

高一必修(第二册)答案页第 2 期

数学 北师大



扫码免费下载 习题讲解 ppt

第 5 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B

提示:可以作为平面向量的一组基的两个向量必不共线,由此可排除

A, C, D, 故选 B.

2.D

提示:MN=(2,3), 但点 M 不确定, 则点 N 的位置不确定, 故选 D.

3.D

提示:由已知, 得 a-b=(4,-3), 所以 |a-b|=sqrt(4^2+(-3)^2)=5. 故选 D.

4.D

提示:因为向量 m=(2k-1, k) 与向量 n=(3, 1) 共线, 所以 (2k-1) \* 1 - 3k = 0, 解得 k = -1. 所以 m = (-3, -1), 则 m \* n = -3 \* 3 + (-1) \* 1 = -10. 故选 D.

5.C

提示:因为 a=(3, 4), b=(1, 0), 所以 c=a+b=(3+t, 4+t).

4). 因为 (a, c) = (b, c), 所以 (a \* c) / (|a| \* |c|) = (b \* c) / (|b| \* |c|), 即 (25+3t) / 5 = (3+t) / 1, 解得 t=5. 故选 C.

6.C

提示:因为 C 为直角, BC=4, 所以 BC \* BA = |BC|^2. |BA| \* |cos B| = |BC|^2 / |BA| = 4 \* 4 = 16. 故选 C.

7.D

提示:以 |a|, |b| 为一组基, 可得 c=a+b, d=2a-2b, e=-3a, 所以 c+d-e=6a-b. 故选 D.

8.C

提示:由已知, 得 AE = AB + BE = AB + mu \* BC = AB + (1-lambda) \* BC, AF = AD + DF = AD + lambda \* DC = BC + lambda \* AB, AB 垂直于 BC, AE 垂直于 AF, 所以 AE \* AF = (AB + (1-lambda) \* BC) \* (BC + lambda \* AB) = (1+3\*lambda) \* |BC|^2 = 0, 所以 1+3\*lambda = 0, 解得 lambda = -1/3. 所以 AE = AB + 4/3 \* BC, AF = BC - 1/3 \* AB, EF = AF - AE = -1/3 \* BC - 4/3 \* AB. 所以 |EF|^2 = (-1/3 \* BC - 4/3 \* AB)^2 = 1/9 \* |BC|^2 + 16/9 \* |AB|^2 = 1/9 \* |AD|^2 + 16/9 \* |AB|^2. 所以 EF/AD = sqrt(65)/3. 故选 C.

二、多项选择题

9.BC

提示:AD 与 BC 共线, AC 与 BD 不共线, CA 与 DC 不共线, OD 与 OB 共线, 故选 BC.

10.ACD

提示:因为 OC = (-2, 1), BA = (2, -1), 所以 OC = -BA, 又直线 OC, BA 不重合, 所以直线 OC 与 BA 平行, 故 A 正确; AB + BC = AC 不等于 CA, 故 B 错误; OA + OC = (0, 2) = OB, 故 C 正确; 因为 AC = (-4, 0), OB = 2 \* OA = (0, 2) - 2 \* (2, 1) = (-4, 0) = AC, 故 D 正确. 故选 ACD.

11.ABD

提示:若点 A, B, C 能构成三角形, 则三点不能共线. 因为 AB = OB - OA = (1, 2), AC = OC - OA = (m, m+1), 所以 1 \* (m+1) - 2 \* m 不等于 0, 即 m 不等于 1. 故选 ABD.

12.AD

提示:由已知条件, 可得 |e1| = |e2| = 1, 且 lambda 在 R 时, (e1 + lambda \* e2)^2 的最小值为 3/4, 即 lambda^2 + 2 \* lambda \* e1 + e2 的最小值为 3/4, 所以 (4 - (2 \* e1 \* e2)^2) / 4 = 3/4, 得 e1 \* e2 等于 +/- 1/2. 设 e1 与 e2 的夹角为 theta, 则 cos theta = (e1 \* e2) / (|e1| \* |e2|) = +/- 1/2, 因为 theta 在 [0, pi], 所以 theta = pi/3 或 2pi/3, 故 A 正确, C 错误. 因为 |e1 + e2|^2 = |e1|^2 + 2 \* e1 \* e2 + |e2|^2 = 2 +/- 1, 即 |e1 + e2|^2 = 1 或 3, 所以 |e1 + e2| = 1 或 sqrt(3), 故 B 错误, D 正确. 故选 AD.

三、填空题

13.-6

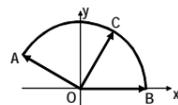
提示:由向量 a 在向量 b 方向上的投影数量为 -2, 得 |a| \* cos <a, b> = -2. 又 |b| = 3, 则 a \* b = |a| \* |b| \* cos <a, b> = -2 \* 3 = -6.

14.-3/4

提示:由 a 垂直于 b, 得 a \* b = m + 3 \* (m + 1) = 0, 解得 m = -3/4.

15.sqrt(3)/2

提示:建立如图所示平面直角坐标系, 则 B(1, 0). 因为角 COB = 60度, OC = 1, 所以 C(1/2, sqrt(3)/2). 因为角 BOA = 150度, 所以 A(-sqrt(3)/2, 1/2). 又 OC = lambda \* OA + mu \* OB, 所以 (1/2, sqrt(3)/2) = lambda \* (-sqrt(3)/2, 1/2) + mu \* (1, 0). 得 1/2 = -sqrt(3)/2 \* lambda + mu, sqrt(3)/2 = lambda \* (-sqrt(3)/2) + mu \* 1. 得 lambda = sqrt(3)/2, mu = 1. 所以 lambda / mu = sqrt(3)/2.



(第 15 题图)

16.(1/3, 2\*sqrt(2)/3)

提示:由 a+b+c = (1, 2\*sqrt(2)), 得 |a+b+c| = sqrt(1^2 + (2\*sqrt(2))^2) = 3. 又 |a| = |b| = |c| = 1, 所以 |a+b+c| = |a| + |b| + |c|. 所以 a, b, c 同向共线. 故 c 为与 (1, 2\*sqrt(2)) 同向的单位向量, 故 c = (1/3, 2\*sqrt(2)/3).

四、解答题

17.(1) 解:由已知, 因为 |OA| = 2, 所以 OA = (2, 0). 因为角 OAB = 2pi/3, |AB| = 1, 所以 AB = (cos pi/3, sin pi/3) = (1/2, sqrt(3)/2). 故 OB = OA + AB = (2, 0) + (1/2, sqrt(3)/2) = (5/2, sqrt(3)/2). 又 O(0, 0), 故点 B 的坐标为 (5/2, sqrt(3)/2).

(2) 证明:由题意知, OC = OB + BC = (5/2, sqrt(3)/2) + (-1, sqrt(3)) = (3/2, 3\*sqrt(3)/2). 又 AB = (1/2, sqrt(3)/2), 故 OC = 3 \* AB. 又 OC, AB 不共线, 故 OC // AB.

18.(1) 解:MN = MB + BN = 1/3 \* AB + 1/4 \* BD = 1/3 \* AB + 1/4 \* (AD - AB) = 1/12 \* AB + 1/4 \* AD = 1/12 \* a + 1/4 \* b. (2) 证明:因为 MC = MB + BC = 1/3 \* AB + AD = 1/3 \* a + b, MN = 1/12 \* a + 1/4 \* b = 1/4 \* (1/3 \* a + b), 所以 MC = 4 \* MN, 所以 MN // MC. 又 MN 与 MC 有公共点 M, 所以 M, N, C 三点共线.

