第 12 期

第 2~3 版综合测试(四)参考答案

一、单项选择题

1.D　**提示**:函数$f(x)=x\ln x$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$,

令$f'(x)<0$,得$0<x<\frac{1}{e}$,所以$f(x)$的单调递减区间为$\left(0,\frac{1}{e}\right)$,故选D.

2.C　**提示**:在等差数列$\{a_n\}$中,由$a_{10}=2a_6-2$,得$a_1+9d=2a_1+14d-2$,所以$a_1+5d=a_6=2$,

所以$S_{11}=\frac{(a_1+a_{11})}{2}\times11=11a_6=22$.故选C.

3.A　**提示**:因为函数$f(x)=\sin x+\cos x-2x$,所以$f'(x)=\cos x-\sin x-2=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2<0$,

所以$f(x)$为**R**上的减函数,因为$-\pi<\ln2<1=2^0$,所以$f(-\pi)>f(\ln2)>f(2^0)$,即$a>c>b$.

故选A.

4.D　**提示**:由导函数图象,可知原函数刚开始先单调递减,而A,B选项$f(x)$先单调递增,故不满足题意;

在零点附近$f(x)$应单调递增,故C错误,D正确.故选D.

5.D　**提示**:根据题意,设第n个叠放图形正方体的数目之和为a_n,第n个叠放图形中共有n层,从上到下,每一层正方体的个数为1,5,9,…,则第n个叠放图形中各层正方体的个数,构成了以1为首项,以4为公差的等差数列,所以第n个叠放图形中正方体的数目之和$a_n=n+\frac{n(n-1)\times4}{2}=2n^2-n$,故第8个叠放的图形中小正方体木块的总数为$a_8=2\times8^2-8=120$,故选D.

6.C　**提示**:因为$x_1<x_2$时,都有$\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\frac{3}{x_1x_2}$,所以$\ln x_1-\ln x_2<\frac{3(x_1-x_2)}{x_1x_2}=\frac{3}{x_2}-\frac{3}{x_1}$,

所以$\ln x_1+\frac{3}{x_1}<\ln x_2+\frac{3}{x_2}$,令$f(x)=\ln x+\frac{3}{x}$,则$f(x_1)<f(x_2)$,又因为对任意的$x_1,x_2\in(m,+\infty)$,都有$f(x_1)<f(x_2)$,所以$f(x)$在$(m,+\infty)$上单调递增,$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}=\frac{x-3}{x^2}$,令$f'(x)>0$,得$x>3$,所以在$(3,+\infty)$上$f(x)$单调递增,所以$m\geqslant3$,所以$m$的最小值为3,故选C.

7.C　**提示**:设$\{a_n\}$的公比为q,$q>0$,因为正项等比数列$\{a_n\}$,$a_1=\frac{1}{8}$,$2a_2=S_3-3a_1$,所以$2\times\frac{1}{8}q=\frac{\frac{1}{8}(1-q^3)}{1-q}-3\times\frac{1}{8}$,

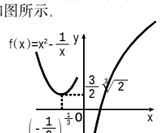
整理得$q^2-q-2=0$,解得$q=2$或$q=-1$(舍去),则$a_3=\frac{1}{8}$,$a_2=\frac{1}{4}$,$a_4=\frac{1}{2}$,$a_6=1$,$a_5=2$,

则T_n的最小值为$\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{64}$.故选C.

8.B　**提示**:由题设,知$x^3-1=mx$,$x\neq0$,所以$x^2-\frac{1}{x}=m$.

令$f(x)=x^2-\frac{1}{x}(x\neq0)$,$f'(x)=2x+\frac{1}{x^2}=\frac{2x^3+1}{x^2}$,令$f'(x)=0$,得$x=\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$,

即$f(x)$在$\left(-\infty,\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$单调递减,在$(0,+\infty)$,$\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}},0\right)$单调递增,$f\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$,画出$f(x)$的大致图象,如图所示.



(第8题图)

因为$f(x)=m$有三个零点,所以$m\in\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{2},+\infty\right)$,故选B.

二、多项选择题

9.ACD　**提示**:由函数$y=f(x)$的导函数$y=f'(x)$的图象,可得$x\in(-\infty,-4)$时,$f'(x)<0$,函数$f(x)$单调递减;$x\in(-4,+\infty)$时,$f'(x)\geqslant0$,函数$f(x)$单调递增.所以-4是函数$f(x)$的极小值点,且$f(-4)$为最小值,$x=0$不是函数$f(x)$的极值点.根据导数的几何意义,$f(x)$在$x=1$处的导数大于0,因此切线的斜率大于零.

综上,只有ACD正确.故选ACD.

10.AD

提示:因为等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,且满足$a_{10}=32a_5$,所以$a_1q^9=32a_1q^4$,解得$q=2$,所以数列$\{a_n\}$的公比为2,故A正确,B错误;

$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{\frac{a_1(1-2^{10})}{1-2}}{\frac{a_1(1-2^5)}{1-2}}=1+2^5=33$,故C错误,D正确.故选AD.

11.ACD　**提示**:设等差数列的公差为d,因为$a_1=a_6$,所以$a_1=a_1+4d$,所以$d=0$,则$a_1=a_2=\cdots=a_6$,故A正确;因为$a_3>a_1$,所以$a_1+4d>a_1+2d$,所以$d>0$,$\{a_n\}$为递增数列,但$S_1<S_2<\cdots<S_6$不一定成立,如$a_1=-2$,$a_2=-1$,$a_3=0$,$S_1=-2$,$S_2=-3$,$S_3=-3$,故B错误;

因为$a_3^2+a_4^2\geqslant2\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)^2=8$,当且仅当$a_1=a_5=2$时取等号,故C正确;

因为$a_4=8$,$a_6=4$,所以$\begin{cases}a_4=a_1+3d=8,\\a_6=a_1+7d=4,\end{cases}$解得$\begin{cases}d=-1,\\a_1=11,\end{cases}$即$a_{12}=a_4+8d=8-8=0$,

所以$S_{12}=\frac{a_1+a_{12}}{2}\times12=66$,故D正确.故选ACD.

12.BC　**提示**:设$f(x)$在$[1,e]$上的值域为A,$g(x)$在$[-1,1]$上的值域为B,则$A\subseteq B$.

$g'(x)=(x+2)e^x$,当$x\in[-1,1]$时,$g'(x)>0$,所以$g(x)$在$[-1,1]$上单调递增,所以$B=[0,2e]$.若$A\subseteq B$,则$f(x)_{\min}\geqslant0$,令$x(\ln x-a)\geqslant0$对$\forall x\in[1,e]$恒成立,则$a\leqslant\ln x$恒成立,即$a\leqslant(\ln x)_{\min}=0$;当$a\leqslant0$时,$f'(x)=\ln x-a+1>0$在$[1,e]$上恒成立,

所以$f(x)$在$[1,e]$上单调递增,所以$f(x)_{\max}=f(e)=e\cdot(1-a)\leqslant2e$,解得$a\geqslant-1$.

综上,$-1\leqslant a\leqslant0$.故选BC.

三、填空题

13.-2　**提示**:由题意知,$f'(2)=2$,又$f(2)=2\times2-8=-4$,所以$\frac{f(2)}{f'(2)}=\frac{-4}{2}=-2$.

14.$\frac{23}{35}$　**提示**:因为$\{a_n\}$是等差数列,所以$A_{11}=\frac{11}{2}(a_1+a_{11})=11a_6$,则$a_6=\frac{1}{11}A_{11}$,

同理,$b_6=\frac{1}{11}B_{11}$,所以$\frac{a_6}{b_6}=\frac{\frac{1}{11}A_{11}}{\frac{1}{11}B_{11}}=\frac{A_{11}}{B_{11}}=\frac{2\times11+1}{3\times11+2}=\frac{23}{35}$.

