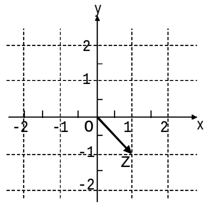
所以$|z_2-4i|=\left|-\frac{3i(2z_1-3i)}{z_1-2i}\right|=|3i|\cdot\left|\frac{2z_1-3i}{z_1-2i}\right|$

$=3\cdot\frac{\sqrt{4a^2+4b^2-12b+9}}{\sqrt{a^2+b^2-4b+4}}$

$=3\cdot\frac{\sqrt{21-12b}}{\sqrt{7-4b}}=3\sqrt{3}$,

所以存在常数$k=3\sqrt{3}$满足题意.

22.**解**:(1)记复数$z=1-i$对应的向量为$\overrightarrow{OZ}$,如下图所示.



(第 22 题图)

因为$Z(1,-1)$,所以$\tan\theta=-1$,又$\theta\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$,

所以$\theta=\frac{7\pi}{4}$.

又$r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$,

所以$z=1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$.

(2)因为$\cos(\pi+\theta_1+\theta_2)=\frac{3}{5}$,$\theta_1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\theta_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

所以$\cos(\theta_1+\theta_2)=-\frac{3}{5}$,$\sin(\theta_1+\theta_2)=\frac{4}{5}$.

所以$z_1z_2=(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2+i(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2)$

$=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$.

第 7 期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C

提示:由棱锥的结构特征,可知⑤⑥为棱锥,共2个.故选C.

2.A

提示:因为四棱台有8个顶点,有12条棱,所以$x=8$,$y=12$,所以$\frac{x}{y}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.故选A.

3.C

提示:三棱柱有9条棱,四棱台有12条棱,四棱锥有8条棱,五棱锥有10条棱,所以棱数最少的是四棱锥.故选C.

4.D

提示:根据斜二测画法的规则,平行于z轴的线段在直观图中的方向、长度与原来保持一致,可知直观图中两个顶点之间的距离为2+3=5(cm).故选D.

5.A

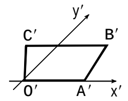
提示:图中所示几何体是由一个圆柱、两个圆台和一个圆锥组成的组合体,它可由A选项中的平面图形旋转而成.故选A.

6.C

提示:将直观图还原可知,$OA\perp OB$,且$OA=6$,$OB=4$,所以$AB=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$.故选C.

7.C

提示:根据斜二测画法的规则,画出四边形$OABC$的直观图四边形$O'A'B'C'$如图所示,其中$O'A'=2$,$A'B'=\sqrt{2}$,$B'C'=3$,$A'B'/\!/y'$轴,易知,四边形$O'A'B'C'$为直角梯形,所以该直观图的面积$S=\frac{1}{2}\times(3+2)\times\sqrt{2}\times\sin45°=\frac{5}{2}$.故选C.



(第 7 题图)

8.C

提示:由正三棱锥的定义,可知“三棱锥$P-ABC$是正三棱锥”等价于“有一个面是正三角形,其他面是全等的等腰三角形”.三棱锥$P-ABC$是正四面体等价于四个面是全等的正三角形,所以A是充分不必要条件;一个正三棱锥可能是正四面体,也可能不是正四面体,所以B是既不充分也不必要条件;C是必要不充分条件;正三棱锥$P-ABC$中的正三角形不一定是$\triangle ABC$,所以D是充分不必要条件.故选C.

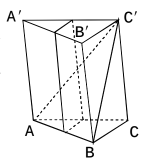
二、多项选择题

9.ABD

提示:A,B,D显然正确;对于C,当直角梯形绕它的非直角所在的腰所在直线旋转一周时形成的几何体不是圆台,故C错误.故选ABD.

10.BCD

提示:如图所示,用一个平行于侧面的平面去截三棱柱,得到一个三棱柱和一个四棱柱,故B,C正确;用过A,B,C'的平面去截三棱柱,得到一个三棱锥,故D正确;因为四棱台的上、下底面平行,所以要得到四棱台,则截面要与三棱柱的上下底面相交,而四棱台的侧棱延长后交于一点,棱柱的侧棱是相互平行的,所以用一个平面去截一个三棱柱,不可能得到一个四棱台,故A错误.故选BCD.