19.(1) 证明:根据题意, a, b 为非零向量, 若 a, b 共线, 则存在 k 在 R, 使得 b = ka. 所以 e1 + 3 \* e2 = k \* (e1 - 2 \* e2), 即 (1 - k) \* e1 + (3 + 2k) \* e2 = 0. 因为 e1, e2 不共线, 所以 1 - k = 0, 3 + 2k = 0, 该方程组无解, 所以 a, b 不共线. 所以 {a, b} 可以作为一组基. (2) 解:设 x, y 在 R, c = xa + yb = x \* (e1 - 2 \* e2) + y \* (e1 + 3 \* e2) = (x + y) \* e1 + (3y - 2x) \* e2.

又 c = 3 \* e1 - e2, 由平面向量基本定理, 得 {x + y = 3, 3y - 2x = -1, 解得 x = 2, y = 1. 所以 c = 2a + b. (3) 解:4 \* e1 - 3 \* e2 = lambda \* a + mu \* b = lambda \* (e1 - 2 \* e2) + mu \* (e1 + 3 \* e2) = (lambda + mu) \* e1 - (2 \* lambda - 3 \* mu) \* e2. 因为 e1, e2 不共线, 由平面向量基本定理, 得 {lambda + mu = 4, 2 \* lambda - 3 \* mu = 3, 解得 lambda = 3, mu = 1. 20. 解:(1) 设 c = (x, y), 由题意得 3a + b = (0, -2), 因为 c // (3a + b), 所以 -2 \* x = 0 \* y, 解得 x = 0. 因为 |c| = 2, 所以 sqrt(x^2 + y^2) = |y| = 2, 解得 y = +/- 2. 所以向量 c 的坐标为 (0, 2) 或 (0, -2). (2) a + lambda \* b = (1 - 3 \* lambda, -2 + 4 \* lambda), a \* (a + lambda \* b) = 1 \* (1 - 3 \* lambda) + (-2) \* (-2 + 4 \* lambda) = 5 - 11 \* lambda. 若选 ①, 则 a \* (a + lambda \* b) = 5 - 11 \* lambda > 0, 解得 lambda < 5/11, 又 a 与 a + lambda \* b 不能共线, 所以 1 \* (-2 + 4 \* lambda) 不等于 (1 - 3 \* lambda) \* (-2), 解得 lambda 不等于 0, 所以实数 lambda 的取值范围为 (-infinity, 0) union (0, 5/11]. 若选 ②, 则 a \* (a + lambda \* b) = 5 - 11 \* lambda < 0, 解得 lambda > 5/11, 所以实数 lambda 的取值范围是 (5/11, +infinity).

21. 解:(1) 由 |ka + b| = sqrt(3) \* |a - kb|, 两边平方, 得 k^2 \* (|a|^2 + 2ka \* b + |b|^2) = 3 \* (|a|^2 - 2ka \* b + k^2 \* |b|^2), 又 |a| = |b| = 1, 整理得 k^2 - 4ka \* b + 1 = 0. 若 a // b, 当 a 与 b 同方向时, a \* b = 1 \* 1 \* cos 0 = 1, 则 k^2 - 4k + 1 = 0, 解得 k = 2 +/- sqrt(3) > 0, 符合题意; 当 a 与 b 反方向时, a \* b = 1 \* 1 \* cos 180 = -1, 则 k^2 + 4k + 1 = 0, 又 k > 0, 可知此方程无正解. 综上, 实数 k 的值为 2 +/- sqrt(3).

(2) 设向量 a 与 b 的夹角为 theta. 由 (1) 可得 k^2 - 4ka \* b + 1 = 0, 又 |a| = |b| = 1, k > 0, 则 cos theta = (a \* b) / (|a| \* |b|) = (k^2 + 1 - k) / (4k) = 1/4 + k/4k >= 2 \* sqrt(k/4 \* 1/4k) = 1/2, 当且仅当 k/4 = 1/4k, 即 k = 1 时, 等号成立. 结合 theta 在 [0, pi], 得 theta 在 [0, pi/3], 所以向量 a 与 b 夹角的最大值为 pi/3.

22. 解:(1) 设 AB = a, AC = b, 则 |a| = |b| = 1, a \* b = 1/2, AP = 3/4 \* a + 1/4 \* b, AP \* AP = (3/4 \* a + 1/4 \* b) \* (3/4 \* a + 1/4 \* b) = (9/16 \* a^2 + 3/8 \* a \* b + 1/16 \* b^2) = 1/16 \* (15a^2 + 14a \* b + 3b^2) = 25/16. (2) 由题意可得 AB + AC = AQ1 + AQ2 + ... + AQ2021 = AQ2021 + AQ1 = a + b, 则 |AB + AC| = |AQ1 + AQ2 + ... + AQ2021 + AC| = |2023/2 \* (a + b)| = 2023/2 \* sqrt(a^2 + 2a \* b + b^2) = 2023 \* sqrt(3) / 2. (3) 设 PC = lambda \* BC, 则 0 <= lambda <= 1, 且 |PC| = lambda \* |BC| = lambda. 所以 PA \* PC = (PC + CA) \* PC = PC^2 + CA \* PC = lambda^2 + lambda \* cos 120 = lambda^2 - 1/2 \* lambda = (lambda - 1/4)^2 - 1/16. 当 lambda = 1/4 时, PA \* PC 取最小值, 此时 AP = (AC + CP) = AC^2 + 2AC \* CP + CP^2 = 1 + 2 \* 1/4 \* cos 120 + (1/4)^2 = 13/16. 所以 |AP| = sqrt(13) / 4. 故 AP 的长为 sqrt(13) / 4.

取 alpha = 225度, beta = 225度, 则 cos(alpha + beta) < cos alpha + cos beta 不成立, 故 D 错误. 故选 BC.

11.AC

提示:由已知, 得 tan alpha + tan beta = sqrt(3) \* (1 - tan alpha \* tan beta), 所以 tan(alpha + beta) = (tan alpha + tan beta) / (1 - tan alpha \* tan beta) = sqrt(3). 故 alpha + beta = pi/3 + k \* pi, k 在 Z. 结合选项, 可知选 AC.

12.AB

提示:由 sin(alpha + beta) = sin alpha \* sin beta, 得 sin alpha \* cos beta + cos alpha \* sin beta = sin alpha \* sin beta, 两边同除以 cos alpha \* cos beta, 得 tan alpha \* tan beta = tan alpha + tan beta >= 2 \* sqrt(tan alpha \* tan beta), 即 tan alpha \* tan beta >= 4, 且当且仅当 tan alpha = tan beta 时, 等号成立, 故 A 正确; tan alpha + tan beta = tan alpha \* tan beta >= 4, 故 B 正确; cos(alpha + beta) + sin(alpha + beta) = (cos alpha \* cos beta - sin alpha \* sin beta) / sin alpha \* sin beta + (sin alpha \* cos beta + cos alpha \* sin beta) / sin alpha \* sin beta = 1 / tan alpha \* tan beta + tan alpha + tan beta = 1 + tan alpha \* tan beta, 显然此式不恒等于 1, 故 C 错误; tan(alpha + beta) = (tan alpha + tan beta) / (1 - tan alpha \* tan beta) = 1 / (tan alpha \* tan beta - 1), 由 tan alpha \* tan beta >= 4, 得 -4/3 <= tan(alpha + beta) < -1, 故 D 错误. 故选 AB.