15.1　**提示**:由$a_1=1$,$a_{n+1}-a_n=\sin\frac{(n+1)\pi}{2}$,可得$a_2=a_1+\sin\pi=1$,$a_3=a_2+\sin\frac{3\pi}{2}=1-1=0$,$a_4=a_3+\sin2\pi=0$,$a_5=a_4+\sin\frac{5\pi}{2}=0+1=1$,…,所以数列$\{a_n\}$的最小正周期为4,所以$a_{2022}=a_2=1$.

16.$\left[-\frac{1}{6},+\infty\right)$　**提示**:由题意知,分式$\frac{f(m+1)-f(n+1)}{m-n}$的几何意义为:表示点$(m+1,f(m+1))$与$(n+1,f(n+1))$连线的斜率,因为实数$m,n$在区间$(0,1)$内,故$m+1$和$n+1$在区间$(1,2)$内,

不等式$\frac{f(m+1)-f(n+1)}{m-n}<1$恒成立,所以函数$f(x)$图象上在区间$(1,2)$内任意两点连线的斜率小于1,

故函数$f(x)=\ln(x+1)-ax^2$的导数小于1在$(1,2)$内恒成立,由函数$f(x)=\ln(x+1)-ax^2$满足$x+1>0$,即定义域为$(-1,+\infty)$,即$f'(x)=\frac{1}{x+1}-2ax<1$在$(1,2)$内恒成立,

即$a>\frac{-1}{2(x+1)}$,令$g(x)=\frac{-1}{2(x+1)}$,$x\in(1,2)$,则$g(x)$在$(1,2)$上单调递增,可得$g(x)<g(2)=-\frac{1}{6}$,所以$a\geqslant-\frac{1}{6}$.

所以实数a的取值范围是$\left[-\frac{1}{6},+\infty\right)$.

四、解答题

17.**解**:(1)因为数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=n^2+2n$,所以$a_1=S_1=1+2=3$,

当$n\geqslant2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+2n-[(n-1)^2+2(n-1)]=1+2n$.对于$n=1$,也成立.

综上,可得数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=1+2n$.

(2)设$b_n=\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2n+1}$,则$b_1=\frac{1}{3}$,$b_2=\frac{1}{5}$,$b_3=\frac{1}{7}$,因为$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{10}{21}\neq2\times\frac{1}{5}$,所以$\{b_n\}$不是等差数列.

18.**解**:(1)$f'(x)=-e^{1-x}+\frac{1}{m-x}$,因为$x=1$是$f(x)$的极值点,所以$f'(1)=0$,即$-e^{1-1}+\frac{1}{m-1}=0$,解得$m=2$.

(2)由(1)知,$f(x)=e^{1-x}-\ln(2-x)$,$x<2$,$f'(x)=-e^{1-x}-\frac{1}{x-2}$,

令$h(x)=-e^{1-x}-\frac{1}{x-2}$,$x<2$,$h'(x)=e^{1-x}+\frac{1}{(x-2)^2}>0$,

所以$h(x)$在$(-\infty,2)$上单调递增,因为$h(1)=0$,

所以在$(1,2)$上,$h(x)>0$,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,

在$(-\infty,1)$上,$h(x)<0$,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,

所以$f(x)$的单调递增区间为$(1,2)$,单调递减区间为$(-\infty,1)$.

19.**解**:(1)设正项等比数列$\{a_n\}$的公比为q,显然$q\neq1$,$q>0$,

由$S_2=6$,$S_4=30$,得$\begin{cases}a_1+a_1q=6,\\\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=30,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=2,\\q=2,\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=-6,\\q=-2\end{cases}$(舍去),所以$a_n=2\times2^{n-1}=2^n$.

(2)由(1)知,$a_n=2^n$,

所以$b_n=\frac{n+2}{n(n+1)\cdot2^{n+1}}=\frac{1}{n\cdot2^n}-\frac{1}{(n+1)\cdot2^{n+1}}$,

所以$T_n=\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times2^2}\right)+\left(\frac{1}{2\times2^2}-\frac{1}{3\times2^3}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{n\cdot2^n}-\frac{1}{(n+1)\cdot2^{n+1}}\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)\cdot2^{n+1}}$.

20.**解**:(1)当$0<x<90$时,$y=100x-\left(\frac{1}{2}x^2+40x\right)-200=-\frac{1}{2}x^2+60x-200$;

当$x\geqslant90$时,$y=100x-\left(100x+8\ln x+\frac{760}{x}-2180\right)-200=1980-8\ln x-\frac{760}{x}$,

故$y=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+60x-200,0<x<90,\\1980-8\ln x-\frac{760}{x},x\geqslant90.\end{cases}$

(2)当$0<x<90$时,$y=-\frac{1}{2}x^2+60x-200=-\frac{1}{2}(x-60)^2+1600$,

故当$x=60$时,y取得最大值,最大值为1600万元;

当$x\geqslant90$时,$y=1980-8\ln x-\frac{760}{x}$,则$y'=-\frac{8}{x}+\frac{760}{x^2}=\frac{760-8x}{x^2}$,

当$90\leqslant x<95$时,$y'>0$,当$x>95$时,$y'<0$,所以$y=1980-8\ln x-\frac{760}{x}$在$[90,95)$上单调递增,在$(95,+\infty)$上单调递减,当$x=95$时,$y$取得最大值,且$y_{\max}\approx1980-8\times4.55-\frac{760}{95}=1935.6$(万元),因为$1935.6>1600$,所以当年产量为95万箱时,该口罩生产厂家所获得年利润最大.

21.**解**:(1)因为数列$\{b_n\}$是首项为2的等比数列,且公比$q>0$,又$b_2+b_3=12$,所以$2(q+q^2)=12$,$q>0$,解得$q=2$,所以$b_n=2^n$.设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,因为$b_3=a_4-2a_1$,$S_{11}=11b_4$,

所以$a_1+3d-2a_1=2^3$,$11a_1+\frac{11\times10}{2}d=11\times2^4$,解得$a_1=1$,$d=3$.所以$a_n=1+3(n-1)=3n-2$.

(2)$a_nb_n=(6n-2)\cdot2^n=(3n-1)\cdot2^{n+1}$.

所以数列$\{a_nb_n\}$的前n项和

$T_n=2\times2^2+5\times2^3+\cdots+(3n-4)\cdot2^n+(3n-1)\cdot2^{n+1}$,

所以$2T_n=2\times2^3+5\times2^4+\cdots+(3n-4)\cdot2^{n+1}+(3n-1)\cdot2^{n+2}$,

两式相减,得$-T_n=8+3(2^3+2^4+\cdots+2^{n+1})-(3n-1)\cdot2^{n+2}=8+3\times\frac{8(2^{n-1}-1)}{2-1}-(3n-1)\cdot2^{n+2}$,

化简得,$T_n=(3n-4)\cdot2^{n+2}+16$.

22.(1)**解**:由题意知,$f'(x)=e^x(x^2+x-1)$,则$f'(1)=e$,$f(1)=0$,所以所求的切线方程为$y=ex-e$.

(2)**解**:由$f(x)>ax$对$x>0$恒成立,得$a<(x-1)e^x$对$x>0$恒成立,令$g(x)=(x-1)e^x$,则$g'(x)=xe^x$,

所以在$(0,+\infty)$上,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增,

所以$g(x)_{\min}>g(0)=-1$,所以$a\leqslant-1$,所以实数a的取值范围为$(-\infty,-1]$.

(3)**证明**:$f'(x)=e^x(x^2+x-1)$,令$f'(x_0)=0$,解得$x_0=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$(负值舍去),

所以$f(x)$在$(0,x_0)$上单调递减,在$(x_0,1)$上单调递增,

由(1)知,$f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程为$y=ex-e$,

所以在$x\in(0,1)$时,$f(x)$的图象恒在切线$y=ex-e$上方,即$f(x_2)>e(x_2-1)\Rightarrow b>e(x_2-1)\Rightarrow\frac{b}{e}+1>x_2$,

要证$x_2-x_1<\left(\frac{1}{e}+1\right)b+1$,即证$x_2-x_1<\frac{b}{e}+b+1$,因为$x_2<\frac{b}{e}+1$,所以只要证明$-x_1<b$,因为$b=f(x_1)$,所以只要证明$f(x_1)+x_1>0$即可,

因为$x_1\in\left(0,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$,所以只需证$(x_1-1)e^{x_1}+1>0$,

设$h(x)=(x-1)e^x+1$,$x\in\left(0,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$,$h'(x)=xe^x$,

当$x\in\left(0,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$时,$h'(x)>0$,$h(x)$单调递增,所以$h(x)>h(0)=0$,得证,所以可以证明$x_2-x_1<\left(\frac{1}{e}+1\right)\cdot b+1$.

