第 16 期

第 2~3 版综合测试(四)参考答案

一、单项选择题

1.C　**提示:** 向量 $a=(-3,2,4)$, $b=(1,-2,2)$, 所以 $a-b=(-4,4,2)$, 则 $|a-b|=\sqrt{(-4)^2+4^2+2^2}=6$. 故选 C.

2.B　**提示:** 椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的焦点坐标为 $(\pm\sqrt{3},0)$, 设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3-a^2}=1$, 把点 $P(2,1)$ 代入, 得 $\frac{4}{a^2}-\frac{1}{3-a^2}=1$, 解得 $a^2=2$ 或 $a^2=6$(舍去). 所以所求的双曲线方程是 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$. 故选 B.

3.D　**提示:** 直线 $x+2y-1=0$ 与直线 $a^2x+(a+1)y-1=0$ 平行, 故 $a+1-2a^2=0$, 解得 $a=1$ 或 $a=-\frac{1}{2}$, 当 $a=1$ 时, 两直线重合. 故 p 是 q 的既不充分也不必要条件. 故选 D.

4.A　**提示:** 圆 $(x-a)^2+y^2=1$ 的圆心坐标为 $(a,0)$, 因为直线 $2x+y-1=0$ 是圆 $(x-a)^2+y^2=1$ 的一条对称轴, 所以圆心在直线 $2x+y-1=0$ 上, 可得 $2a+0-1=0$, 即 $a=\frac{1}{2}$. 故选 A.

5.C　**提示:** 由题意知, $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, 则直线 AB 的方程为 $y=\sqrt{3}\left(x-\frac{p}{2}\right)$, 即 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}y+\frac{p}{2}$, 代入抛物线方程可得 $y^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}py-p^2=0$, 设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, 则 $y_1+y_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}p$, $y_1y_2=-p^2$, 由 $|MN|=4\sqrt{3}$, 得 $|y_1-y_2|=4\sqrt{3}$, 即 $\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{\frac{4}{3}p^2+4p^2}=4\sqrt{3}$, 解得 $p=3$, 所以抛物线 C 的准线方程为 $x=-\frac{3}{2}$. 故选 C.

6.A　**提示:** 以 A 为坐标原点, 以 AB, AD, AA_1 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系, 则 $A(0,0,0)$, $E(1,0,0)$, $D(0,2,0)$, 设 $F(0,m,n)$, $m\in[0,2]$, $n\in[0,2]$, 因为 $\overrightarrow{FE}=(1,-m,-n)$, $\overrightarrow{FD}=(0,2-m,-n)$, 所以 $\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FD}=m^2-2m+n^2=-\frac{3}{4}$. 因为 $S_{\triangle ADE}$ 为定值, 所以要想三棱锥 $F-AED$ 的体积最大, 则 F 到底面 ADE 的距离最大, 其中 $n^2=-\frac{3}{4}-m^2+2m=-(m-1)^2+\frac{1}{4}$, 所以当 $m=1$ 时, n^2 取得最大值为 $\frac{1}{4}$, 因为 $n\in[0,2]$, 所以 n 的最大值为 $\frac{1}{2}$, 所以 $F\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{EF}=\left(-1,1,\frac{1}{2}\right)$, 又平面 ABB_1A_1 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(0,1,0)$,

当三棱锥 $F-AED$ 的体积最大时, 设 EF 与平面 ABB_1A_1 所成角为 θ, 则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{EF},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{EF}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{1+1+\frac{1}{4}}}=\frac{2}{3}$. 故选 A.

7.C　**提示:** 设 $|PF_2|=3x(x>0)$, $|QF_1|=2x$, 双曲线 C 的焦距为 $2c$,

由双曲线的定义可知 $|QF_2|=2a+2x$, $|PQ|=2a+x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle PQF_2$ 中, 有 $|QF_2|^2=|PQ|^2+|PF_2|^2$, 可得 $(2a+2x)^2=(2a+x)^2+9x^2$, 解得 $x=\frac{2}{3}a$, 可得 $|PF_2|=2a$, $|PF_1|=4a$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PF_1F_2$ 中, 有 $|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2$, 得 $4a^2+16a^2=4c^2$, 解得 $c=\sqrt{5}a$, 可得双曲线 C 的离心率 $e=\sqrt{5}$. 故选 C.

8.A　**提示:** 直线 $x-\sqrt{2}y-\sqrt{2}=0$, 令 $x=0$, 得 $y=-1$; 令 $y=0$, 得 $x=\sqrt{2}$, 因为椭圆 C 的两个顶点在直线 $x-\sqrt{2}y-\sqrt{2}=0$ 上, 所以 $a=\sqrt{2}$, $b=1$, 所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

设过点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为 $y=kx+m$, 联立 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$, 所以 $\Delta=(4km)^2-4(2k^2+1)(2m^2-2)=0$, 化简得 $2k^2+1-m^2=0$, 即 $m^2=1+2k^2$, ①

解得 $x_0=-\frac{2km}{1+2k^2}$, 则 $y_0=kx_0+m=\frac{m}{2k^2+1}$, 所以 $P\left(-\frac{2km}{1+2k^2},\frac{m}{2k^2+1}\right)$, 把①代入点 P 的坐标, 得 $P\left(-\frac{2k}{m},\frac{1}{m}\right)$, 又 $F_1(-1,0)$, 所以 $k_1=\frac{\frac{1}{m}-0}{-\frac{2k}{m}-(-1)}=\frac{1}{m-2k}$, 对 $y=kx+m$, 令 $x=-2$, 得 $y=m-2k$, 所以点 M 的坐标为 $(-2,m-2k)$, 又 $F_2(1,0)$, 则 $k_2=\frac{(m-2k)-0}{-2-1}=\frac{2k-m}{3}$, 所以 $k_1k_2=\frac{1}{m-2k}\cdot\frac{2k-m}{3}=-\frac{1}{3}$. 故选 A.