三、填空题

13.sqrt(2)/2

提示:原式 = cos 30度 \* sin 15度 + sin 30度 \* cos 15度 = sin(15度 + 30度) = sin 45度 = sqrt(2)/2.

14.3/4

提示:因为 tan alpha + tan beta = sin alpha / cos alpha + sin beta / cos beta = (sin alpha \* cos beta + cos alpha \* sin beta) / cos alpha \* cos beta = sin(alpha + beta) / (cos alpha \* cos beta) = 3, 且 cos alpha \* cos beta = 1/4, 所以 sin(alpha + beta) = 3 \* cos alpha \* cos beta = 3/4.

15.21/10

提示:因为 tan alpha = 3, 所以 2sin^2 alpha + 4sin alpha \* cos alpha - 9cos^2 alpha = 2sin^2 alpha + 4sin alpha \* cos alpha - 9cos^2 alpha = (2tan^2 alpha + 4tan alpha - 9) / (tan^2 alpha + 1) = (2 \* 3^2 + 4 \* 3 - 9) / (3^2 + 1) = 12/10 = 6/5.

16.120度, -sqrt(3) + sqrt(11)/4

提示:因为 AB 边所在直线经过点 (-2, 2 \* sqrt(3)), 所以 tan A = (2 \* sqrt(3) - 2) / (-2) = -sqrt(3), 得 A = 120度.

由 sin(B - C) = cos B \* sin C, 得 sin B \* cos C - cos B \* sin C = cos B \* sin C, 所以 sin B \* cos C = 2 \* cos B \* sin C, 即 tan B = 2 \* tan C. (\*) 又 tan A = -tan(B + C) = -tan B + tan C / (1 - tan B \* tan C) = -sqrt(3), 将 (\*) 式代入, 解得 tan C = (-sqrt(3) + sqrt(11)) / 4, 或 tan C = (-sqrt(3) - sqrt(11)) / 4 (舍去).

四、解答题

17. 解:(1) 因为 alpha 在 (0, pi/2), 且 sin alpha = 3/5, 所以 cos alpha = sqrt(1 - sin^2 alpha) = 4/5. 所以 sin(alpha - pi/4) = sin alpha \* cos pi/4 - cos alpha \* sin pi/4 = (3/5 \* sqrt(2)/2) - (4/5 \* sqrt(2)/2) = -sqrt(2)/10. (2) 由 (1) 可得 tan alpha = sin alpha / cos alpha = 3/4, 所以 tan(pi/4 + alpha) = (tan pi/4 + tan alpha) / (1 - tan pi/4 \* tan alpha) = (1 + 3/4) / (1 - 1 \* 3/4) = 7/1. 所以 sin(pi/4 + alpha) = 7/10, cos(pi/4 + alpha) = 3/10. 18. 解:(1) 由 tan alpha = sin alpha / cos alpha = 2, alpha 在 (0, pi/2), 与 sin^2 alpha + cos^2 alpha = 1 联立, 解得 sin alpha = 2/sqrt(5), cos alpha = 1/sqrt(5). 所以 sin alpha \* cos alpha = (2/sqrt(5)) \* (1/sqrt(5)) = 2/5.

取 alpha = 45度, beta = 45度, 则 sin(alpha + beta) < sin alpha + sin beta 成立, 故 C 正确.

取 alpha = 225度, beta = 225度, 则 cos(alpha + beta) < cos alpha + cos beta 不成立, 故 D 错误. 故选 BC.

提示:由已知, 得 tan alpha + tan beta = sqrt(3) \* (1 - tan alpha \* tan beta), 所以 tan(alpha + beta) = (tan alpha + tan beta) / (1 - tan alpha \* tan beta) = sqrt(3). 故 alpha + beta = pi/3 + k \* pi, k 在 Z. 结合选项, 可知选 AC.

提示:由 sin(alpha + beta) = sin alpha \* sin beta, 得 sin alpha \* cos beta + cos alpha \* sin beta = sin alpha \* sin beta, 两边同除以 cos alpha \* cos beta, 得 tan alpha \* tan beta = tan alpha + tan beta >= 2 \* sqrt(tan alpha \* tan beta), 即 tan alpha \* tan beta >= 4, 且当且仅当 tan alpha = tan beta 时, 等号成立, 故 A 正确; tan alpha + tan beta = tan alpha \* tan beta >= 4, 故 B 正确; cos(alpha + beta) + sin(alpha + beta) = (cos alpha \* cos beta - sin alpha \* sin beta) / sin alpha \* sin beta + (sin alpha \* cos beta + cos alpha \* sin beta) / sin alpha \* sin beta = 1 / tan alpha \* tan beta + tan alpha + tan beta = 1 + tan alpha \* tan beta, 显然此式不恒等于 1, 故 C 错误; tan(alpha + beta) = (tan alpha + tan beta) / (1 - tan alpha \* tan beta) = 1 / (tan alpha \* tan beta - 1), 由 tan alpha \* tan beta >= 4, 得 -4/3 <= tan(alpha + beta) < -1, 故 D 错误. 故选 AB.

提示:原式 = sin 78度 \* cos 18度 - cos 78度 \* sin 18度 = sin 60度 = sqrt(3)/2. 故选 A.

提示:因为 alpha 在 (0, pi/2), beta 在 (pi/2, pi), 所以 alpha - beta 在 (-pi, 0). sin 45度 = sqrt(2)/2. 由 cos alpha \* cos beta = sqrt(3)/2 - sin alpha \* sin beta, 得 sqrt(3)/2 = cos alpha \* cos beta + sin alpha \* sin beta = cos(alpha - beta). 所以 alpha - beta = -pi/6. 故选 A.

提示:由 alpha 在 (pi/4, 3pi/4), beta 在 (0, pi/4), 得 pi/4 - alpha 在 (-pi/2, 0), pi/4 + beta 在 (pi/4, pi/2). 又 sin(pi/4 - alpha) = -3/5, cos(pi/4 + beta) = 5/13. 所以 cos(pi/4 - alpha) = 4/5, sin(pi/4 + beta) = 12/13. 所以 cos(alpha + beta) = cos((pi/4 + beta) - (pi/4 - alpha)) = cos(pi/4 + beta) \* cos(pi/4 - alpha) + sin(pi/4 + beta) \* sin(pi/4 - alpha) = (5/13 \* 4/5) + (12/13 \* (-3/5)) = -16/65. 故选 A.

提示:当 -pi/2 <= x <= pi/2 时, cos x >= 0, f(x) = sqrt(3) \* sin x + cos x = 2 \* sin(x + pi/6), 令 f(x) = sqrt(3), 得 sin(x + pi/6) = sqrt(3)/2, 因为 -pi/2 <= x <= pi/2, 所以 -pi/3 <= x + pi/6 <= 2pi/3, 所以 x + pi/6 = 2pi/3 或 pi/3, 解得 x = pi/2 或 pi/6.

当 pi/2 < x <= 3pi/2 时, cos x <= 0, f(x) = sqrt(3) \* sin x - cos x = 2 \* sin(x - pi/6), 令 f(x) = sqrt(3), 得 sin(x - pi/6) = sqrt(3)/2, 因为 pi/2 < x <= 3pi/2, 所以 pi/3 < x - pi/6 <= 4pi/3, 所以 x - pi/6 = 2pi/3 或 4pi/3, 解得 x = 5pi/6 或 3pi/2.

综上, 方程 f(x) = sqrt(3) 有 3 个解. 故选 C.

提示:由 tan theta = 3 \* sin(theta - pi), 得 sin theta / cos theta = -3 \* sin(theta - pi). 当 sin(theta - pi) = 0 时, 可得 cos theta = +/- 1; 当 sin(theta - pi) 不等于 0 时, 可得 cos theta = -1/3. 故选 ABD.