扫码免费下载习题讲解 ppt

第 9 期

第 2~3 版综合测试(一)参考答案

一、单项选择题

1. A

提示:设$\{a_n\}$的公差为d,因为$a_4+a_6=2a_5=20$,所以$a_5=10$.又$a_2=12$,所以$d=2$,所以$a_{10}=a_7+3d=12+6=18$.故选A.

2.B

提示:$f'(x)=\ln x+1$,所以$f'(x_0)=\ln x_0+1=2$,解得$x_0=e$.故选B.

3.B

提示:设数列$\{a_n\}$的公差为d,由$S_5=5a_3=30$,得$a_3=6$,又$a_6=2$,所以$S_8=\frac{8(a_3+a_6)}{2}=\frac{8(a_3+a_6)}{2}=\frac{8\times(6+2)}{2}=32$.故选B.

4.D

提示:$f'(x)=e^x-1$,令$f'(x)>0$,得$x>0$;令$f'(x)<0$,得$x<0$,

所以函数$f(x)$在$(-1,0)$上单调递减,在$(0,1)$上单调递增,又$f(-1)=e^{-1}+1$,$f(1)=e-1$,$f(-1)-f(1)=\frac{1}{e}+2-e<\frac{1}{2}+2-e<0$,所以$f(1)>f(-1)$,故所求的最大值为$e-1$.故选D.

5.C

提示:由$a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,得$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{n+1}=\frac{2022}{2023}$,则$n=2022$.故选C.

6.B

提示:设牛主人应偿还x斗粟,则马主人应偿还$\frac{x}{2}$斗粟,羊主人应偿还$\frac{x}{4}$斗粟,

所以$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}=5$,解得$x=\frac{20}{7}$.故选B.

7.C

提示:由题意知,$f(1)=10$,且$f'(1)=0$,又$f'(x)=3x^2+2ax+b$,

所以$\begin{cases}1+a+b+a^2=10,\\3+2a+b=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-3,\\b=3,\end{cases}$或$\begin{cases}a=4,\\b=-11.\end{cases}$

而当$a=-3$,$b=3$时,$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2\geqslant0$,函数$f(x)$在$x=1$处无极值,故舍去.

所以$f(x)=x^3+4x^2-11x+16$,所以$f(2)=18$.故选C.

8.D

提示:设$g(x)=\frac{f(x)}{x}$,则$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$,因为当$x>0$时,$xf'(x)-f(x)<0$,所以$g'(x)<0$.

所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.由$f(x)$为奇函数,知$g(x)$为偶函数,则$g(-3)=g(3)$,

又$a=g(e)$,$b=g(\ln2)$,$c=g(-3)=g(3)$,所以$g(3)<g(e)<g(\ln2)$,即$\frac{f(-3)}{-3}<\frac{f(e)}{e}<\frac{f(\ln2)}{\ln2}$,故$c<a<b$.故选D.

二、多项选择题

9.ABD

提示:由$S_6=S_5+a_6>S_5$,得$a_6>0$,由$S_7=S_6+a_7=S_6$,得$a_7=0$,故B正确;$d=a_7-a_6<0$,故A正确;由$S_8=S_7+a_8<S_7$,得$a_8<0$,则$a_8<0$,又$a_8+a_9=a_5+a_9=2a_7=0$,所以$S_8>S_9$,故C错误;由$a_7=0$,$a_6>0$,知S_6,S_7是S_n中的最大值,故D正确.故选ABD.

10. ABC

提示:令$f'(x)=-3x^2+3=0$,解得$x=-1$或$x=1$,

由$f'(x)>0$,得$-1<x<1$;

由$f'(x)<0$,得$x<-1$或$x>1$,

故$f(-1)=-1<0$是$f(x)$的极小值,$f(1)=3>0$是$f(x)$的极大值,

且$x\to-\infty$时,$f(x)\to+\infty$;$x\to+\infty$时,$f(x)\to-\infty$.

故$f(x)$有三个零点,故A,B正确;

将$f(x)$的图象向下平移1个单位得$g(x)=-x^3+3x$,显然$g(x)$为奇函数,$g(x)$的图象关于原点对称,

所以$f(x)$的图象关于$(0,1)$对称,故C正确;

令$f'(x)=2$,解得$x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$,故切点为$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{8}{3\sqrt{3}}+1\right)$或$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{8}{3\sqrt{3}}+1\right)$,

显然这两个点都不满足$y=2x$,故$y=2x$不是$y=f(x)$的切线,故D错误.故选ABC.

11. AB

提示:因为$a_n-3a_{n+1}=2a_na_{n+1}$,所以$\frac{1}{a_{n+1}}+1=3\left(\frac{1}{a_n}+1\right)$,又$\frac{1}{a_1}+1=2$,

所以$\left\{\frac{1}{a_n}+1\right\}$是以2为首项,3为公比的等比数列,故$\frac{1}{a_n}+1=2\times3^{n-1}$,

即$a_n=\frac{1}{2\times3^{n-1}-1}$,所以$\{a_n\}$为递减数列,$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前$n$项和$T_n=(2\times3^0-1)+(2\times3^1-1)+\cdots+(2\times3^{n-1}-1)$

$=2(3^0+3^1+\cdots+3^{n-1})-n=2\times\frac{1-3^n}{1-3}-n=3^n-n-1$.故选AB.

12. BD

提示:$f(x)=\frac{x}{\ln x}$,$x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$,所以$f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$,因为$x\in(0,1)\cup(1,e)$时,$f'(x)<0$;$x\in(e,+\infty)$,$f'(x)>0$,

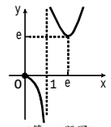
所以当$x\in(0,1)$和$(1,e)$时,函数$f(x)$单调递减;当$x\in(e,+\infty)$时,函数$f(x)$单调递增,

又$x\in(0,1)$时,$f(x)<0$,故A错误;

因为$x\in(e,+\infty)$,函数$f(x)$单调递增,所以$f(4)>f(\pi)>f(3)$,$f(4)=\frac{4}{\ln4}=\frac{2}{\ln2}=f(2)$,

所以$f(2)>f(\pi)>f(3)$,故B正确;

画出函数$f(x)$的图象如图:



(第12题图)

由图可知当$k<0$时,方程$f(x)=k$有一个实根,故C错误;

当$k>e$时,方程$f(x)=k$有两个实根,故D正确.故选BD.

三、填空题

13. 2

提示:因为a_5是a_4与$6a_3$的等差中项,所以$2a_5=a_4+6a_3$,设$\{a_n\}$的公比为q,$q>0$,则$2a_3q^2=a_3q+6a_3$,即$2q^2-q-6=0$,解得$q=2$或$q=-\frac{3}{2}$(舍去),故$\{a_n\}$的公比为2.

14.$[-1,+\infty)$

提示:对任意$x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$,不等式$\ln(2x-1)\leqslant x^2+a$恒成立,可得$a\geqslant\ln(2x-1)-x^2$恒成立,

设$f(x)=\ln(2x-1)-x^2$,

则$f'(x)=\frac{2}{2x-1}-2x=-\frac{2(x-1)(2x+1)}{2x-1}$,

可得$x>1$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;$\frac{1}{2}<x<1$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.

即有$f(x)$在$x=1$处取得极大值,且为最大值-1,所以$a\geqslant-1$.所以a的取值范围是$[-1,+\infty)$.