二、多项选择题

9.BC　**提示:** $a-b-c=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD_1}=\overrightarrow{D_1B}$, 故 A 错误; $a+b+c=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC_1}$, 故 B 正确;

$a+b-c=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{C_1C}=\overrightarrow{A_1C}$, 故 C 正确;

$a-b+c=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{DB_1}$, 故 D 错误.

故选 BC.

10.BCD　**提示:** 由于圆 C 的方程为 $(x-3)^2+y^2=1$, 圆心为 $(3,0)$, 由题意可知 $(3,0)$ 到直线 $kx-y-2=0$ 的距离应小于 2, 即 $\frac{|3k-2|}{\sqrt{k^2+1}}<2$, 解得 $0<k<\frac{12}{5}$, 故选 BCD.

11.ABD　**提示:** 由 $F(1,0)$, 设直线 AB 的方程为 $x=my+1$, 与 $y^2=4x$ 联立, 得 $y^2-4my-4=0$,

则 $y_1+y_2=4m$, $y_1y_2=-4$, 故 A 正确;

由抛物线的定义, 可知 $|AF|=x_1+1$, $|BF|=x_2+1$,

则 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}=\frac{1}{my_1+2}+\frac{1}{my_2+2}=\frac{m(y_1+y_2)+4}{m^2y_1y_2+2m(y_1+y_2)+4}=\frac{4m^2+4}{-4m^2+8m^2+4}=1$, 故 B 正确;

$S=\frac{1}{2}|TF||y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{16m^2+16}\geqslant 4$, 当且仅当 $m=0$ 时, 等号成立, 故 S 的最小值为 4, C 错误;

由 Q 为 AT 中点, $|AT|=2|BQ|$, 可得 $\angle TBF=90°$, 即 $\overrightarrow{BT}\cdot\overrightarrow{BF}=0$,

所以 $(-1-x_2,-y_2)\cdot(1-x_2,-y_2)=x_2^2-1+y_2^2=x_2^2-1+4x_2=0$, 解得 $x_2=\sqrt{5}-2$ 或 $x_2=-\sqrt{5}-2$(舍去), 又因为 $x_1x_2=\frac{y_1^2y_2^2}{16}=1$, 所以 $x_1=\sqrt{5}+2$, 因此 $|AF|-|BF|=x_1+1-(x_2+1)=4$, 故 D 正确. 故选 ABD.

12.ABD　**提示:** 由题意知, 设椭圆的长轴长为 $2a$, 短轴长为 $2b$, 焦距为 $2c$, 则 $b=c=2$, 得 $a=2\sqrt{2}$, 则 $2a=4\sqrt{2}$, 故 A 正确; $|AB|=|OB|+|OA|=2+|OA|$,

由椭圆性质, 知 $2\leqslant|OA|\leqslant 2\sqrt{2}$, 所以 $4\leqslant|AB|\leqslant 2+2\sqrt{2}$, 故 B 正确; 记 $\angle AOF=\theta$, 则 $S_{\triangle ABF}=S_{\triangle AOF}+S_{\triangle OBF}=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OF\sin\theta+\frac{1}{2}OB\cdot OF\sin(\pi-\theta)=OA\sin\theta+2\sin\theta=(OA+2)\cdot\sin\theta$, 取 $\theta=\frac{\pi}{6}$, 则 $S_{\triangle ABF}=1+\frac{1}{2}OA\leqslant 1+\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}<4$, 故 C 错误;

由椭圆定义知, $|AF|+|AG|=2a=4\sqrt{2}$, 所以 $\triangle AFG$ 的周长 $L=|FG|+4\sqrt{2}=4+4\sqrt{2}$, 故 D 正确. 故选 ABD.

三、填空题

13.$\frac{1}{3}$　**提示:** 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $BE=\frac{1}{3}BB_1$, $DF=\frac{2}{3}DD_1$, 所以 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BB_1}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DD_1}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}$. 由 $\overrightarrow{EF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}+z\overrightarrow{AA_1}$, 所以 $x=-1$, $y=1$, $z=\frac{1}{3}$, $x+y+z=-1+1+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

14.$x^2+y^2-4x-6y=0$ 或 $x^2+y^2-4x-2y=0$ 或 $x^2+y^2-\frac{8}{3}x-\frac{14}{3}y=0$ 或 $x^2+y^2-\frac{16}{5}x-2y-\frac{16}{5}=0$　**提示:** 设过点 $(0,0)$, $(4,0)$, $(-1,1)$ 的圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,

即 $\begin{cases}F=0,\\16+4D+F=0,\\2-D+E+F=0,\end{cases}$ 解得 $F=0$, $D=-4$, $E=-6$, 所以过点 $(0,0)$, $(4,0)$, $(-1,1)$ 圆的方程为 $x^2+y^2-4x-6y=0$. 同理可得, 过点 $(0,0)$, $(4,0)$, $(4,2)$ 圆的方程为 $x^2+y^2-4x-2y=0$.

过点 $(0,0)$, $(-1,1)$, $(4,2)$ 圆的方程为 $x^2+y^2-\frac{8}{3}x-\frac{14}{3}\cdot y=0$.

过点 $(4,0)$, $(-1,1)$, $(4,2)$ 圆的方程为 $x^2+y^2-\frac{16}{5}x-2y-\frac{16}{5}=0$.

15.$\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$　**提示:** 因为曲线 $y=\sqrt{x^2+1}$ 为双曲线 $y^2-x^2=1$ 的上支, 故 $F(0,-\sqrt{2})$ 是双曲线的下焦点, 则双曲线的上焦点为 $F'(0,\sqrt{2})$, 由 $|PF|+|PA|=4$, 又 $|PF|-|PF'|=2$, 所以 $|PF'|+|PA|=2$, 又 $|AF'|=2$, 故 P, A, F' 共线, 又 AF' 的直线方程为 $x+y=\sqrt{2}$,

联立 $\begin{cases}y^2-x^2=1,\\x+y=\sqrt{2},\end{cases}$ 解得 $x=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $y=\frac{3\sqrt{2}}{4}$, 故点 P 的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$.