提示: sin 17度 \* cos 13度 + cos 17度 \* sin 13度 = sin(17度 + 13度) = sin 30度 = 1/2, 故 A 错误; cos 75度 \* cos 15度 + sin 75度 \* sin 15度 = cos(75度 - 15度) = cos 60度 = 1/2, 故 B 正确;

取 alpha = 45度, beta = 45度, 则 sin(alpha + beta) < sin alpha + sin beta 成立, 故 C 正确;

(2) 由题意, 得 h(x) = 2 \* sin[2 \* (x - pi/6) + pi/6] + 1 = 2 \* sin(2x - pi/6) + 1. 当 x 在 [-pi/12, pi/2] 时, -pi/3 <= 2x - pi/6 <= 5pi/6, 所以 -sqrt(3)/2 <= sin(2x - pi/6) <= 1, 故 1 - sqrt(3) <= h(x) <= 3. 所以函数 h(x) 的值域为 [1 - sqrt(3), 3].

(2) 由题意可得 alpha + beta 在 (0, pi), 因为 cos(alpha + beta) = -sqrt(5)/5, 所以 sin(alpha + beta) = 2 \* sqrt(5)/5. 所以 cos beta = cos[(alpha + beta) - alpha] = cos(alpha + beta) \* cos alpha + sin(alpha + beta) \* sin alpha = (-sqrt(5)/5) \* x / sqrt(5) + (2 \* sqrt(5)/5) \* (2 / sqrt(5)) = 3/5. 19. 解:(1) 因为 alpha 为锐角, cos alpha = 1/7, 所以 sin alpha = sqrt(1 - cos^2 alpha) = 4 \* sqrt(3)/7. 所以 tan alpha = sin alpha / cos alpha = 4 \* sqrt(3). (2) 由 (1) 知 tan alpha = 4 \* sqrt(3) > sqrt(3), 且 alpha 为锐角, 可得 alpha 在 (pi/3, pi/2). 又 sin(alpha + beta) = 5 \* sqrt(3)/14 在 (1/2, sqrt(2)/2), 所以 alpha + beta 在 (3pi/4, 5pi/6), 所以 cos(alpha + beta) = -sqrt(1 - sin^2(alpha + beta)) = -11/14. 所以 cos beta = cos[(alpha + beta) - alpha] = cos(alpha + beta) \* cos alpha + sin(alpha + beta) \* sin alpha = -11/14 \* 1/7 + 5 \* sqrt(3)/14 \* 4 \* sqrt(3)/7 = 1/2. 又 beta 为锐角, 所以 beta = pi/3. 20. 解:(1) 由 sin^2 theta + cos^2 theta = 1, 得 (1 - a) / (1 + a) + (3a - 1) / (1 + a) = 1, 解得 a = 1/9, 或 a = 1. 因为 theta 在 (pi/2, pi), 所以 sin theta = 1 - a / (1 + a) > 0, 且 cos theta = (3a - 1) / (1 + a) < 0. 解得 a 在 (-1, 1/3). 综上, a = 1/9. (2) 由 (1) 得 sin theta = 4/5, cos theta = -3/5. 故 tan theta = sin theta / cos theta = -4/3. 故 tan(pi/2 + theta) + 1 / tan(pi - theta) = sin(pi/2 + theta) / cos(pi/2 + theta) - 1 / tan theta = cos theta / -sin theta - 1 / tan theta = -2 / tan theta = 3/2. 21. 解:(1) 因为 sin alpha \* cos alpha = 12/25, 所以 tan alpha + 1 / tan alpha = sin alpha / cos alpha + cos alpha / sin alpha = (sin^2 alpha + cos^2 alpha) / sin alpha \* cos alpha = 25 / (12/25) = 625/12. (2) 由已知可得 (sin alpha - cos alpha)^2 = 1 - 2 \* sin alpha \* cos alpha = 1 - 2 \* (12/25) = 49/25. 因为 alpha 是第二象限角, 所以 sin alpha > 0, cos alpha < 0, 即 sin alpha - cos alpha > 0, 所以 sin alpha - cos alpha = 7/5. 又 sin alpha + cos alpha = 1/5, 联立两式, 解得 sin alpha = 4/5, cos alpha = -3/5. 所以 2sin alpha + cos alpha = 8/5 + (-3/5) = 5/5 = 1. (4/5)^2 \* 2 \* [(3/5) - 4/5] = 25/32. 22. 解:(1) f(x) = cos(omega \* x - pi/3) + sin(omega \* x - pi/6) + cos omega \* x = cos omega \* x \* cos pi/3 + sin omega \* x \* sin pi/3 + sin omega \* x \* cos pi/6 - cos omega \* x \* sin pi/6 + cos omega \* x = sqrt(3) \* sin omega \* x + cos omega \* x = 2 \* sin(omega \* x + pi/6). 因为 f(x) 的最小正周期为 pi, 所以 T = 2 \* pi / omega = pi, 得 omega = 2. 所以 f(x) = 2 \* sin(2x + pi/6). (2) 由题意, 得 h(x) = 2 \* sin[2 \* (x - pi/6) + pi/6] + 1 = 2 \* sin(2x - pi/6) + 1. 当 x 在 [-pi/12, pi/2] 时, -pi/3 <= 2x - pi/6 <= 5pi/6, 所以 -sqrt(3)/2 <= sin(2x - pi/6) <= 1, 故 1 - sqrt(3) <= h(x) <= 3. 所以函数 h(x) 的值域为 [1 - sqrt(3), 3].

一、单项选择题

1.A
提示:在△ABC中,a=2,b=√3,C=30°,由余弦定理得c²=a²+b²-2abcosC=2²+(√3)²-2×2×√3×cos30°=1,所以c=1.故选A.

2.A
提示:因为c>b>a,所以C为最大内角.由余弦定理的推论,得cosC=(a²+b²-c²)/(2ab)=(9+16-37)/(2×3×4)=-1/2,又C∈(0°,180°),所以C=120°.故选A.

3.B
提示:由正弦定理,得a/sinA=c/sinC,所以sinC=(c·sinA)/a=(√2×√3/2)/√2=√3/2.因为a>c,所以A>C,且C∈(0,π),所以C=π/4.故选B.

4.A
提示:设河水的流速为v₁,小船的静水速度为v₂,实际航行的速度为v,则|v₁|=5m/s,|v|=12m/s,v⊥v₁,所以|v₂|=√(|v₁|²+|v|²)=13m/s.故选A.

5.C
提示:在△ABC中,sinB=sin[π-(α+β)]=sin(α+β),由正弦定理,得AB/sinB=AC/sinC,所以AB=(AC·sinβ)/sinB=(m·sinβ)/sin(α+β).故选C.

6.D
提示:因为AB=a+2b,BC=-4a-b,CD=-5a-3b,所以AD=AB+BC+CD=-8a-2b=2BC,所以AD//BC,且AD≠BC,所以四边形ABCD为梯形.故选D.

7.D
提示:因为BP=2PC,AB=2AM,AC=2AN,所以AP=AB+BP=AB+2PC=AB+2/3(AC-AB)=1/3AB+2/3AC=1/3mAM+2/3nAN.因为M,P,N三点共线,所以1/3m+2/3n=1,得m+2n=3.故选D.

