正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1,则 $M\left(\frac{1}{2},0,1\right)$,$N\left(1,0,\frac{1}{2}\right)$,$C(0,1,0)$,$B_1(1,1,1)$,$D(0,0,0)$,$D_1(0,0,1)$,所以 $\overrightarrow{DD_1}=(0,0,1)$,$\overrightarrow{B_1E}=\lambda\overrightarrow{B_1C}=(-\lambda,0,-\lambda)$,$E(1-\lambda,1,1-\lambda)$,$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)$,$\overrightarrow{ME}=\left(\frac{1}{2}-\lambda,1,-\lambda\right)$,设平面 MNE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{ME}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}z=0,\\ \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)x+y-\lambda z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$,所以平面 MNE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(1,2\lambda-\frac{1}{2},1\right)$,设直线 DD_1 与平面 MNE 所成的角为 θ,则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{DD_1}\rangle\right|=\frac{1}{\sqrt{\left(2\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+2}}$,当 $2\lambda-\frac{1}{2}=0$,即 $\lambda=\frac{1}{4}$ 时,$\sin\theta$ 有最大值,即直线 DD_1 与平面 MNE 所成的角最大.故选 C.

7.B **提示:**设圆 O_1 的半径 r,$\triangle ABC$ 的边长为 a,由题意,得 $\pi r^2=6\pi$,则 $r=\sqrt{6}$,所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{3}{2}\sqrt{6}$,得 $a=3\sqrt{2}$,因为三棱锥 $D-ABC$ 的体积的最大值为 $9\sqrt{3}$,设此时三棱锥 $D-ABC$ 的高为 H,所以 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(3\sqrt{2})^2\cdot H=9\sqrt{3}$,解得 $H=6$,设外接球 O 的半径为 R,则 $R^2=(6-R)^2+(\sqrt{6})^2$,解得 $R=\frac{7}{2}$,所以球 O 的体积为 $\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{7}{2}\right)^3=\frac{343}{6}\pi$.故选B.

8.B **提示:**因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$,所以 $PA\perp AB$,$PA\perp AD$,又 $\angle BAD=90°$,所以 $AB\perp AD$,以 A 为坐标原点,分别以 AD,AB,AP 所在直线为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,点 Q 的轨迹是过点 D 的一条线段,设 Q 的轨迹与 y 轴的交点坐标为 $G(0,b,0)(b>0)$.由题意,知 $D(2,0,0)$,$P(0,0,1)$,所以 $\overrightarrow{DP}=(-2,0,1)$,$\overrightarrow{DG}=(-2,b,0)$.易知平面 APD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$,设平面 PDQ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DG}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x+z=0,\\ -2x+by=0,\end{cases}$ 令 $z=2$,得 $x=1,y=\frac{2}{b}$,所以平面 PDQ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(1,\frac{2}{b},2\right)$,则二面角 $Q-PD-A$ 的平面角的余弦值为 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\cos\frac{\pi}{4}$,即 $\frac{\frac{2}{b}}{\sqrt{5+\frac{4}{b^2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,解得 $b=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,所以 Q 在线段 DG 上运动,$S_{\triangle ADG}=\frac{1}{2}\times2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,所以 $\triangle ADQ$ 面积的取值范围是 $\left(0,\frac{2\sqrt{5}}{5}\right]$.故选 B.

专题八 直线和圆、圆锥曲线

专项训练(1)

1.D **提示:**因为直线 $ax-4y+2=0$ 与直线 $2x+5y+c=0$ 垂直,所以 $2a-20=0$,解得 $a=10$,因为垂足为 $(1,b)$,所以 $\begin{cases}10\times1-4b+2=0,\\ 2\times1+5b+c=0,\end{cases}$ 解得 $b=3$,$c=-17$,故 $a+b+c=-4$.故选 D.

2.A **提示:**由题意,得所求圆的半径为点 $(0,1)$ 到直线 $x-y-1=0$ 的距离,即半径 $r=\frac{|0-1-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$,则所求圆的标准方程为 $x^2+(y-1)^2=2$.故选 A.

3.D **提示:**设椭圆 C 的右焦点为 F',依题意得,线段 P_1P_2 与 FF' 互相平分,则四边形 P_1FP_2F' 为平行四边形,所以 $|P_2F|=|P_1F'|$,因为椭圆 $C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 的长半轴长为 $a=4$,所以 $|P_1F|+|P_2F|=|P_1F|+|P_1F'|=2a=8$.故选D.

4.D **提示:**因为圆 $C:x^2+y^2-2x-3=0$,即 $(x-1)^2+y^2=4$,所以圆心为 $C(1,0)$,因为直线 $l:x-my+m-2=0$ 过定点 $P(2,1)$,且点 P 在圆内,所以当 $l\perp PC$ 时,直线 l 被圆 C 截得的弦长最短,所以 $\frac{1}{m}\cdot\frac{1-0}{2-1}=-1$,所以 $m=-1$.故选 D.

5.B **提示:**因为 $(\overrightarrow{F_1F_2}+\overrightarrow{F_1A})\cdot\overrightarrow{F_2A}=0$,$\overrightarrow{F_2A}=\overrightarrow{F_1A}-\overrightarrow{F_1F_2}$,所以 $(\overrightarrow{F_1F_2}+\overrightarrow{F_1A})\cdot(\overrightarrow{F_1A}-\overrightarrow{F_1F_2})=0$,则 $\overrightarrow{F_1A}^2=\overrightarrow{F_1F_2}^2$,即 $|F_1A|=|F_1F_2|=2c$,因为 A 在第二象限,由双曲线的定义,得 $|F_2A|-|F_1A|=2a$,所以 $|F_2A|=2a+2c$,由过点 F_1 的直线 AF_1 的斜率为 $-\frac{24}{7}$,即 $\tan\angle AF_1F_2=-\frac{24}{7}$,得 $\cos\angle AF_1F_2=-\frac{7}{25}$,在 $\triangle AF_1F_2$ 中,由余弦定理的推论,得 $\cos\angle AF_1F_2=\frac{|AF_1|^2+|F_1F_2|^2-|AF_2|^2}{2|AF_1||F_1F_2|}=\frac{4c^2+4c^2-(2a+2c)^2}{2\cdot2c\cdot2c}=-\frac{7}{25}$,整理得 $39c^2-50ac-25a^2=0$,则 $39e^2-50e-25=0$,即 $(13e+5)\cdot(3e-5)=0$,解得 $e=\frac{5}{3}$,即双曲线 C 的离心率为 $\frac{5}{3}$.故选B.

6.D **提示:**因为抛物线 $C:y^2=2px$,所以抛物线的焦点为 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$,由题意,得 $0=\frac{p}{2}-1$,解得 $p=2$,所以抛物线 $C:y^2=4x$,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,联立 $\begin{cases}y^2=4x,\\ y=x-1,\end{cases}$ 得 $x^2-6x+1=0$,所以 $x_1+x_2=6$,所以 $|AB|=x_1+x_2+p=8$.故选D.

7.A **提示:**因为椭圆的焦点在 x 轴上,长轴长为 $2\sqrt{6}$,所以 $a=\sqrt{6}$,又离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $c=\sqrt{3}$,则椭圆方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$,由题意,得 $C(2\sqrt{3},0)$,因为 $F_2(\sqrt{3},0)$,$F_1(-\sqrt{3},0)$,射线 BF_2 为 $\angle ABC$ 的角平分线,所以 F_2 到直线 F_1A 的距离 $d=|CF_2|=\sqrt{3}$,设直线 F_1A 的方程 $y=k(x+\sqrt{3})$,可得 $\sqrt{3}=\frac{|2\sqrt{3}k|}{\sqrt{1+k^2}}$,解得 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$(舍负),联立 $\begin{cases}y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+\sqrt{3}),\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得 $5x^2+4\sqrt{3}x-12=0$,解得 $x_A=\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{5}$,所以 $y_A=\frac{2\sqrt{6}+3}{5}$,则 $\triangle F_1AF_2$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}\cdot|F_1F_2|\cdot|y_A|=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\frac{2\sqrt{6}+3}{5}=\frac{6\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{5}$.故选 A.

8.A **提示:**假设在 x 轴的负半轴上存在定点 M,使得 $\angle PFM=2\angle PMF$.当 $PF\perp x$ 轴时,不妨设点 P 在第一象限,则直线 PM 的斜率为 1,且 $P(2,3)$,由 $M(t,0)$,得 $\frac{3}{2-t}=1$,解得 $t=-1$.猜想定点为 $M(-1,0)$,设 $P(s,m)$,则 $s^2-\frac{m^2}{3}=1$,即 $3s^2-m^2=3$,$\tan\angle PMF=\frac{m}{s+1}$,$\tan2\angle PMF=\frac{2\cdot\frac{m}{s+1}}{1-\frac{m^2}{(s+1)^2}}=\frac{2m(s+1)}{(s+1)^2-m^2}=\frac{2m(s+1)}{(s+1)^2-(3s^2-3)}=\frac{m}{2-s}$,又 $F(2,0)$,则 $\tan\angle PFM=-\frac{m}{s-2}=\frac{m}{2-s}$,所以 $\tan\angle PFM=\tan2\angle PMF$,所以 $\angle PFM=2\angle PMF$.故存在定点 $M(-1,0)$,使得 $\angle PFM=2\angle PMF$.故选 A.

专项训练(2)

1.A **提示:**因为 $A(1,2)$,$B(3,3)$,所以 $k_{AB}=\frac{3-2}{3-1}=\frac{1}{2}$,所以直线 $ax+y+b=0$ 的斜率为 -2,所以 $-a=-2$,解得 $a=2$,又 AB 的中点坐标为 $\left(2,\frac{5}{2}\right)$,所以 $2\times2+\frac{5}{2}+b=0$,解得 $b=-\frac{13}{2}$.故选 A.