16.$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{3}-1\right]$　**提示:** 设 $|PF_1|=n$, $|PF_2|=m$, 因为 $x_1>0$, $y_1>0$, 则 $m<n$, 因为点 P, Q 在椭圆 C 上, $|PQ|=2|OF_2|$, 所以四边形 PF_1QF_2 为矩形, 且 $|QF_1|=|PF_2|$, 由 $\frac{|QF_1|}{|PF_1|}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$, 可得 $\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant\frac{m}{n}<1$, 由题意可得, $m+n=2a$, $m^2+n^2=4c^2$, ①

所以 $mn=2(a^2-c^2)$, ②

由①②可得 $\frac{4c^2}{2(a^2-c^2)}=\frac{m^2+n^2}{mn}=\frac{m}{n}+\frac{n}{m}$, 令 $t=\frac{m}{n}+\frac{n}{m}$, 令 $v=\frac{m}{n}\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$, 所以 $t=v+\frac{1}{v}\in\left(2,\frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$, 则 $2<\frac{4c^2}{2(a^2-c^2)}\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}$, 即 $a^2-c^2<c^2\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}(a^2-c^2)$, 即 $1-e^2<e^2\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}(1-e^2)$, 即 $\frac{1}{2}<e^2\leqslant 4-2\sqrt{3}$, 解得 $\frac{\sqrt{2}}{2}<e\leqslant\sqrt{3}-1$, 所以椭圆 C 的离心率的取值范围为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{3}-1\right]$.

四、解答题

17.(1)**证明:** 直线 l 的方程可化为 $y-1=m(x-1)$, 所以直线 l 恒过定点 $P(1,1)$. 圆心坐标 $C(0,1)$, 因为 $|PC|=1<\sqrt{5}$, 所以点 P 在圆 C 内, 所以直线 l 与圆 C 总有两个不同的交点.

(2)**解:** 要使弦长 AB 最短, 则直线 l 与 PC 垂直, 因为 $k_{PC}=0$, 所以直线 AB 的斜率不存在,

又直线 AB 过点 $P(1,1)$, 则直线 AB 的方程为 $x=1$.

18.**解:** (1)因为直线 L 过定点 $(0,-1)$, 将点 $(0,-1)$ 代入椭圆方程 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的左边, 得 $\frac{0}{25}+\frac{1}{16}=\frac{1}{16}<1$, 所以定点 $(0,-1)$ 在椭圆内, 所以直线 $L: y=x-1$ 与椭圆相交.

(2)依题意, 椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的焦点分别是两圆 $(x+3)^2+y^2=4$ 和 $(x-3)^2+y^2=1$ 的圆心,

所以 $(|PM|+|PN|)_{\max}=2\times 5+3=13$, $(|PM|+|PN|)_{\min}=2\times 5-3=7$, 则 $|PM|+|PN|$ 的取值范围是 $[7,13]$.

19.**解:** (1)由题意可得, 渐近线的方程为 $bx\pm ay=0$, 设 $M(x,y)$, 则 $\frac{|bx+ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{|bx-ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{3}{4}$, 又 $\frac{c}{a}=2$, 即 $c^2=4a^2$, 所以 $b^2=3a^2$, 所以 $a^2=1$, $b^2=3$, 所以双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

(2)由(1)知, $F(2,0)$, 设直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$, 联立 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$, 得 $(3-k^2)x^2+4k^2x-4k^2-3=0$,

所以 $\Delta=16k^4+4(4k^2+3)(3-k^2)=36(k^2+1)>0$,

设 $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$, 则 $x_1+x_2=\frac{4k^2}{k^2-3}$, $x_1x_2=\frac{4k^2+3}{k^2-3}$,

所以 $|PQ|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\left|\frac{6(k^2+1)}{k^2-3}\right|$, $y_1+y_2=k(x_1+x_2-4)=\frac{12k}{k^2-3}$, 所以 PQ 的中点坐标为 $\left(\frac{2k^2}{k^2-3},\frac{6k}{k^2-3}\right)$, 所以线段 PQ 的垂直平分线的方程为 $y=-\frac{1}{k}\cdot\left(x-\frac{2k^2}{k^2-3}\right)+\frac{6k}{k^2-3}$, 整理得 $y=-\frac{1}{k}x+\frac{8k}{k^2-3}$, 所以 $B\left(\frac{8k^2}{k^2-3},0\right)$, 则 $|BF|=\left|\frac{8k^2}{k^2-3}-2\right|=\left|\frac{6(k^2+1)}{k^2-3}\right|$, 所以 $\frac{|PQ|}{|BF|}=1$.

20.**解:** 取 AC 的中点 O, 连接 A_1O, A_1C, OE, 则 $OE\parallel AB$, 又 $BA\perp AC$, 所以 $OE\perp AC$,

由题意知 $\triangle A_1AC$ 为等边三角形, 又点 O 为 AC 的中点, 所以 $A_1O\perp AC$.

因为平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 ABC, 平面 $ACC_1A_1\cap$ 平面 $ABC=AC$, $A_1O\subset$ 平面 ACC_1A_1, 所以 $A_1O\perp$ 平面 ABC, 又 $OE\subset$ 平面 ABC, 所以 $A_1O\perp OE$, 所以 OA_1, OE, OC 两两垂直, 分别以 OE, OC, OA_1 所在直线为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系, 则 $A_1(0,0,\sqrt{3})$, $A(0,-1,0)$, $B(1,-1,0)$, $B_1(1,0,\sqrt{3})$, $E\left(\frac{1}{2},0,0\right)$, $F\left(1,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $C_1(0,2,\sqrt{3})$, 所以 $\overrightarrow{A_1B}=(1,-1,-\sqrt{3})$, $\overrightarrow{EF}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{AE}=\left(\frac{1}{2},1,0\right)$, $\overrightarrow{AF}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{AC_1}=(0,3,\sqrt{3})$.