15.0

提示:因为函数$f(x)=e^x-e^{-x}+\sin2x$,$x\in[0,\pi]$,所以$f'(x)=e^x+e^{-x}+2\cos2x\geqslant2\sqrt{e^xe^{-x}}+2\cos2x=2+2\cos2x$,

当且仅当$e^x=e^{-x}$,即$x=0$时,等号成立,又因为$2+2\cos2x\geqslant2+2\times(-1)=0$,当且仅当$2x=\pi$时,取等号,

所以$f'(x)>0$,所以$f(x)$在$x\in[0,\pi]$时单调递增,其最小值为$f(0)=e^0-e^0+\sin0=0$.

16. 82 820

提示:由题意知,满足被3除余2,被5除余3,被7除余2的最小的数为23,

满足该条件的数从小到大构成以23为首项,$3\times5\times7=105$为公差的等差数列,

其通项公式为$a_n=105n-82$,令$a_n\leqslant4200$,解得$n\leqslant40\frac{82}{105}$,

则所有满足条件的数的和为$23\times40+\frac{40\times39}{2}\times105=82\ 820$.

四、解答题

17. **解**:(1)等差数列$\{a_n\}$满足$a_3=6$,$\frac{S_6}{S_9}=\frac{1}{3}$,

所以$\begin{cases}a_1+2d=6,\\S_9=3S_6,\end{cases}$即$\begin{cases}a_1+2d=6,\\9a_1+\frac{9\times8}{2}d=3\left(5a_1+\frac{5\times4}{2}d\right),\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=2,\\d=2,\end{cases}$故$a_n=2+2(n-1)=2n$.

(2)由(1)得$c_n=a_n+b_n=2n+4^n$,

故$T_n=(2+4+\cdots+2n)+(4^1+4^2+\cdots+4^n)=\frac{n(2+2n)}{2}+\frac{4(1-4^n)}{1-4}=n^2+n+\frac{4^{n+1}-4}{3}$.

18. **解**:(1)$f'(x)=e^x-2ax$,

由题设得,$f'(1)=e-2a=b$,$f(1)=e-a=b+1$,解得$a=1$,$b=e-2$.

(2)由(1)知,$f(x)=e^x-x^2$,所以$f'(x)=e^x-2x$,

令$g(x)=e^x-2x$,则$g'(x)=e^x-2$,由$g'(x)>0$,得$x>\ln2$;由$g'(x)<0$,得$x<\ln2$.

所以$g(x)$在$(-\infty,\ln2)$上单调递减,在$(\ln2,+\infty)$上单调递增,

所以$g(x)\geqslant g(\ln2)$,即$f'(x)\geqslant f'(\ln2)=2-2\ln2>0$,

所以$f(x)$在$[0,1]$上单调递增,所以$f(x)$在$[0,1]$上的最大值为$f(1)=e-1$.

19. **解**:(1)因为$S_n=2a_n-1$,所以$S_{n-1}=2a_{n-1}-1$,

当$n\geqslant2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-1-(2a_{n-1}-1)$,

化简得,$a_n=2a_{n-1}$,

当$n=1$时,$a_1=2a_1-1$,解得$a_1=1$,

所以数列$\{a_n\}$是首项为1,公比为2的等比数列,

所以$a_n=2^{n-1}$.

(2)因为数列$\{b_n\}$满足$a_nb_n=\log_2a_n$,所以$2^{n-1}b_n=\log_22^{n-1}$,所以$b_n=\frac{n-1}{2^{n-1}}$.

所以数列$\{b_n\}$的前n项和

$T_n=0+\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n-2}{2^{n-2}}+\frac{n-1}{2^{n-1}}$,

所以$\frac{1}{2}T_n=0+\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{n-2}{2^{n-1}}+\frac{n-1}{2^n}$,

两式相减,得$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n-1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n-1}{2^n}$,整理得$T_n=2-\frac{n+1}{2^{n-1}}$.

20.**解**:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差d,因为$a_1=1$,$S_7=28$,

所以$7a_4=28$,解得$a_4=4$,所以公差$d=\frac{1}{3}(a_4-a_1)=1$,

所以$a_n=n$,

因为$b_n=[\lg a_n]$,

所以$b_1=[\lg a_1]=0$,$b_{11}=[\lg a_{11}]=1$,$b_{101}=[\lg a_{101}]=2$.

(2)因为$b_1=b_2=\cdots=b_9=0$,

$b_{10}=b_{11}=b_{12}=\cdots=b_{99}=1$,

$b_{100}=b_{101}=b_{102}=\cdots=b_{999}=2$,

$b_{1000}=b_{1001}=b_{1002}=\cdots=b_{9999}=3$,

所以$S_{2022}=(b_1+b_2+\cdots+b_9)+(b_{10}+b_{11}+\cdots+b_{99})+(b_{100}+b_{101}+\cdots+b_{999})+(b_{1000}+b_{1001}+\cdots+b_{2022})=0\times9+1\times90+2\times900+3\times1023=4959$.

21.(1)**解**:因为$f'(x)=\frac{a}{x}-a=\frac{a(1-x)}{x}$,$x>0$,

①当$a>0$时,$x\in(0,1)$,$f'(x)>0$;$x\in(1,+\infty)$,$f'(x)<0$,所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减;

②当$a<0$时,$x\in(0,1)$,$f'(x)<0$;$x\in(1,+\infty)$,$f'(x)>0$,所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增.

综上,当$a>0$时,$f(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减;

当$a<0$时,$f(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增.

(2)**证明**:当$a=-1$时,令$g(x)=f(x)+2=-\ln x+x-1$,$x>1$,

所以$g'(x)=-\frac{1}{x}+1=\frac{x-1}{x}>0$,

所以$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,

所以$g(x)>g(1)=0$,

故在$(1,+\infty)$上,$f(x)+2>0$.

22. **解**:(1)由题意知,当$0<x<4$时,$P(x)=6x-2-\left(\frac{1}{3}x^3+2x\right)=-\frac{1}{3}x^3+4x-2$;

当$x\geqslant4$时,$P(x)=6x-2-\left(7x+\frac{64}{x}-27\right)=25-x-\frac{64}{x}$.

所以$P(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}x^3+4x-2,0<x<4,\\25-x-\frac{64}{x},x\geqslant4.\end{cases}$

(2)当$0<x<4$时,$P'(x)=-x^2+4$,令$P'(x)=0$,解得$x=2$.

易得$P(x)$在$(0,2)$上单调递增,在$(2,4)$上单调递减,所以当$0<x<4$时,$P(x)_{\max}=P(2)=\frac{10}{3}$.

当$x\geqslant4$时,$P(x)=25-\left(x+\frac{64}{x}\right)\leqslant25-2\sqrt{x\cdot\frac{64}{x}}=9$,当且仅当$x=\frac{64}{x}$,即$x=8$时取等号.

综上,当年产量为8万件时,所获年利润最大,为9万元.

第 10 期

第 2~3 版综合测试(二)参考答案

一、单项选择题

1.C

提示:因为数列$\{a_n\}$为等差数列,所以$S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=a_4+3$,则$a_1+a_2+a_3=3a_2=3$,解得$a_2=1$.故选C.

2.D

提示:因为$f(x)=-x^3+3x+1$,所以$f'(x)=-3x^2+3$,

令$f'(x)=-3x^2+3=0$,解得$x=\pm1$,

于是,当x变化时,$f'(x)$,$f(x)$的变化情况如下表:

x	$(-\infty,-1)$	-1	(-1,1)	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

所以$f(x)$的极小值为$f(-1)=-1$,$f(x)$的极大值为$f(1)=3$.故选D.

3.C

提示:因为$a_{n+1}=a_n+n+1$,所以$a_{n+1}-a_n=n+1$,

所以$a_2-a_1=2$,$a_3-a_2=3$,…,$a_n-a_{n-1}=n$,累加可得,

$a_n-a_1=2+3+\cdots+n$,又$a_1=1$,所以$a_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$,所以$a_{10}=\frac{10\times11}{2}=55$.故选C.

4.B

提示:因为$y'=4x^3-3$,所以$y'|_{x=1}=1$,设切线的倾斜角为α,则$\tan\alpha=1$,因为$\alpha\in(0,\pi)$,所以$\alpha=\frac{\pi}{4}$.故选B.