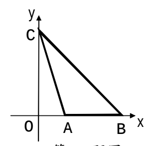
(第 10 题图)

11.AC

提示:若BC在x轴上,则直观图中$B'C'=BC=2\sqrt{2}$,故A正确;若BC在y轴上,则$B'C'=\frac{1}{2}BC=\sqrt{2}$,所以$B'C'$的长度范围是$[\sqrt{2},2\sqrt{2}]$;若以$AB$,$AC$为轴,则$B'C'=\sqrt{2^2+1^2-2\times2\times1\times\cos45°}=\sqrt{5-2\sqrt{2}}$,故C正确.故选AC.

12.BD

提示:在$\triangle A'B'C'$中,过点C'作$C'D'\perp A'B'$于D',由$A'B'=2$,$A'C'=B'C'=\sqrt{5}$,可得$A'D'=1$,$C'D'=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$,又$\angle C'O'D'=45°$,所以$O'D'=2$,$O'C'=2\sqrt{2}$,$O'A'=1$.将直观图$\triangle A'B'C'$还原为平面图形$\triangle ABC$,如图所示,可知$OA=O'A'=1$,$AB=A'B'=2$,$OC=2O'C'=4\sqrt{2}$,$AC=\sqrt{1^2+(4\sqrt{2})^2}=\sqrt{33}$,$AC\neq BC$,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\times4\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.故选BD.



(第 12 题图)

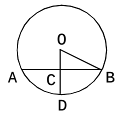
三、填空题

13.1或2

提示:若已知边与x轴平行,则直观图中对应的边长度为2cm;若已知边与y轴平行,则直观图中对应的边长度为1cm.

14.3

提示:作出对应的截面如图所示,可知$BC=\sqrt{5}$,$OC=2$,设球的半径为R,在$Rt\triangle OCB$中,$R^2=OB^2=OC^2+BC^2=4+(\sqrt{5})^2=9$,所以$R=3$.



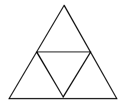
(第 14 题图)

15.$D\subseteq C\subseteq A\subseteq B$

提示:在题设四种几何体中,包含元素最多的是直平行六面体,底面为长方形的直平行六面体是长方体,底面为正方形的长方体是正四棱柱,侧面都是正方形的正四棱柱是正方体,即正六面体,所以$D\subseteq C\subseteq A\subseteq B$.

16.$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

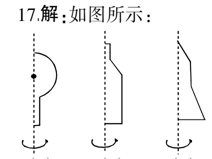
提示:将正四面体的四个面展开,可形成一个边长为4的正三角形,如图所示,易知包装纸的最小半径r即该正三角形的外接圆半径,所以由正弦定理,得$r=\frac{4}{2\sin60°}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.



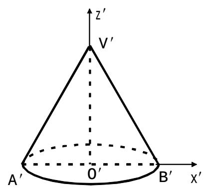
(第 16 题图)

四、解答题

17.**解**:如图所示:



(第 17 题图)



(第 18 题图)

18.**解**:(1)画轴.如图,画x'轴、z'轴,使$\angle x'O'z'=90°$.

(2)画下底面.以O'为中点,在x'轴上取线段AB,使$O'A'=O'B'=2$cm.利用椭圆模板画椭圆,使其经过A',B'两点.这个椭圆就是圆锥的下底面.

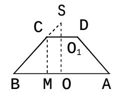
(3)画上顶点.在$O'z'$上截取点V',使得$O'V'=3$cm.

(4)成图.连接$V'A'$,$V'B'$,整理即可得到圆锥的直观图.

19.**解**:(1)在AC上取点D,使$DC=A_1C_1$,在BC上取点E,使$EC=B_1C_1$,连接A_1D,B_1E,DE,得到三棱柱$A_1B_1C_1-DEC$与多面体A_1B_1BEDA.(答案不唯一)

(2)连接AB_1,AC_1,BC_1,可得到三棱锥$A-A_1B_1C_1$,三棱锥$A-BCC_1$,三棱锥$A-BB_1C_1$.(答案不唯一)

20.**解**:(1)过圆台的轴作截面,如图所示,截面为等腰梯形$ABCD$,设O,O_1分别为AB,CD的中点,连接O_1O,作$CM\perp AB$于M,由已知可得$BC=12$cm,在$Rt\triangle CMB$中,$\angle B=45°$,所以$CM=6\sqrt{2}$ cm,所以圆台的高为$6\sqrt{2}$ cm.



(第 20 题图)

(2)延长BC,OO_1交于点S,设截得此圆台的圆锥的母线长为$l$cm,由$\triangle SCO_1\backsim\triangle SBO$,可得$\frac{CO_1}{BO}=\frac{SC}{SB}=\frac{1}{4}$,即$\frac{l-12}{l}=\frac{1}{4}$,解得$l=16$.所以截得此圆台的圆锥的母线长为16cm.