(1) 设异面直线 A_1B 和 EF 所成角为 θ, 则 $\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{EF}|}{|\overrightarrow{A_1B}|\cdot|\overrightarrow{EF}|}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{5}$. 所以异面直线 A_1B 与 EF 所成角的余弦值为 $\frac{1}{5}$.

(2)设平面 AEF 的法向量为 $n=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AE}=0\\n\cdot\overrightarrow{AF}=0\end{cases}$, 即 $\begin{cases}\frac{1}{2}x+y=0,\\x+\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\end{cases}$

令 $y=1$, 得 $x=-2$, $z=\sqrt{3}$, 所以 $n=(-2,1,\sqrt{3})$, 所以点 C_1 到平面 AEF 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{AC_1}\cdot n|}{|n|}=\frac{6}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

21.**解:** (1)因为抛物线 C 的准线为 $l: x=-\frac{p}{2}$, 所以 $|MF|+|NF|=x_1+\frac{p}{2}+x_2+\frac{p}{2}=3p$.

(2)设直线 MN 的方程为 $x=my-\frac{p}{2}$, 联立 $y^2=2px(p>0)$ 可得, $y^2-2mpy+p^2=0$,

则 $y_1+y_2=2mp$, $y_1y_2=p^2$, 而 M 是线段 AN 的中点, 所以 $y_1=\frac{y_2}{2}$, 解得 $y_1=\frac{\sqrt{2}p}{2}$, $y_2=\sqrt{2}p$, 即 $\frac{\sqrt{2}p}{2}+\sqrt{2}p=2mp$, 解得 $m=\frac{3\sqrt{2}}{4}$, 所以直线 MN 的方程为 $x=\frac{3\sqrt{2}}{4}y-\frac{p}{2}$, 即 $4x-3\sqrt{2}y+2p=0$.

(3)设直线 MN 的方程为 $x=my-\frac{p}{2}$, $P\left(-\frac{p}{2},y_0\right)$, $Q\left(-\frac{p}{2},-y_0\right)$, $y_0\neq 0$, 则直线 $PM: y=\frac{y_1-y_0}{x_1+\frac{p}{2}}\left(x+\frac{p}{2}\right)+y_0=\frac{y_1-y_0}{my_1}\left(x+\frac{p}{2}\right)+y_0$, 直线 $QN: y=\frac{y_2+y_0}{x_2+\frac{p}{2}}\left(x+\frac{p}{2}\right)-y_0=\frac{y_2+y_0}{my_2}\left(x+\frac{p}{2}\right)-y_0$, 联立可得 $\left(x+\frac{p}{2}\right)\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}\right)=2m$, 将 $y_1+y_2=2mp$, $y_1y_2=p^2$ 代入, 解得 $x=\frac{2my_1y_2}{y_1+y_2}-\frac{p}{2}=\frac{2m\times p^2}{2mp}-\frac{p}{2}=\frac{p}{2}$, 所以直线 PM 与 QN 的交点在定直线 $x=\frac{p}{2}$ 上.

22.(1) **证明:** 连接 OA, 依题意, $OP\perp$ 平面 ABC, 又 $OA\subset$ 平面 ABC, $OB\subset$ 平面 ABC, 则 $OP\perp OA$, $OP\perp OB$, 所以 $\angle POA=\angle POB=90°$, 又 $PA=PB$, $OP=OP$, 则 $\triangle POA\cong\triangle POB$, 所以 $OA=OB$, 延长 BO 交 AC 于点 F, 又 $AB\perp AC$, 则在 $\mathrm{Rt}\triangle ABF$ 中, O 为 BF 中点, 连接 PF, 在 $\triangle PBF$ 中, O, E 分别为 BF, BP 的中点, 则 $OE\parallel PF$, 因为 $OE\not\subset$ 平面 PAC, $PF\subset$ 平面 PAC, 所以 $OE\parallel$ 平面 PAC.

(2)**解:** 过点 A 作 $AM\parallel OP$, 以 AB, AC, AM 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系, 由于 $PO=3$, $PA=5$, 由(1)知 $OA=OB=4$, 又 $\angle ABO=\angle CBO=30°$,

则 $AB=4\sqrt{3}$, 所以 $P(2\sqrt{3},2,3)$, $B(4\sqrt{3},0,0)$, $A(0,0,0)$, $E\left(3\sqrt{3},1,\frac{3}{2}\right)$, 又 $AC=AB\tan 60°=12$, 即 $C(0,12,0)$, 设平面 AEB 的法向量为 $n=(x,y,z)$, 又 $\overrightarrow{AB}=(4\sqrt{3},0,0)$, $\overrightarrow{AE}=\left(3\sqrt{3},1,\frac{3}{2}\right)$,

则 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AB}=4\sqrt{3}x=0,\\n\cdot\overrightarrow{AE}=3\sqrt{3}x+y+\frac{3}{2}z=0,\end{cases}$ 则可取 $n=(0,3,-2)$,

设平面 AEC 的法向量为 $m=(a,b,c)$, 又 $\overrightarrow{AC}=(0,12,0)$,

则 $\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{AC}=12b=0,\\m\cdot\overrightarrow{AE}=3\sqrt{3}a+b+\frac{3}{2}c=0,\end{cases}$ 则可取 $m=(-\sqrt{3},0,6)$, 设锐二面角 $C-AE-B$ 的平面角为 θ, 则 $\cos\theta=|\cos\langle m,n\rangle|=\left|\frac{m\cdot n}{|m|\cdot|n|}\right|=\frac{4\sqrt{3}}{13}$, 所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{11}{13}$, 即二面角 $C-AE-B$ 正弦值为 $\frac{11}{13}$.

