1,所以 $f(x)$ 在点 $(2,0)$ 处的切线方程为 $y=x-2$,所以当 $k=1$ 时,方程 $f(x)=kx-2$ 只有 1 个实数根,且为 $x=2$,故 D 错误.故选 ACD.

3.AC **提示**:由 $f(x)=e^x(x^2-x+1)$,得 $f'(x)=x(x+1)e^x$,所以当 $x\in(-\infty,-1)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,当 $x\in(-1,0)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增.对于 A,函数 $[f(x)]_{极小值}=f(0)=1$,故 A 正确;对于 B,函数 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减,在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,故 B 错误;对于 C,函数 $f(x)$ 在 $(-2,-1)$ 和 $(0,2)$ 上单调递增,在 $(-1,0)$ 上单调递减,又 $f(-1)=\frac{3}{e}$,$f(2)=3e^2$,所以函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的最大值为 $3e^2$,故 C 正确;对于 D,由 $f(0)=1$,$f(-1)=\frac{3}{e}$,结合函数 $f(x)$ 的大致图象(图略),得当 $1<m<\frac{3}{e}$ 时,$y=f(x)$ 的图象与直线 $y=m$ 有 3 个不同的交点,即方程 $f(x)=m$ 有 3 个不等的实根,故 D 错误.故选 AC.

4.BD **提示**:对于 A,当 $a=0$ 时,$f(x)=xe^x$,$f'(x)=(x+1)e^x$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减,在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增,所以 $f(x)_{\min}=f(-1)=-\frac{1}{e}$,故 A 错误;对于B,当 $a=1$ 时,$f(x)=xe^x+x$,$f'(x)=(x+1)e^x+1$,$f'(0)=2$,所以 $f(x)$ 在 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y=2x$,故 B 正确;对于C,$f'(x)=(x+1)e^x+a$,若函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增,则 $f'(x)\geqslant0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立,所以 $a\geqslant-(x+1)e^x$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立,令 $g(x)=-(x+1)e^x$,$x\geqslant0$,则 $g'(x)=-(x+2)e^x<0$,所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减,所以 $a\geqslant g(x)_{\max}=g(0)=-1$,故 C 错误;对于 D,当 $x=0$ 时,$a\in\mathbf{R}$ 不等式恒成立;当 $x\in(0,1]$ 时,$f(x)\leqslant x^2$ 恒成立,等价于 $xe^x+ax\leqslant x^2$ 恒成立,即 $a\leqslant x-e^x$ 恒成立,设 $h(x)=x-e^x$,$0<x\leqslant1$,则 $h'(x)=1-e^x<0$ 在 $(0,1]$ 上恒成立,所以 $h(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减,所以 $a\leqslant h(x)_{\min}=h(1)=1-e$,故 D 正确.故选 BD.

专项训练(2)

1.BC **提示**:定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(2+x)=f(-x)$,所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,所以 $f(0)=f(2)$,故 C 正确,D 错误;当 $x\geqslant1$ 时,$f(x)=\ln x$,则 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增,$f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调递减,则 $f(-1)>f(0)$,故 A 错误,B 正确.故选 BC.

2.ABC **提示**:对于 A,$f'(x)=\ln(x+2)+\frac{x}{x+2}$,当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$\ln(x+2)>0$,$\frac{x}{x+2}>0$,所以 $f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,故 A 正确;对于 B,令 $x\ln(x+2)=0$,解得 $x=0$ 或 $x=-1$,所以 $f(x)$ 有两个零点,故 B 正确;对于 C,曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处切线的斜率为 $f'(-1)=-1$,故 C 正确;对于 D,函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-2,+\infty)$,关于原点不对称,故 D 错误.故选 ABC.

3.AD **提示**:因为函数 $f(x)=e^{x-1}+x-2$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,且 $f(1)=0$,所以 $\alpha=1$,结合"零点伴侣"的定义,得 $|1-\beta|\leqslant1$,则 $0\leqslant\beta\leqslant2$,又函数 $g(x)=x^2-ax-a+3$ 在区间 $[0,2]$ 上存在零点,即方程 $x^2-ax-a+3=0$ 在 $[0,2]$ 上存在实数根,所以 $a=\frac{x^2+3}{x+1}=(x+1)+\frac{4}{x+1}-2$ 在 $[0,2]$ 上存在实数根.令 $h(x)=(x+1)+\frac{4}{x+1}-2$,$x\in[0,2]$,所以 $h(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减,在 $[1,2]$ 上单调递增,又 $h(0)=3$,$h(2)=\frac{7}{3}$,$h(1)=2$,所以 $h(x)$ 的值域为 $[2,3]$,所以实数 a 的取值范围是 $[2,3]$.故选 AD.

4.BCD **提示**:由 $f(x)=e^x\cdot x^3$,得 $f'(x)=x^2(x+3)e^x$,所以当 $x>-3$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,当 $x<-3$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,所以 $f(x)$ 在 $x=-3$ 处取得极小值,也是最小值,没有极大值,故 A 错误;当 $x>-3$ 时,$f(x)$ 单调递增,且 $-3<e^{-2}<1<\ln\pi$,所以 $f(e^{-2})<f(1)<f(\ln\pi)$,故 B 正确;因为 $f(x)_{\min}=f(-3)=-\frac{27}{e^3}<0$,且当 $x\to-\infty$ 时,$f(x)\to0$ 且 $f(x)<0$,当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)\to+\infty$,所以函数 $f(x)$ 只有 1 个零点,故 C 正确;$f(x)=kx$,即 $e^x\cdot x^3=kx$ 有一个根为 $x=0$,当 $x\neq0$ 时,方程为 $e^x\cdot x^2=k$,令 $h(x)=e^x\cdot x^2$,则 $h'(x)=x(x+2)e^x$,当 $x>0$ 或 $x<-2$ 时,$h'(x)>0$,$h(x)$ 单调递增,当 $-2<x<0$ 时,$h'(x)<0$,$h(x)$ 单调递减,又 $h(-2)=\frac{4}{e^2}$,$h(0)=0$,所以当 $0<k<\frac{4}{e^2}$ 时,$y=h(x)$ 的图象与 $y=k$ 有 3 个交点,此时 $e^x\cdot x^2=k$ 有 3 个实数根,则 $f(x)=kx$ 有 4 个实数解,故 D 正确.故选 BCD.

专项训练(3)

1.ABD **提示**:因为 $\forall x\in\mathbf{R}$,$f(-x)=-f(x)$,所以 $f(x)$ 为奇函数,$f(0)=0$,故 A 正确;由题意,得 $f(1)=1-2=-1$,所以 $f(-1)=-f(1)=1$,故 B 正确;当 $x>0$ 时,$f(x)=x^2-\frac{2}{x}$,因为函数 $y=x^2$ 与 $y=-\frac{2}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上都是增函数,所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,又 $f(x)$ 为奇函数,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增,故 C 错误;当 $x<0$ 时,$-x>0$,则 $f(-x)=x^2+\frac{2}{x}$,所以 $f(x)=-f(-x)=-x^2-\frac{2}{x}$,又 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增,所以 $f(x)>f(-1)=1$,且 $x\to0$ 时,$f(x)\to+\infty$,所以 $\exists x\in(-1,0)$,$f(x)>2$,故 D 正确.故选 ABD.

2.ABD **提示**:对于 A,令 $x=y=0$,则 $f(0)=f(0)+f(0)$,解得 $f(0)=0$,故 A 正确;对于 B,令 $y=-x$,则 $f(0)=f(x)+f(-x)$,所以 $f(x)+f(-x)=0$,即 $f(-x)=-f(x)$,所以 $f(x)$ 为奇函数,故 B 正确;对于 C,设 $x_1<x_2$,则 $x_1-x_2<0$,由题意,得 $f(x_1-x_2)>0$,即 $f(x_1-x_2)=f(x_1)+f(-x_2)=f(x_1)-f(x_2)>0$,则 $f(x_1)>f(x_2)$,所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,则 $f(x)$ 在 $[m,n]$ 上的最大值 $f(m)$,故 C 错误;对于 D,$f(x-1)+f(x^2-1)>0$ 等价于 $f(x-1)>f(1-x^2)$,因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为单调递减,所以 $x-1<1-x^2$,解得 $-2<x<1$,所以 $f(x-1)+f(x^2-1)>0$ 的解集为 $\{x|-2<x<1\}$,故 D 正确.故选 ABD.

3.AD **提示**:$f(x)=\frac{2x-1}{x-1}\cdot e^x$ 的定义域为 $\{x|x\neq1\}$,$f'(x)=\frac{x(2x-3)}{(x-1)^2}\cdot e^x$,当 $x<0$ 或 $x>\frac{3}{2}$ 时,$f'(x)>0$,当 $0<x<1$ 或 $1<x<\frac{3}{2}$ 时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ 上单调递增,在 $(0,1)$ 和 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 上单调递减,所以当 $x=0$ 时,$f(x)$ 取得极大值,当 $x=\frac{3}{2}$ 时,$f(x)$ 取得极小值,所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点,$x=\frac{3}{2}$ 为 $f(x)$ 的极小值点,故 A,D 正确,B,C 错误.故选 AD.

4.ACD **提示**:对于 A,$f'(x)=x(x-1)e^x$,当 $x<0$ 或 $x>1$ 时,$f'(x)>0$,$0<x<1$ 时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增,$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,故 A 正确;对于 B,函数 $f(x)=e^x(x^2-3x+3)=e^x\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]>0$,故 B 错误;对于 C,$f(0)=3$,$f(1)=e$,当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)\to+\infty$,当 $x\to-\infty$ 时,$f(x)\to0$,故 C 正确;对于 D,作出 $f(x)$ 的大致图象(图略),又 $f(0)=3$,$f(2)=e^2>3$,所以 $0\leqslant t<2$,又 $t\in\mathbf{Z}$,则 $t=0$ 或 1,即 t 的最大值为 1,故 D 正确.故选 ACD.

专项训练(4)

1.ACD **提示**:因为函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,所以 $f(0)=0$,又 $f(x^2-1)+f(x^2+1)=0$,$f(1)=1$,令 $x=0$,得 $f(-1)+f(1)=0$,则 $f(-1)=-1$,故 A 错误;令 $x=\sqrt{n}$,$n\in\mathbf{N}_+$,由已知得 $f(n-1)+f(n+1)=0$,即 $f(n+1)=-f(n-1)$,则 $f(n+2)=-f(n)$,所以 $f(n+4)=-f(n+2)=f(n)$,$f(n+4k)=f(n)$,$k\in\mathbf{Z}$,结合 $f(0)=0$,则 $f(4^n)=f(0)=0$,故 B 正确;当 n 为偶数时,可设 $n=2k$,$k\in\mathbf{N}_+$,则 $f(2^n-1)=f(4^k-1)=f(-1)=-1$,当 n 为奇数时,可设 $n=2k+1$,$k\in\mathbf{N}$,则 $f(2^n-1)=f(2\cdot4^k-1)=f(1)=1$,当 $n=1$ 时,$f(2^n-1)=f(1)=1$,故 D 错误;当 n 为奇数时,可设 $n=2k+1$,$k\in\mathbf{N}$,此时 $f(2n-1)=f(4k+1)=f(1)=1$,当 n 为偶数时,可设 $n=2k$,$k\in\mathbf{N}_+$,则 $f(2n-1)=f(4k-1)=f(-1)=-1$,故 C 错误.故选 ACD.