2.B **提示:**过点 $A(7,-2)$ 作直线 $2x-3y+6=0$ 的垂线,垂足为 B,则以 AB 为直径的圆为满足题意,因为 $|AB|=\frac{|2\times7+6+6|}{\sqrt{4+9}}=2\sqrt{13}$,所以圆的半径为 $\sqrt{13}$,设 $B(a,b)$,则 $\begin{cases}\frac{b+2}{a-7}\times\frac{2}{3}=-1,\\ 2a-3b+6=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3,\\ b=4,\end{cases}$ 故 AB 的中点,即圆心为 $(5,1)$,故该圆的方程为 $(x-5)^2+(y-1)^2=13$.故选B.

3.B **提示:**由直线 $x+y+2=0$ 分别与 x 轴,y 轴交于 A,B 两点,得 $A(-2,0)$,$B(0,-2)$,则 $|AB|=2\sqrt{2}$,因为圆 $(x-2)^2+y^2=2$,则圆心为 $(2,0)$,半径 $r=\sqrt{2}$,所以圆心到直线 $x+y+2=0$ 的距离 $d=\frac{|2+0+2|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$,由 P 在圆上,得 P 到直线 $x+y+2=0$ 的距离的最小值为 $2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$,所以 $\triangle ABP$ 面积的最小值为 $\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$.故选 B.

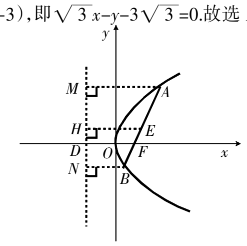
4.B **提示:**设 F_1 关于 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线的对称点为 M,则 P,F_2,M 三点共线,设 $|PF_1|=m$,则 $|PM|=m$,因为 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$,所以 $\triangle PF_1M$ 为等边三角形,所以 $|MF_1|=m$,又 $|PF_1|+|MF_1|+|PM|=4a=3m$,所以 $|PF_1|=\frac{4}{3}a$,$|PF_2|=\frac{2}{3}a$,在 $\triangle PF_1F_2$ 中,由余弦定理,得 $|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos\angle F_1PF_2$,即 $4c^2=\frac{16}{9}a^2+\frac{4}{9}a^2-\frac{8}{9}a^2$,所以 $a^2=3c^2$,即 $a^2=3a^2-3b^2$,则 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{2}{3}$,所以 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.故选 B.

5.C **提示:**因为双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{2}{a}x$,直线 $2x+y+m=0$ 与双曲线 C 至多有一个公共点,所以直线 $2x+y+m=0$ 与双曲线的渐近线重合或平行,所以 $-\frac{2}{a}=-2$,解得 $a=1$,所以双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{4}=1$,则 $F_1(-\sqrt{5},0)$,$F_2(\sqrt{5},0)$,由双曲线定义知,$|AF_1|-|AF_2|=2a=2$,所以 $|AP|+|AF_2|=|AP|+|AF_1|-2\geqslant|PF_1|-2$,当且仅当 F_1,A,P 三点共线时,等号成立,又 $|PF_1|=2\sqrt{6}$,所以 $(|AP|+|AF_2|)_{\min}=2\sqrt{6}-2$.故选 C.

6.A **提示:**因为 $|PF_1|+|PF_2|=2a$,所以 $\frac{|PF_2|}{|PF_1|^2+8|PF_2|^2}=\frac{|PF_2|}{(2a-|PF_2|)^2+8|PF_2|^2}=\frac{1}{9|PF_2|+\frac{4a^2}{|PF_2|}-4a}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{9|PF_2|\cdot\frac{4a^2}{|PF_2|}}-4a}=\frac{1}{8a}$,当且仅当 $9|PF_2|=\frac{4a^2}{|PF_2|}$,即 $|PF_2|=\frac{2}{3}a$ 时,等号成立,又 $|PF_2|\in[a-c,a+c]$,所以 $\frac{2}{3}a\in[a-c,a+c]$,则 $\frac{2}{3}a\geqslant a-c$,所以 $\frac{1}{3}\leqslant\frac{c}{a}<1$,即椭圆的离心率的取值范围是 $\left[\frac{1}{3},1\right)$.故选 A.

7.A **提示:**不妨设直线 AB 的斜率 $k>0$,过 A,B 作抛物线准线的垂线,垂足分别为 C,D,过 B 作 $BE\perp AC$ 于 E,由 $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{FB}$,得 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$,$|\overrightarrow{AF}|=2|\overrightarrow{FB}|$,即 $|AC|=2|BD|$,所以 E 为 AC 的中点,即 $|AE|=\frac{1}{3}|AB|$,所以 $|BE|=\sqrt{|AB|^2-|AE|^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}|AB|$,由 $S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OAF}+S_{\triangle OBF}=\frac{1}{2}|BE|\cdot|OF|=\frac{\sqrt{2}}{6}p|AB|$,由 $|AE|=\frac{1}{3}|AB|$,得直线 AB 斜率为 $k_{AB}=2\sqrt{2}$,所以直线 AB 的方程 $y=2\sqrt{2}\left(x-\frac{p}{2}\right)$,联立 $\begin{cases}y=2\sqrt{2}\left(x-\frac{p}{2}\right),\\ y^2=2px,\end{cases}$ 设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,整理得 $8x^2-10px+2p^2=0$,则 $x_1+x_2=\frac{5p}{4}$,所以 $|AB|=x_1+x_2+p=\frac{5p}{4}+p=\frac{9p}{4}$,所以 $S_{\triangle OAB}=\frac{\sqrt{2}}{6}p|AB|=\frac{3\sqrt{2}}{8}p^2=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,解得 $p=2$.故选 A.

8.A **提示:**因为椭圆的方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$,所以 $c^2=25-16=9$,即 $c=3$,所以椭圆的右焦点为 $(3,0)$,因为抛物线 $C:y^2=2px$,所以焦点为 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$,所以 $\frac{p}{2}=3$,即 $p=6$,所以抛物线 C 的方程为 $y^2=12x$,直线 l 的方程为 $y=k(x-3)$.设抛物线的准线与 x 轴交于点 D,则 $|DF|=6$,如图,过点 A,B 分别作准线 $x=-3$ 的垂线,垂足分别为 M,N,取 AB 的中点 E,过 E 作准线的垂线,垂足为 H,由 $|AF|=3|BF|$,所以 $|AB|=4|BF|$,又 E 为 AB 的中点,所以 $|AB|=2|BE|$,所以 $|BE|=2|BF|$,即 F 为 BE 的中点.设 $|BF|=m$,则 $|AF|=3m$,$|BN|=|BF|=m$,$|AM|=|AF|=3m$,所以 $|EH|=2m$,所以 $|DF|=\frac{|BN|+|EH|}{2}=\frac{3m}{2}=6$,则 $m=4$,所以 $x_B+3=4$,则 $x_B=1$,$y_B=-2\sqrt{3}$,所以 $B(1,-2\sqrt{3})$,把 B 点坐标代入直线 $l:y=k(x-3)$,得 $-2\sqrt{3}=k(1-3)$,解得 $k=\sqrt{3}$,所以直线 l 的方程为 $y=\sqrt{3}(x-3)$,即 $\sqrt{3}x-y-3\sqrt{3}=0$.故选 A.



(第 8 题图)

专题九 统计与概率

1.C **提示:**在 1,2,3,4,6 这 5 个整数中任取 2 个不同的数所有的情况为 (1,2),(1,3),(1,4),(1,6),(2,3),(2,4),(2,6),(3,4),(3,6),(4,6),共 10 种,其中 2 个数互质情况为 (1,2),(1,3),(1,4),(1,6),(2,3),(3,4),共 6 种,所以这 2 个数互质的概率为 $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.故选 C.

2.B **提示:**因为 $15\times80\%=12$,所以 80% 分位数为第 12 个与第 13 个数的平均数,即 $\frac{93+94}{2}=93.5$.故选B.

3.C **提示:**设行政人员有 $2x$ 人,后勤职工有 $3x$ 人,则 $\frac{20}{60}=\frac{45}{60+2x+3x}$,解得 $x=15$,故后勤职工人数是 $3x=45$.故选 C.

4.B **提示:**因为二项式 $(1-2x)^5$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_5^r(-2x)^r$,所以 $(1+2x)(1-2x)^5$ 的展开式中 x^2 的系数为 $C_5^2(-2)^2+2\times C_5^1(-2)^1=40-20=20$.故选 B.

5.C **提示:**由题意可知,在这段时间内两人都不去此地的概率为 $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{5}$,所以在这段时间内至少有 1 人去此地的概率为 $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$.故选 C.

6.B **提示:**根据题意可分为两类:①高山滑雪场安排 2 人,则除甲外的其余 4 人每人去一个场地,不同的安排方法共有 $A_4^4=24$ 种;②高山滑雪场只安排甲 1 人,其余 4 人分三组,再安排到其余 3 个场地,有 $C_4^2A_3^3=36$ 种.故不同的安排方法共有 $24+36=60$(种).故选 B.

7.B **提示:**由表中数据得,$\bar{x}=\frac{1}{5}\times(1+2+3+4+5)=3$,$\bar{y}=\frac{1}{5}\times(0.5+a+1+1.4+1.5)=\frac{4.4+a}{5}$,因为线性回归方程为 $y=0.28x+0.16$,所以 $\frac{4.4+a}{5}=0.28\times3+0.16$,解得 $a=0.6$.故选 B.