8.D
提示:因为AB=3,AC=4,BC=5,满足AB²+AC²=BC²,所以A=90°,故cosB=3/5.因为AD是∠A的平分线,所以BD/DC=AB/AC=3/4,所以BD=15/7.在△ABD中,由余弦定理,得AD²=AB²+BD²-2AB·BD·cosB=3²+(15/7)²-2×3×15/7×3/5=288/49,解得AD=12√2/7(负值舍去).故选D.

二、多项选择题
9.ABC
提示:由已知,得AB=(5,-3),CD=(-5,3),AD=(3,5),AC=(8,2),BD=(-2,8).因为AB=-CD,又AB与CD不在一条直线上,所以AB//CD,故A正确;AB·AD=5×3-3×5=0,故B正确;|AC|=√68=|BD|,故C正确;8×8-2×(-2)≠0,所以AC与BD不平行,故D错误.故选ABC.

10.AD
提示:若△ABC为钝角三角形,则最大角为钝角,故最大角的余弦值小于0.结合余弦定理的推论,因为a<b,若c为最长边,由cosC<0,得a²+b²-c²=4+9-c²<0,所以c>√13,又a+b=5>c,所以√13<c<5,可得选项D正确;若b为最长边,由cosB<0,得c²+a²-b²=c²+4-9<0,所以0<c<√5,又c>b-a=1,所以1<c<√5,可得选项A正确.故选AD.

11.AD
提示:因为b=2,c=3,对于选项A,由于sinB=3×1/2=3/2,且sinB<bc,因此有两解;对于选项B,由正弦定理,得sinB=(b·sinC)/c=1/3<1/2,且b<c,因此B只能是锐角,

故只有一解;对于选项C,由S=1/2bc sinA⇒sinA=2S/bc=1⇒A=90°,故只有一解;对于选项D,由b/sinB=2R,得sinB=1/2,又b<c,所以B<C,所以B=30°,由选项A可知有两解.故选AD.

12.ACD
提示:对于A,当该物体处于平衡状态时,|F₂|=|F₁+G|=√3²+4²=5N,故A正确;对于B,当F₂与F₁方向相反,且|F₂|=5N时,物体所受合力大小为√(5-3)²+4²=2√5N,故B错误;对于C,当物体所受合力为F时,说明G与F的合力为0,所以|F₂|=4N,故C正确;对于D,当|F₂|=2N时,因为F₁与G的合力大小为|F₁+G|=5N,所以|F₁+G|-|F₂|≤|F₁+F₂+G|≤|F₁+F₂|+|G|,即3N≤|F₁+F₂+G|≤7N,故D正确.故选ACD.

三、填空题
13.120°
提示:以AB,AC为邻边作平行四边形ABDC,由|AB|=|AC|=|AB+AC|,知四边形ABDC是菱形,△ADC和△ADB都是等边三角形,所以∠BAC=120°.14.70米
提示:设点A为李华的家,点B为有害垃圾桶所在位置,点C为可回收物垃圾桶所在位置,根据题意作出示意图如右图所示,其中AB=80米,BC=30米,∠ABC=60°,在△ABC中,由余弦定理,得AC²=AB²+BC²-2AB·BCcos∠ABC=80²+30²-2×80×30×cos60°=4900,所以AC=70米.故他回到自家楼下至少还需走70米.

15.√21/3
提示:在△ABC中,由余弦定理,得BC²=AB²+AC²-2AB·AC·cosA=2²+3²-2×2×3×cosπ/3=7,所以BC=√7.设△ABC的外接圆半径为R,则BC/sinA=2R,所以R=BC/(2sinA)=√21/3.

16.2√5/5
提示:以A为坐标原点,AB,AC所在直线分别为x,y轴,建立平面直角坐标系.由题意,得B(2,0),N(1,0),C(0,3),M(0,2).设P(x,y),因为C,P,N三点共线,CP=(x,y-3),CN=(1,-3),所以-3x-(y-3)=0.①

因为M,P,B三点共线,MP=(x,y-2),MB=(2,-2),所以-2x-2(y-2)=0.②
联立①②,解得x=1/2,y=3/2,所以P(1/2,3/2).
故cos∠BPN=(PB·PN)/(|PB|·|PN|)=(3/2×1/2-3/2×3/2)/(√10/2×√10/2)=3/2×1/2+3/2×3/2=3/2.

四、解答题
17.解:(1)因为AD=DB,BE=2EC,所以DE=DE+BE=1/2AB+2/3BC=1/2AB+2/3(AC-AB)=-1/6AB+2/3AC.又DE=xAB+yAC,所以x=-1/6,y=2/3.
(2)由(1)知DE=-1/6AB+2/3AC,则|DE|=√((-1/6AB+2/3AC)²)=√(1/36AB²-2/9AB·AC+4/9AC²)=√(1/36×3²-2/9×3×2×1/2+4/9×2²)=4/3.
18.解:(1)因为A+B+C=π,所以cosC=-cos(A+B)=1/2.又0<C<π,所以C=π/3.
(2)由余弦定理的推论,得cosC=(a²+b²-c²)/(2ab)=1/2,所以a²+b²-c²=ab.又a²+b²=5,c=√3,所以ab=2.与a²+b²=5联立,解得a=1,或a=2,与b=2,或b=1.

19.解:(1)由已知条件及正弦定理,可得a/b=3sinB/sinA=3,则(a/b)²=3,故a/b=√3.
(2)因为A=2π/3,所以b=asinA=√3.
又a/b=√3,所以a=√3,b=3/2.
由余弦定理,得a²=b²+c²-2bccosA,即9/4=3/4+c²-2×√3/2×c×(-1/2),解得c=√3/2(负值舍去).
故△ABC的周长为a+b+c=3/2+√3/2+√3/2=3+2√3/2.
20.解:假设t小时后继艇在点M处将走私船截获.
(1)在△APM中,AM=20t,PM=10√2t,∠P=135°,根据正弦定理,AM/sinP=PM/sinA,得sinA=1/2,则A=30°,故缉私艇应该往东偏北30°方向进行追缉.
(2)在△APM中,根据余弦定理,得AM²=AP²+PM²-2AP·PM·cos135°,将AM=20t,AP=40,PM=10√2t代入,化简得t²-4t-8=0,解得t=2√3+2(负值舍去),此时走私船前进的路程为10√2t=20(√2+√6)n mile<35√6n mile.所以缉私艇可以在该走私船进入公海前将其截获.

21.解:以O为原点,CD所在直线为x轴,建立如图所示的平面直角坐标系.
(1)当甲到达AD的中点处时,乙到达BC的中点处,设此时甲的位置为点E,乙的位置为点F,则E(-80,30),F(80,30),s甲=OE=(-80,30),s乙=OF=(80,30),所以s甲·s乙=-80×80+30×30=-5500.
(2)20s后甲、乙的路程均为20×7=140(m),又AD=BC=π×30=3×30=90(m),|OD|=|OC|=50m,所以20s后甲、乙分别到达点A,B处,所以s甲=OA=(-50,60),s乙=OB=(50,60),所以s甲·s乙=-50×50+60×60=1100,|s甲|=|s乙|=√6100.
设s甲与s乙的夹角为θ,则cosθ=(s甲·s乙)/(|s甲|·|s乙|)=11/61.