2.AD **提示**:设切点为 $(x_0,x_0^3-3x_0^2)$,由 $f(x)=x^3-3x^2$,得 $f'(x_0)=3x_0^2-6x_0$,则过切点的切线方程为 $y-(x_0^3-3x_0^2)=(3x_0^2-6x_0)(x-x_0)$,把 $(3,0)$ 代入,得 $-x_0^3+3x_0^2=(3x_0^2-6x_0)(3-x_0)$,即 $x_0(x_0-3)^2=0$,解得 $x_0=0$ 或 3,当 $x=0$ 时,切线方程为 $y=0$,当 $x=3$ 时,切线方程为 $9x-y-27=0$.故选 AD.

3.ABC **提示**:在同一坐标系中,分别作出 $y=e^x-1$ 与 $y=-x^2-4x-4$ 的图象(图略),当 $m>0$ 时,$y=e^x-1(x\geqslant m)$ 没有零点,$y=-x^2-4x-4(x<m)$ 有一个零点,所以函数 $f(x)$ 有一个零点;当 $-2<m\leqslant0$ 时,$y=e^x-1(x\geqslant m)$ 有一个零点,$y=-x^2-4x-4(x<m)$ 有一个零点,所以函数 $f(x)$ 有两个零点;当 $m\leqslant-2$ 时,$y=e^x-1(x\geqslant m)$ 有一个零点,$y=-x^2-4x-4(x<m)$ 没有零点,所以函数 $f(x)$ 有一个零点,所以函数 $f(x)$ 至多有 2 个零点,至少有 1 个零点,故A,C 正确;当 $m<-3$ 时,$y=e^x-1(x\geqslant m)$ 是增函数,$y=-x^2-4x-4(x<m)$ 也是增函数,且 $y=e^x-1>-1(x\geqslant m)$,$y=-x^2-4x-4<-1(x<m)$,所以 $f(x)$ 是增函数,故 B 正确;当 $m=0$ 时,$f(x)=\begin{cases}e^x-1,x\geqslant0,\\-x^2-4x-4,x<0,\end{cases}$ 由 $f(t)=0$,得 $t_1=0$,$t_2=-2$,由 $f(f(x))=0$,得 $f(x)=0$ 或 $f(x)=-2$,由 $f(x)=0$,得 $x_1=0$,$x_2=-2$,由 $f(x)=-2$,得 $x_3=-2+\sqrt{2}$,$x_4=-2-\sqrt{2}$,所以当 $m=0$ 时,方程 $f(f(x))=0$ 有 4 个不同的实数根,故 D 错误.故选 ABC.

4.BD **提示**:函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$,$f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}=0$,令 $f'(x)>0$,解得 $x>e$,故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(1,e)$ 上单调递减,在 $(e,+\infty)$ 上单调递增,故 A 错误;由 $f(x)$ 大致图象,且 $f(|x|)$ 为偶函数,则可作出 $y=f(|x|)$ 的大致图象(图略),所以 $f(|x|)=k$ 有 4 个不等的实根 $\Leftrightarrow y=f(|x|)$ 的图象与 $y=k$ 有 4 个不同的交点 $\Leftrightarrow k>e$,故 B 正确;因为 $x_1\ln x_2<x_2\ln x_1\Leftrightarrow\frac{x_1}{\ln x_1}<\frac{x_2}{\ln x_2}$,即 $f(x_1)<f(x_2)$,且 $0<x_1<x_2<1$,所以与 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减矛盾,故 C 错误;由题意,得 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上的值域应包含 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的值域,所以 $[a,+\infty)\subseteq[e,+\infty)$,所以 $a\geqslant e$,故 D 正确.故选 BD.

专题七 统计与概率

专项训练(1)

1.ABD **提示**:两件都是一等品的概率是 $\frac{C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{6}$,故 A 正确;两件中有 1 件是次品的概率是 $\frac{C_3^1}{C_4^2}=\frac{1}{2}$,故 B 正确;两件都是正品的概率是 $\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{1}{2}$,故 C 错误;两件中至少有 1 件是一等品的概率是 $1-\frac{C_2^2}{C_4^2}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$,故 D 正确.故选 ABD.

2.BD **提示**:平均数 $\bar{x}=\frac{50}{80}\times172+\frac{30}{80}\times164=169$,方差 $s^2=\frac{50}{80}\times[18+(172-169)^2]+\frac{30}{80}\times[30+(164-169)^2]=37.5$.故选 BD.

3.ACD **提示**:由展开式共有 7 项,得 $n=6$,所以所有项的二项式系数和为 $2^6=64$,故 A 正确;令 $x=1$,则展开式的所有项的系数和为 $\left(1+\frac{1}{2}\right)^6=\frac{729}{64}$,故 B 错误;二项式系数最大项为第 4 项,故 C 正确;展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^rx^{6-r}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^r=C_6^r\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^r\cdot x^{6-\frac{3}{2}r}$,$r=0,1,2,\cdots,6$,所以当 $r=0,2,4,6$ 时,为有理项,则有理项共有 4 项,故 D 正确.故选 ACD.

4.ABD **提示**:由分布列的性质,得 $\frac{1}{2}+a+\frac{1}{6}=1$,解得 $a=\frac{1}{3}$,则 $P(X=0)=\frac{1}{3}$,故 A 正确;$E(X)=(-1)\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}$,故 B 正确;$D(X)=\frac{1}{2}\times\left(-1+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\times\left(0+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{6}\times\left(1+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$,故 C 错误;$P(X>-1)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{1}{2}$,故 D 正确.故选 ABD.

专项训练(2)

1.ABC **提示**:$\bar{x}=\frac{1}{5}\times(1+2+3+4+5)=3$,$\bar{y}=\frac{1}{5}\times(4.9+5.1+5.5+5.7+5.8)=5.4$,因为 y 关于 x 的回归直线方程为 $\hat{y}=0.24x+\hat{a}$,所以 $5.4=0.24\times3+\hat{a}$,解得 $\hat{a}=4.68$,故 A 正确;$5\times75\%=3.75$,则数据 4.9,5.1,5.5,5.7,5.8 的 75% 分位数为第 4 个数据 5.7,故 B 正确;由 $0.24>0$,得 y 与 x 正相关,故 C 正确;$\hat{y}=0.24x+4.68$,则当 $x=8$ 时,$\hat{y}=6.6$,则 2023 年的借阅量约为 6.6 万册,故 D 错误.故选 ABC.

2.ABC **提示**:根据列联表,得 100 天中有 50 天下雨,50 天未下雨,所以夜晚下雨的概率约为 $\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$,故 A 正确;未出现"日落云里走",夜晚下雨的有 25 天,未出现"日落云里走"的一共有 25+45=70 天,所以未出现"日落云里走",夜晚下雨的概率约为 $\frac{25}{70}=\frac{5}{14}$,故 B 正确;$\chi^2=\frac{100\times(25\times45-25\times5)^2}{50\times50\times30\times70}\approx19.05>7.897$,所以依据 $\alpha=0.005$ 的独立性检验,认为"日落云里走"是否出现与天气有关,故 C 正确;由 C 项知,有关只能说明有可能下雨,不代表一定会下雨,故 D 错误.故选 ABC.

3.AC **提示**:对于 A,先将 5 位志愿者分成 3 组,每组至少一人,则每组人数分别为 3,1,1 或 2,2,1,再将这三组志愿者分配给 3 所学校,则不同的安排方法种数为 $\left(C_5^3+\frac{C_5^2C_3^2}{A_2^2}\right)\times A_3^3=150$ 种,故 A 正确;对于 B,若甲学校至少安排两人,则甲学校安排 2 人或 3 人,则不同的安排方法有 $(C_5^2C_3^2+C_5^3)\times A_2^2=80$ 种,故 B 错误;对于 C,因为小晗被安排到三个学校的任意一个学校是等可能的,所以小晗被安排到甲学校的概率为 $\frac{1}{3}$,故 C 正确;对于 D,记事件 A 为"小晗被安排到甲学校",事件 B 为"甲学校安排两人",则 $P(A)=\frac{1}{3}$,$P(AB)=\frac{C_4^1C_3^2A_2^2}{150}=\frac{4}{25}$,所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{12}{25}$,故 D 错误.故选 AC.

4.ABC **提示**:由题意知 $\xi\sim B\left(5,\frac{2}{3}\right)$,则 $X=10\xi-5(5-\xi)=15\xi-25$,所以 $E(\xi)=5\times\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$,$D(\xi)=5\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{10}{9}$,故 A 正确;所以 $P(X\leqslant5)=P(\xi\leqslant2)=P(\xi=0)+P(\xi=1)+P(\xi=2)=C_5^0\times\left(\frac{1}{3}\right)^5+C_5^1\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^4+C_5^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{17}{81}$,故 B 正确;$E(X)=15E(\xi)-25=25$,故 C 正确;$D(X)=15^2D(\xi)=15^2\times\frac{10}{9}=250$,故 D 错误.故选 ABC.

专项训练(3)

1.ACD **提示**:由 120 000:75 000:55 000=24:15:11,得从高中生中抽取的人数为 $\frac{11}{24+15+11}\times2000=440$,故A 正确;每名学生被抽到的概率为 $\frac{2000}{120\,000+75\,000+55\,000}=\frac{1}{125}$,故 B 错误;从小学生中抽取的人数为 $\frac{24}{24+15+11}\times2000=960$,从初中生中抽取的人数为 $\frac{15}{24+15+11}\times2000=600$,则估计该地区中小学生总体的平均近视率为 $\frac{960\times0.3+600\times0.7+440\times0.8}{960+600+440}\times100\%=53\%$,故 C 正确;估计高中学生的近视人数约为 55 000×80%=44 000,故 D 正确.故选 ACD.

2.ABD **提示**:由 $(a+0.02+0.035+0.025+a)\times10=1$,解得 $a=0.01$,故 A 正确;得分在区间 $[60,70)$ 内的学生人数为 $0.02\times10\times1000=200$,故 B 正确;因为得分在 $[50,80)$ 内的频率为 $(0.01+0.02+0.035)\times10=0.65>0.5$,所以估计该校学生党史知识竞赛成绩的中位数小于 80,故 C 错误;该校学生党史知识竞赛成绩的平均数为 $\bar{x}=55\times0.01\times10+65\times0.02\times10+75\times0.035\times10+85\times0.025\times10+95\times0.01\times10=75.5$,所以估计该校学生党史知识竞赛成绩的平均数落在区间 $[70,80)$ 内,故 D 正确.故选ABD.