8.B **提示:**由题意,得 X 的所有可能的取值为 2,4,6,则 $P(X=2)=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$,$P(X=4)=C_2^1\times\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{1}{3}+C_2^1\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{2}{3}=\frac{20}{81}$,$P(X=6)=1-P(X=2)-P(X=4)=\frac{16}{81}$,所以 $E(X)=2\times\frac{5}{9}+4\times\frac{20}{81}+6\times\frac{16}{81}=\frac{266}{81}$.故选B.

扫码免费下载习题讲解 ppt

第 25 期

第 2~3 版

专题一 集合与常用逻辑用语、复数

专项训练(1)

1.A **提示:**因为集合 $A=\{x|0\leqslant x<1\}$,集合 $B=\{x|x>m\}$,集合 A 是集合 B 的真子集,所以 $m<0$.故选 A.

2.B **提示:**题设命题为全称命题,则该命题的否定为 $\exists x>0,x^2-e^x+1>0$.故选 B.

3.A **提示:**因为 $z(2+i)=1+3i$,所以 $z=\frac{1+3i}{2+i}=\frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=1+i$.故选 A.

4.A **提示:**因为 $x^2-3x>0\Leftrightarrow x<0$ 或 $x>3$,$|x-1|>1\Leftrightarrow x<0$ 或 $x>2$,则 $\{x|x<0$ 或 $x>3\}\subsetneqq\{x|x<0$ 或 $x>2\}$,所以“$x^2-3x>0$”是“$|x-1|>1$”的充分不必要条件.故选 A.

5.C **提示:**因为 $A\cup B=A$,所以 $B\subseteq A$.当 $B=\varnothing$ 时,则 $m-1>2m+1$,解得 $m<-2$;当 $B\neq\varnothing$ 时,则 $\begin{cases}m-1\leqslant2m+1,\\ -3\leqslant m-1,\\ 2m+1\leqslant-2,\end{cases}$ 解得 $-2\leqslant m\leqslant-\frac{3}{2}$.故选 C.

6.C **提示:**设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,则 $\bar{z}=a-bi$,因为 $\bar{z}i=3+2i$,所以 $(a-bi)i=3+2i$,即 $b+ai=3+2i$,所以 $a=2,b=3$,所以 $|z+i|=|2+3i+i|=|2+4i|=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$.故选 C.

7.C **提示:**因为“$\exists x\in\mathbf{R}$,使 $x^2-x-m=0$”为真命题,所以 $\exists x\in\mathbf{R}$,使 $m=x^2-x$ 成立,则 $m\geqslant(x^2-x)_{\min}$,设 $f(x)=x^2-x$,则 $[f(x)]_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$,所以 $m\geqslant-\frac{1}{4}$.故选 C.

8.B **提示:**因为 $A=\{x|x^2-6x-7<0\}=\{x|-1<x<7\}$,$B=\{y|y=3^x,x<1\}=\{y|0<y<3\}$,所以 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{y|y\leqslant0$ 或 $y\geqslant3\}$,所以 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=(-1,0]\cup[3,7)$.故选 B.

专项训练(2)

1.B **提示:**因为集合 $A=\{x|x^2-6x+8\leqslant0\}=\{x|2\leqslant x\leqslant4\}$,$B=\{x\in\mathbf{Z}||x-3|<2\}=\{2,3,4\}$,所以 $A\cap B=\{2,3,4\}$.故选 B.

2.A **提示:**根据题意知,$\neg p$ 为 $\forall x\in\mathbf{R}$,$e^x\leqslant\frac{1}{2}x^2+x+1$.故选 A.

3.D **提示:**因为 $z(1+i)+i=2$,所以 $z(1+i)=2-i$,则 $z=\frac{2-i}{1+i}=\frac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$,所以 z 在复平面内对应的点 $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$ 在第四象限.故选 D.

4.B **提示:**由题意,得 $A=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$,$B=(0,1]$,因为 $A\times B=\{x|x\in A\cup B$,且 $x\notin A\cap B\}$,因为 $A\cup B=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$,$A\cap B=(0,1]$,所以 $A\times B=\left(-\frac{1}{2},0\right]\cup\left(1,\frac{3}{2}\right)$.故选 B.

5.D **提示:**集合 $A=\{x|x^2-x-6>0\}=\{x|x>3$ 或 $x<-2\}$,$B=\{x|0<x+a<4\}=\{x|-a<x<4-a\}$,因为“$x\in A$”是“$x\in B$”的必要不充分条件,所以 $B\subsetneqq A$,所以 $4-a\leqslant-2$ 或 $-a\geqslant3$,解得 $a\geqslant6$ 或 $a\leqslant-3$.故选D.

6.D **提示:**因为 $i^2=-1$,$i^4=1$,所以 $i^{2022}=-1$,又 $\frac{a}{i^{2022}}+2i=1+bi$,所以 $-a+2i=1+bi$,则 $a=-1$,$b=2$,所以 $z=-1+2i$,则 $|z|=\sqrt{5}$.故选 D.

7.B **提示:**因为 $\forall x\in[1,2]$,$x^2-ax+1\leqslant0$ 为真命题,所以 $a\geqslant\left(x+\frac{1}{x}\right)_{\max}$,$x\in[1,2]$,因为 $y=x+\frac{1}{x}$ 在区间 $[1,2]$ 上单调递增,所以 $\left(x+\frac{1}{x}\right)_{\max}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$,则 $a\geqslant\frac{5}{2}$.故选 B.

8.C **提示:**由 $a,b\in G$,$a-b\in G$,得 $b=a$ 时,$a-b=0\in G$,故①正确;若数域 G 中有非零元素,则必有 $\frac{a}{a}=1\in G$,则 $1+1=2\in G$,所以 $3\in G$,以此类推,$2022\in G$,故②正确;集合 P 表示偶数集,显然 $2\in P$,则 $\frac{2}{2}=1\in P$,这与 P 表示偶数集矛盾,故③错误;因为有理数进行四则运算的结果仍为有理数,故④正确.故选 C.

专题二 不等式

专项训练(1)

1.D **提示:**因为 $2<b<4$,所以 $-8<-2b<-4$,又 $-1<a<3$,所以 $-9<a-2b<-1$,所以 $-8<a-2b+1<0$.故选 D.

2.A **提示:**因为 $5^{0.3}>5^0=1$,所以 $a>1$,因为 $0<0.3^5<0.3^0=1$,所以 $0<b<1$,因为 $0<(\sin2022)^2<1$,所以 $\ln(\sin2022)^2<0$,所以 $c<0$,所以 $a>b>c$.故选 A.

3.A **提示:**不等式 $-x^2+3x+18<0$,即 $x^2-3x-18>0$,解得 $x>6$ 或 $x<-3$,即原不等式的解集为 $\{x|x>6$ 或 $x<-3\}$.故选A.

4.D **提示:**设 $f(x)=ax^2+(a+2)x+9a$,由题意,得 $a\neq0$,则 $\begin{cases}a>0,\\ f(1)<0,\\ \Delta>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0,\\ f(1)>0,\\ \Delta>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a>0,\\ 11a+2<0,\\ (7a+2)(5a-2)<0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0,\\ 11a+2>0,\\ (7a+2)(5a-2)<0,\end{cases}$ 解得 $-\frac{2}{11}<a<0$.故选 D.

5.D **提示:**因为 $x>0,y>0,x+3y=1$,所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+3y)=4+\frac{3y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant4+2\sqrt{\frac{3y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=4+2\sqrt{3}$,当且仅当 $\frac{3y}{x}=\frac{x}{y}$ 且 $x+3y=1$,即 $y=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$,$x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 时,取等号,所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值为 $4+2\sqrt{3}$.故选 D.

6.A **提示:**因为不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x|-1<x<2\}$,所以 $a<0$ 且 $\begin{cases}(-1)+2=-\frac{b}{a},\\ (-1)\times2=\frac{c}{a},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}b=-a,\\ c=-2a,\\ a<0,\end{cases}$ 由 $a(x^2+1)+b(x-1)+c>2ax$,整理得 $ax^2+(b-2a)x+(a+c-b)>0$,即 $ax^2-3ax>0$,则 $x^2-3x<0$,解得 $0<x<3$,所以不等式 $a(x^2+1)+b(x-1)+c>2ax$ 的解集是 $\{x|0<x<3\}$.故选 A.

7.C **提示:**因为 $4x^2-3xy+y^2-z=0$,所以 $z=4x^2-3xy+y^2$,所以 $\frac{xy}{z}=\frac{xy}{4x^2-3xy+y^2}=\frac{1}{\frac{4x}{y}-3+\frac{y}{x}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{\frac{4x}{y}\cdot\frac{y}{x}}-3}=\frac{1}{2\times2-3}=1$,当且仅当 $\frac{4x}{y}=\frac{y}{x}$,即 $y=2x$ 时,取等号,所以 $\frac{xy}{z}$ 的最大值为 1.故选 C.

8.D **提示:**因为方程 $x^2+2mx+m^2+3m-2=0$ 的两个实根为 x_1,x_2,所以 $x_1+x_2=-2m$,$x_1x_2=m^2+3m-2$,$\Delta=4m^2-4(m^2+3m-2)\geqslant0$,则 $m\leqslant\frac{2}{3}$,所以 $x_1(x_2+x_1)+x_2^2=x_1x_2+x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-x_1x_2=4m^2-m^2-3m+2=3\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$,因为 $m\leqslant\frac{2}{3}$,所以当 $m=\frac{1}{2}$ 时,$x_1(x_2+x_1)+x_2^2$ 取得最小值 $\frac{5}{4}$.故选 D.