22.解:(1)因为点P的斜坐标为(2,-2),所以OP=2e₁-2e₂.
所以|OP|²=(2e₁-2e₂)²=4e₁²-8e₁·e₂+4e₂²=4-8cos60°+4=4.所以|OP|=2,即|PO|=2.
(2)因为A(1,4),B(4,2),C(3,5),所以OA=e₁+4e₂,OB=4e₁+2e₂,OC=3e₁+5e₂,所以AB=OB-OA=3e₁-2e₂,AC=OC-OA=2e₁+e₂,可得AB·AC=(3e₁-2e₂)·(2e₁+e₂)=6e₁²-e₁·e₂-2e₂²=6-cos60°-2=7/2,|AB|=|3e₁-2e₂|=√9e₁²-12e₁·e₂+4e₂²=√9-12cos60°+4=√7,|AC|=|2e₁+e₂|=√4e₁²+4e₁·e₂+e₂²=√4+4cos60°+1=√7,所以cosA=(AB·AC)/(|AB|·|AC|)=1/2.
又A∈(0,π),所以A=π/3.

23.解:(1)由已知条件及正弦定理,可得a/b=3sinB/sinA=3,则(a/b)²=3,故a/b=√3.
(2)因为A=2π/3,所以b=asinA=√3.
又a/b=√3,所以a=√3,b=3/2.
由余弦定理,得a²=b²+c²-2bccosA,即9/4=3/4+c²-2×√3/2×c×(-1/2),解得c=√3/2(负值舍去).
故△ABC的周长为a+b+c=3/2+√3/2+√3/2=3+2√3/2.
20.解:假设t小时后继艇在点M处将走私船截获.
(1)在△APM中,AM=20t,PM=10√2t,∠P=135°,根据正弦定理,AM/sinP=PM/sinA,得sinA=1/2,则A=30°,故缉私艇应该往东偏北30°方向进行追缉.
(2)在△APM中,根据余弦定理,得AM²=AP²+PM²-2AP·PM·cos135°,将AM=20t,AP=40,PM=10√2t代入,化简得t²-4t-8=0,解得t=2√3+2(负值舍去),此时走私船前进的路程为10√2t=20(√2+√6)n mile<35√6n mile.所以缉私艇可以在该走私船进入公海前将其截获.

21.解:以O为原点,CD所在直线为x轴,建立如图所示的平面直角坐标系.
(1)当甲到达AD的中点处时,乙到达BC的中点处,设此时甲的位置为点E,乙的位置为点F,则E(-80,30),F(80,30),s甲=OE=(-80,30),s乙=OF=(80,30),所以s甲·s乙=-80×80+30×30=-5500.
(2)20s后甲、乙的路程均为20×7=140(m),又AD=BC=π×30=3×30=90(m),|OD|=|OC|=50m,所以20s后甲、乙分别到达点A,B处,所以s甲=OA=(-50,60),s乙=OB=(50,60),所以s甲·s乙=-50×50+60×60=1100,|s甲|=|s乙|=√6100.
设s甲与s乙的夹角为θ,则cosθ=(s甲·s乙)/(|s甲|·|s乙|)=11/61.

22.解:(1)因为点P的斜坐标为(2,-2),所以OP=2e₁-2e₂.
所以|OP|²=(2e₁-2e₂)²=4e₁²-8e₁·e₂+4e₂²=4-8cos60°+4=4.所以|OP|=2,即|PO|=2.
(2)因为A(1,4),B(4,2),C(3,5),所以OA=e₁+4e₂,OB=4e₁+2e₂,OC=3e₁+5e₂,所以AB=OB-OA=3e₁-2e₂,AC=OC-OA=2e₁+e₂,可得AB·AC=(3e₁-2e₂)·(2e₁+e₂)=6e₁²-e₁·e₂-2e₂²=6-cos60°-2=7/2,|AB|=|3e₁-2e₂|=√9e₁²-12e₁·e₂+4e₂²=√9-12cos60°+4=√7,|AC|=|2e₁+e₂|=√4e₁²+4e₁·e₂+e₂²=√4+4cos60°+1=√7,所以cosA=(AB·AC)/(|AB|·|AC|)=1/2.
又A∈(0,π),所以A=π/3.

23.解:(1)由已知条件及正弦定理,可得a/b=3sinB/sinA=3,则(a/b)²=3,故a/b=√3.
(2)因为A=2π/3,所以b=asinA=√3.
又a/b=√3,所以a=√3,b=3/2.
由余弦定理,得a²=b²+c²-2bccosA,即9/4=3/4+c²-2×√3/2×c×(-1/2),解得c=√3/2(负值舍去).
故△ABC的周长为a+b+c=3/2+√3/2+√3/2=3+2√3/2.
20.解:假设t小时后继艇在点M处将走私船截获.
(1)在△APM中,AM=20t,PM=10√2t,∠P=135°,根据正弦定理,AM/sinP=PM/sinA,得sinA=1/2,则A=30°,故缉私艇应该往东偏北30°方向进行追缉.
(2)在△APM中,根据余弦定理,得AM²=AP²+PM²-2AP·PM·cos135°,将AM=20t,AP=40,PM=10√2t代入,化简得t²-4t-8=0,解得t=2√3+2(负值舍去),此时走私船前进的路程为10√2t=20(√2+√6)n mile<35√6n mile.所以缉私艇可以在该走私船进入公海前将其截获.

21.解:以O为原点,CD所在直线为x轴,建立如图所示的平面直角坐标系.
(1)当甲到达AD的中点处时,乙到达BC的中点处,设此时甲的位置为点E,乙的位置为点F,则E(-80,30),F(80,30),s甲=OE=(-80,30),s乙=OF=(80,30),所以s甲·s乙=-80×80+30×30=-5500.
(2)20s后甲、乙的路程均为20×7=140(m),又AD=BC=π×30=3×30=90(m),|OD|=|OC|=50m,所以20s后甲、乙分别到达点A,B处,所以s甲=OA=(-50,60),s乙=OB=(50,60),所以s甲·s乙=-50×50+60×60=1100,|s甲|=|s乙|=√6100.
设s甲与s乙的夹角为θ,则cosθ=(s甲·s乙)/(|s甲|·|s乙|)=11/61.

22.解:(1)因为点P的斜坐标为(2,-2),所以OP=2e₁-2e₂.
所以|OP|²=(2e₁-2e₂)²=4e₁²-8e₁·e₂+4e₂²=4-8cos60°+4=4.所以|OP|=2,即|PO|=2.
(2)因为A(1,4),B(4,2),C(3,5),所以OA=e₁+4e₂,OB=4e₁+2e₂,OC=3e₁+5e₂,所以AB=OB-OA=3e₁-2e₂,AC=OC-OA=2e₁+e₂,可得AB·AC=(3e₁-2e₂)·(2e₁+e₂)=6e₁²-e₁·e₂-2e₂²=6-cos60°-2=7/2,|AB|=|3e₁-2e₂|=√9e₁²-12e₁·e₂+4e₂²=√9-12cos60°+4=√7,|AC|=|2e₁+e₂|=√4e₁²+4e₁·e₂+e₂²=√4+4cos60°+1=√7,所以cosA=(AB·AC)/(|AB|·|AC|)=1/2.
又A∈(0,π),所以A=π/3.

23.解:(1)由已知条件及正弦定理,可得a/b=3sinB/sinA=3,则(a/b)²=3,故a/b=√3.
(2)因为A=2π/3,所以b=asinA=√3.
又a/b=√3,所以a=√3,b=3/2.
由余弦定理,得a²=b²+c²-2bccosA,即9/4=3/4+c²-2×√3/2×c×(-1/2),解得c=√3/2(负值舍去).
故△ABC的周长为a+b+c=3/2+√3/2+√3/2=3+2√3/2.
20.解:假设t小时后继艇在点M处将走私船截获.
(1)在△APM中,AM=20t,PM=10√2t,∠P=135°,根据正弦定理,AM/sinP=PM/sinA,得sinA=1/2,则A=30°,故缉私艇应该往东偏北30°方向进行追缉.
(2)在△APM中,根据余弦定理,得AM²=AP²+PM²-2AP·PM·cos135°,将AM=20t,AP=40,PM=10√2t代入,化简得t²-4t-8=0,解得t=2√3+2(负值舍去),此时走私船前进的路程为10√2t=20(√2+√6)n mile<35√6n mile.所以缉私艇可以在该走私船进入公海前将其截获.