3.ABD **提示**:由题意,得 A_1,A_2,A_3 是两两互斥的事件,故 D 正确;$P(A_1)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$,$P(A_2)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$,$P(A_3)=\frac{3}{10}$,$P(B|A_1)=\frac{5}{11}$,故 A 正确;$P(B|A_2)=\frac{4}{11}$,$P(B|A_3)=\frac{4}{11}$,所以 $P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)+P(A_3B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}+\frac{1}{5}\times\frac{4}{11}+\frac{3}{10}\times\frac{4}{11}=\frac{9}{22}$,又 $P(A_1B)=P(A_1)P(B|A_1)=\frac{5}{22}$,所以 $P(A_1B)\neq P(A_1)P(B)$,故 C 错误;$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{5}{9}$,故 B 正确.故选 ABD.

4.ABD **提示**:由 $X\sim N(0.9372,0.0139^2)$,得 $\mu=0.9372$,$\sigma=0.0139$.因为 $0.9<\mu$,所以 $P(X\leqslant0.9)<P(X\leqslant\mu)=0.5$,故 A 正确;因为 $P(X>0.9789)=P(X>\mu+3\sigma)$,所以 $P(X>0.9789)=\frac{1-0.9973}{2}=0.001\,35$,故 B 正确;因为 $|\mu-0.4|<|1.5-\mu|$,且 $0.4<\mu<1.5$,所以 $P(X<0.4)>P(X>1.5)$,故 C 错误;因为一只口罩过滤率小于等于 $\mu+2\sigma$ 的概率为 $0.9545+\frac{1-0.9545}{2}=0.977\,25$,又 $P(Y\geqslant1)=1-P(Y=0)=1-0.977\,25^{50}\approx0.6836$,故 D 正确.故选 ABD.

扫码免费下载
习题讲解 ppt

第 27 期
第 2~3 版

专题一 三角函数

专项训练(1)

1.BCD **提示**:$-\frac{7\pi}{6}$ 是第二象限角,故 A 错误;若 $\tan\alpha=2$,则 $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=3$,故 B 正确;若圆心角为 $\frac{\pi}{3}$ 的扇形的弧长为 π,则扇形的半径为 3,所以该扇形的面积 $S=\frac{1}{2}\times\pi\times3=\frac{3\pi}{2}$,故 C 正确;终边经过点 (m,m) 的角的集合为 $\left\{\alpha\middle|\alpha=\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$,故 D 正确.故选 BCD.

2.ABD **提示**:因为 $f(x)=\sin\pi x+\sqrt{3}\cos\pi x=2\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{3}\right)$,所以 $f(x)$ 的值域为 $[-2,2]$,故 A 正确;因为 $f\left(\frac{5}{3}\right)=2\sin2\pi=0$,所以 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{5}{3},0\right)$ 对称,故 B 正确;因为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\neq\pm2$,所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 不对称,故 C 错误;由 $\pi x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,得 $x=\frac{1}{6}+k$,$k\in\mathbf{Z}$,当 $k=-1,0,1,2,3$ 时,x 的值分别为 $-\frac{5}{6},\frac{1}{6},\frac{7}{6},\frac{13}{6},\frac{19}{6}$,且它们均在 $[-1,4]$ 内,所以 $f(x)$ 在 $[-1,4]$ 上有 5 个极值点,故 D 正确.故选 ABD.

3.ABD **提示**:$f(x)=\sin\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)+2=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+2$,因为 $f\left(\frac{11\pi}{12}\right)=3$,所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{11\pi}{12}$ 对称,故 A 正确;因为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$,所以 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{6},2\right)$ 对称,故 B 正确;令 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant2x-\frac{\pi}{3}\leqslant2k\pi+\frac{3\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,得 $k\pi+\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{11\pi}{12}$,$k\in\mathbf{Z}$,所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi+\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{11\pi}{12}\right]$,$k\in\mathbf{Z}$,故 C 错误;将函数 $y=\sin2x+2$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度,可得到 $y=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+2=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+2=f(x)$ 的图象,故 D 正确.故选 ABD.

4.CD **提示**:由图象可知,$f(x)$ 的最小正周期 $T=4\left(\frac{7\pi}{2}-2\pi\right)=6\pi$,则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{1}{3}$,因为 $f(2\pi)=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=2$,所以 $\frac{2\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,解得 $\varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$,所以 $f(x)=2\sin\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$,故 A 错误;易知 $g(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$,当 $x\in[-\pi,\pi]$ 时,$\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$,所以 $g(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上先减后增,故 B 错误;易知 $h(x)=2\sin\frac{1}{3}x$,所以 $h(-x)=-h(x)$,即 $h(x)$ 为奇函数,故 C 正确;因为 $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sqrt{3}$,所以 $f(3x)+a\geqslant f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$,即 $a\geqslant\sqrt{3}-2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ 上恒成立,当 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ 时,$x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right]$,所以 $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$,所以 $\sqrt{3}-2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\in[\sqrt{3}-1,\sqrt{3}+2]$,所以 $a\geqslant\sqrt{3}+2$,故 D 正确.故选 CD.

专项训练(2)

1.BD **提示**:$-\frac{\pi}{6}$ 是第四象限角,故 A 错误;设扇形的半径为 r,则 $\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot r^2=3\pi$,得 $r=3\sqrt{2}$,则扇形的弧长为 $\frac{\pi}{3}\times3\sqrt{2}=\sqrt{2}\pi$,故 B 正确;$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-A\right)=-\sin A$,$\sin(\pi-A)=\sin A$,故 C 错误;$\cos\alpha=\frac{-3}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}=-\frac{3}{5}$,故 D 正确.故选 BD.

2.AC **提示**:$\sin15°+\cos15°=\sqrt{2}\sin(15°+45°)=\frac{\sqrt{6}}{2}$,故 A 正确;$\sin^2\frac{\pi}{8}-\cos^2\frac{\pi}{8}=-\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,故 B 错误;因为 $\tan45°=\tan(12°+33°)=\frac{\tan12°+\tan33°}{1-\tan12°\tan33°}=1$,所以 $\tan12°+\tan33°+\tan12°\tan33°=1$,故 C 正确;因为 $\tan15°=\tan(60°-45°)=\frac{\tan60°-\tan45°}{1+\tan60°\tan45°}=2-\sqrt{3}$,所以 $2\sqrt{3}\tan15°+\tan^215°=2\sqrt{3}\times(2-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})^2=1$,故 D 错误.故选 AC.

3.AC **提示**:易知 $f(x)$ 的最小正周期为 π,故 A 正确;由 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$,得 $2x-\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right)$,所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$ 上先减后增,故 B 错误;$f\left(\frac{11\pi}{12}\right)=2\cos\frac{3\pi}{2}=0$,故 C 正确;当 $x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{12}\right)$ 时,$2x-\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$,$f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{12}\right)$ 上单调递减,无最小值.故 D 错误.故选 AC.

4.BD **提示**:$f(x)=\sin\omega x-\sqrt{3}\cos\omega x=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$,由题意,得 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$,则 $T=\pi$,$\omega=2$,所以 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$,易知 $g(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.对于 A,$g(x)$ 为非奇非偶函数,故 A 错误;对于 B,$g\left(-\frac{\pi}{3}\right)=0$,故 B 正确;对于 C,由 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$,得 $x+\frac{\pi}{3}\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$,所以 $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ 上先增后减,故 C 错误;对于 D,当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ 时,$x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\in\left[\frac{1}{2},1\right]$,所以 $g(x)$ 的值域为 $[1,2]$,故 D 正确.故选 BD.

专项训练(3)

1.ABD **提示**:由 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$,$\theta\in(0,\pi)$,两边平方,得 $1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{25}$,则 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{12}{25}$,所以 $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\frac{49}{25}$,所以 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{7}{5}$,与原式联立,解得 $\sin\theta=\frac{4}{5}$,$\cos\theta=-\frac{3}{5}$,所以 $\tan\theta=-\frac{4}{3}$.故选 ABD.

2.AC **提示**:由题意,得 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\pi$,所以 $\omega=2$,$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,故 A 正确;当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 时,$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$,所以 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上先增后减,故 B 错误;$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$,故 C 正确;当 $x\in[0,\pi]$ 时,$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{13\pi}{6}\right]$,令 $f(x)=0$,即 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=0$,得 $2x+\frac{\pi}{6}=\pi$ 或 $2x+\frac{\pi}{6}=2\pi$,解得 $x=\frac{5\pi}{12}$ 或 $x=\frac{11\pi}{12}$,所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有两个零点,分别为 $\frac{5\pi}{12}$ 和 $\frac{11\pi}{12}$,故 D 错误.故选 AC.

3.BD **提示**:由图象可得,$A=1$,$\frac{1}{4}\times\frac{2\pi}{\omega}=3-1$,所以 $\omega=\frac{\pi}{4}$.根据"五点法"作图,可得 $\frac{\pi}{4}\times1+\varphi=\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$,函数 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{4}\right)$.$\omega+\varphi=\frac{\pi}{2}$,故 A 错误;$f(-2)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\times2+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,故 B 正确;当 $x\in(0,2022)$ 时,$\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{2023\pi}{4}\right)$,所以当 $\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{4}=\pi,2\pi,3\pi,\cdots,505\pi$ 时,$f(x)=0$,故 $f(x)$ 在区间 $(0,2022)$ 上存在 505 个零点,故 C 错误;$g(x)=\sin\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$,故 D 正确.故选 BD.

4.ACD **提示**:设点 P 距离水面的高度 h(米)与 t(秒)的函数解析式为 $h=A\sin(\omega t+\varphi)+B\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$,由题意,得 $h_{\max}=6$,$h_{\min}=-2$,所以 $\begin{cases}A+B=6,\\-A+B=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=4,\\B=2,\end{cases}$ 因为最小周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=60$,所以 $\omega=\frac{\pi}{30}$,则 $h=4\sin\left(\frac{\pi}{30}t+\varphi\right)+2$.当 $t=0$ 时,$h=0$,即 $4\sin\varphi+2=0$,则 $\sin\varphi=-\frac{1}{2}$,又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$,$h=4\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)+2$,故 D 正确;令 $h=4\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)+2=6$,得 $\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)=1$,解得 $t=20+60k$,$k\in\mathbf{N}$,所以点 P 第一次到达最高点需要 20 秒,故 A 正确;当 $t=155$ 时,$h=4\sin\left(\frac{\pi}{30}\times155-\frac{\pi}{6}\right)+2=4\sin5\pi+2=2$,故 B 错误;当 $t=50$ 时,$h=4\sin\left(\frac{\pi}{30}\times50-\frac{\pi}{6}\right)+2=4\sin\frac{3\pi}{2}+2=-2$,故 C 正确.故选 ACD.

专题二 平面向量、解三角形

专项训练(1)

1.AC **提示**:因为 $\cos A=\frac{1}{3}$,所以 $\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,又 $a=2\sqrt{2}$,设 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 R,由正弦定理,得 $2R=\frac{a}{\sin A}=3$,所以 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 $\frac{3}{2}$,故 A 正确,B 错误;由余弦定理,得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,即 $c^2-\frac{2\sqrt{6}}{3}c-2=0$,解得 $c=\sqrt{6}$(舍负),故 C 正确,D 错误.故选 AC.