专项训练(2)

1.C **提示:**因为 $a>b>0$,所以 $ab>0$,$a-b>0$.对于 A,$\frac{c}{a}-\frac{c}{b}=\frac{c(b-a)}{ab}$,因为 c 的正负不确定,所以 $\frac{c}{a}$ 与 $\frac{c}{b}$ 的大小关系不确定,故 A 错误;对于 B,$ab-b^2=b(a-b)>0$,所以 $ab>b^2$,故 B 错误;对于 C,$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}<0$,所以 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$,故 C 正确;对于 D,$\frac{1}{a-1}-\frac{1}{b-1}=\frac{b-a}{(a-1)(b-1)}$,因为 a,b 与 1 的大小关系不确定,所以 $(a-1)(b-1)$ 的正负不确定,所以 $\frac{1}{a-1}$ 与 $\frac{1}{b-1}$ 的大小关系不确定,故 D 错误.故选 C.

2.A **提示:**不等式 $x(2x+7)\geqslant-3$,即 $2x^2+7x+3\geqslant0$,解得 $x\geqslant-\frac{1}{2}$ 或 $x\leqslant-3$,所以原不等式的解集为 $(-\infty,-3]\cup\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$.故选 A.

3.B **提示:**当 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 时,$4^x<\log_ax$,则 $0<a<1$.因为当 $x=\frac{1}{2}$ 时,$4^{\frac{1}{2}}<\log_a\frac{1}{2}$,所以 $a^2>\frac{1}{2}$,解得 $a>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $a<-\frac{\sqrt{2}}{2}$(舍去).所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}<a<1$.故选 B.

4.A **提示:**因为 $x>0,y>0,3xy-x-y-1=0$,所以 $3xy-1=x+y\geqslant2\sqrt{xy}$,当且仅当 $x=y$,即 $x=y=1$ 时,等号成立,则 $3xy-2\sqrt{xy}-1\geqslant0$,即 $(3\sqrt{xy}+1)(\sqrt{xy}-1)\geqslant0$,解得 $\sqrt{xy}\geqslant1$,所以 $xy\geqslant1$.故选 A.

5.D **提示:**因为关于 x 的不等式 $ax+b>0$ 的解集是 $\{x|x<-3\}$,所以 $-\frac{b}{a}=-3$,且 $a<0$,所以 $b=3a$,所以不等式 $bx^2-(a+2b)x-2b<0$ 可变形为 $3ax^2-7ax-6a<0$,即 $3x^2-7x-6>0$,解得 $x<-\frac{2}{3}$ 或 $x>3$,即所求不等式的解集为 $\left\{x\middle|x<-\frac{2}{3}\text{或}x>3\right\}$.故选 D.

6.B **提示:**设 $f(x)=x^2+ax+2$,则 $f(x)$ 的一个零点在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内,另一个零点在 $(2,3)$ 内,所以 $\begin{cases}f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4}+\frac{1}{2}a>0,\\ f(1)=3+a<0,\\ f(2)=6+2a<0,\\ f(3)=11+3a>0,\end{cases}$ 解得 $-\frac{11}{3}<a<-3$,即实数 a 的取值范围为 $\left(-\frac{11}{3},-3\right)$.故选B.

7.C **提示:**因为 $x>0,y>0,\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=1$,所以 $x+\frac{y}{2}=\left(x+\frac{y}{2}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)=2+\frac{2x}{y}+\frac{y}{2x}\geqslant2+2\sqrt{\frac{2x}{y}\cdot\frac{y}{2x}}=4$,当且仅当 $2x=y$,即 $x=2,y=4$ 时,取等号,所以 $x+\frac{y}{2}$ 的最小值为 4,因为 $x+\frac{y}{2}<m^2+3m$ 有解,所以 $m^2+3m>4$,解得 $m<-4$ 或 $m>1$.故选 C.

8.B **提示:**因为 $x+y=2$,所以 $(2x+1)+2y=5$,又 $x>0,y>0$,所以 $\frac{1}{2x+1}+\frac{2}{y}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2x+1}+\frac{2}{y}\right)[(2x+1)+2y]=\frac{1}{5}\left[5+\frac{2y}{2x+1}+\frac{2(2x+1)}{y}\right]\geqslant\frac{1}{5}\left(5+2\sqrt{\frac{2y}{2x+1}\cdot\frac{2(2x+1)}{y}}\right)=\frac{9}{5}$,当且仅当 $\frac{2y}{2x+1}=\frac{2(2x+1)}{y}$,即 $x=\frac{1}{3},y=\frac{5}{3}$ 时,等号成立,所以 $\frac{1}{2x+1}+\frac{2}{y}$ 的最小值是 $\frac{9}{5}$.故选 B.

专题三 函数与导数

专项训练(1)

1.C **提示:**由题意,得 $\begin{cases}3-x\geqslant0,\\ x+1>0,\end{cases}$ 解得 $-1<x\leqslant3$.故选C.

2.B **提示:**因为 $f(x)=\begin{cases}f(x+2),x<1,\\ \log_2x,x\geqslant1,\end{cases}$ 所以 $f(-2)=f(0)=f(2)=\log_22=1$.故选 B.

3.D **提示:**因为 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}-2ax$,所以 $f'(1)=1-2a=-1$,解得 $a=1$.故选 D.

4.A **提示:**设 $\sqrt{1-2x}=t$,则 $t\geqslant0$,$x=\frac{1-t^2}{2}$,所以 $y=1+x-\sqrt{1-2x}=1+\frac{1-t^2}{2}-t=-\frac{1}{2}(t+1)^2+2$,对称轴为 $t=-1$,开口向下,因为 $t\geqslant0$,所以当 $t=0$ 时,y 取得最大值 $\frac{3}{2}$,即 $y\leqslant\frac{3}{2}$,故函数 $y=1+x-\sqrt{1-2x}$ 的值域为 $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$.故选 A.

5.D **提示:**因为 $f(-x)=\frac{-x^3+3x}{e^{|x|}}=-f(x)$,所以 $f(x)$ 为奇函数,故排除 B;因为 $f(5)=\frac{5^3-15}{e^5}=\frac{110}{e^5}>0$,故排除 A,C.故选 D.

6.B **提示:**因为 $y=x^3+a\ln x$,所以 $y'=3x^2+\frac{a}{x}$,由题意,得 $\begin{cases}k=3+a,\\ 1=k-4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=5,\\ a=2.\end{cases}$ 故选 B.

7.C **提示:**因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,所以 $f(-x)=f(x)$,又 $f(2-x)=f(2+x)$,所以 $f[2-(2+x)]=f[2+(2+x)]$,即 $f(-x)=f(x+4)=f(x)$,所以 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数,所以 $f(-2022)=f(2022)=f(2+4\times505)=f(2)$,因为当 $x\in[0,2]$ 时,$f(x)=\begin{cases}2^x-1,0\leqslant x<1,\\ \log_5(x+4),1\leqslant x\leqslant2,\end{cases}$ 所以 $f(-2022)=f(2)=\log_56$.故选 C.

8.A **提示:**由题意,得 $a>0$,不等式 $\frac{1}{2}e^{ax}-\frac{\ln(2x)}{a}\geqslant0$ 恒成立,即 $\frac{1}{2}e^{ax}\geqslant\frac{\ln(2x)}{a}$ 恒成立,即 $ae^{ax}\geqslant2\ln(2x)$,进而转化为 $axe^{ax}\geqslant2x\ln(2x)=e^{\ln(2x)}\cdot\ln(2x)$ 恒成立.因为 $a>0$,$x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$,所以 $ax>0$,$\ln(2x)>0$.设 $g(x)=xe^x(x>0)$,则 $g'(x)=(x+1)e^x$,当 $x>0$ 时,$g'(x)>0$,所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以不等式 $\frac{1}{2}e^{ax}-\frac{\ln(2x)}{a}\geqslant0$ 恒成立等价于 $g(ax)\geqslant g(\ln(2x))$ 恒成立,又 $ax>0$,$\ln(2x)>0$,所以 $ax\geqslant\ln(2x)$ 对任意的 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 恒成立,所以 $\frac{a}{2}\geqslant\frac{\ln(2x)}{2x}$ 在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上恒成立.设 $h(t)=\frac{\ln t}{t}(t>1)$,则 $h'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$.当 $1<t<e$ 时,$h'(t)>0$,$h(t)$ 单调递增;当 $t>e$ 时,$h'(t)<0$,$h(t)$ 单调递减.所以 $[h(t)]_{\max}=h(e)=\frac{1}{e}$,此时 $2x=e$,即 $x=\frac{e}{2}\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$,所以 $\frac{a}{2}\geqslant\frac{1}{e}$,解得 $a\geqslant\frac{2}{e}$.故选 A.

专项训练(2)

1.D **提示:**令 $t=2x-1$,则 $x=\frac{t+1}{2}$,$f(t)=4\left(\frac{t+1}{2}\right)^2+3=t^2+2t+4$,所以 $f(x)=x^2+2x+4$.故选 D.

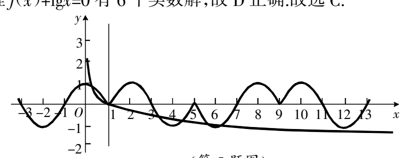
2.D **提示:**由题意,得 $0.4=0.8D^{\frac{22}{22}}$,解得 $D=\frac{1}{2}$,则 $0.8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{G}{22}}<0.1$,即 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{G}{22}}<\left(\frac{1}{2}\right)^3$,解得 $G>66$,所以学习率衰减到 0.1 以下所需的训练迭代轮数至少为67.故选D.