21.解:以O为原点,CD所在直线为x轴,建立如图所示的平面直角坐标系.
(1)当甲到达AD的中点处时,乙到达BC的中点处,设此时甲的位置为点E,乙的位置为点F,则E(-80,30),F(80,30),s甲=OE=(-80,30),s乙=OF=(80,30),所以s甲·s乙=-80×80+30×30=-5500.
(2)20s后甲、乙的路程均为20×7=140(m),又AD=BC=π×30=3×30=90(m),|OD|=|OC|=50m,所以20s后甲、乙分别到达点A,B处,所以s甲=OA=(-50,60),s乙=OB=(50,60),所以s甲·s乙=-50×50+60×60=1100,|s甲|=|s乙|=√6100.
设s甲与s乙的夹角为θ,则cosθ=(s甲·s乙)/(|s甲|·|s乙|)=11/61.

22.解:(1)因为点P的斜坐标为(2,-2),所以OP=2e₁-2e₂.
所以|OP|²=(2e₁-2e₂)²=4e₁²-8e₁·e₂+4e₂²=4-8cos60°+4=4.所以|OP|=2,即|PO|=2.
(2)因为A(1,4),B(4,2),C(3,5),所以OA=e₁+4e₂,OB=4e₁+2e₂,OC=3e₁+5e₂,所以AB=OB-OA=3e₁-2e₂,AC=OC-OA=2e₁+e₂,可得AB·AC=(3e₁-2e₂)·(2e₁+e₂)=6e₁²-e₁·e₂-2e₂²=6-cos60°-2=7/2,|AB|=|3e₁-2e₂|=√9e₁²-12e₁·e₂+4e₂²=√9-12cos60°+4=√7,|AC|=|2e₁+e₂|=√4e₁²+4e₁·e₂+e₂²=√4+4cos60°+1=√7,所以cosA=(AB·AC)/(|AB|·|AC|)=1/2.
又A∈(0,π),所以A=π/3.

23.解:(1)由已知条件及正弦定理,可得a/b=3sinB/sinA=3,则(a/b)²=3,故a/b=√3.
(2)因为A=2π/3,所以b=asinA=√3.
又a/b=√3,所以a=√3,b=3/2.
由余弦定理,得a²=b²+c²-2bccosA,即9/4=3/4+c²-2×√3/2×c×(-1/2),解得c=√3/2(负值舍去).
故△ABC的周长为a+b+c=3/2+√3/2+√3/2=3+2√3/2.
20.解:假设t小时后继艇在点M处将走私船截获.
(1)在△APM中,AM=20t,PM=10√2t,∠P=135°,根据正弦定理,AM/sinP=PM/sinA,得sinA=1/2,则A=30°,故缉私艇应该往东偏北30°方向进行追缉.
(2)在△APM中,根据余弦定理,得AM²=AP²+PM²-2AP·PM·cos135°,将AM=20t,AP=40,PM=10√2t代入,化简得t²-4t-8=0,解得t=2√3+2(负值舍去),此时走私船前进的路程为10√2t=20(√2+√6)n mile<35√6n mile.所以缉私艇可以在该走私船进入公海前将其截获.

21.解:以O为原点,CD所在直线为x轴,建立如图所示的平面直角坐标系.
(1)当甲到达AD的中点处时,乙到达BC的中点处,设此时甲的位置为点E,乙的位置为点F,则E(-80,30),F(80,30),s甲=OE=(-80,30),s乙=OF=(80,30),所以s甲·s乙=-80×80+30×30=-5500.
(2)20s后甲、乙的路程均为20×7=140(m),又AD=BC=π×30=3×30=90(m),|OD|=|OC|=50m,所以20s后甲、乙分别到达点A,B处,所以s甲=OA=(-50,60),s乙=OB=(50,60),所以s甲·s乙=-50×50+60×60=1100,|s甲|=|s乙|=√6100.
设s甲与s乙的夹角为θ,则cosθ=(s甲·s乙)/(|s甲|·|s乙|)=11/61.

22.解:(1)因为点P的斜坐标为(2,-2),所以OP=2e₁-2e₂.
所以|OP|²=(2e₁-2e₂)²=4e₁²-8e₁·e₂+4e₂²=4-8cos60°+4=4.所以|OP|=2,即|PO|=2.
(2)因为A(1,4),B(4,2),C(3,5),所以OA=e₁+4e₂,OB=4e₁+2e₂,OC=3e₁+5e₂,所以AB=OB-OA=3e₁-2e₂,AC=OC-OA=2e₁+e₂,可得AB·AC=(3e₁-2e₂)·(2e₁+e₂)=6e₁²-e₁·e₂-2e₂²=6-cos60°-2=7/2,|AB|=|3e₁-2e₂|=√9e₁²-12e₁·e₂+4e₂²=√9-12cos60°+4=√7,|AC|=|2e₁+e₂|=√4e₁²+4e₁·e₂+e₂²=√4+4cos60°+1=√7,所以cosA=(AB·AC)/(|AB|·|AC|)=1/2.
又A∈(0,π),所以A=π/3.

23.解:(1)由已知条件及正弦定理,可得a/b=3sinB/sinA=3,则(a/b)²=3,故a/b=√3.
(2)因为A=2π/3,所以b=asinA=√3.
又a/b=√3,所以a=√3,b=3/2.
由余弦定理,得a²=b²+c²-2bccosA,即9/4=3/4+c²-2×√3/2×c×(-1/2),解得c=√3/2(负值舍去).
故△ABC的周长为a+b+c=3/2+√3/2+√3/2=3+2√3/2.
20.解:假设t小时后继艇在点M处将走私船截获.
(1)在△APM中,AM=20t,PM=10√2t,∠P=135°,根据正弦定理,AM/sinP=PM/sinA,得sinA=1/2,则A=30°,故缉私艇应该往东偏北30°方向进行追缉.
(2)在△APM中,根据余弦定理,得AM²=AP²+PM²-2AP·PM·cos135°,将AM=20t,AP=40,PM=10√2t代入,化简得t²-4t-8=0,解得t=2√3+2(负值舍去),此时走私船前进的路程为10√2t=20(√2+√6)n mile<35√6n mile.所以缉私艇可以在该走私船进入公海前将其截获.

21.解:以O为原点,CD所在直线为x轴,建立如图所示的平面直角坐标系.
(1)当甲到达AD的中点处时,乙到达BC的中点处,设此时甲的位置为点E,乙的位置为点F,则E(-80,30),F(80,30),s甲=OE=(-80,30),s乙=OF=(80,30),所以s甲·s乙=-80×80+30×30=-5500.
(2)20s后甲、乙的路程均为20×7=140(m),又AD=BC=π×30=3×30=90(m),|OD|=|OC|=50m,所以20s后甲、乙分别到达点A,B处,所以s甲=OA=(-50,60),s乙=OB=(50,60),所以s甲·s乙=-50×50+60×60=1100,|s甲|=|s乙|=√6100.
设s甲与s乙的夹角为θ,则cosθ=(s甲·s乙)/(|s甲|·|s乙|)=11/61.