2.BCD **提示**:对于 A,因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1,2)$,$-1\times1\neq2\times2$,所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 不共线,故 A 错误;对于 B,因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-5$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$,所以向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$,故 B 正确;对于 C,由 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(5,0)$,得 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=10$,则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\frac{10}{\sqrt{5}\times5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,故 C 正确;对于 D,因为 $\boldsymbol{c}=\left(\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$,则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$,故 D 正确.故选 BCD.

3.ABD **提示**:由 $a^2+c^2-b^2=ac$ 及余弦定理的推论,得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{ac}{2ac}=\frac{1}{2}$,因为 $B\in(0,\pi)$,所以 $B=\frac{\pi}{3}$,由正弦定理及 $\sin^2B=3\sin A\sin C$,得 $b^2=3ac$,又 $b=1$,所以 $ac=\frac{1}{3}$,所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{12}$,因为 $a^2+c^2-b^2=ac$,所以 $b^2=1=a^2+c^2-ac=(a+c)^2-3ac=(a+c)^2-1$,则 $a+c=\sqrt{2}$,所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $\sqrt{2}+1$.故选 ABD.

4.AD **提示**:对于 A,若两个非零向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,满足 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线且反向,故 A 正确;对于 B,由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$,得 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$,当 $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时,$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$,故 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$ 时满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$,故 B 错误;对于 C,$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=(-3,-1)$,$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(-1-m,-m)$,由 $\angle ABC$ 为锐角,则 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}>0$,且 $\overrightarrow{BA}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 不共线,即 $3(1+m)+m>0$,且 $3m-(1+m)\neq0$,解得 $m>-\frac{3}{4}$,且 $m\neq\frac{1}{2}$,故 C 错误;对于 D,由 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}>|\overrightarrow{AB}|^2$,得 $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{AB}>|\overrightarrow{AB}|^2$,所以 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}>0$,即 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}<0$,所以 $|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{BA}|\cdot\cos B<0$,则 $\cos B<0$,又 $0<B<\pi$,所以 $\frac{\pi}{2}<B<\pi$,所以 $\triangle ABC$ 为钝角三角形,故 D 正确.故选 AD.

专项训练(2)

1.ABD **提示**:因为 $\boldsymbol{a}=(3,-4)$,$\boldsymbol{b}=(2,1)$,所以 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(-1,-6)$,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(5,-3)$,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{34}$,与向量 $\boldsymbol{a}$ 平行的单位向量为 $\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\pm\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$,向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{2}{5}\boldsymbol{b}$.故选 ABD.

2.AD **提示**:由 $\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\sin B}$ 及正弦定理,得 $\cos A=\sin A$,则 $A=\frac{\pi}{4}$,故 A 正确;若 $\sin2A=\sin2B$,则 $2A=2B$ 或 $2A+2B=\pi$,所以 $A=B$ 或 $A+B=\frac{\pi}{2}$,所以此三角形为等腰三角形或直角三角形,故 B 错误;若 $a=1$,$b=2$,$A=30°$,由正弦定理,得 $\sin B=\frac{b}{a}\cdot\sin A=1$,所以 $B=\frac{\pi}{2}$,则解此三角形只有一解,故 C 错误;因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形,所以 $A+B>\frac{\pi}{2}$,所以 $\frac{\pi}{2}>A>\frac{\pi}{2}-B>0$,所以 $\sin A>\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\cos B$,同理可得 $\sin B>\cos A$,所以 $\sin A+\sin B>\cos A+\cos B$,故 D 正确.故选 AD.

3.BC **提示**:由余弦定理推论及 $c\cos B+b\cos C-2a\cos A=0$,得 $a-2a\cos A=0$,又 $a>0$,所以 $\cos A=\frac{1}{2}$,则 $A=\frac{\pi}{3}$,故 C 正确;由 $b=2$,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=2\sqrt{3}$,即 $\frac{1}{2}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}c=2\sqrt{3}$,得 $c=4$,故 D 错误;由余弦定理,得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=2^2+4^2-2\times2\times4\times\frac{1}{2}=12$,得 $a=2\sqrt{3}$,故 A 错误;由正弦定理,得 $\sin C=\frac{c\cdot\sin A}{a}=1$,又 $C\in(0,\pi)$,所以 $C=\frac{\pi}{2}$,故 B 正确.故选 BC.

4.BC **提示**:由 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$,$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}=0$,得 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{CD}$,因为 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=1$,$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}$,所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\angle DAB=-\frac{1}{2}$,得 $\cos\angle DAB=-\frac{1}{2}$,则 $\angle DAB=\frac{2\pi}{3}$,所以 $\angle ADB=\angle ABD=\frac{\pi}{6}$,$\angle BDC=\angle DBC=\frac{\pi}{3}$,则 $\triangle BCD$ 为正三角形,在 $\triangle BCD$ 中,由余弦定理,得 $BD=\sqrt{AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos\angle DAB}=\sqrt{3}$,所以以点 D 为坐标原点,以 DC,DA 所在直线分别为 x 轴,y 轴,建立平面直角坐标系,则 $A(0,1)$,$C(\sqrt{3},0)$,$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$,设 $E(x,0)$,$x\in[0,\sqrt{3}]$,则 $\overrightarrow{AE}=(x,-1)$,$\overrightarrow{BE}=\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)$,则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=x^2-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}=\left(x-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\frac{21}{16}$,所以当 $x=\frac{\sqrt{3}}{4}$ 时,$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}$ 取最小值 $\frac{21}{16}$,当 $x=\sqrt{3}$ 时,$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}$ 取得最大值 3,所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}\in\left[\frac{21}{16},3\right]$.故选 BC.

专题三 数 列

专项训练(1)

1.ACD **提示**:因为 $S_4<S_5$,所以 $a_5>0$,因为 $S_5=S_6$,所以 $a_6=0$,故 C 正确;$d=a_6-a_5<0$,故 A 正确;$S_8-S_4=a_5+a_6+a_7+a_8=2(a_6+a_7)$,又 $a_6=0$,$d<0$,故 $a_7<0$,$a_6+a_7<0$,则 $S_8<S_4$,故 B 错误;因为 $a_5>0$,$d<0$,$a_6=0$,所以 S_5 和 S_6 均为 S_n 的最大值,故 D 正确.故选 ACD.

2.AB **提示**:因为 $a_n-3a_{n+1}=2a_n\cdot a_{n+1}$,所以 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{3}{a_n}=2$,则 $\frac{1}{a_{n+1}}+1=3\left(\frac{1}{a_n}+1\right)$,又 $\frac{1}{a_1}+1=2$,所以 $\left\{\frac{1}{a_n}+1\right\}$ 是以 2 为首项,3 为公比的等比数列,所以 $\frac{1}{a_n}+1=2\times3^{n-1}$,则 $a_n=\frac{1}{2\times3^{n-1}-1}$,所以 $\{a_n\}$ 为递减数列,$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和 $T_n=$

$(2\times3^0-1)+(2\times3^1-1)+\cdots+(2\times3^{n-1}-1)=2\times(3^0+3^1+\cdots+3^{n-1})-n=2\times\frac{1-3^n}{1-3}-n=3^n-n-1$.故选 AB.

3.BCD　**提示**:记“提丢斯数列”为数列$\{a_n\}$.对于A,因为“提丢斯数列”:0.4,0.7,1,1.6,2.8,5.2,10,…,且$\frac{0.7}{0.4}\neq\frac{1}{0.7}$,所以“提丢斯数列”不是等比数列,故A错误;对于B,当$n\geqslant3$时,$a_n=\frac{3\cdot2^{n-2}+4}{10}$,则$a^{99}=\frac{3\times2^{97}+4}{10}$,故B正确;对于C,记数列$\{a_n\}$前$n$项和为$S_n$,则$S_{31}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{31}=0.4+0.7+\frac{3}{10}\times(2+2^2+\cdots+2^{29})+\frac{4}{10}\times29=1.1+\frac{3}{10}\times\frac{2\times(1-2^{29})}{1-2}+\frac{4}{10}\times29=\frac{3\times2^{30}}{10}+\frac{121}{10}$,故C正确;对于D,由$a_n=\frac{3\cdot2^{n-2}+4}{10}\leqslant300$,且$n\in\mathbf{N}_+$,解得$n\leqslant11$,故D正确.故选 BCD.

4.AC　**提示**:因为$S_{n+1}=S_n+2a_n+1$,所以$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=2a_n+1$,则$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$,即$\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$,又$a_1+1=2$,所以数列$\{a_n+1\}$是首项为2,公比为2的等比数列,故A正确,B错误;$a_n+1=2\cdot2^{n-1}=2^n$,则$a_n=2^n-1$,故C正确;因为$\frac{2^n}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$,所以$T_n=\left(\frac{1}{2^1-1}-\frac{1}{2^2-1}\right)+\left(\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}<1$,故D错误.故选 AC.

专项训练(2)

1.BC　**提示**:因为等差数列$\{a_n\}$中,$a_1<0$,$S_6=S_{13}$,则$S_{13}-S_6=a_7+a_8+\cdots+a_{13}=7a_{10}=0$,所以$a_{10}=0$,$d>0$,故$\{a_n\}$是递增数列,故A错误,B正确;因为$a_1<0$,$d>0$,$a_{10}=0$,所以$S_9=S_{10}$,即$S_9$和$S_{10}$都是$\{S_n\}$中的最小项,故C正确;因为$S_{16}-S_2=a_3+a_4+\cdots+a_{16}=7(a_9+a_{10})=7a_9<0$,所以$S_{16}<S_2$,故D错误.故选 BC.

2.AD　**提示**:依题意,得$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$,$T_n=\frac{b_1}{q-1}(q^n-1)$,则$S_n\cdot T_n=\frac{b_1}{q-1}(q^n-1)\cdot\left[\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n\right]=(q^n-1)\cdot\left[\frac{b_1}{q-1}\cdot\frac{d}{2}n^2+\frac{b_1}{q-1}\cdot\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n\right]$,因为$S_n\cdot T_n=n\cdot3^{2n+1}+n^2\cdot3^{2n}-n^2-3n=(9^n-1)(n^2+3n)$,所以$q=9$,$\frac{b_1}{q-1}\cdot\frac{d}{2}=1$,且$\frac{b_1}{q-1}\cdot\left(a_1-\frac{d}{2}\right)=3$,则$a_1-\frac{d}{2}=\frac{3d}{2}$,得$a_1=2d$,故B,C错误,A,D正确.故选 AD.

3.ACD　**提示**:根据题意,得$a_1=2000\times(1+20\%)-200=2200$,故A正确;$a_{n+1}=a_n\times(1+20\%)-200=1.2a_n-200$,故B错误;因为$a_{n+1}=1.2a_n-200$,则$a_{n+1}-1000=1.2(a_n-1000)$,所以数列$\{a_n-1000\}$是首项为$a_1-1000=1200$,公比为1.2的等比数列,故C正确;$a_n-1000=1200\times1.2^{n-1}$,则$a_n=1200\times1.2^{n-1}+1000$,令$a_n=1200\times1.2^{n-1}+1000\geqslant4000$,则$n\geqslant\log_{1.2}\frac{5}{2}+1=\frac{1-2\lg2}{2\lg2+\lg3-1}+1\approx6$,所以至少要经过6年,该项目的资金才可以达到或超过翻一番(即为原来的2倍)的目标,故D正确.故选 ACD.