3.A **提示:**因为 $f'(x)=3^x\ln3-\frac{2f'(1)}{x}$,所以 $f'(1)=3\ln3-2f'(1)$,所以 $f'(1)=\ln3$.故选 A.

4.C **提示:**当 $0<a<1$ 时,要使得不等式 $\log_a(2x+1)\geqslant2\log_a(x+m)$ 有意义,需要 $x+m>0$ 在 $x\in[0,4]$ 恒成立,可得 $m>0$,此时不等式 $\log_a(2x+1)\geqslant2\log_a(x+m)$ 恒成立等价于 $\sqrt{2x+1}\leqslant x+m$ 恒成立,即 $m\geqslant\sqrt{2x+1}-x$,令 $t=\sqrt{2x+1}$,则 $t\in[1,3]$,$x=\frac{t^2-1}{2}$,所以 $m\geqslant\sqrt{2x+1}-x=t-\frac{t^2-1}{2}=-\frac{1}{2}t^2+t+\frac{1}{2}$,因为 $y=-\frac{1}{2}t^2+t+\frac{1}{2}$ 在 $[1,3]$ 上单调递减,所以当 $t=1$ 时,$y=-\frac{1}{2}t^2+t+\frac{1}{2}$ 取得最大值 1,所以 $m\geqslant1$.综上,实数 m 的取值范围是 $[1,+\infty)$.故选C.

5.C **提示:**因为 $f(x-1)$ 为奇函数,所以 $f(-x-1)=-f(x-1)$,即 $f(-x)=-f(x-2)$,所以 $f(x)$ 关于点 $(-1,0)$ 对称.因为 $f(x+1)$ 为偶函数,所以 $f(-x+1)=f(x+1)$,即 $f(-x)=f(x+2)$,所以 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称.由 $f(-x)=-f(x-2)$,$f(-x)=f(x+2)$,得 $f(x+2)=-f(x-2)$,所以 $f(x+8)=-f(x+4)=f(x)$,即 $f(x)$ 是周期为 8 的周期函数,结合函数的对称性,可得 $f(x)$ 的图象如图所示.对于 A,$f\left(\frac{7}{2}\right)=-f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\left(-\frac{1}{4}+1\right)=-\frac{3}{4}$,故 A 正确;对于 B,由 $f(x)$ 关于点 $(-1,0)$ 对称,且 $f(x)$ 是周期为 8 的周期函数,得 $f(x)$ 的图象关于点 $(7,0)$ 对称,则 $f(7+x)=-f(7-x)$,即 $f(x+7)$ 为奇函数,故 B正确;对

于C,由图象可知,$f(x)$在(6,8)上单调递增,故C错误;对于D,方程$f(x)+\lg x=0$的解的个数等价于函数$y=f(x)$与$y=-\lg x$图象的交点个数,因为$f(12)=f(4)=-f(0)=-1$,$-\lg 12<-\lg 10=-1$,所以结合图象可知,函数$y=f(x)$与$y=-\lg x$的图象共有6个交点,即方程$f(x)+\lg x=0$有6个实数解,故D正确.故选C.



(第5题图)

6.C **提示:**因为当$x<0$时,$f(x)=x^3-3x$,所以$f'(x)=3x^2-3$,令$f'(x)=0$,得$x=-1$(舍正),所以$f(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递增,在$(-1,0)$上单调递减,又$f(x)=\ln(x+1)$在$[0,+\infty)$上单调递增,所以作出$f(x)$的大致图象(图略),则$f(x)$极大值为$f(-1)=2$,又$f(0)=0$,所以当$k\in(0,2)$时,$y=f(x)$的图象与直线$y=k$有3个交点,即函数$y=f(x)-k$有三个不同的零点,所以实数k的取值范围为(0,2).故选C.

7.C **提示:**由$f(x)=\ln x+x^2-ax$,得$f'(x)=\frac{1}{x}+2x-a=\frac{2x^2-ax+1}{x}$,由题意,得$m,n$是方程$f'(x)=0$,即$2x^2-ax+1=0$的两个根,所以$m+n=\frac{a}{2}$,$mn=\frac{1}{2}$,故$n=\frac{1}{2m}$,$f(m)-f(n)=\ln m+m^2-am-\ln n-n^2+an=\ln\frac{m}{n}-m^2+n^2=\ln(2m^2)+\frac{1}{4m^2}-m^2$.令$t=m^2$,$t\in[1,4]$,设$g(t)=\ln(2t)+\frac{1}{4t}-t$,$t\in[1,4]$,则$g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{4t^2}-1=\frac{-(2t-1)^2}{4t^2}<0$,故$g(t)$在$t\in[1,4]$上单调递减,$g(t)_{max}=g(1)=\ln 2-\frac{3}{4}$.故选C.

8.C **提示:**由$f(x)=(x-1)(e^x-e)$,$x\in\mathbf{R}$,得$f'(x)=xe^x-e$,因为$f'(1)=0$,且当$x>1$时,$e^x>e$,所以$xe^x>e$,即$xe^x-e>0$,所以$f'(x)>0$;当$0<x<1$时,$1<e^x<e$,所以$0<xe^x<e$,即$xe^x-e<0$,所以$f'(x)<0$;当$x\leqslant 0$时,$0<e^x\leqslant 1$,所以$xe^x\leqslant 0$,所以$xe^x-e<0$,所以$f'(x)<0$.所以$f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,所以$[f(x)]_{min}=f(1)=0$.因为$\forall x_2\in[0,+\infty)$,都$\exists x_1\in\mathbf{R}$,使得不等式$f(x_1)\leqslant g(x_2)$成立,所以对$\forall x_2\in[0,+\infty)$,$[f(x)]_{min}\leqslant g(x_2)$恒成立,等价于$\forall x_2\in[0,+\infty)$,$g(x_2)\geqslant 0$恒成立,即$\forall x\in[0,+\infty)$,$g(x)=e^x-ax-1\geqslant 0$恒成立,又$g'(x)=e^x-a(x\geqslant 0)$,且$g'(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,所以$g'(x)\geqslant g'(0)=1-a$.①当$1-a\geqslant 0$,即$a\leqslant 1$时,$g'(x)\geqslant 0$,所以$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,所以$[g(x)]_{min}=g(0)=0$,符合题意,所以$a\leqslant 1$时,$g(x)\geqslant 0$恒成立;②当$1-a<0$,即$a>1$时,令$g'(x)=e^x-a=0$,得$x=\ln a$,所以当$x\in(0,\ln a)$时,$g'(x)<0$;当$x\in(\ln a,+\infty)$时,$g'(x)>0$,所以$g(x)$在$(0,\ln a)$单调递减,在$(\ln a,+\infty)$单调递增,又$g(0)=0$,所以$[g(x)]_{min}=g(\ln a)<g(0)=0$,所以$\forall x\in[0,+\infty)$,$g(x)=e^x-ax-1\geqslant 0$不恒成立,所以$a>1$不满足题意.综上,$a$的取值范围为$(-\infty,1]$,即$a$的最大值为1.故选C.

第26期

专题四 三角函数

专项训练(1)

1.D **提示:**函数$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$的最小正周期为$\pi$,是偶函数,故A错误;函数$y=\tan 2x$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$,是奇函数,故B错误;函数$y=2\sin(\pi-x)=2\sin x$的最小正周期为$2\pi$,是奇函数,故C错误;函数$y=\tan(\pi+x)=\tan x$的最小正周期为$\pi$,是奇函数,故D正确.故选D.

2.A **提示:**由$\sin\alpha-\sin\beta=-\frac{2}{3}$,得$\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{4}{9}$,由$\cos\alpha-\cos\beta=\frac{2}{3}$,得$\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{4}{9}$,两式相加,得$2-2\cos(\alpha-\beta)=\frac{8}{9}$,所以$\cos(\alpha-\beta)=\frac{5}{9}$,因为$\sin\alpha-\sin\beta=-\frac{2}{3}<0$,$\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以$\alpha-\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,所以$\sin(\alpha-\beta)=-\frac{2\sqrt{14}}{9}$,$\tan(\alpha-\beta)=-\frac{2\sqrt{14}}{5}$.故选A.

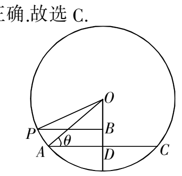
3.A **提示:**设$\angle BOC=\alpha$,由$\frac{l_1}{l_2}=2$,得$\frac{|OA|\cdot\alpha}{|OB|\cdot\alpha}=\frac{|OA|}{|OB|}=2$,即$|OA|=2|OB|$,所以$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}\alpha\cdot|OA|^2-\frac{1}{2}\alpha\cdot|OB|^2}{\frac{1}{2}\alpha\cdot|OB|^2}=\frac{|OA|^2-|OB|^2}{|OB|^2}=\frac{4|OB|^2-|OB|^2}{|OB|^2}=3$.故选A.

4.C **提示:**函数$f(x)=5\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=-5\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$,由$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,解得$\frac{2\pi}{3}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{3}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,取$k=0$,得$\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{3}$.因为$\left(\frac{5\pi}{6},\pi\right)\subseteq\left[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right]$,所以函数$f(x)=5\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$在$\left(\frac{5\pi}{6},\pi\right)$上单调递增.故选C.