5.B

提示:因为$-2,a,b,c,-8$是等比数列,所以$b^2=(-2)\times(-8)=16$,

又因为$-2,b,-8$均为该数列中的奇数项,所以$b<0$,所以$b=-4$.故选B.

6.B

提示:设数列的首项为a,公比为q,共n项,则前三项分别为a_1,a_1q,a_1q^2,

后三项分别为$a_1q^{n-3},a_1q^{n-2},a_1q^{n-1}$.

由题意得$a_1^3q^3=2$,$a_1^3q^{3n-6}=4$,两式相乘得$a_1^6q^{3(n-1)}=8$,即$a_1^2q^{n-1}=2$.

又因为$a_1\cdot a_1q\cdot a_1q^2\cdot\cdots\cdot a_1q^{n-1}=64$,所以$a_1^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}=64$,即$(a_1^2q^{n-1})^n=64^2$,解得$n=12$.故选B.

7.B

提示:根据等差数列的性质和前n项和公式,有$\frac{a_5}{b_5}=\frac{2a_5}{2b_5}=\frac{\frac{9(a_1+a_9)}{2}}{\frac{9(b_1+b_9)}{2}}=\frac{S_9}{T_9}=\frac{3\times9+2}{9+1}=\frac{29}{10}$.故选B.

8.B

提示:因为该厂的日产量为x,所以其次品数为$px=\frac{3x^2}{4x+32}$,正品数为$(1-p)x=\frac{x^2+32x}{4x+32}$,

由题意得,盈利$T(x)=200\times\frac{x^2+32x}{4x+32}-100\times\frac{3x^2}{4x+32}$,

化简得,$T(x)=\frac{-25x^2+1600x}{x+8}$.

所以$T'(x)=\frac{(-50x+1600)(x+8)-(-25x^2+1600x)}{(x+8)^2}$

$=-25\times\frac{x^2+16x-64\times8}{(x+8)^2}=-25\times\frac{(x+32)(x-16)}{(x+8)^2}$,

当$0<x<16$时,$T'(x)>0$;当$x>16$时,$T'(x)<0$.所以$x=16$时,$T(x)$有最大值.故选B.

二、多项选择题

9.AB

提示:由$f'(x)$图象可得,当$x<-2$时,$f'(x)<0$;当$-2<x<\frac{1}{2}$时,$f'(x)>0$;当$\frac{1}{2}<x<2$时,$f'(x)<0$;当$x>2$时,$f'(x)>0$.

所以$f(x)$在$(-\infty,-2)$和$\left(\frac{1}{2},2\right)$上单调递减,在$\left(-2,\frac{1}{2}\right)$和$(2,+\infty)$上单调递增,

所以函数f(x)在$x=-2$和$x=2$处取得极小值,在$x=\frac{1}{2}$处取得极大值.故选AB.

10.BD

提示:$f'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$,由$f'(x)<0$,得$\begin{cases}x>0,\\2x^2-1<0,\end{cases}$解得$0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以f(x)的单调递减区间为$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

由$f'(x)>0$,得$\begin{cases}x>0,\\2x^2-1>0,\end{cases}$解得$x>\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以f(x)的单调递增区间为$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$.故选BD.

11.AB

提示:因为$a_{n+1}=2a_n+1$,所以$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$,又$a_1+1=1+1=2$,所以数列$\{a_n+1\}$是首项为2,公比为2的等比数列,所以$a_n+1=2\times2^{n-1}=2^n$,所以$a_n=2^n-1$,故B正确,C错误;

又$a_3=2^3-1=7$,故A正确;$S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-n-2$,故D错误.故选AB.

12.BCD

提示:函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,设$F(x)=f(x)-\ln x$,则$F'(x)=f'(x)-\frac{1}{x}$,

因为$f'(x)<\frac{1}{x}$,所以$F'(x)<0$,所以函数$F(x)$是$(0,+\infty)$上的减函数,

因为$f(1)=1$,所以$F(1)=f(1)-\ln1=1$.

对于A,$F(1)>F(e)=f(e)-1$,可得$f(e)<2$,所以A错误;

对于B,$F\left(\frac{1}{e}\right)=f\left(\frac{1}{e}\right)+1>F(1)$,所以$f\left(\frac{1}{e}\right)>0$,故B正确;

对于C,当$x\in(1,e)$时,$F(x)<F(1)$,则$f(x)-\ln x<1$,所以$f(x)<\ln x+1$,因为$x\in(1,e)$,所以$\ln x\in(0,1)$,所以$\ln x+1\in(1,2)$,所以$f(x)<2$,故C正确;

对于D,$\forall x\in\left(\frac{1}{e},1\right)$,$\ln x\in(-1,0)$,可知$x<\frac{1}{x}$,

所以$F(x)>F\left(\frac{1}{x}\right)$,$f(x)-\ln x>f\left(\frac{1}{x}\right)-\ln\frac{1}{x}$,所以$f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)+2>2\ln x+2>0$.故D正确.故选BCD.

三、填空题

13.92

提示:根据题意,记第n个图形的点数为a_n,则$a_1=1$,$a_2-a_1=2\times3-2$,$a_3-a_2=3\times3-2$,$a_4-a_3=4\times3-2$,…,$a_8-a_7=8\times3-2$,累加得$a_8=1+3\times(2+3+\cdots+8)-2\times7=92$.

14.6

提示:每天植树的棵数构成以2为首项,2为公比的等比数列,

其前n项和$S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$.由$2^{n+1}-2\geqslant100$,得$2^{n+1}\geqslant102$.

因为$2^6=64$,$2^7=128$,所以$n+1\geqslant7$,即$n\geqslant6$.所以需要的最少天数n=6.

15.$-\frac{1}{2}$

提示:由$f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}$,可得$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}$,$f(1)=b=-2$,

又因为$x=1$是$f(x)$的极值点,所以$f'(1)=a-b=0$,所以$a=b=-2$,所以$f'(2)=\frac{-2}{2}-\frac{-2}{2^2}=-\frac{1}{2}$.

16.$(-\infty,\frac{3}{2})$

提示:$f'(x)=[x^2+(m+2)x+m]e^x$,原问题等价于$f'(x)<0$在$\left[-\frac{1}{2},1\right]$上有解,

即$m<\frac{-x^2-2x}{x+1}$在$\left[-\frac{1}{2},1\right]$上有解,而$g(x)=\frac{-x^2-2x}{x+1}=-(x+1)+\frac{1}{x+1}$在$\left[-\frac{1}{2},1\right]$上单调递减,

所以$g(x)$的最大值为$g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$,所以$m<\frac{3}{2}$,所以$m$的取值范围是$\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$.

四、解答题

17.**解**:(1)由$y=x^3+x-2$,得$y'=3x^2+1$.

令$3x^2+1=4$,解得$x=\pm1$.当$x=1$时,$y=0$;

当$x=-1$时,$y=-4$.又点P_0在第三象限,所以切点P_0的坐标为$(-1,-4)$.

(2)因为直线$l\perp l_1$,l_1的斜率为4,所以直线l的斜率为$-\frac{1}{4}$.

因为直线l过切点P_0,点P_0的坐标为$(-1,-4)$,

所以直线l的方程为$y+4=-\frac{1}{4}(x+1)$,即$x+4y+17=0$.

18.**解**:(1)由已知$b_1=1$,$b_2=3$,$a_1b_1+b_1=b_2$,得$a_1=2$,

所以数列$\{a_n\}$是以2为首项,3为公差的等差数列,

所以$a_n=2+3(n-1)=3n-1(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)由(1)知,$(3n-1)b_n+b_n=nb_{n+1}$,即$b_{n+1}=3b_n$,

所以数列$\{b_n\}$是以1为首项,3为公比的等比数列,

记$\{b_n\}$的前n项和为S_n,则$S_n=\frac{1-3^n}{1-3}=\frac{3^n-1}{2}$.

19.**解**:(1)因为$x=3$是$f(x)$的一个极值点,所以$f'(3)=0$.

因为$f'(x)=3x^2-2ax-9$,

所以$f'(3)=27-6a-9=0$,解得$a=3$.