扫码免费下载
习题讲解 ppt

第 13 期

第 2~3 版综合测试(一)参考答案

一、单项选择题

1.B　**提示:** 直线 $y=mx-2$, 即 $mx-y-2=0$, 因为直线 $y=mx-2$ 与直线 $x+ny=0$ 平行, 所以 $mn-(-1)=0$, 即 $mn+1=0$, 故选 B.

2.C　**提示:** 连接 AM, AN, 因为 G 是 MN 的中点,

所以 $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN})=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, 因为 $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AA_1}+z\overrightarrow{AC}$, 所以 $x+y+z=\frac{3}{2}$, 故选 C.

3.C　**提示:** 圆 $C: x^2+y^2+4x-6y+9=0$, 可化为 $(x+2)^2+(y-3)^2=4$, 即圆心 $C(-2,3)$, 半径 $r=2$, 设点 $C(-2,3)$ 关于直线 $x-y+1=0$ 的对称点为 $C'(x_0,y_0)$,

则 $\begin{cases}\frac{y_0-3}{x_0+2}\times 1=-1,\\\frac{x_0-2}{2}-\frac{y_0+3}{2}+1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=2,\\y_0=-1,\end{cases}$

故圆 C 关于直线 $x-y+1=0$ 对称的圆的方程为 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$. 故选 C.

4.C　**提示:** 因为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$, 所以 $\left(\frac{p}{2}\right)^2+(\sqrt{3})^2=4$, 解得 $p=2$. 故选 C.

5.B　**提示:** 因为点 $P(5,3,6)$, 直线 l 过点 $A(2,3,1)$, 且一个方向向量为 $\boldsymbol{l}=(1,0,-1)$, 所以 $\overrightarrow{PA}=(-3,0,-5)$,

所以点 P 到直线 l 的距离为 $d=\sqrt{\overrightarrow{PA}^2-\left(\frac{\overrightarrow{PA}\cdot l}{|l|}\right)^2}=\sqrt{34-\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2}=4\sqrt{2}$. 故选 B.

6.C　**提示:** 设 $P(x_0,y_0)$, 则 $\frac{y_0^2}{a^2}-\frac{x_0^2}{b^2}=1$, 解得 $y_0^2-a^2=\frac{a^2x_0^2}{b^2}$. 由题意知, $A_1(0,a)$, $A_2(0,-a)$, 所以 $k_1=\frac{y_0-a}{x_0}$, $k_2=\frac{y_0+a}{x_0}$, 得 $k_1k_2=\frac{y_0^2-a^2}{x_0^2}=\frac{a^2}{b^2}$. 所以 $\frac{a^2}{b^2}=\frac{4}{5}$, 所以 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}x$. 故选 C.

7.D　**提示:** 若在椭圆 C_1 上存在点 P, 使得由点 P 所作的圆 C_2 的两条切线互相垂直, 设切点为 A, B, 则只需当点 P 为椭圆 C_1 的左顶点或右顶点时, 满足 $\angle APB\leqslant 90°$, 即 $\alpha=\angle APO\leqslant 45°$(O 为坐标原点), $\sin\alpha=\frac{\frac{2b}{\sqrt{5}}}{a}\leqslant\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 即 $8b^2\leqslant 5a^2$, 因为 $a^2=b^2+c^2$, 所以 $3a^2\leqslant 8c^2$, 又 $0<e<1$, 所以 $\frac{\sqrt{6}}{4}\leqslant e<1$, 即 $e\in\left[\frac{\sqrt{6}}{4},1\right)$. 故选 D.

8.C　**提示:** 取 BD 的中点 M, 连接 PM, CM, $\triangle BCD$ 是以 BD 为斜边的等腰直角三角形, 所以 $BD\perp CM$; $\triangle ABD$ 为等边三角形, 所以 $BD\perp PM$, 所以 $BD\perp$ 平面 PMC, 所以 $BD\perp PC$, 故 A 正确;

假设 $DP\perp BC$, 因为 $BC\perp CD$, 所以 $BC\perp$ 平面 PCD, 所以 $BC\perp PC$, 又 $PB=2$, $BC=\sqrt{2}$, 所以 $PC=\sqrt{2}$, 又 $PM=\sqrt{3}$, $MC=1$, 在 $\triangle PMC$ 中, 得 $PC\in(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}+1)$, 故 DP 与 BC 可能垂直, 故 B 正确; 当平面 $PBD\perp$ 平面 BCD 时, 此时 $PM\perp$ 平面 BCD, $\angle PDB$ 即为直线 DP 与平面 BCD 所成角, 此时 $\angle PDB=60°$, 故 C 错误; 当平面 $PBD\perp$ 平面 BCD 时, 此时四面体 PBCD 的体积最大, 此时的体积为 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot PM=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\right)\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 故 D 正确. 故选 C.

二、多项选择题

9.AC　**提示:** 因为 $a=(-1,\lambda,-2)$, $b=(2,-1,1)$, a 与 b 的夹角为 $120°$, 所以 $\cos 120°=\frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}=\frac{-2-\lambda-2}{\sqrt{5+\lambda^2}\cdot\sqrt{6}}=-\frac{1}{2}$, 解得 $\lambda=-1$ 或 $\lambda=17$. 故选 AC.

10.ACD　**提示:** 圆 $C: x^2+(y-2)^2=R^2(R>0)$ 的圆心 $C(0,2)$, 半径为 R, 点 C 到直线 $y=\sqrt{3}x-2$ 的距离为 $\frac{|\sqrt{3}\times 0-2-2|}{\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}}=2$, 因为圆 $C: x^2+(y-2)^2=R^2(R>0)$ 上恰好存在 2 个点, 它们到直线 $y=\sqrt{3}x-2$ 的距离为 1, 所以 $1<R<3$. 故选 ACD.