5.C **提示:**对于函数$f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$,其最小正周期$T=2\pi$,故$-2\pi$也是$f(x)$的一个周期,故A正确;对称轴为$x+\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,即$x=k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,则当$k=3$时,$x=\frac{8\pi}{3}$,故B正确;由$x+\frac{\pi}{3}\in[2k\pi,\pi+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$,可得$x\in\left[2k\pi-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$,当$k=0$时,$f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$上单调递减,在$\left(\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$上单调递增,故C错误;$f(x+\pi)=\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)$,令$x+\frac{4\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得$x=k\pi-\frac{5\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$,则当$k=1$时,$x=\frac{\pi}{6}$,故D正确.故选C.

6.C **提示:**由图可知,$A=\frac{1}{2}$,$f(0)=\frac{1}{2}\sin\varphi=\frac{1}{4}$,由$|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$,得$\varphi=\frac{\pi}{6}$,因为$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\omega\times\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$,$\omega\times\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,则$\omega=3k+2$,$k\in\mathbf{Z}$,因为最小正周期$T>\frac{2\pi}{3}$,所以$\omega=\frac{2\pi}{T}<3$,所以$\omega=2$,$f(x)=\frac{1}{2}\cdot\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,将函数$f(x)$图象上所有点的横坐标伸长到原来的3倍,得到$y=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$,再向右平移$\frac{\pi}{5}$个单位长度,得到$g(x)=\frac{1}{2}\sin\left[\frac{2}{3}\left(x-\frac{\pi}{5}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{30}\right)$.故选C.

7.C **提示:**根据题意作出示意图,如图所示,其中O为筒车的轴心的位置,AC为水面,过O作$OD\perp AC$于点D,P为筒车经过t秒后的位置,连接OP,过P作$PB\perp OD$于点B,由题意,得筒车的角速度为$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{60}=\frac{\pi}{30}$rad/s,$\sin\angle OAC=\sin\theta=\frac{OD}{OA}=\frac{2}{3}$,$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以$\sin\angle OPB=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{30}t\right)=\frac{OB}{OP}$,所以$OB=3\sin\left(\theta-\frac{\pi}{30}t\right)$,因为$d=2-OB$,所以$d=2-3\sin\left(\theta-\frac{\pi}{30}t\right)=2+3\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\theta\right)$,其中$\sin\theta=\frac{2}{3}$,且$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,故①错误,②正确;对于③,当$t=38$时,$\frac{38\pi}{30}=180°+48°$,$\sin 48°\approx\frac{\sqrt{5}}{3}$,$\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$,所以$d=2+3\sin\left(\frac{38\pi}{30}-\theta\right)=2-3\sin(48°-\theta)=2-3(\sin 48°\cos\theta-\cos 48°\sin\theta)=\frac{5}{3}>0$,故盛水筒$P$没有进入水中,所以③错误;对于④,当$t=22$时,$\frac{22\pi}{30}=90°+42°$,由$\cos 48°\approx\sin 42°=\frac{2}{3}$,得$\theta=42°$,所以$d=2+3\sin\left(\frac{22\pi}{30}-\theta\right)=2+3\cos(42°-\theta)=2+3\cos 0°=5$,所以盛水筒$P$到达最高点,所以④正确.故选C.



(第7题图)

8.B **提示:**因为函数$f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$为奇函数,且$\omega>0$,$\varphi\in(0,\pi)$,所以$\varphi=\frac{\pi}{2}$,所以$f(x)=-\sin\omega x$,所以$x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$时,$\omega x\in\left[-\frac{\pi}{3}\omega,\frac{\pi}{4}\omega\right]$,因为$f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$上恰有一个最大值和一个最小值,

所以$\begin{cases}-\frac{3\pi}{2}<-\frac{\pi}{3}\omega\leqslant-\frac{\pi}{2},\\ \frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{4}\omega<\frac{3\pi}{2},\end{cases}$解得$2\leqslant\omega<\frac{9}{2}$,所以$\omega$的取值范围是$\left[2,\frac{9}{2}\right)$.故选B.

专项训练(2)

1.A **提示:**因为$\tan 2\alpha=\frac{\cos\alpha}{2-\sin\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$,因为$\cos\alpha\neq 0$,所以$4\sin\alpha=1$,则$\sin\alpha=\frac{1}{4}$,又$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以$\cos\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$,$\tan\alpha=\frac{\sqrt{15}}{15}$.故选A.

2.B **提示:**由$y=\tan\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$,令$k\pi-\frac{\pi}{2}<3x+\frac{\pi}{6}<k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,解得$\frac{k\pi}{3}-\frac{2\pi}{9}<x<\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{9}$,$k\in\mathbf{Z}$.所以该函数的单调递增区间是$\left(\frac{k\pi}{3}-\frac{2\pi}{9},\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{9}\right)$,$k\in\mathbf{Z}$.故选B.

3.D **提示:**因为$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{5}-\cos\alpha$,所以$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha+\cos\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{5}$,所以$\sqrt{3}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{5}$,即$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{5}$,所以$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$,所以$\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)=\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=2\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-1=2\times\left(\frac{4}{5}\right)^2-1=\frac{7}{25}$.故选D.

4.A **提示:**函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$.因为当$x_1-x_2=\frac{\pi}{2}$时,$|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant 4$,所以$|f(x_1)-f(x_2)|=4$,即$f(x_1)$与$f(x_2)$中一个为最大值,另一为最小值,所以$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}T+kT$,$k\in\mathbf{Z}$,则$T=\frac{\pi}{2k+1}=\frac{2\pi}{\omega}$,所以$\omega=4k+2$,$k\in\mathbf{Z}$,由$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$,得$\omega x-\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6}\omega-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{6}\right]$,因为函数$f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$上单调,$\omega>0$,所以$\begin{cases}\frac{\pi}{6}\omega-\frac{\pi}{6}\geqslant k_1\pi-\frac{\pi}{2},\\ \frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{6}\leqslant k_1\pi+\frac{\pi}{2},\end{cases}$解得$6k_1-2\leqslant\omega\leqslant 3k_1+2$$(k_1\in\mathbf{Z})$,又$\begin{cases}6k_1-2\leqslant 3k_1+2,\\ 3k_1+2>0,\end{cases}$所以$-\frac{2}{3}<k_1\leqslant\frac{4}{3}$,因为$k_1\in\mathbf{Z}$,所以$k_1=0$或$k_1=1$,所以$-2\leqslant\omega\leqslant 2$或$4\leqslant\omega\leqslant 5$,又$\omega=4k+2$,$k\in\mathbf{Z}$,$\omega>0$,所以$\omega=2$.故选A.

5.A **提示:**因为$f(x)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$,所以-2π为$f(x)$的一个周期,故A正确;当$x=\frac{8\pi}{3}$时,$f\left(\frac{8\pi}{3}\right)=\cos\frac{17\pi}{3}\neq\pm 1$,故B错误;令$g(x)=f(x+\pi)=\cos\left(2x+2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,当$x=\frac{\pi}{6}$时,$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$,故C错误;因为$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,所以$2x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{4\pi}{3},\frac{7\pi}{3}\right)$,故函数$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上先增后减,故D错误.故选A.

6.D **提示:**由$y=\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\varphi\right)$,得其最小正周期$T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$,此时对于③④两个命题,因为$\frac{4}{3}-\left(-\frac{7}{3}\right)=\frac{11}{3}$,显然不是2的整数倍,故③④两个中必有一个假命题.假设③正确,则$\sin\left[\frac{\pi}{2}\times\left(-\frac{7}{3}\right)+\varphi\right]=\pm 1$,此时$\varphi=\frac{5\pi}{3}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,不妨取$k=-2$,则$y=\sin\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$,当$x\in\left[-\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right]$时,$\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,故此时原函数在$\left[-\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right]$上单调递增,故①正确;平移后得到$y=\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(x+\frac{5}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}x$,显然该函数为偶函数,故此时①②③都是真命题.故④为唯一的假命题.故选D.

7.D **提示:**根据图象可知,$\frac{3T}{4}=\frac{11\pi}{12}-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{4}$,所以$f(x)$的最小正周期$T=\pi$,所以$\omega=2$,根据五点法,可得$2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$,满足题意,所以$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,令$2x+\frac{\pi}{6}=k\pi$,得$x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,又$x\in[-\pi,\pi]$,所以$x=-\frac{7\pi}{12},-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}$,所以$f(x)$在区间$[-\pi,\pi]$上的零点之和为$-\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}+\frac{11\pi}{12}=\frac{2\pi}{3}$,故选D.

8.B **提示:**由题意,得$\begin{cases}-\frac{\pi}{4}\omega+\varphi=k_1\pi,\\ \frac{\pi}{4}\omega+\varphi=k_2\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases}$$(k_1,k_2\in\mathbf{Z})$,解得$\varphi=\frac{k_1+k_2}{2}\pi+\frac{\pi}{4}$,$\omega=2(k_2-k_1)+1(k_1,k_2\in\mathbf{Z})$.因为$|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=-\frac{\pi}{4}$或$\frac{\pi}{4}$.因为函数$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36}\right)$上单调,故$\frac{5\pi}{36}-\frac{\pi}{18}\leqslant\frac{T}{2}$,解得$T\geqslant\frac{\pi}{6}$,所以$\omega\leqslant 12$.又

$\omega>0$,所以$0<\omega\leqslant 12$.当$\varphi=\frac{\pi}{4}$时,则$k_1+k_2=0$,$\omega=4k_2+1$,所以$\omega=1,5,9$;当$\varphi=-\frac{\pi}{4}$时,则$k_1+k_2=-1$,$\omega=4k_2+3$,所以$\omega=3,7,11$.当$\omega=11$时,函数$f(x)=\sin\left(11x-\frac{\pi}{4}\right)$在$\left(\frac{\pi}{18},\frac{3\pi}{44}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{3\pi}{44},\frac{5\pi}{36}\right)$上单调递减,不符合题意.当$\omega=9$时,函数$f(x)=\sin\left(9x+\frac{\pi}{4}\right)$在$\left(\frac{\pi}{18},\frac{5\pi}{36}\right)$单调递减,符合题意.综上,$\omega$的最大值为9.故选B.