(2)由(1)知,$f(x)=x^3-3x^2-9x+1$,所以$f'(x)=3(x-3)(x+1)$.

令$f'(x)>0$,解得$x<-1$或$x>3$;令$f'(x)<0$,解得$-1<x<3$.所以$f(x)$在$(-2,-1)$上单调递增,$(-1,0)$上单调递减,所以$f(x)_{max}=f(-1)=6$.又$f(-2)=-1$,$f(0)=1$,

所以$f(x)_{min}=f(-2)=-1$.故f(x)在区间$[-2,0]$上的最大值为6,最小值为-1.

20.(1)**证明**:显然$a_n\neq0$,将$a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}$两边同时取倒数得$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+1}{a_n}=\frac{1}{a_n}+2$,

即$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$,所以数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是公差为2的等差数列,所以$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_3}+(n-3)\times2=2n$,所以$a_n=\frac{1}{2n}$.

(2)**解**:选①.

由已知得$b_n=\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{4n(n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

那么数列$\{b_n\}$的前n项和$T_n=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{4n+4}$.

选②.

由已知得$b_n=(-1)^n2n$,

那么数列$\{b_n\}$的前n项和$T_n=-2+4-6+8-\cdots+(-1)^n2n$,

当n为偶数时,$T_n=2\times\frac{n}{2}=n$;

当n为奇数时,$T_n=-2+(-2)\times\frac{n-1}{2}=-n-1$.

故$T_n=\begin{cases}n,n=2k,\\-n-1,n=2k-1\end{cases}(k\in\mathbf{N}_+)$.

选③.

由已知得$b_n=2n+\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}=2n+\left(\frac{1}{9}\right)^n$,

那么数列$\{b_n\}$的前n项和$T_n=(2+4+\cdots+2n)+\left[\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{9}\right)^n\right]$

$=\frac{(2+2n)n}{2}+\frac{\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{9^n}\right)}{1-\frac{1}{9}}=n^2+n+\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$.

21.**解**:(1)设数列$\{a_n\}$的公比为q,由题设得$2a_1=a_2+a_3$,即$2a_1=a_1q+a_1q^2$.所以$q^2+q-2=0$,解得$q=1$(舍去)或$q=-2$.故数列$\{a_n\}$的公比为-2.

(2)记S_n为$\{na_n\}$的前n项和.由(1)及题设可得

$a_n=(-2)^{n-1}$,所以$S_n=1+2\times(-2)+\cdots+n\cdot(-2)^{n-1}$,

$-2S_n=-2+2\times(-2)^2+\cdots+(n-1)\cdot(-2)^{n-1}+n\cdot(-2)^n$.

两式相减,得$3S_n=1+(-2)+(-2)^2+\cdots+(-2)^{n-1}-n\cdot(-2)^n=\frac{1-(-2)^n}{3}-n\cdot(-2)^n$.

所以$S_n=\frac{1}{9}-\frac{(3n+1)(-2)^n}{9}$.

22.(1)**解**:函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,且$f'(x)=1-\frac{m}{x}$,

当$m\leqslant0$时,$f'(x)>0$恒成立,此时函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增;

当$m>0$时,由$f'(x)=1-\frac{m}{x}>0$,解得$x>m$,由$f'(x)<0$,解得$0<x<m$,

所以函数$f(x)$在$(0,m)$上单调递减,在$(m,+\infty)$上单调递增.

综上,当$m\leqslant0$时,函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增;当$m>0$时,函数$f(x)$在$(0,m)$上单调递减,在$(m,+\infty)$上单调递增.

(2)**证明**:由(1)可知,当$m\leqslant0$时,函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,$f(x)$无最小值;

当$m>0$时,函数$f(x)$在$(0,m)$上单调递减,在$(m,+\infty)$上单调递增,

所以$f(x)_{min}=f(m)=-m\ln m$,即$g(m)=-m\ln m$,

则$g'(m)=-1-\ln m$,

由$g'(m)>0$,得$0<m<\frac{1}{e}$,由$g'(m)<0$,得$m>\frac{1}{e}$,

所以$g(m)$在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$上单调递减,

所以$g(m)\leqslant g\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}=\frac{1}{e}$,即$g(m)\leqslant\frac{1}{e}$在$(0,+\infty)$上恒成立.

第 11 期

第 2~3 版综合测试(三)参考答案

一、单项选择题

1.C

提示:因为$S_3=15$,$a_3=5$,所以$\begin{cases}a_1+a_1q+a_1q^2=15,\\a_1q^2=5,\end{cases}$解得$q=1$或$-\frac{1}{2}$.故选C.

2.C **提示**:因为$y=\frac{1}{x}$,所以$y'=-\frac{1}{x^2}$,所以当x=1时,$k=\tan\alpha=-1$,

因为$\alpha\in[0,\pi)$,所以$\alpha=\frac{3\pi}{4}$.故选C.

3.B **提示**:在等差数列$\{a_n\}$中,由$a_3=2$,$a_{11}=6$,得$d=\frac{a_{11}-a_3}{11-3}=\frac{6-2}{8}=\frac{1}{2}$,

则$a_1=a_3-2d=2-2\times\frac{1}{2}=1$,所以$S_{13}=13a_1+\frac{13\times12}{2}\times d=13\times1+\frac{13\times12}{2}\times\frac{1}{2}=52$.故选B.

4.A **提示**:$(a^x)'=a^x\ln a$,$(\cos x)'=-\sin x$,$\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)'=0$,$(x^{-5})'=-5x^{-6}$.故选A.

5.C **提示**:在等差数列$\{a_n\}$中,由$S_{35}<0$,$S_{36}>0$,得$\begin{cases}\frac{(a_1+a_{35})\times35}{2}<0,\\\frac{(a_1+a_{36})\times36}{2}>0,\end{cases}$则$\begin{cases}a_{18}<0,\\a_{18}+a_{19}>0,\end{cases}$

可得$a_{18}<0$,$a_{19}>0$,且$a_{19}>|a_{18}|$,若对任意的正整数n,都有$S_n\geqslant S_k$,则k=18.故选C.

6.B **提示**:由$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\approx\ln n+\gamma$,取$n=5$,则$\ln5\approx1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-(0.577\,215\,664\,901\cdots)\approx1.706$,

而$\ln5=\ln10-\ln2\approx2.303-0.693=1.610$,所以用上式估算出的ln5与实际的ln5的误差绝对值近似为$1.706-1.610=0.096$.故选B.

7.D **提示**:设$g(x)=\frac{f(x)}{x}$,所以$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$,因为$x>0$时,$xf'(x)-f(x)>0$,所以在$(0,+\infty)$上,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增,

因为f(x)($x\in\mathbf{R}$)是奇函数,所以函数$g(x)$是偶函数,所以$g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,且$g(-1)=g(1)=0$,所以当$x<-1$时,$g(x)>0$,$f(x)<0$,当$-1<x<0$时,$g(x)<0$,$f(x)>0$,当$0<x<1$时,$g(x)<0$,$f(x)<0$,当$x>1$时,$g(x)>0$,$f(x)>0$.所以当$f(x)>0$时,$-1<x<0$或$x>1$.故选D.

8.C **提示**:因为$f(x)=-x^3-2x^2+4x$,所以$f'(x)=-3x^2-4x+4$,令$f'(x)=0$,得$x=\frac{2}{3}$或$x=-2$,因为该函数在闭区间$[-3,3]$上连续可导,且极值点处的导数为零,所以最小值一定在端点处或极值点处取得,而$f(-3)=-3$,$f(-2)=-8$,$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{40}{27}$,$f(3)=-33$,

所以该函数在$[-3,3]$上的最小值为-33,因为当$x\in[-3,3]$时,有$f(x)\geqslant a$恒成立,只需$a\leqslant f(x)_{min}$,即$a\leqslant-33$.故选C.