4.BCD　**提示**:因为7为质数,所以与7^7不互质的数为7,14,21,…,7^7,共有7^6个,所以$\log_7\varphi(7^7)=\log_7(7^7-7^6)=6+\log_76$,故A错误;因为与$3^n$互质的数为1,2,4,5,7,8,10,11,…,3^n-2,3^n-1,共有$3^n-3^{n-1}=2\cdot3^{n-1}$个,所以$\varphi(3^n)=2\cdot3^{n-1}$,则数列$\{\varphi(3^n)\}$为等比数列,故B正确;因为$\varphi(6)=2$,$\varphi(5)=4$,所以$\varphi(6)<\varphi(5)$,故数列$\{\varphi(n)\}$不单调递增,又$\varphi(9)=6>\varphi(6)=2$,所以数列$\{\varphi(n)\}$不单调递减,所以数列$\{\varphi(n)\}$不单调,故C正确;因为$\varphi(2^n)=2^{n-1}$,所以$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{\varphi(2^i)}=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2i}{2^i}=2\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{2^i}$,设$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{2^i}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^n}$,则$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$,两式作差,得$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}$,所以$S_n=2-\frac{n+2}{2^n}$,所以数列$\left\{\frac{n}{\varphi(2^n)}\right\}$的前$n$项和为$2S_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}<4$,故D正确.故选 BCD.

专项训练(3)

1.AC　**提示**:设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,因为$a_1+3a_5=S_7$,所以$a_1+3(a_1+4d)=7a_1+21d$,得$a_1=-3d$,所以$a_n=a_1+(n-1)d=(n-4)d$,所以$a_4=0$,故A正确;因为d的正负不确定,所以S_3可能为最大值或最小值,故B错误;因为$S_6-S_1=a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=5a_4=0$,所以$S_6=S_1$,故C正确;因为$a_3+a_5=2a_4=0$,所以$a_3=-a_5$,即$|a_3|=|a_5|$,故D错误.故选 AC.

2.ACD　**提示**:由$a_{2020}\cdot a_{2021}>1$,得$a_1q^{2019}\cdot a_1q^{2020}=a_1^2\cdot q^{4039}>1$,因为$a_1>1$,则$q>0$,所以数列$\{a_n\}$各项均为正数,又$(a_{2020}-1)(a_{2021}-1)<0$,所以$a_{2020}>1$,$0<a_{2021}<1$,则$0<q<1$,故A正确;所以$S_{2020}+1>S_{2020}+a_{2021}=S_{2021}$,故B错误;由$a_1>a_2>\cdots>a_{2020}>1>a_{2021}>\cdots>0$,得$T_{2020}$是数列$\{T_n\}$中的最大项,故C正确;因为$a_1a_{4040}=a_2a_{4039}=\cdots=a_{2020}a_{2021}>1$,所以$T_{4040}=a_1a_2\cdots a_{4040}=(a_{2020}a_{2021})^{2020}>1$,故D正确.故选 ACD.

3.ACD　**提示**:因为$a_1=a_2=1$,$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$,所以$a_3=a_2-a_1=0$,$a_4=a_3-a_2=-1$,$a_5=a_4-a_3=-1$,$a_6=a_5-a_4=0$,$a_7=a_6-a_5=1$,$a_8=a_7-a_6=1$,$a_9=a_8-a_7=0$,…,所以数列$\{a_n\}$是周期为6的周期数列,且前六项为1,1,0,−1,−1,0.所以$a_4+a_{2022}=a_4+a_6=-1+0=-1$,故A正确;$S_{15}=2\times(1+1+0-1-1+0)+1+1+0=2$,故B错误;由上述分析可知,对任意$n\in\mathbf{N}_+$,$a_{n+3}+a_n=0$,故C正确;对任意$m,n\in\mathbf{N}_+$,$a_{6m-2}=a_4=-1<a_{6n-4}=a_2=1$,故D正确.故选ACD.

4.BCD　**提示**:因为$a_1=0$,$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+n+1(n\text{为奇数}),\\a_n+n(n\text{为偶数}),\end{cases}$所以$a_2=a_1+2=2$,$a_3=a_2+2=4$,$a_4=a_3+4=8$,故A错误;当$n$为奇数时,$a_{n+1}=a_n+n+1$,$a_{n+2}=a_{n+1}+n+1$,两式相加,得$a_{n+1}+a_{n+2}=a_{n+1}+a_n+2(n+1)$,所以$a_{n+2}=a_n+2(n+1)$,当$n$为偶数时,$a_{n+1}=a_n+n$,$a_{n+2}=a_{n+1}+n+2$,两式相加,得$a_{n+1}+a_{n+2}=a_{n+1}+a_n+2(n+1)$,所以$a_{n+2}=a_n+2(n+1)$,故B正确;当$n$为奇数时,$a_{n+2}=a_n+2(n+1)$,可得$a_{n+2}-a_n=2(n+1)$,$a_n=(a_n-a_{n-2})+(a_{n-2}-a_{n-4})+\cdots+(a_3-a_1)+a_1=2(n-1)+2(n-3)+\cdots+2\times2+0=\frac{n^2-1}{2}$,当$n$为偶数时,$a_{n+2}=a_n+2(n+1)$,可得$a_{n+2}-a_n=2(n+1)$,$a_n=(a_n-a_{n-2})+(a_{n-2}-a_{n-4})+\cdots+(a_4-a_2)+a_2=2(n-1)+2(n-3)+\cdots+2\times3+2=\frac{n^2}{2}$,故C正确;数列$\{(-1)^na_n\}$的前$2n$项和$S_{2n}=(-a_1+a_2)+(-a_3+a_4)+\cdots+(-a_{2n-1}+a_{2n})=2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$.故D正确.故选 BCD.

第 28 期

专题四　立体几何、空间向量

专项训练(1)

1.ABC　**提示**:因为$PA\perp$平面ABC,所以$PA\perp BC$,又$AB\perp BC$,$PA\cap AB=A$,所以$BC\perp$平面PAB,故A正确;由$PA=AB$,D为PB的中点,得$AD\perp PB$,又$BC\perp$平面PAB,所以$BC\perp AD$,又$PB\cap BC=B$,所以$AD\perp$平面PBC,所以$AD\perp PC$,故B,C都正确;假设$PB\perp$平面ADC,则$PB\perp CD$,又$BC\perp$平面PAB,所以$BC\perp PB$,所以在平面PBC内,B与D重合,与已知矛盾,故D错误.故选 ABC.

2.ABC　**提示**:对于A,连接A_1B,A_1M,易证$MN/\!/A_1B$,且$MN=\frac{1}{2}A_1B$,由题意,得$A_1M=BN=2\sqrt{2}$,则平面BMN截长方体所得截面A_1MNB为等腰梯形,故A正确;对于B,因为$AD\perp$平面CDD_1C_1,$AD\subset$平面ADM,所以平面$ADM\perp$平面CDD_1C_1,故B正确;对于C,取CD的中点E,连接ME,BE,EN,易证$B_1M/\!/BE$,所以$\angle EBN$(或其补角)为直线BN与B_1M所成的角,又$BE=BN=EN=2\sqrt{2}$,所以$\angle EBN=60°$,所以直线BN与B_1M所成的角为60°,故C正确;对于D,取DD_1的中点F,连接AF,NF,易证$AF/\!/BN$,又$AF\cap$平面$ADM=A$,所以BN与平面ADM相交,故D错误.故选 ABC.

3.ABC　**提示**:对于A,易证$CD\perp AB$,$CD\perp AA_1$,又$AB\cap AA_1=A$,所以$CD\perp$平面ABB_1A_1,故A正确;对于B,连接AC_1,设$AC_1\cap A_1C=O$,连接OD,因为四边形ACC_1A_1是矩形,所以O是AC_1的中点,又D为AB的中点,所以$OD/\!/BC_1$,又$OD\subset$平面A_1DC,$BC_1\not\subset$平面A_1DC,所以$BC_1/\!/$平面A_1DC,故B正确;对于C,由A项知,$CD\perp$平面ABB_1A_1,又$CD\subset$平面A_1DC,所以平面$A_1DC\perp$平面ABB_1A_1,故C正确;对于D,由B项知,$OD/\!/$平面BCC_1B_1,又OD与A_1D相交,故A_1D与平面BCC_1B_1相交,故D错误.故选 ABC.

4.AC　**提示**:易证AB,AD,AP两两垂直,以A为坐标原点,以AB,AD,AP所在直线分别为x轴,y轴,z轴建立空间直角坐标系,则$B(2,0,0)$,$C(2,2,0)$,$D(0,4,0)$,$P(0,0,2)$,$\overrightarrow{PC}=(2,2,-2)$,$\overrightarrow{PB}=(2,0,-2)$,$\overrightarrow{CD}=(-2,2,0)$,所以$|\cos\langle\overrightarrow{PB},\overrightarrow{CD}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{CD}|}=\frac{1}{2}$,所以$PB$与$CD$所成的角是60°,故A正确;设平面$PCD$的法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}=2x+2y-2z=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=-2x+2y=0,\end{cases}$取$x=1$,则$y=1$,$z=2$,所以平面$PCD$的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(1,1,2)$,易知平面$PAB$的一个法向量是$\boldsymbol{n}=(0,1,0)$,则$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{6}}{6}$,所以平面$PCD$与平面$PAB$所成的锐二面角余弦值是$\frac{\sqrt{6}}{6}$,故B错误;因为$\cos|\langle\overrightarrow{PB},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{PB}||\boldsymbol{m}|}=\frac{\sqrt{3}}{6}$,所以直线$PB$与平面$PCD$所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{6}$,故C正确;$N(0,2,0)$,设$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}$,$\lambda\in[0,1]$,则$M(2\lambda,2\lambda,2-2\lambda)$,$\overrightarrow{BN}=(-2,2,0)$,$\overrightarrow{BM}=(2\lambda-2,2\lambda,2-2\lambda)$,设平面$BMN$的法向量为$\boldsymbol{p}=(a,b,c)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{p}\cdot\overrightarrow{BN}=-2a+2b=0,\\\boldsymbol{p}\cdot\overrightarrow{BM}=(2\lambda-2)a+2\lambda b+(2-2\lambda)c=0,\end{cases}$令$a=\lambda-1$,则$b=\lambda-1$,$c=2\lambda-1$,所以平面$BMN$的一个法向量为$\boldsymbol{p}=(\lambda-1,\lambda-1,2\lambda-1)$.因为$\overrightarrow{BP}=(-2,0,2)$,所以点$P$到平面$BMN$的距离$d=\frac{|\overrightarrow{BP}\cdot\boldsymbol{p}|}{|\boldsymbol{p}|}=\frac{2\lambda}{\sqrt{6\lambda^2-8\lambda+3}}=\frac{2}{\sqrt{3\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2-8\left(\frac{1}{\lambda}\right)+6}}(\lambda\neq0)$,当$\lambda=0$时,点$M$与点$P$重合,此时点$P$到平面$BMN$的距离为0,当$\lambda=1$时,点$M$与点$C$重合,此时点$P$到平面$BMN$的距离为2,当$\lambda\in(0,1)$时,$\frac{1}{\lambda}\in(1,+\infty)$,则$3\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2-8\left(\frac{1}{\lambda}\right)+6\in\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$,所以$d\in[0,\sqrt{6}]$,即$d_{\max}=\sqrt{6}$,故D错误.故选 AC.