专题五 平面向量、解三角形

专项训练(1)

1.A **提示:**由$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$,得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=x-2=0$,即$x=2$,由$\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$,得$y=1\times(-2)=-2$,则$x+y=0$.故选A.

2.A **提示:**因为$\boldsymbol{a}=(2\sqrt{2},1)$,$\boldsymbol{b}=(3,0)$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6\sqrt{2}$,所以$\boldsymbol{a}$在$\boldsymbol{b}$上的投影向量为$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\times\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=(2\sqrt{2},0)$.故选A.

3.C **提示:**因为$\cos B=\frac{9}{16}$,所以$\sin B=\sqrt{1-\left(\frac{9}{16}\right)^2}=\frac{5\sqrt{7}}{16}$,又$a=6$,$\sin A=\frac{3\sqrt{7}}{8}$,由正弦定理,得$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=5$.故选C.

4.D **提示:**由$a=\sqrt{6}$,$\cos A=\frac{7}{8}$,结合余弦定理,得$6=b^2+c^2-\frac{7}{4}bc$,又$b=2c$,消去b,得$c^2=4$,所以$c=2$,$b=4$,因为$\cos A=\frac{7}{8}$,所以$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{8}$,所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 4\times 2\times\frac{\sqrt{15}}{8}=\frac{\sqrt{15}}{2}$.故选D.

5.D **提示:**因为$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AP}$,所以$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,设$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BC}$,$\lambda\in[0,1]$,所以$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})-\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\lambda\overrightarrow{BC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\left(-\frac{2}{3}-\frac{\lambda}{3}\right)\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{3}\overrightarrow{AC}$,又$\overrightarrow{BP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$,所以$m=-\frac{2}{3}-\frac{\lambda}{3}$,$n=\frac{\lambda}{3}$,所以$m+n=-\frac{2}{3}$.故选D.

6.A **提示:**因为$\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$,$\boldsymbol{b}=(-\sin\alpha,\cos\alpha)$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha=0$,$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=1$,因为$\boldsymbol{m}=\sqrt{3}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}+\sqrt{3}\boldsymbol{b}$,所以$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=(\sqrt{3}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\sqrt{3}\boldsymbol{b})=\sqrt{3}\boldsymbol{a}^2+\sqrt{3}\boldsymbol{b}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\sqrt{3}$,$|\boldsymbol{m}|=\sqrt{(\sqrt{3}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{3\boldsymbol{a}^2+2\sqrt{3}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=2$,同理可得,$|\boldsymbol{n}|=2$,设$\boldsymbol{m}$与$\boldsymbol{n}$的夹角为$\theta$,$\theta\in[0,\pi]$,所以$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以$\theta=\frac{\pi}{6}$,故$\boldsymbol{m}$与$\boldsymbol{n}$的夹角为$\frac{\pi}{6}$.故选A.

7.C **提示:**由题意知,$\angle CAM=60°$,$\angle AMC=75°$,所以$\angle ACM=45°$,在Rt△ABM中,$AM=\sqrt{2}AB=40\sqrt{2}$m,在△ACM中,由正弦定理,得$\frac{AM}{\sin 45°}=\frac{CM}{\sin 60°}$,所以$CM=\frac{40\sqrt{2}\sin 60°}{\sin 45°}=40\sqrt{3}$m,在Rt△$DCM$中,$CD=CM\cdot\sin 60°=40\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=60$m.故选C.

8.D **提示:**在锐角△ABC中,由$\sqrt{3}\sin B+\cos B=2$,得$2\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)=2$,则$B=\frac{\pi}{3}$.因为$\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{\sin A\cdot\sin B}{3\sin C}$,由余弦定理和正弦定理,得$\frac{a^2+c^2-b^2}{2acb}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}=\frac{a}{2\sqrt{3}c}$,解得$b=2\sqrt{3}$,设△$ABC$外接圆的半径为$R$,则$2R=\frac{b}{\sin B}=4$.所以$a+c=2R\sin A+2R\sin C=4(\sin A+\sin C)=4\left[\sin A+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)\right]=4\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$,又$A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,则$A+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$,所以当$A=\frac{\pi}{3}$时,$(a+c)_{max}=4\sqrt{3}$.故△$ABC$周长的最大值为$(a+b+c)_{max}=6\sqrt{3}$.故选D.

专题六 数列

专项训练(1)

1.C **提示:**数列$-5,-9,-13,-17$的通项公式为$a_n=-(4n+1)$,令$-(4n+1)=-401$,解得$n=100$,即-401是该数列的第100项.故选C.

2.C **提示:**因为$a_1+a_7=-2$,所以$2a_4=-2$,解得$a_4=-1$,因为$a_3=2$,所以$d=a_4-a_3=-3$.故选C.

3.C **提示:**因为$\log_3 a_n+1=\log_3 a_{n+1}(n\in\mathbf{N}_+)$,所以$a_{n+1}=3a_n$,所以数列$\{a_n\}$是以3为公比的等比数列,因为$a_1+a_3+a_5=9$,所以$a_3+a_5+a_7=9(a_1+a_3+a_5)=9^2$,所以$\log_{\frac{1}{9}}(a_3+a_5+a_7)=\log_{\frac{1}{9}}9^2=-2$.故选C.

4.A **提示:**设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,因为$\frac{S_n}{n}=\frac{na_1+\frac{n(n-1)}{2}d}{n}=a_1+\frac{n-1}{2}d$,所以数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是以$\frac{1}{2}d$为公差的等差数列,所以$\frac{1}{2}d=\frac{S_{2023}}{2023}-\frac{S_{2022}}{2022}=1$,所以$d=2$,又$a_1=-2022$,所以$S_{2023}=2023\times(-2022)+\frac{2023\times 2022}{2}\times 2=0$.故选A.

5.A **提示:**因为$a_{n+1}=1-\frac{1}{a_n}(n\in\mathbf{N}_+)$,且$a_1=2$,所以$a_2=1-\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2}$,$a_3=1-\frac{1}{a_2}=-1$,$a_4=1-\frac{1}{a_3}=2$,$a_5=1-\frac{1}{a_4}=\frac{1}{2}$,…,所以$\{a_n\}$是周期为3的周期数列,因为$2023=674\times 3+1$,所以$a_{2023}=a_1=2$.故选A.

6.D **提示:**设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,所以$S_1+2=a_1+2$,$\frac{S_3}{3}+4=\frac{\frac{3(a_1+a_3)}{2}}{3}+4=a_2+4$,$\frac{S_5}{5}+6=\frac{\frac{5(a_1+a_5)}{2}}{5}+6=a_3+6$,因为$S_1+2$,$\frac{S_3}{3}+4$,$\frac{S_5}{5}+6$成等比数列,所以$(a_2+4)^2=(a_1+2)(a_3+6)$,所以$(a_2+4)^2=(a_2+2-d)(a_2+d+6)$,所以$d^2+4d+4=0$,解得$d=-2$,所以$\frac{a_2+4}{a_1+2}=1$,所以其公比为1.故选D.

7.D **提示:**因为等比数列$\{a_n\}$中,$a_1>1$,$a_{2021}\cdot a_{2022}>1$,$\frac{a_{2021}-1}{a_{2022}-1}<0$,所以$a_{2021}>1$,$0<a_{2022}<1$,$0<q<1$,故A错误;因为当$1\leqslant n\leqslant 2021$,$n\in\mathbf{N}_+$时,$a_n>1$,当$n\geqslant 2022$,$n\in\mathbf{N}_+$时,$0<a_n<1$,所以当$n=2021$时,$T_n$取得最大值,故D正确;因为数列$\{a_n\}$各项都为正数,所以$S_n$没有最大值,故C错误;由题意,得$0<a_{2022}<1$,$0<a_{2023}<1$,所以$a_{2021}\cdot a_{2023}=a_{2022}^2<1$,故B错误.故选D.

8.C **提示:**因为数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$,$a_{n+1}=2a_n+1(n\in\mathbf{N}_+)$,所以$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$,又$a_1+1=2$,所以数列$\{a_n+1\}$是首项为2,公比为2的等比数列,所以$a_n+1=2^n$,即$a_n=2^n-1$,所以$\frac{a_n+1}{(a_n+2)(a_{n+1}+2)}=\frac{2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}$,所以$T_n=\left(\frac{1}{2+1}-\frac{1}{2^2+1}\right)+\left(\frac{1}{2^2+1}-\frac{1}{2^3+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2^{n+1}+1}<\frac{1}{3}$,又$k>T_n$恒成立,所以$k\geqslant\frac{1}{3}$.故选C.

专项训练(2)

1.D **提示:**设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,因为$a_2=2$,$S_3=7$,所以$\begin{cases}a_1q=2,\\ \frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=7,\end{cases}$得$2q^2-5q+2=(2q-1)(q-2)=0$,解得$q=2$或$q=\frac{1}{2}$.当$q=2$时,$a_6=a_2q^4=2^5=32$.当$q=\frac{1}{2}$时,$a_6=a_2q^4=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{8}$.所以$a_6=\frac{1}{8}$或32.故选D.