11.BD　**提示:** 对于 A, 抛物线 $y^2=-4\sqrt{7}x$ 的准线方程为 $x=\sqrt{7}$, 故 A 错误; 对于 B, 依题意, $a^2+3=7$, 解得 $a=2$, 故双曲线的实轴长为 4, 故 B 正确; 对于 C, 由选项 B 知, 双曲线方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$, 其渐近线方程为 $\sqrt{3}x\pm 2y=0$, 故 C 错误; 对于 D, 由双曲线的定义知, $||PF_1|-|PF_2||=4$, 即 $\left|\frac{9}{2}-|PF_2|\right|=4$, 解得 $|PF_2|=\frac{1}{2}<\sqrt{7}-2$(舍去), 或 $|PF_2|=\frac{17}{2}$, 故 D 正确. 故选 BD.

12.ACD　**提示:** 对于 A, 因为 $P(\sqrt{2},1)$ 在椭圆 $C: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的内部, 所以 $\frac{2}{4}+\frac{1}{b^2}<1$, 所以 $b^2>2$, 又椭圆焦点在 x 轴上, 所以 $b^2<4$, 所以 $2<b^2<4$, 又 $a^2=4$, 所以 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{4}$, 又 $b^2\in(2,4)$, 所以 $e^2\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, 所以 $e\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 故 A 正确; 对于 B, 若存在点 Q, 使得 $\overrightarrow{QF_1}+\overrightarrow{QF_2}=0$, 则 Q 只能为原点 O, 显然不成立, 故 B 错误;

对于 C, 当 $e=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时, 则 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{c^2}{4}=\frac{1}{8}$, 所以 $c=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $F_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$, 又 $P(\sqrt{2},1)$, 所以 $|PF_2|=\frac{\sqrt{6}}{2}$, 因为点 Q 在椭圆上, 所以 $|QF_1|+|QF_2|=2a=4$, 所以 $|QF_1|+|QP|=4-|QF_2|+|QP|\leqslant 4+|PF_2|=4+\frac{\sqrt{6}}{2}$, 当且仅当 Q 为 PF_2 的延长线与椭圆交点时取得等号, 所以 $|QF_1|+|QP|$ 的最大值为 $4+\frac{\sqrt{6}}{2}$, 故 C 正确; 对于 D, 因为点 Q 在椭圆上, 所以 $|QF_1|+|QF_2|=2a=4$,

所以 $\frac{1}{|QF_1|}+\frac{1}{|QF_2|}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{|QF_1|}+\frac{1}{|QF_2|}\right)(|QF_1|+|QF_2|)=\frac{1}{4}\times\left(2+\frac{|QF_2|}{|QF_1|}+\frac{|QF_1|}{|QF_2|}\right)\geqslant\frac{1}{4}\times(2+2)=1$, 当且仅当 $|QF_1|=|QF_2|=2$ 时取等号, 所以 $\frac{1}{|QF_1|}+\frac{1}{|QF_2|}$ 的最小值为 1, 所以 D 正确. 故选 ACD.

三、填空题

13.5　**提示:** 抛物线 $y^2=4x$ 的准线方程为 $x=-1$, 因为抛物线 $y^2=4x$ 上点 M 到焦点的距离等于 6,

所以根据抛物线的定义可得点 M 的横坐标为 5.

14.2　**提示:** 根据题意, 圆 $C: x^2+y^2+2y-3=0$, 即 $x^2+(y+1)^2=4$, 其圆心 C 为 $(0,-1)$, 半径 $r=2$.

圆心 C 到直线 $y=x+1$ 的距离 $d=\frac{|1+1|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$, 则 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{2}$, 故 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times d\times|AB|=2$.

15.$\frac{\sqrt{10}}{10}$　**提示:** 因为 AB 是底面圆直径, 所以 $AO\perp BO$, 又 OP 是圆柱母线, 则 $OP\perp$ 平面 OAB, 以 OA, OB, OP 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系,

设 $OA=1$, 则 $AB=OP=\sqrt{2}$, 所以 $OB=\sqrt{(\sqrt{2})^2-1^2}=1$, 又 $AC\parallel OB$, 所以 $\angle OAC=90°$, 而 $\angle ACB=90°$, 所以四边形 OACB 是正方形, 所以 $P(0,0,\sqrt{2})$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(1,1,0)$, $\overrightarrow{PC}=(1,1,-\sqrt{2})$, $\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$, $\overrightarrow{AP}=(-1,0,\sqrt{2})$, 设平面 PAB 的法向量为 $n=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AB}=-x+y=0,\\n\cdot\overrightarrow{AP}=-x+\sqrt{2}z=0,\end{cases}$ 取 $z=1$, 得 $x=y=\sqrt{2}$, 则 $n=(\sqrt{2},\sqrt{2},1)$, 设直线 PC 与平面 PAB 所成角为 θ, 所以 $\sin\theta=|\cos\langle n,\overrightarrow{PC}\rangle|=\left|\frac{n\cdot\overrightarrow{PC}}{|n||\overrightarrow{PC}|}\right|=\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}\times 2}\right|=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

16.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　**提示:** 因为 $|PA|=2\sqrt{2}|PB|$,

所以 $\sin\angle PBA=2\sqrt{2}\sin\angle PAB$, 又 $\angle PBA-\angle PAB=\frac{\pi}{4}$,

所以 $\sin\angle PBA=2\sqrt{2}\sin\left(\angle PBA-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\angle PBA-2\cos\angle PBA$, 即 $\sin\angle PBA=2\cos\angle PBA$, 所以 $\tan\angle PBA=2$, $\tan\angle PAB=\tan\left(\angle PBA-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2-1}{1+2}=\frac{1}{3}$, 设 $P(m,n)$, 则 $\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}=1$, $n^2=\frac{b^2(a^2-m^2)}{a^2}$, 由题可知 $A(-a,0)$, $B(a,0)$, $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{n}{m+a}\cdot\frac{n}{m-a}=\frac{n^2}{m^2-a^2}=-\frac{b^2}{a^2}$, 所以 $-\frac{b^2}{a^2}=-2\times\frac{1}{3}$, 即 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{2}{3}$, 所以椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

四、解答题

17.**解:** (1)因为圆心 C 既在直线 $y=2x-4$ 上, 也在直线 $y=x-1$ 上, 所以由 $\begin{cases}y=2x-4,\\y=x-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\y=2,\end{cases}$ 即圆心 C 的坐标为 $(3,2)$, 又圆 C 的半径为 1, 所以圆 C 的方程为 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$.