21.**解**:(1)由题设,得轴截面SAB的面积为$\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times SO=4\sqrt{3}$,所以$SO=2$.

所以圆锥SO的母线长$l=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4$.

(2)在轴截面SAB中,$SO=2$,$SA=4$,可得$\angle ASO=\frac{\pi}{3}$.设$\angle BSC=\theta$,当点C与点B重合时,$\theta=0$;当点C与点A重合时,$\theta=\frac{2\pi}{3}$,则$0\leqslant\theta\leqslant\frac{2\pi}{3}$,所以$\triangle SBC$的面积为$\frac{1}{2}\cdot l\cdot l\cdot\sin\theta=8\sin\theta$,所以当$\theta=\frac{\pi}{2}$时,截面$SBC$的面积取得最大值,最大值为8.

22.**解**:(1)根据斜二测画法的规则,可得矩形$ABCD$(如图1)的直观图为平行四边形$A'B'C'D'$(如图2).

设$OB=a$,$OD=b$,则$O'B'=a$,$O'D'=\frac{1}{2}b$,$\angle B'O'D'=45°$,设原图形的面积为S,直观图的面积为S',则$S=ab$,$S'=a\cdot\frac{1}{2}b\cdot\sin45°=\frac{\sqrt{2}}{4}ab$,所以$S'=\frac{\sqrt{2}}{4}S$.

(2)根据斜二测画法的规则,可得平行四边形$ABCD$(如图3)的直观图为平行四边形$A'B'C'D'$(如图4).

设$OB=a$,$OE=b$,则$O'B'=a$,$O'E'=\frac{1}{2}b$,$O'B'$边上的高为$\frac{1}{2}b\sin45°=\frac{\sqrt{2}}{4}b$,设原图形的面积为$S$,直观图的面积为$S'$,则$S=ab$,$S'=a\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}b=\frac{\sqrt{2}}{4}ab$,所以$S'=\frac{\sqrt{2}}{4}S$.

(3)根据斜二测画法的规则,可得正三角形ABC(如图5)的直观图为$\triangle A'B'C'$(如图6).

设$BC=a$,$OA=b$,则$B'C'=a$,$O'A'=\frac{1}{2}b$,$B'C'$边上的高为$\frac{1}{2}b\sin45°=\frac{\sqrt{2}}{4}b$,设原图形的面积为$S$,直观图的面积为$S'$,则$S=\frac{1}{2}ab$,$S'=\frac{1}{2}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}b=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{2}ab$,所以$S'=\frac{\sqrt{2}}{4}S$.

(4)根据斜二测画法的规则,可得正五边形$ABCDE$(如图7)的直观图为五边形$A'B'C'D'E'$(如图8).

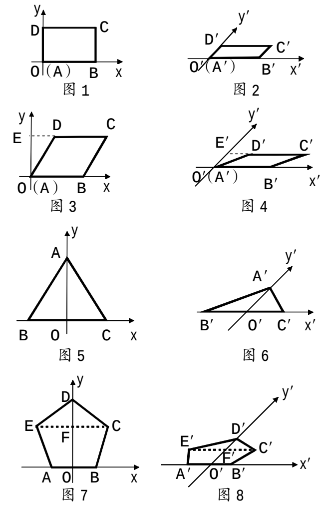
连接CE交OD于点F,连接$C'E'$交$O'D'$于点F',设$AB=a$,$EC=b$,$DF=h_1$,$OF=h_2$,

则$A'B'=a$,$E'C'=b$,$D'F'=\frac{1}{2}h_1$,$O'F'=\frac{1}{2}h_2$,$\triangle C'D'E'$的边$E'C'$上的高为$\frac{1}{2}h_1\sin45°=\frac{\sqrt{2}}{4}h_1$,梯形$A'B'C'E'$的高为$\frac{1}{2}h_2\sin45°=\frac{\sqrt{2}}{4}h_2$,设原图形的面积为$S$,直观图的面积为$S'$,则$S=S_{\triangle CDE}+S_{梯形ABCE}=\frac{1}{2}bh_1+\frac{1}{2}(a+b)\cdot h_2$,

$S'=S_{\triangle C'D'E'}+S_{梯形A'B'C'E'}=\frac{1}{2}b\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}h_1+\frac{1}{2}(a+b)\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}h_2$,

所以$S'=\frac{\sqrt{2}}{4}S$.

综上,直观图的面积是原图形面积的$\frac{\sqrt{2}}{4}$倍.



(第 22 题图)