2.C **提示:**因为a_2,a_{2022}是方程$x^2-4x+3=0$的两个根,所以$a_2+a_{2022}=4$,又$\{a_n\}$是等差数列,所以$a_1+a_{2023}=a_2+a_{2022}=\cdots=2a_{1012}$,即$a_{1012}=2$,所以$2^{a_1}\times 2^{a_2}\times 2^{a_3}\times\cdots\times 2^{a_{2023}}=2^{(a_1+a_2+\cdots+a_{2023})}=2^{(1011\times 4+2)}=2^{4046}$.故选C.

3.A **提示:**依题意得,八个孩子所得棉花斤数依次构成等差数列,设该等差数列为$\{a_n\}$,公差为d,前n项和为S_n,第一个孩子分到的棉花斤数为a_1,由题意,得$d=17$,$S_8=8a_1+\frac{8\times 7}{2}\times 17=996$,解得$a_1=65$,所以$a_5=a_1+4d=133$.故选A.

4.A **提示:**设正项等比数列$\{a_n\}$的公比为q,则$q>0$,因为$2S_3=3a_2+8a_1$,所以$2(a_1+a_2+a_3)=3a_2+8a_1$,即$6a_1+a_2-2a_3=0$,所以$6a_1+a_1q-2a_1q^2=0$,因为$a_1>0$,所以$-2q^2+q+6=0$,解得$q=2$或$q=-\frac{3}{2}$(舍去),所以$q=2$,因为$S_8=2S_7+2$,所以$S_7+a_8=2S_7+2$,所以$a_8=S_7+2$,所以$a_1q^7=\frac{a_1(1-q^7)}{1-q}+2$,解得$a_1=2$,所以$a_2=a_1q=4$.故选A.

5.B **提示:**由题设,得$2a_1=a_3-a_2$,设$\{a_n\}$的公比为q,则$q>0$,且$a_n>0$,$2a_1=a_1q^2-a_1q$,即$q^2-q-2=0$,解得$q=2$(舍负),由$\sqrt{a_m\cdot a_n}=4a_1$,得$a_1^2q^{m+n-2}=16a_1^2$,则$2^{m+n-2}=16$,所以$m+n=6$,所以$\frac{1}{m}+\frac{5}{n}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{m}+\frac{5}{n}\right)(m+n)=\frac{1}{6}\left(6+\frac{n}{m}+\frac{5m}{n}\right)\geqslant\frac{1}{6}\left(6+2\sqrt{\frac{n}{m}\cdot\frac{5m}{n}}\right)=1+\frac{\sqrt{5}}{3}$,当且仅当$\frac{n}{m}=\frac{5m}{n}$,即$n=\sqrt{5}m=\frac{15-3\sqrt{5}}{2}\notin\mathbf{N}_+$,所以等号不成立,又$\frac{15-3\sqrt{5}}{2}\in(4,5)$,故当$n=5$,$m=1$时,$\frac{1}{m}+\frac{5}{n}=2$,当$n=4$,$m=2$时,$\frac{1}{m}+\frac{5}{n}=\frac{7}{4}$,显然$2>\frac{7}{4}$,故$n=4$,$m=2$时,$\frac{1}{m}+\frac{5}{n}$取得最小值$\frac{7}{4}$.故选B.

6.A **提示:**因为$a_1=2$,$S_n+2=a_{n+1}(n\in\mathbf{N}_+)$,所以当$n=1$时,$a_1=S_1=2$,$a_1+2=a_2$,解得$a_2=S_1+2=4$;当$n\geqslant 2$时,由$S_n+2=a_{n+1}$,可得$S_{n-1}+2=a_n(n\geqslant 2)$,两式相减,得$S_n-S_{n-1}=a_n=a_{n+1}-a_n$,即$a_{n+1}=2a_n(n\geqslant 2)$,当$n=1$时,$a_2=2a_1$,上式成立,所以$\{a_n\}$是首项和公比均为2的等比数列,所以$a_n=2^n$,所以$a_2+a_4+\cdots+a_{2022}=\frac{4(1-4^{1011})}{1-4}=\frac{4}{3}\times(2^{2022}-1)$.故选A.

7.A **提示:**因为$S_n+4=a_n+(n+1)^2$,所以$S_{n+1}+4=a_{n+1}+(n+2)^2$,两式相减,得$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}-a_n+2n+3$,即$a_{n+1}=a_{n+1}-a_n+2n+3$,所以$a_n=2n+3$,因为$b_n=\frac{8}{a_{n+1}\cdot a_{n+2}}$,所以$b_n=\frac{8}{(2n+5)(2n+7)}=4\left(\frac{1}{2n+5}-\frac{1}{2n+7}\right)$,所以$T_n=4\times\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{2n+5}-\frac{1}{2n+7}\right)=4\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{2n+7}\right)$,所以数列$\{T_n\}$是递增数列,当$n=1$时,$T_n=\frac{8}{63}$;当$n\to+\infty$时,$\frac{1}{2n+7}\to 0$,$T_n\to\frac{4}{7}$,所以$\frac{8}{63}\leqslant T_n<\frac{4}{7}$.故选A.

8.C **提示:**由$2a_{n+1}+a_n=6$,得$a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+3$,则$a_{n+1}-2=-\frac{1}{2}(a_n-2)$,又$a_1=10$,所以$a_1-2=8$,所以数列$\{a_n-2\}$是以8为首项,$-\frac{1}{2}$为公比的等比数列,所以$a_n-2=8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,则$a_n=8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2$,所以$S_n=8+8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^1+8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2n$,所以$S_n=\frac{8\cdot\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}+2n=2n+\frac{16}{3}-\frac{16}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n$,代入$\left|S_n-2n-\frac{16}{3}\right|<\frac{1}{192}$,得$\frac{16}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{192}$,即$2^n>2^{10}$,因为$n\in\mathbf{N}_+$,所以$n\geqslant 11$,所以满足不等式$\left|S_n-2n-\frac{16}{3}\right|<\frac{1}{192}$的$n$的最小正整数值为11.故选C.

专题七 立体几何、空间向量

1.B **提示:**设圆锥的底面半径为$r$cm,母线长为$l$cm,由题意,得$\pi l=2\pi r$,则$l=2r$,因为$S_表=\pi r^2+\frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot l=3\pi r^2=6\pi$,所以$r=\sqrt{2}$.故选B.

2.B **提示:**若$m\perp\alpha$,$\alpha/\!/\beta$,则$m\perp\beta$,又$n\perp\beta$,则$m/\!/n$,故A正确;若$m/\!/\alpha$,$\alpha\perp\beta$,则$m\subset\beta$或$m/\!/\beta$或m与β相交,相交也不一定垂直,故B错误;若$m\perp\alpha$,$m\perp n$,则$n\subset\alpha$或$n/\!/\alpha$,又$n\perp\beta$,则$\alpha\perp\beta$,故C正确;若$m\subset\alpha$,$\alpha/\!/\beta$,则$m/\!/\beta$,又$n\perp\beta$,则$m\perp n$,故D正确.故选B.

3.A **提示:**连接AC,因为四边形$ABCD$为矩形,E,F分别为PC和BD的中点,所以AC交BD于F,且F为AC的中点,所以$EF/\!/PA$,又$BC/\!/AD$,所以$\angle PAD$(或其补角)为异面直线EF与BC所成角,不妨设$PA=BC=2PD=4$,在△PAD中,$PA=4$,$AD=4$,$PD=2$,由余弦定理的推论,得$\cos\angle PAD=\frac{PA^2+AD^2-PD^2}{2PA\cdot AD}=\frac{4^2+4^2-2^2}{2\times 4\times 4}=\frac{7}{8}$.故选A.

4.A **提示:**连接AC,交BD于点O,连接OE,因为E是CC_1的中点,O是AC的中点,所以$OE/\!/AC_1$,因为$AC_1\not\subset$平面BDE,$OE\subset$平面BDE,所以$AC_1/\!/$平面BDE.以D为坐标原点,分别以DA,DC,DD_1所在直线为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系,则$C_1(0,2,2)$,$E(0,2,1)$,$B(2,2,0)$,$\overrightarrow{C_1E}=(0,0,-1)$,$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$,$\overrightarrow{DE}=(0,2,1)$,设平面$BDE$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=2x+2y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=2y+z=0,\end{cases}$可取$\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$,所以$C_1$到平面$BDE$的距离为$\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{C_1E}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,即直线$AC_1$到平面$BDE$的距离为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.故选A.

5.C **提示:**以D为坐标原点,分别以DA,DC,DD_1所在直线为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系,设正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为2,则$B(2,2,0)$,$D_1(0,0,2)$,$E(2,1,0)$,$B_1(2,2,2)$.对于A,$\overrightarrow{BD_1}=(-2,-2,2)$,$\overrightarrow{B_1E}=(0,-1,-2)$,所以$\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{B_1E}=-2$,所以$BD_1$与$B_1E$不垂直,所以$BD_1\perp$平面$B_1EF$不成立,故A错误;对于B,$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$,$\overrightarrow{B_1E}=(0,-1,-2)$,则$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{B_1E}=-2$,所以$BD$与$B_1E$不垂直,所以$BD\perp$平面$B_1EF$不成立,故B错误;对于C,连接$AC$,因为$A_1C_1/\!/AC$,$AC/\!/EF$,所以$A_1C_1/\!/EF$,又$A_1C_1\not\subset$平面$B_1EF$,$EF\subset$平面$B_1EF$,所以$A_1C_1/\!/$平面$B_1EF$,故C正确;对于D,因为$A_1D/\!/B_1C$,$B_1C\cap$平面$B_1EF=B_1$,所以$A_1D$与平面$B_1EF$相交,故D错误.故选C.

6.C **提示:**以D为坐标原点,分别以DA,DC,DD_1所在直线为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系,设