(2)当切线斜率不存在时, 切线方程为 $x=2$, 满足题意;

当切线斜率存在时, 设过 A 点的切线方程为 $y-4=k(x-2)$, 即 $kx-y-2k+4=0$, 则圆心 C 到切线的距离 $d=\frac{|3k-2-2k+4|}{\sqrt{1+k^2}}=1$, 解得 $k=-\frac{3}{4}$, 此时切线方程为 $3x+4y-22=0$.

综上, 所求切线的方程为 $x=2$ 或 $3x+4y-22=0$.

18.**解:** (1)由题意知, 直线 l 的斜率不为 0, 设直线 l 的方程为 $x=ny+3$, 设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,

联立 $\begin{cases}x=ny+3,\\y^2=3x,\end{cases}$ 整理可得 $y^2-3ny-9=0$, 则 $y_1+y_2=3n$, $y_1y_2=-9$, 所以 $x_1+x_2=n(y_1+y_2)+6=3n^2+6$, 由抛物线的定义, 得 $|AF|+|BF|=x_1+x_2+\frac{3}{2}=8$, 即 $3n^2+6+\frac{3}{2}=8$, 解得 $n=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$,

所以直线 l 的方程为 $x=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}y+3$, 即 $\sqrt{6}x\pm y-3\sqrt{6}=0$.

(2)不妨设 A 在 x 轴上方, B 在 x 轴下方, 则 $y_1>0$, $y_2<0$, 若 $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{PB}$, 则 $y_1=-2y_2$,

由(1)可得 $\begin{cases}y_1=-2y_2,\\y_1y_2=-9,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}y_1=3\sqrt{2},\\y_2=-\frac{3\sqrt{2}}{2},\end{cases}$ 所以 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OP|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times 3\times\frac{9\sqrt{2}}{2}=\frac{27\sqrt{2}}{4}$.

19.(1) **证明:** 因为 $PD\perp$ 底面 ABCD, $BD\subset$ 平面 ABCD, 所以 $PD\perp BD$, 取 AB 中点 E, 连接 DE,

则 $BE=1$, 所以 $BE=DC$, 又 $BE\parallel DC$, 所以四边形 BCDE 为平行四边形, 所以 $DE=BC=1$, 所以 $DE=\frac{1}{2}AB$, 所以 $\triangle ABD$ 为直角三角形, 且 AB 为斜边, 所以 $BD\perp AD$,

又 $PD\cap AD=D$, $PD\subset$ 平面 PAD, $AD\subset$ 平面 PAD, 所以 $BD\perp$ 平面 PAD, 又 $PA\subset$ 平面 PAD, 所以 $BD\perp PA$.

(2)**解:** 由(1)知, PD, AD, BD 两两互相垂直, 故以 DA, DB, DP 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系,

$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{3}$, 则 $D(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,\sqrt{3},0)$, $P(0,0,\sqrt{3})$,

所以 $\overrightarrow{PD}=(0,0,-\sqrt{3})$, $\overrightarrow{PA}=(1,0,-\sqrt{3})$, $\overrightarrow{AB}=(-1,\sqrt{3},0)$, 设平面 PAB 的法向量为 $n=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{PA}=x-\sqrt{3}z=0,\\n\cdot\overrightarrow{AB}=-x+\sqrt{3}y=0,\end{cases}$ 令 $x=\sqrt{3}$, 则 $n=(\sqrt{3},1,1)$,

设 PD 与平面 PAB 所成的角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PD},n\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{PD}\cdot n}{|\overrightarrow{PD}||n|}\right|=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

所以 PD 与平面 PAB 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

20.**解:** (1)由条件可知 $BE=2\sqrt{2}$, $BF=\sqrt{13}$, $EF=\sqrt{5}$, 所以 $BF^2=BE^2+EF^2$, 所以 $EF\perp BE$. 又 $BE=B_1E=2\sqrt{2}$, $BB_1=4$, 所以 $B_1E^2+BE^2=BB_1^2$, 所以 $BE\perp B_1E$,

又因为 $B_1E\cap EF=E$, 所以 $BE\perp$ 平面 B_1EF.

(2) 以 AC 的中点 O 为坐标原点, OA 所在直线为 x 轴, OB 所在直线为 y 轴, 建立空间直角坐标系 Oxyz,

则 $A(1,0,0)$, $B(0,\sqrt{3},0)$, $E(-1,0,2)$, $F(1,0,3)$, 所以 $\overrightarrow{BF}=(1,-\sqrt{3},3)$, $\overrightarrow{BE}=(-1,-\sqrt{3},2)$, $\overrightarrow{AB}=(-1,\sqrt{3},0)$,

设平面 BEF 的法向量为 $n=(x,y,z)$,

因为 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{BF}=0,\\n\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x-\sqrt{3}y+3z=0,\\x+\sqrt{3}y-2z=0,\end{cases}$ 取 $y=5\sqrt{3}$, 得 $n=(-3,5\sqrt{3},6)$.

设平面 ABF 的法向量为 $m=(a,b,c)$, 则 $\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\m\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-a+\sqrt{3}b=0,\\a-\sqrt{3}b+3c=0,\end{cases}$ 取 $b=1$, 则 $m=(\sqrt{3},1,0)$, $|\cos\langle m,n\rangle|=\frac{|m\cdot n|}{|m||n|}=\frac{-3\sqrt{3}+5\sqrt{3}}{2\sqrt{30}\times 2}=\frac{\sqrt{10}}{20}$, 所以平面 BEF 与平面 ABF 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{20}$.