专项训练(2)

1.BCD　**提示**:对于A,因为MN与BD_1为异面直线,所以M,N,B,D_1四点不可能共面,故A错误;对于B,连接CD_1,CP,易证$MN/\!/CD_1$,所以$\angle PD_1C$(或其补角)为异面直线PD_1与MN所成的角,由题意,得$CD_1=2\sqrt{2}$,$D_1P=\sqrt{5}$,$PC=3$,在$\triangle PD_1C$中,由余弦定理的推论,得$\cos\angle PD_1C=\frac{\sqrt{10}}{10}$,所以异面直线$PD_1$与$MN$所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{10}$,故B正确;对于C,连接$A_1B$,$CD_1$,则$MN/\!/CD_1$,又$BA_1/\!/CD_1$,所以$MN/\!/BA_1$,所以$M$,$N$,$B$,$A_1$四点共面,故C正确;对于D,易证$D_1P/\!/BN$,所以$D_1P/\!/$平面$MNB$,所以$V_{P-MNB}=V_{D_1-MNB}=V_{B-MND_1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times2=\frac{1}{3}$,故D正确.故选 BCD.

2.BD　**提示**:对于A,当P与B重合时,$PC_1/\!/AD_1$,当P与B不重合时,PC_1与AD_1异面,故A错误;对于B,连接AC,A_1C_1,B_1C,因为$BD\perp AC$,$AA_1\perp BD$,$AC\cap AA_1=A_1$,所以$BD\perp$平面A_1ACC_1,所以$BD\perp A_1C$,因为$BC_1\perp B_1C$,$CD\perp BC_1$,又$B_1C\cap CD=C$,所以$BC_1\perp$平面A_1B_1CD,所以$BC_1\perp A_1C$,$BD\cap BC_1=B$,所以$A_1C\perp$平面BDC_1,因为$PC_1\subset$平面BDC_1,所以$A_1C\perp PC_1$,故B正确;对于C,当P与B重合时,PC_1与BD所成角为$\frac{\pi}{3}$,所以PC_1与平面A_1BD不垂直,故C错误;对于D,因为$B_1D_1/\!/BD$,所以$BD/\!/$平面AB_1D_1,又$AD_1/\!/BC_1$,所以$BC_1/\!/$平面AB_1D_1,又$BD\cap BC_1=B$,所以平面$BDC_1/\!/$平面AB_1D_1,又$PC_1\subset$平面BDC_1,所以$PC_1/\!/$平面AB_1D_1,故D正确.故选 BD.

3.AB　**提示**:取AD的中点M,连接ME,MF,AD_1,则$ME/\!/AD_1$,$AB/\!/FM$,因为$AD_1\perp A_1D$,所以$ME\perp A_1D$,又$AB\perp$平面ADD_1A_1,所以$AB\perp A_1D$,又$AB/\!/FM$,所以$FM\perp A_1D$,因为$ME\cap MF=M$,所以$A_1D\perp$平面EFM,所以$A_1D\perp EF$,故A正确;设A_1D与AD_1,AE分别交于点O,Q,因为$A_1D\perp AD_1$,$CD\perp AD_1$,$A_1D\cap CD=D$,所以$AD_1\perp$平面A_1B_1CD,所以$\angle AQO$为AE与平面B_1CD所成角,所以$\tan\angle AQO=\frac{AO}{OQ}$,其中$AO=\frac{1}{2}AD_1=2\sqrt{2}$,又$OQ=DO-DQ=\frac{1}{2}A_1D-\frac{1}{3}A_1D=\frac{1}{6}A_1D=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,所以$\tan\angle AQO=3$,故B正确;平面$A_1BD_1$即平面$A_1BCD_1$,因为$EF\cap BC=F$,所以$EF\cap$平面$A_1BD_1=F$,故C错误;取$CC_1$靠近点$C$的四等分点$N$,连接$FN$,$EN$,易证$AE/\!/FN$,所以$A$,$E$,$N$,$F$四点共面,所以梯形$AENF$为平面$AEF$截正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$所得的截面,又$AE=AF=2\sqrt{5}$,$FN=\sqrt{5}$,$EN=\sqrt{17}$,所以截面周长为$5\sqrt{5}+\sqrt{17}$,故D错误.故选 AB.

4.ACD　**提示**:对于A,取AD的中点M,连接PM,BM,BD.因为侧面PAD为正三角形,所以$PM\perp AD$.因为底面$ABCD$为菱形,$\angle DAB=60°$,所以$\triangle ABD$为等边三角形,所以$BM\perp AD$.又$AB=2$,所以$MB=PM=\sqrt{3}$,又$PB=\sqrt{6}$,所以$PM^2+MB^2=PB^2$,所以$PM\perp BM$,又$AD\cap BM=M$,所以$PM\perp$平面$ABCD$,又$PM\subset$平面PAD,所以平面$PAD\perp$平面$ABCD$,故A正确;因为$PM\perp AD$,$BM\perp AD$,$PM\cap BM=M$,所以$AD\perp$平面PMB,又$PB\subset$平面PMB,所以$AD\perp PB$,所以异面直线AD与PB所成的角为90°,故B错误;对于C,又$BC/\!/AD$,$AD\perp BM$,$AD\perp PB$,所以$BC\perp BM$,$BC\perp PB$,所以$\angle PBM$是二面角$P-BC-A$的平面角,大小为45°,故C正确;对于D,因为$\triangle PAD$,$\triangle BAD$是等边三角形,过$\triangle PAD$的中心E作$OE\perp$平面PAD,过$\triangle BAD$的中心F作$OF\perp$平面PAD,OE交OF于点O,则O为三棱锥$P-ABD$外接球的球心,由已知得,$MF=\frac{1}{3}BM=\frac{\sqrt{3}}{3}=ME$,$BF=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,$OF=ME=\frac{\sqrt{3}}{3}$,则$OB^2=OF^2+BF^2=\frac{5}{3}$,设三棱锥$P-ABD$外接球的半径为$R$,则$R^2=\frac{5}{3}$,所以外接球的表面积为$4\pi R^2=\frac{20}{3}\pi$,故D正确.故选 ACD.

专项训练(3)

1.AB　**提示**:对于A,设$\alpha\cap\beta=l$,在α内作直线$b\perp l$,结合②,得$b\perp\beta$,由①③,得$m\perp\beta$,所以$m/\!/b$,$m\not\subset\alpha$,所以$m/\!/\alpha$,故A正确;对于B,过m作平面γ,$\gamma\cap\alpha=m_1$,由④,得$m/\!/m_1$,结合①③,得$m_1\perp\beta$,所以$\alpha\perp\beta$,故B正确;对于C,n与β可能平行或相交,故C错误;对于D,m与n可能平行、相交或异面,故D错误.故选 AB.

2.AC　**提示**:由$PA\perp$平面ABC,得$PA\perp BC$,故A正确;因为C为圆O上异于A,B的任一点,所以$AC\perp BC$,又$PA\perp BC$,$AP\cap AC=A$,所以$BC\perp$平面PAC,故C正确;由$BC\perp$平面PAC,得$BC\perp PC$,故D错误;假设$AC\perp PB$,又$AC\perp BC$,$PB\cap BC=B$,所以$AC\perp$平面PBC,则$AC\perp PC$,这与$Rt\triangle PAC$中,$\angle ACP$为锐角矛盾,故B错误.故选 AC.

3.BCD　**提示**:假设$DB_1\perp$平面AEF,则$DB_1\perp AE$,因为$BB_1\perp AE$,$DB_1\cap BB_1=B_1$,所以$AE\perp$平面BDB_1,连接BD,AC,则$BD\perp AC$,又$BB_1\perp AC$,$BB_1\cap DB=B$,所以$AC\perp$平面BDB_1,则E与C重合,与E为BC的中点矛盾,所以直线DB_1与平面AEF不垂直,故A错误;连接D_1F,AD_1,GF,易证$EF/\!/AD_1$,所以平面AEF即平面$AEFD_1$,因为$A_1D_1/\!/GF$,$A_1D_1=GF$,所以四边形A_1GFD_1为平行四边形,所以$A_1G/\!/D_1F$,又$D_1F\subset$平面AEF,$A_1G\not\subset$平面AEF,所以直线$A_1G/\!/$平面AEF,故B正确;$V_{D-AEF}=V_{F-ADE}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times1=\frac{2}{3}$,故C正确;$AE=\sqrt{5}$,$EF=\sqrt{2}$,$AF=3$,在$\triangle AEF$中,由余弦定理的推论,得$\cos\angle AEF=-\frac{\sqrt{10}}{10}$,则$\sin\angle AEF=\frac{3\sqrt{10}}{10}$,所以$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}\cdot AE\cdot EF\cdot\sin\angle AEF=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{3}{2}$,则点$D$到平面$AEF$的距离为$\frac{V_{D-AEF}}{\frac{1}{3}S_{\triangle AEF}}=\frac{4}{3}$,故D正确.故选 BCD.

4.ABD　**提示**:由题意,得$AB\perp DE$,$CD\perp DE$,因为$A'D\perp DC$,$A'D\cap DE=D$,所以$CD\perp$平面$A'DE$,又$CD/\!/BE$,所以$BE\perp$平面$A'DE$,又$BE\subset$平面$A'BE$,所以平面$A'DE\perp$平面$A'BE$,故A正确;因为$CD/\!/BE$,$CD\not\subset$平面$A'BE$,$BE\subset$平面$A'BE$,所以$CD/\!/$平面$A'BE$,又$CD\subset$平面$A'CD$,平面$A'BE$与平面$A'CD$的交线为l,所以$CD/\!/l$,故B正确;由A项知,$BE\perp$平面$A'DE$,则$BE\perp A'E$,又$DE\perp A'E$,$DE\perp BE$,所以以E为原点,以EB,ED,EA'所在直线分别为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系,则$B(1,0,0)$,$A'(0,0,1)$,$C(2,\sqrt{3},0)$,$D(0,\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{BC}=(1,\sqrt{3},0)$,由A项知,$BE\perp$平面$A'DE$,所以$\overrightarrow{EB}=(1,0,0)$为平面$A'DE$的一个法向量,设$BC$与平面$A'DE$所成的角为$\theta$,所以$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{EB},\overrightarrow{BC}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{EB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\frac{1}{2}$,所以$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$,故C错误;易证$DE\perp$平面$A'BE$,故平面$A'BE$的一个法向量为$\overrightarrow{ED}=(0,\sqrt{3},0)$,又$\overrightarrow{A'B}=(1,0,-1)$,$\overrightarrow{BD}=(-1,\sqrt{3},0)$,设平面$A'DB$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A'B}=x-z=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=-x+\sqrt{3}y=0,\end{cases}$取$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$,所以$\cos\langle\overrightarrow{ED},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{ED}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{ED}|}=\frac{\sqrt{7}}{7}$,所以二面角$E-A'B-D$的余弦值为$\frac{\sqrt{7}}{7}$,故D正确.故选 ABD.