二、多项选择题

9.CD **提示**:对于A,$f(x)=x-\frac{1}{x}$,有$f(-1)=f(1)=0$,则f(x)在其定义域上不是单调函数,不符合题意;对于B,$f(x)=xe^x$,其导数$f'(x)=xe^x+e^x=(x+1)e^x$,在区间$(-\infty,-1)$上,$f'(x)<0$,则f(x)单调递减,不符合题意;对于C,$f(x)=x+\sin x$,其导数$f'(x)=1+\cos x\geqslant0$,则f(x)在定义域上为增函数,符合题意;对于D,$f(x)=e^x-e^{-x}-2x$,其导数$f'(x)=e^x+e^{-x}-2\geqslant2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-2=0$,则f(x)在定义域上为增函数,符合题意.故选CD.

10.AD **提示**:定义域为$\{x|x\neq1\}$,由$f(x)=\frac{2x-1}{x-1}\cdot e^x$,得$f'(x)=\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)'\cdot e^x+\frac{2x-1}{x-1}\cdot(e^x)'=\frac{-1}{(x-1)^2}e^x+\frac{2x-1}{x-1}\cdot e^x=\frac{2x^2-3x}{(x-1)^2}e^x=\frac{x(2x-3)}{(x-1)^2}e^x$,

当$x<0$或$x>\frac{3}{2}$时,$f'(x)>0$,当$0<x<1$或$1<x<\frac{3}{2}$时,$f'(x)<0$,

所以函数f(x)在$(-\infty,0)$和$\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$上单调递增,在$(0,1)$和$\left(1,\frac{3}{2}\right)$上单调递减,

所以x=0时,f(x)有极大值,当$x=\frac{3}{2}$时,f(x)有极小值,

所以x=0为极大值点,$x=\frac{3}{2}$为极小值点,所以A、D正确,B、C错误.故选AD.

11.BC **提示**:由$a_1=p$,$2S_n-S_{n-1}=2p$,则$2S_2-S_2=2p$,得$a_2=\frac{p}{2}$,又$2S_n-S_{n-1}=2p$,则$2S_{n+1}-S_n=2p$,

两式相减,得$2a_{n+1}-a_n=0(n\geqslant2)$,又$2a_2=a_1$,即$a_{n+1}=\frac{1}{2}\cdot a_n$,$n\in\mathbf{N}_+$.

对于A,当$p=0$时,显然数列$\{a_n\}$不是等比数列,当$p\neq0$时,数列$\{a_n\}$是以$\frac{1}{2}$为公比的等比数列,故A错误;对于B,当$p=1$时,数列$\{a_n\}$是以1为首项,$\frac{1}{2}$为公比的等比数列,则$S_4=\frac{1\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{15}{8}$,故B正确;对于C,当$p=\frac{1}{2}$时,数列$\{a_n\}$是以$\frac{1}{2}$为首项,$\frac{1}{2}$为公比的等比数列,则$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$,则$a_ma_n=\left(\frac{1}{2}\right)^m\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{m+n}=a_{m+n}$,故C正确;对于D,$|a_5|+|a_6|=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{128}\right)|p|$,$|a_5|+|a_6|=\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)|p|$,当$p\neq0$时,$|a_5|+|a_6|\neq|a_5|+|a_6|$,故D错误.故选BC.

12.ABD **提示**:对于A,由数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$,$a_2=2$,$a_{n+1}=4a_n-3a_{n-1}$,则$a_{n+1}-a_n=3(a_n-a_{n-1})$,又$a_2-a_1=1$,则数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是以1为首项,3为公比的等比数列,故A正确;

对于B,由数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$,$a_2=2$,$a_{n+1}=4a_n-3a_{n-1}$,则$(a_{n+1}-3a_n)-(a_n-3a_{n-1})=0$,即数列$\{a_{n+1}-3a_n\}$为等差数列,故B正确;

对于C,由题意得,数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是以1为首项,3为公比的等比数列,则数列$\{a_{n+1}-a_n\}$的前n项和为$\frac{1\times(1-3^n)}{1-3}=\frac{3^n-1}{2}$,故C错误;

对于D,当$n\geqslant2$时,$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=\frac{1-3^{n-1}}{1-3}+1=\frac{3^{n-1}+1}{2}$,当$n=1$时,满足上式,即$a_n=\frac{3^{n-1}+1}{2}$,故D正确.故选ABD.

三、填空题

13.20 **提示**:由题意知,$a_6^2=a_2\cdot a_{10}$,即$100=5\cdot a_{10}$,得$a_{10}=20$.

14.$(n-3)^2$(答案不唯一) **提示**:根据题意,要求数列$\{a_n\}$满足:①先单调递减后单调递增;②当$n=3$时取得最小值.可以结合二次函数的性质分析,如$a_n=(n-3)^2(n\in\mathbf{N}_+)$,当$1\leqslant n\leqslant2$时,$a_{n+1}-a_n=2n-5<0$,数列单调递减,当$n\geqslant3$时,$a_{n+1}-a_n=2n-5>0$,数列单调递增,即$a_1>a_2>a_3<a_4<\cdots$,可得当$n=3$时,该数列取得最小值,符合题意.故$a_n=(n-3)^2(n\in\mathbf{N}_+)$.

15.$\left(\frac{1}{3},1\right)$ **提示**:因为函数$f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$,x>0,所以$f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$,令$f'(x)=0$,解得x=1.当$f'(x)>0$时,$0<x<1$,函数f(x)单调递增;当$f'(x)<0$时,x>1,函数f(x)单调递减,所以1是函数的极值点,又因为函数f(x)在区间$\left(a,a+\frac{2}{3}\right)(a>0)$上存在极值,所以$a<1<a+\frac{2}{3}$,解得$\frac{1}{3}<a<1$,所以实数a的取值范围是$\left(\frac{1}{3},1\right)$.

16.$\frac{1}{2e}$ **提示**:设$g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$,则$g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}=\frac{e^{2x}}{e^x}=e^x$,

故$g(x)=e^x+c$(c为常数),则$f(x)=(e^x+c)e^x$,又因为f(0)=1,即$1+c=1$,所以$c=0$,$f(x)=e^{2x}$,

则对任意x>0,不等式$2af(x)-\ln x+\ln a\geqslant0$恒成立,

即对任意x>0,不等式$2ae^{2x}\geqslant\ln\frac{x}{a}$恒成立,

即对任意x>0,不等式$2xe^{2x}\geqslant\frac{x}{a}\ln\frac{x}{a}$恒成立,即对任意x>0,不等式$\ln(2x)+2x\geqslant\ln\frac{x}{a}+\ln\left(\ln\frac{x}{a}\right)$恒成立.

令$h(x)=x+\ln x$,x>0,所以$h'(x)=1+\frac{1}{x}>0$,所以h(x)在$(0,+\infty)$上单调递增,

由$h(2x)\geqslant h\left(\ln\frac{x}{a}\right)$,得$2x\geqslant\ln\frac{x}{a}$,即$2x\geqslant\ln x-\ln a$,

所以$\ln a\geqslant-2x+\ln x=\ln e^{-2x}+\ln x=\ln(x\cdot e^{-2x})$,

所以$a\geqslant x\cdot e^{-2x}$,令$t(x)=x\cdot e^{-2x}$,x>0,

$t'(x)=\frac{e^{2x}-2x\cdot e^{2x}}{(e^{2x})^2}=\frac{1-2x}{e^{2x}}$,令$t'(x)>0$,得$0<x<\frac{1}{2}$,

t(x)单调递增,令$t'(x)<0$,得$x>\frac{1}{2}$,t(x)单调递减,

所以$t(x)\leqslant t\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{e}=\frac{1}{2e}$,

所以$a\geqslant\frac{1}{2e}$,所以a的最小值为$\frac{1}{2e}$.

四、解答题

17.**解**:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,则$4d=a_6-a_1=18-2=16$,解得d=4,

故$a_n=a_1+(n-1)d=2+4(n-1)=4n-2$.

(2)$S_n=\frac{n[2+(4n-2)]}{2}=2n^2$,令$2n^2>60n+800$,即$n^2-30n-400>0$,解得$n>40$或$n<-10$(舍去),故使得$S_n>60n+800$成立的n的取值范围是$(40,+\infty)$,$n\in\mathbf{N}_+$.