22.解:(1)因为点P的斜坐标为(2,-2),所以OP=2e₁-2e₂.
所以|OP|²=(2e₁-2e₂)²=4e₁²-8e₁·e₂+4e₂²=4-8cos60°+4=4.所以|OP|=2,即|PO|=2.
(2)因为A(1,4),B(4,2),C(3,5),所以OA=e₁+4e₂,OB=4e₁+2e₂,OC=3e₁+5e₂,所以AB=OB-OA=3e₁-2e₂,AC=OC-OA=2e₁+e₂,可得AB·AC=(3e₁-2e₂)·(2e₁+e₂)=6e₁²-e₁·e₂-2e₂²=6-cos60°-2=7/2,|AB|=|3e₁-2e₂|=√9e₁²-12e₁·e₂+4e₂²=√9-12cos60°+4=√7,|AC|=|2e₁+e₂|=√4e₁²+4e₁·e₂+e₂²=√4+4cos60°+1=√7,所以cosA=(AB·AC)/(|AB|·|AC|)=1/2.
又A∈(0,π),所以A=π/3.

23.解:(1)由已知条件及正弦定理,可得a/b=3sinB/sinA=3,则(a/b)²=3,故a/b=√3.
(2)因为A=2π/3,所以b=asinA=√3.
又a/b=√3,所以a=√3,b=3/2.
由余弦定理,得a²=b²+c²-2bccosA,即9/4=3/4+c²-2×√3/2×c×(-1/2),解得c=√3/2(负值舍去).
故△ABC的周长为a+b+c=3/2+√3/2+√3/2=3+2√3/2.
20.解:假设t小时后继艇在点M处将走私船截获.
(1)在△APM中,AM=20t,PM=10√2t,∠P=135°,根据正弦定理,AM/sinP=PM/sinA,得sinA=1/2,则A=30°,故缉私艇应该往东偏北30°方向进行追缉.
(2)在△APM中,根据余弦定理,得AM²=AP²+PM²-2AP·PM·cos135°,将AM=20t,AP=40,PM=10√2t代入,化简得t²-4t-8=0,解得t=2√3+2(负值舍去),此时走私船前进的路程为10√2t=20(√2+√6)n mile<35√6n mile.所以缉私艇可以在该走私船进入公海前将其截获.

21.解:以O为原点,CD所在直线为x轴,建立如图所示的平面直角坐标系.
(1)当甲到达AD的中点处时,乙到达BC的中点处,设此时甲的位置为点E,乙的位置为点F,则E(-80,30),F(80,30),s甲=OE=(-80,30),s乙=OF=(80,30),所以s甲·s乙=-80×80+30×30=-5500.
(2)20s后甲、乙的路程均为20×7=140(m),又AD=BC=π×30=3×30=90(m),|OD|=|OC|=50m,所以20s后甲、乙分别到达点A,B处,所以s甲=OA=(-50,60),s乙=OB=(50,60),所以s甲·s乙=-50×50+60×60=1100,|s甲|=|s乙|=√6100.
设s甲与s乙的夹角为θ,则cosθ=(s甲·s乙)/(|s甲|·|s乙|)=11/61.

数学 北师大

第7期

第2-3版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.C
提示:如图所示,可知满足要求的不同向量有AB,BA,AD,DA,AC,CA,BD,DB,共8个.故选C.

2.B
提示:当m=0时,ma=mb,但a=b不一定成立,故充分性不成立;当a=b时,显然ma=mb,故必要性成立,所以“ma=mb”是“a=b”的必要不充分条件.故选B.

3.A
提示:PM-PN+MN=NM+MN=0.故选A.

4.C
提示:因为a=(-1,1),b=(m,3),所以cos⟨a,b⟩=(a·b)/(|a|·|b|)=(3-m)/√2×√m²+9=√2/2,解得m=0.故选C.

5.C
提示:由向量a=(x-1,1),b=(3,x+1),假设a=b,则x-1=3,无解,所以a≠b.故选C.

6.B
提示:在△ABC中,由余弦定理,得b²=a²+c²-2accosB,将b=6,a=2c,B=π/3代入,可得6²=(2c)²+c²-2×2c×c×cosπ/3=3c²,解得c=2√3,a=4√3.所以△ABC的面积S=1/2acsinB=1/2×4√3×2√3×sinπ/3=6√3.故选B.

7.C
提示:由a⊥(b-c),得a·(b-c)=a·b-a·c=0,所以a·b=a·c.又a与b的夹角为π/3,|b|=2,所以c在a上的投影数量为|c|cos⟨c,a⟩=a·c/|a|=a·b/|a|=|b|cosπ/3=2×1/2=1.故选C.

8.A
提示:在△ABC中,由正弦定理,可得|AB|/sinC=|AC|/sinB,设比值为k,则AB=k/(AB+AC),可知点P在边BC的中线上,故点P一定经过△ABC的重心.故选A.

二、多项选择题
9.ACD
提示:在正△ABC中,对于选项A,|AB+BC|=|AC|,|BC+CA|=|BA|=|AC|,故选项A正确;对于选项B,设AC的中点为D,|AC+CB|=|AB|,|BA+BC|=2|BD|,显然|AB|=2/√3|BD|≠2|BD|,故选项B错误;对于选项C,设BC,AB的中点分别为E,F,|AB+AC|=2|AE|,|CA+CB|=2|CF|=2|AE|,故选项C正确;对于D,|AB+BC+AC|=2|AC|,|CB+BA+CA|=2|CA|=2|AC|,故选项D正确.故选ACD.

10.ABD
提示:由已知,得2a-b=(3,4-m),a+b=(3,2+m),因为|2a-b|=|a+b|,所以3²+(4-m)²=3²+(2+m)²,解得m=1,故C错误;b=(1,1),则|b|=√2,故D正确;a·b=2×1+2×1=4,故A正确;因为a=2b,所以a//b,故B正确.故选ABD.

11.ACD
提示:对于A,已知两边及夹角,可知△ABC是唯一确定的,故A符合题意;对于B,由正弦定理,得sinB=b sinA/√2 sin30°=√2/2,因为b>a,所以B>A,所以B=45°或135°,有两解,故B不符合题意;对于C,由三角形内角和定理可得A=105°,结合a/sinA=b/sinB=c/sinC可求得b,c,△ABC是唯一确定的,故C符合题意;对于D,因为a>b,且A=30°,所以B<30°,则C一定为钝角,故△ABC必有唯一解,故D符合题意.故选ACD.

12.BC
提示:由已知,AB·BC=0,AD·CD=0,得AB⊥BC,AD⊥CD.因为|AB|=|AD|=1,AD·BA=1/2,所以cos∠DAB=(AB·AD)/(|AB|·|AD|)=-1/2,又∠DAB∈(0,π),所以∠DAB=2π/3,则

∠ADB=∠ABD=π/6,∠BDC=∠DBC=π/3,所以△BCD为等边三角形,所以DC=BD=√AB²+AD²-2AB·ADcos∠DAB=√3.以D为坐标原点,DC,DA所在直线分别为x轴,y轴,建立平面直角坐标系,如图所示,则A(0,1),C(√3,0),B(√3/2,3/2),设E(x,0),x∈[0,√3],则AE=(x,-1),BE=(x-√3/2,-3/2),所以AE·BE=x²-√3/2x+3/2=(x-√3/4)²+21/16∈[21/16,3].故选BC.

三、填空题
13.□
提示:共线向量是方向相同或相反的向量,因为集合A={与a共线的向量},C={与a长度相等、方向