专题五　直线和圆、圆锥曲线

专项训练(1)

1.BCD　**提示**:直线$y=ax+2a+3(a\in\mathbf{R})$,即$(x+2)a+3-y=0$,由$x+2=0$且$3-y=0$,得$x=-2$,$y=3$,则该直线必过定点$(-2,3)$,故A错误;在$y=2x-1$中,令$x=0$,得$y=-1$,故B正确;直线$\sqrt{3}x-y+2=0$的斜率为$\sqrt{3}$,则倾斜角为60°,故C正确;点$(1,3)$到直线$y-2=0$的距离为1,故D正确.故选 BCD.

2ACD　**提示**:对于A,由圆C:$x^2+y^2=4$,得圆心为$C(0,0)$,半径$r=2$,则点C到直线l:$x+y-2=0$的距离为$\sqrt{2}$,$|AB|=2\sqrt{r^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$,故A正确;对于B,设点$D$为弦$AB$的中点,则$CD\perp AB$,则$d_{\max}=r+|CD|=2+\sqrt{2}$,故B错误;对于C,易知直线$AB$的斜率$k_{AB}=-1$,由$CD\perp AB$,得直线$CD$的斜率$k_{CD}=1$,则直线$CD$的方程为$y=x$,所以点$N(-2,-2)$在直线$CD$上,则$CD$为$AB$的中垂线,所以$\triangle ABN$是等腰三角形,故C正确;对于D,过点$M$作$ME\perp l$于点$E$,过点$N$作$NF\perp l$于点$F$,则$d=|ME|$,所以$|MN|+d=|MN|+|ME|\geqslant|NE|\geqslant|NF|$,当且仅当$N$,$M$,$E$三点共线,且点$E$与$F$重合时,等号成立,又点$N$到直线$l$的距离为$|NF|=3\sqrt{2}$,所以$|MN|+d$的最小值为$3\sqrt{2}$,故D正确.故选 ACD.

3.BCD　**提示**:由椭圆C:$x^2+\frac{y^2}{2}=1$,得$a=\sqrt{2}$,$b=1$,$c=1$,则该椭圆的长轴长为$2\sqrt{2}$,故A错误;易知$F_1(0,1)$,$F_2(0,-1)$,$A_1(-1,0)$,$A_2(1,0)$,则$|F_1F_2|=2$,$|A_2F_1|=|A_1F_1|=|A_1F_2|=|A_2F_2|=\sqrt{2}$,则$|A_2F_1|^2+|A_2F_2|^2=|F_1F_2|^2=|A_1F_1|^2+|A_1F_2|^2$,所以$\triangle PF_1F_2$为直角三角形的点$P$共有6个,分别为以左、右顶点为直角顶点,以及以焦点为直角顶点的直角三角形,故B正确;由点P的纵坐标为1,得$P\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$,又$F_2(0,-1)$,则$|PF_2|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,故C正确;设$P(m,n)$,则$m^2+\frac{n^2}{2}=1$,所以直线$k_{PA_1}\cdot k_{PA_2}=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n}{m-1}=\frac{n^2}{m^2-1}=\frac{2(1-m^2)}{m^2-1}=-2$,故D正确.故选 BCD.

4.ABD　**提示**:由题意,得$|F_1F_2|=2c=4$,则$c=2$,设$A(x_1,y_1)$,$B(-x_1,-y_1)$,$P(x_0,y_0)$,则$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$,$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$,两式作差,得$\frac{x_1^2-x_0^2}{y_1^2-y_0^2}=\frac{a^2}{b^2}$,因为$k_{PA}\cdot k_{PB}=1$,即$\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{y_0+y_1}{x_0+x_1}=\frac{y_1^2-y_0^2}{x_1^2-x_0^2}=\frac{b^2}{a^2}=1$,所以$a=b$,又$a^2+b^2=c^2=4$,所以$a=b=\sqrt{2}$,故A正确;离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$,故B正确;因为双曲线$C$的渐近线方程为$y=\pm x$,由题意,得$0\leqslant k_{AB}<1$或$k_{AB}>-1$,所以直线$AB$倾斜角的取值范围为$\left[0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$,故C错误;若$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$,则$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$,$|PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2=16$,由双曲线的定义,得$||PF_1|-|PF_2||=2a=2\sqrt{2}$,两边平方,得$|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|=8$,即$16-2|PF_1|\cdot|PF_2|=8$,所以$|PF_1|\cdot|PF_2|=4$,所以$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=2$,故D正确.故选 ABD.

专项训练(2)

1.BD　**提示**:过点$P(1,2)$且在x,y轴截距相等的直线有两条,一条经过原点,为$y=2x$,另一条不经过原点,为$x+y-3=0$,故A错误;在$y=kx-2$中,令$x=0$,得$y=-2$,故B正确;因为直线$x-\sqrt{3}y+1=0$的斜率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以它的倾斜角为30°,故C错误;过点$(5,4)$且倾斜角为90°的直线方程为$x=5$,故D正确.故选 BD.

2.CD　**提示**:对于A,由题意,得圆C的圆心为$C(2,0)$,半径$r=1$,所以圆心C到直线l:$x+y=0$的距离$d=\sqrt{2}$,又$\sqrt{2}-1<\frac{1}{2}<\sqrt{2}+1$,所以圆$C$上到直线$l$的距离为$\frac{1}{2}$的点有两个,故A错误;对于B,切线长$|PA|=\sqrt{|PC|^2-1}$,又$|PC|\geqslant d=\sqrt{2}$,所以$|PA|\geqslant1$,故B错误;对于C,$S_{ACBP}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot|PA|\cdot|CA|=|PA|\geqslant1$,故C正确;对于D,设$P(t,-t)$,由题意,知$A$,$B$在以$PC$为直径的圆上,设该圆上任一点为$(x,y)$,又$C(2,0)$,所以该圆的方程为$(x-t)(x-2)+(y+t)(y-0)=0$,即$x^2+y^2-(t+2)x+ty+2t=0$,又圆$C$:$(x-2)^2+y^2=1$,即$x^2+y^2-4x+3=0$,两式作差,得直线$AB$的方程为$(2-t)x+ty+2t-3=0$,即$2x-3-t(x-y-2)=0$,由$\begin{cases}2x-3=0,\\x-y-2=0,\end{cases}$解得$x=\frac{3}{2}$,$y=-\frac{1}{2}$,所以直线$AB$恒过定点$\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$,故D正确.故选 CD.

3.ABD　**提示**:根据题意,得$a=3$,$b=2\sqrt{2}$,$c^2=a^2-b^2=1$,则$c=1$.对于A,$\triangle PF_1F_2$的周长为$|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=2a+2c=8$,故A正确;对于B,$\triangle PF_1F_2$面积的最大值为$\frac{1}{2}\cdot|F_1F_2|\cdot b=bc=2\sqrt{2}$,故B正确;对于C,假设存在点$P$使得$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$,即$PF_1\perp PF_2$,则点$P$在以$F_1F_2$为直径的圆上,且$|F_1F_2|=2$,所以点$P$为以$F_1F_2$为直径的圆与椭圆$C$的交点,又$b=2\sqrt{2}>\frac{|F_1F_2|}{2}=1$,所以该圆与椭圆$C$无交点,则不存在符合条件的点$P$,故C错误;对于D,$|PM|+|PF_1|=|PM|+2a-|PF_2|=6+|PM|-|PF_2|\leqslant6+|MF_2|=6+1=7$,当且仅当$P$,$F_2$,$M$三点共线,且点$P$在第四象限时,等号成立,所以$|PM|+|PF_1|$的最大值为7,故D正确.故选 ABD.

4.ACD　**提示**:设直线AB方程为$x=my+n(n\neq0)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,联立$\begin{cases}x=my+n,\\y^2=4x,\end{cases}$得$x^2-4my-4n=0$,则$y_1+y_2=4m$,$y_1y_2=-4n$,因为$y_1^2=4x_1$,$y_2^2=4x_2$,所以$x_1x_2=\frac{(y_1y_2)^2}{16}=n^2$,又$OA\perp OB$,所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=n^2-4n=0$,解得$n=4$或$n=0$(舍去),所以直线$AB$的方程为$x=my+4$,该直线过定点$(4,0)$,故A正确;又点$O$到直线$AB$的距离为$d=\frac{4}{\sqrt{1+m^2}}\leqslant4$,故B错误;由A项知,$x_1x_2=16$,则$|OA|\cdot|OB|=\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}=\sqrt{(x_1^2+4x_1)(x_2^2+4x_2)}=\sqrt{x_1x_2[x_1x_2+4(x_1+x_2)]+16}\geqslant4\sqrt{32+4\times2\sqrt{x_1x_2}}=32$,当且仅当$x_1=x_2$时,等号成立,故C正确;由A项得,$y_1+y_2=4m$,$y_1y_2=-16$.设$D(x_3,y_3)$,$E(x_4,y_4)$,由焦点$F(1,0)$,可设直线$AD$的方程为$x=ty+1$,联立$\begin{cases}x=ty+1,\\y^2=4x,\end{cases}$得$y^2-4ty-4=0$,所以$y_1+y_3=4t$,$y_1y_3=-4$,则$y_3=-\frac{4}{y_1}$,同理可得,$y_4=-\frac{4}{y_2}$,所以$k_{DE}=\frac{y_3-y_4}{x_3-x_4}=\frac{4}{y_3+y_4}=-\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}=\frac{4}{m}$,又$k_{AB}=\frac{1}{m}$,所以$k_{DE}=4k_{AB}$,故D正确.故选 ACD.

专项训练(3)

1.ACD　**提示**:圆O_1:$x^2+y^2-2x=0$,即$(x-1)^2+y^2=1$,则圆心为$O_1(1,0)$,半径$r=1$,圆O_2:$x^2+y^2+2x-8y=0$,即$(x+1)^2+(y-4)^2=17$,则圆心为$O_2(-1,4)$,半径$R=\sqrt{17}$.对于A,圆O_1与圆O_2的方程作差,得$x-2y=0$,即直线AB的方程为$x-2y=0$,故A正确;对于B,点O_1到直线AB的距离$d=\frac{\sqrt{5}}{5}$,则$|AB|=2\sqrt{1-d^2}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$,B错误;对于C,线段$AB$的垂直平分线为直线$O_1O_2$,由$O_1(1,0)$,$O_2(-1,4)$,得直线$O_1O_2$的方程为$2x+y-2=0$,故C正确;对于D,由点$O_1$到直线$AB$的距离$d=\frac{\sqrt{5}}{5}$,得点$P$到直线$AB$的距离的最大值为$d+r=\frac{\sqrt{5}}{5}+1$,故D正确.故选 ACD.