18.**解**:(1)因为函数$f(x)=2x-\ln x+\frac{3}{x}$,所以$f'(x)=2-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}=\frac{2x^2-x-3}{x^2}$,

所以$f'(1)=-2$,又f(1)=5,所以切点坐标为(1,5),所以所求的切线方程为$y-5=-2(x-1)$,即$2x+y-7=0$.

(2)定义域为$(0,+\infty)$,由(1)可知,$f'(x)=\frac{2x^2-x-3}{x^2}$,

令$f'(x)=0$,即$2x^2-x-3=0$,解得$x=\frac{3}{2}$或$x=-1$(舍去),

当$0<x<\frac{3}{2}$时,$f'(x)<0$,f(x)在$\left(0,\frac{3}{2}\right)$上单调递减;当$x>\frac{3}{2}$时,$f'(x)>0$,f(x)在$\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$上单调递增.所以当$x=\frac{3}{2}$时,f(x)有极小值为$5-\ln\frac{3}{2}$,无极大值.

19.**解**:(1)若$\{T_n\}$为等比数列,设公比为q,则公比$q=\frac{T_3}{T_2}=\frac{8}{2}=4$,因为$T_3=8$,所以$T_1=\frac{T_3}{q^2}=\frac{1}{2}=a_1$.

所以当$n\geqslant2$时,$T_n=T_1\cdot q^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot4^{n-1}=\frac{4^n}{8}$,所以$T_{n-1}=\frac{4^{n-1}}{8}$,所以$a_n=\frac{T_n}{T_{n-1}}=4$.

综上,$a_n=\begin{cases}\frac{1}{2},n=1,\\4,n\geqslant2,n\in\mathbf{N}_+.\end{cases}$

(2)因为$T_n=a_1a_2\cdots a_n$,且$T_2=a_1a_2=2$,$T_3=a_1a_2a_3=8$,所以$a_3=4$.

因为$\{a_n\}$为等比数列,设公比为q,所以$T_3=a_1a_2a_3=a_2^3=8$,所以$a_2=2$,

所以$q=\frac{a_3}{a_2}=2$,所以$a_1=\frac{a_2}{q}=1$,所以$a_n=a_1\cdot q^{n-1}=2^{n-1}$,

可得$T_n=a_1a_2\cdots a_n=1\times2\times2^2\times2^3\times\cdots\times2^{n-1}=2^{1+2+3+\cdots+n-1}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

20.**证明**:(1)函数$f(x)=xe^x-a$的定义域为$\mathbf{R}$,$f'(x)=(x+1)e^x$,所以在$(-\infty,-1)$上,$f'(x)<0$,f(x)单调递减,在$(-1,+\infty)$上,$f'(x)>0$,f(x)单调递增,

因为$x<0$,$f(x)<0$,$f(0)=-a<0$,$f(a)=ae^a-a=a(e^a-1)>0$,所以f(x)恰有一个零点.

$g(x)=x\ln x-a$的定义域为$(0,+\infty)$,$g'(x)=\ln x+1$,所以在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减,在$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$上,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增.因为$0<x<1$时,$g(x)<0$,$g(1)=-a<0$,令$b>\max\{a,e\}$,$g(b)=b\ln b-a>0$,所以函数$g(x)$恰有一个零点.

(2)由(1)得函数f(x)的零点$x_1>0$,$g(x)$的零点$x_2>1$,则有$x_1e^{x_1}-a=0$,$x_2\ln x_2-a=0$,所以$x_1e^{x_1}=x_2\ln x_2$,所以$x_1e^{x_1}=(\ln x_2)e^{\ln x_2}$,所以$f(x_1)=f(\ln x_2)$,

因为f(x)在$(0,+\infty)$上单调递增,由(1)得$x_1>0$,$x_2>1$,$\ln x_2>0$,

所以$x_1=\ln x_2$,所以$e^{x_1}=x_2$,因为$x_1e^{x_1}-a=0$,所以$x_1x_2-a=0$,所以$x_1x_2=a$,得证.

21.(1)**解**:若选①,$2a_1+2^2a_2+2^3a_3+\cdots+2^na_n=\frac{4^{n+1}-4}{3}$,

则$2a_1+2^2a_2+2^3a_3+\cdots+2^{n+1}a_{n+1}=\frac{4^n-4}{3}(n\geqslant2)$,

两式相减,得$2^na_n=4^n$,所以$a_n=2^n(n\geqslant2)$,又$a_1=2$,也满足上式,所以$a_n=2^n$.

若选②,$S_n=2a_n-2$,则$S_{n-1}=2a_{n-1}-2(n\geqslant2)$,两式相减,得$a_n=2a_n-2a_{n-1}$,

所以$a_n=2a_{n-1}(n\geqslant2)$,又$a_1=2$,所以数列$\{a_n\}$是以2为首项,2为公比的等比数列,所以$a_n=2^n$.

若选③,$S_{n+1}-2S_n=2$,所以$S_n-2S_{n-1}=2(n\geqslant2)$,两式相减,得$a_{n+1}-2a_n=0$,

所以$a_{n+1}=2a_n(n\geqslant2)$,又$S_2-2S_1=a_2-a_1=2$,$a_1=2$,所以$a_2=4$,所以$a_n=2a_n$,

所以$a_{n+1}=2a_n(n\in\mathbf{N}_+)$,又$a_1=2$,所以数列$\{a_n\}$是以2为首项,2为公比的等比数列,所以$a_n=2^n$.

(2)**证明**:由(1)可得$b_n=n(n+1)$,所以$\frac{2n+1}{b_n^2}=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$,

所以$T_n=\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]=1-\frac{1}{(n+1)^2}<1$,

又易知$f(n)=1-\frac{1}{(n+1)^2}(n\in\mathbf{N}_+)$单调递增,

所以$f(n)\geqslant f(1)=\frac{3}{4}$,所以$\frac{3}{4}\leqslant T_n<1$.

22.**解**:(1)f(x)定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=x-\frac{a}{x}=\frac{x^2-a}{x}$,令$f'(x)>0$,得$x>\sqrt{a}$,令$f'(x)<0$,得$0<x<\sqrt{a}$,

所以f(x)在$(0,\sqrt{a})$上单调递减,在$(\sqrt{a},+\infty)$上单调递增.

(2)①若$\sqrt{a}\leqslant1$,即$0<a\leqslant1$,在(1,e)上,$f'(x)>0$,f(x)单调递增,

所以f(x)在[1,e]上的最小值为$f(1)=\frac{1}{2}$;

②若$1<\sqrt{a}<e$,即$1<a<e^2$,

在$(1,\sqrt{a})$上,$f'(x)<0$,f(x)单调递减,在$(\sqrt{a},e)$上,$f'(x)>0$,f(x)单调递增,

所以在[1,e]上,$f(x)_{min}=f(\sqrt{a})=\frac{1}{2}a(1-\ln a)$;

③若$\sqrt{a}\geqslant e$,即$a\geqslant e^2$,在(1,e)上,$f'(x)<0$,f(x)单调递减,

所以在[1,e]上,$f(x)_{min}=f(e)=\frac{1}{2}e^2-a$.

综上所述,当$0<a\leqslant1$时,$f(x)_{min}=\frac{1}{2}$,当$1<a<e^2$时,$f(x)_{min}=\frac{1}{2}a(1-\ln a)$,当$a\geqslant e^2$时,$f(x)_{min}=\frac{1}{2}e^2-a$.

(3)由(2)可知,当$0<a\leqslant1$或$a\geqslant e^2$时,f(x)在(1,e)上单调递增或递减,不可能存在两零点;

当$1<a<e^2$时,要使得f(x)在区间(1,e)上恰有两个零点,

则$\begin{cases}\frac{1}{2}a(1-\ln a)<0,\\f(1)=\frac{1}{2}>0,\\f(e)=\frac{1}{2}e^2-a>0,\end{cases}$解得$e<a<\frac{1}{2}e^2$,所以a的取值范围为$\left(e,\frac{1}{2}e^2\right)$.