2.CD　**提示**:由题意知,抛物线C:$x^2=4y$的焦点为圆心$F(0,1)$,由$|PM|$,$|MN|$,$|NQ|$构成等差数列,得$|PM|+|NQ|=2|MN|=4$,$|PF|-1+|QF|-1=4$,所以$|PF|+|QF|=|PQ|=6$,令$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,所以$y_1+y_2+2=6$,则$y_1+y_2=4$.当直线l的斜率为0时,易知$|PQ|=4\neq6$,不符合题意;当直线l的斜率存在且不为0时,设直线l的方程为$x=m(y-1)$,则$m\neq0$,代入$x^2=4y$,得$m^2y^2-(2m^2+4)y+m^2=0$,所以$y_1+y_2=\frac{2m^2+4}{m^2}=4$,所以$m=\pm\sqrt{2}$.故选 CD.

3.BCD　**提示**:不妨取$k>0$,设双曲线C的左焦点为F_1,因为以AB为直径的圆恰好经过双曲线C的右焦点F,所以A,B,F,F_1四点共圆,四边形$AFBF_1$为矩形,所以以AB为直径的圆的方程为$x^2+y^2=c^2$,设$|AF|=m$,$|BF|=n$,则$|m-n|=2a$.由$S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}m\cdot n=4a^2$,即$mn=8a^2$,两式联立,得$m^2+n^2=20a^2$,又$m^2+n^2=|AB|^2=|FF_1|^2=4c^2$,即$5a^2=c^2$,所以离心率$e=\sqrt{5}$,故A错误,B正确;由$c^2=a^2+b^2=5a^2$,得$b^2=4a^2$,即$\frac{b}{a}=2$,则双曲线$C$的渐近线方程为$y=\pm2x$,故C正确;因为$S_{\triangle ABF}=4a^2$,所以$S_{\triangle OBF}=\frac{1}{2}\cdot c\cdot|y_B|=2a^2$,则$|y_B|=\frac{4a^2}{c}$,代入$x^2+y^2=c^2$,得$|x_B|=\frac{\sqrt{c^4-16a^4}}{c}$,又$c=\sqrt{5}a$,所以$k=\left|\frac{y_B}{x_B}\right|=\frac{4}{3}$,由对称性可得,当$k<0$时,$k=-\frac{4}{3}$,所以$k=\pm\frac{4}{3}$.故D正确.故选 BCD.

4.ABD　**提示**:由题意,得$F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$,$B_1(0,-b)$,$B_2(0,b)$,则$k_{B_1F_1}=-\frac{b}{c}$,直线B_1M的方程为$y=-\frac{b}{c}\cdot(x+c)$,联立$\begin{cases}y=-\frac{b}{c}(x+c),\\\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$得$(a^2+c^2)x^2+2a^2cx=0$,解得$x=0$,或$x=-\frac{2a^2c}{a^2+c^2}$,则$M\left(-\frac{2a^2c}{a^2+c^2},\frac{b^3}{a^2+c^2}\right)$,所以$k_{B_2M}=\frac{bc}{a^2}$,因为$k_{B_2M}\cdot k_{B_1M}=-\frac{9}{25}$,即$\frac{bc}{a^2}\cdot\left(-\frac{b}{c}\right)=-\frac{9}{25}$,所以$\frac{b}{a}=\frac{3}{5}$,设$a=5m(m>0)$,则$b=3m$,$c=4m$,所以离心率$e=\frac{4}{5}$,$\cos\angle B_1F_1O=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$,则$\cos\angle MF_1N=\cos\angle B_1F_1B_2=2\cos^2\angle B_1F_1O-1=\frac{7}{25}$,易知$\triangle MF_1F_2$的周长$C_{\triangle MF_1F_2}=2a+2c=18m$,$M\left(-\frac{200m}{41},\frac{27m}{41}\right)$,$N\left(-\frac{200m}{41},-\frac{27m}{41}\right)$,所以$S_1=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{200m}{41}-4m\right)\cdot\frac{54m}{41}=\frac{36}{41}\times\frac{27}{41}m^2$,$S_2=\frac{1}{2}\cdot8m\cdot3m=12m^2$,则$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}}=\frac{9}{41}$.故选 ABD.

专项训练(4)

1.ACD　**提示**:由双曲线E:$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$,得$a=4$,$b=3$,$c=5$,则离心率$e=\frac{5}{4}$,故A正确,B错误;由题意,得$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times10\times y_P=20$,解得$y_P=4$,代入双曲线方程,得$x_P=\frac{20}{3}$,故C,D正确.故选 ACD.

2.ACD　**提示**:圆M的圆心为$M(5,5)$,半径$r=4$.对于A,由$|MA|=\sqrt{26}>4$,得点A在圆M外,则过点A可以作出圆M的两条切线,故A正确;对于B,由$A(4,0)$,$B(2,0)$,得直线AB的方程为$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$,即$x+2y-4=0$,设点$M$关于直线$AB$的对称点为$N(x,y)$,则$\begin{cases}\frac{y-5}{x-5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1,\\\frac{x+5}{2}+2\times\frac{y+5}{2}-4=0,\end{cases}$解得$x=\frac{3}{5}$,$y=-\frac{19}{5}$,即圆$M$关于直线$AB$对称的圆的方程为$\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+\left(y+\frac{19}{5}\right)^2=16$,故B错误;对于C,点$M$到直线$AB$的距离为$\frac{11\sqrt{5}}{5}$,即点$P$到直线$AB$距离的最大值为$\frac{11\sqrt{5}}{5}+4$,故C正确;对于D,当直线$BP$与圆$M$相切时,$\angle PBM$最大,即$\angle PBA$最大,又$|BM|=\sqrt{34}$,此时$|PB|=\sqrt{|BM|^2-|MP|^2}=3\sqrt{2}$,故D正确.故选 ACD.

3.BC　**提示**:设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,联立$\begin{cases}3x-2y+m=0,\\9x^2+4y^2=36,\end{cases}$得$8y^2-4my+m^2-36=0$,则$\Delta=16m^2-32(m^2-36)>0$,即$m^2<72$,又$y_1+y_2=\frac{m}{2}$,$x_1+x_2=\frac{2(y_1+y_2)}{3}-\frac{2m}{3}=-\frac{m}{3}$,所以$AB$的中点$M\left(-\frac{m}{6},\frac{m}{4}\right)$,则$k_{OM}=-\frac{3}{2}$,又直线$l$的斜率为$\frac{3}{2}$,则$-\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\neq-1$,故A错误;因为$3\cdot\left(-\frac{m}{6}\right)+2\times\frac{m}{4}=0$,所以点$M$在直线$3x+2y=0$上,故B正确;$|OM|=\sqrt{\frac{13m^2}{144}}<\sqrt{\frac{13\times72}{144}}=\frac{\sqrt{26}}{2}$,当$m=0$时,$|OM|=0$,所以$|OM|\in\left[0,\frac{\sqrt{26}}{2}\right)$,故C正确;因为$F_1(0,\sqrt{5})$,$F_2(0,-\sqrt{5})$,所以$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=\frac{13m^2}{144}-5<\frac{13\times72}{144}-5=\frac{3}{2}$,故D错误.故选 BC.

4.ABD　**提示**:由抛物线C:$y^2=4x$,得焦点为$F(1,0)$,准线方程为$x=-1$.对于A,过A作准线的垂线,交准线于P,过点Q作准线的垂线,交准线于E,则$|AQ|+|AF|=|AQ|+|AP|\geqslant|QP|\geqslant|QE|=4$,当且仅当$Q$,$A$,$P$三点共线,且$P$与$E$重合时,取等号,所以$|AQ|+|AF|$的最小值是4,故A正确;对于B,由题意得,直线$l$的斜率不为0,设直线$l$的方程为$x=my+1$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,联立$\begin{cases}x=my+1,\\y^2=4x,\end{cases}$得$y^2-4my-4=0$,则$\Delta=16m^2+16>0$,$y_1+y_2=4m$,$y_1y_2=-4$,则$x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2=4m^2+2$,$x_1x_2=\frac{(y_1y_2)^2}{16}=1$,所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=-3$,故B正确;对于C,因为$|AF|\cdot|BF|=(x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+(x_1+x_2)+1=4m^2+4=12$,解得$m=\pm\sqrt{2}$,则直线$AB$的斜率为$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,故C错误;对于D,因为$4|AF|+|BF|=4(x_1+1)+(x_2+1)=4x_1+x_2+5$,因为$x_1>0$,$x_2>0$,所以$4x_1+x_2+5\geqslant2\sqrt{4x_1x_2}+5=9$,当且仅当$4x_1=x_2$,即$x_1=\frac{1}{2}$,$x_2=2$时,取等号,所以$4|AF|+|BF|$的最小值是9,故D正确.故选 ABD.

专题六　函数与导数

专项训练(1)

1.BD　**提示**:由$f(x)+|\cos x|$是奇函数,得$f(x)+|\cos x|+f(-x)+|\cos(-x)|=f(x)+f(-x)+2|\cos x|=0$,即$f(x)+f(-x)=-2|\cos x|$,由$f(x)-\sin x$是偶函数,得$f(x)-\sin x=f(-x)-\sin(-x)=f(-x)+\sin x$,即$f(x)-f(-x)=2\sin x$,两式相加,得$f(x)=\sin x-|\cos x|$.对于A,$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0$,故A错误;对于B,$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-0=1$,故B正确;对于C,$f(k\pi+x)=\pm\sin x-|\cos x|$,故C错误;对于D,$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x-|\sin x|$,$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x-|\sin x|$,故D正确.故选 BD.

2.ACD　**提示**:作出函数$f(x)$的大致图象(图略).对于A,由图象可知,函数$f(x)$有两个零点,且为$x=0$和$x=2$,故A错误;对于B,由图象可得$0<m\leqslant1$时,$f(x)=m$有三个根x_1,x_2,x_3,且$0<x_1<1<x_2<2<x_3$,则$-\ln(x_2-1)=\ln(x_3-1)$,即$\ln[(x_2-1)(x_3-1)]=0$,所以$(x_2-1)(x_3-1)=1$,即$x_2x_3=x_2+x_3$,故B正确;对于C,由$[f(x)]^2-5f(x)+6=0$,解得$f(x)=2$或$f(x)=3$,由图象得,$f(x)=2$有两个不同的实数根,$f(x)=3$有两个不同的实数根,则$[f(x)]^2-5f(x)+6=0$有四个不同的实数根,故C错误;对于D,当$k=1$时,方程$f(x)=kx-2$的实数根的个数等价于$y=f(x)$的图象与直线$y=x-2$的交点个数,直线$y=x-2$经过点$(2,0)$,当$x>2$时,$f(x)=\ln(x-1)$,$f'(x)=\frac{1}{x-1}$,则$f'(2)=$