21.**解:** (1)设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, 因为 $|BP|=3|AP|$, 所以 $\overrightarrow{PB}=3\overrightarrow{AP}$, 即 $(x_2,y_2-1)=3(-x_1,1-y_1)$, 所以 $\begin{cases}x_2=-3x_1,\\y_2=4-3y_1,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}x_1^2-\frac{y_1^2}{2}=1,\\(-3x_1)^2-\frac{(4-3y_1)^2}{2}=1,\end{cases}$ 所以 $x_1=-1$, $y_1=0$, 即 $A(-1,0)$, 所以 $k=k_{AP}=\frac{1-0}{1}=1$.

(2)设直线 l 的方程为 $y=kx+m(k\neq 0)$.

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\x^2-\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 整理得 $(2-k^2)x^2-2kmx-m^2-2=0$.

则 $x_1+x_2=\frac{2km}{2-k^2}$, $x_1x_2=\frac{-m^2-2}{2-k^2}$, 因为直线 l 与双曲线的左、右两支分别交于 A, B 两点, 于是 $2-k^2\neq 0$, 且 $\Delta=(-2km)^2+4(2-k^2)(m^2+2)>0$. 整理得 $m^2+2-k^2>0$. 设线段 AB 的中点坐标为 (x_0,y_0), 则 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{km}{2-k^2}$, $y_0=kx_0+m=\frac{2m}{2-k^2}$. 所以 AB 的垂直平分线方程为 $y-\frac{2m}{2-k^2}=-\frac{1}{k}\left(x-\frac{km}{2-k^2}\right)$.

此直线与 x, y 轴的交点坐标分别为 $\left(\frac{3km}{2-k^2},0\right)$, $\left(0,\frac{3m}{2-k^2}\right)$. 由题可得 $\frac{1}{2}\left|\frac{3km}{2-k^2}\right|\cdot\left|\frac{3m}{2-k^2}\right|=\frac{9}{2}$. 整理得 $m^2=\frac{(2-k^2)^2}{|k|}$, $k\neq 0$. 所以 $\frac{(2-k^2)^2}{|k|}+2-k^2>0$, 整理得 $(k^2-2)(k^2-|k|-2)>0$, $k\neq 0$, 即 $(k^2-2)(|k|-2)>0$, $k\neq 0$, 解得 $0<|k|<\sqrt{2}$ 或 $|k|>2$. 所以 k 的取值范围是 $(-\infty,-2)\cup(-\sqrt{2},0)\cup(0,\sqrt{2})\cup(2,+\infty)$.

22.**解:** (1)设 E 的方程为 $mx^2+ny^2=1$, 将 $A(0,-2)$, $B\left(\frac{3}{2},-1\right)$ 两点代入, 得 $\begin{cases}4n=1,\\\frac{9}{4}m+n=1,\end{cases}$ 解得 $m=\frac{1}{3}$, $n=\frac{1}{4}$, 故 E 的方程为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)由 $A(0,-2)$, $B\left(\frac{3}{2},-1\right)$, 得线段 $AB: y=\frac{2}{3}x-2(-2\leqslant y\leqslant -1)$.

①若过 $P(1,-2)$ 的直线的斜率不存在, 则直线方程为 $x=1$, 代入 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$, 可得 $M\left(1,-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $N\left(1,\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, 将 $y=-\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 代入线段 AB 的方程 $y=\frac{2}{3}x-2(-2\leqslant y\leqslant -1)$ 中, 可得 $T\left(3-\sqrt{6},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$,

由 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$, 得 $H\left(5-2\sqrt{6},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, 易求得此时直线 $HN: y=\left(2+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)x-2$, 直线 HN 过定点 $(0,-2)$.

②若过 $P(1,-2)$ 的直线的斜率存在, 设该直线方程为 $kx-y-(k+2)=0$, $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$, 联立 $\begin{cases}kx-y-(k+2)=0,\\\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 得 $(3k^2+4)x^2-6k(2+k)x+3k(k+4)=0$,

故有 $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{6k(2+k)}{3k^2+4},\\x_1x_2=\frac{3k(4+k)}{3k^2+4},\end{cases}$ $\begin{cases}y_1+y_2=\frac{-8(2+k)}{3k^2+4},\\y_1y_2=\frac{16+16k-8k^2}{3k^2+4},\end{cases}$ 且 $x_1y_2+x_2y_1=\frac{-24k}{3k^2+4}$, (*)

联立 $\begin{cases}y=y_1,\\y=\frac{2}{3}x-2,\end{cases}$ 可得 $T\left(\frac{3y_1}{2}+3,y_1\right)$, 则 $H(3y_1+6-x_1,y_1)$,

可求得此时 $HN: y-y_2=\frac{y_1-y_2}{3y_1+6-x_1-x_2}(x-x_2)$, 将 $(0,-2)$ 代入整理得 $2(x_1+x_2)-6(y_1+y_2)+x_1y_2+x_2y_1-3y_1y_2-12=0$,

将(*)代入, 得 $24k+12k^2+96+48k-24k-48-48k+24k^2-36k^2-48=0$, 显然成立.

综上, 可得直线 HN 过定点 $(0,-2)$.

第2~3版综合测试(二)参考答案

一、单项选择题

1.B 提示:因为直线 $l:y=kx$ 的方向向量为 $(1,\sqrt{3})$,所以直线 l 的斜率为 $k=\sqrt{3}$,所以直线 l 的倾斜角为60°.故选B.

2.A 提示:因为圆 $C:x^2+y^2+2x+4y+4=0$,所以 $(x+1)^2+(y+2)^2=1$,即圆心 $C(-1,-2)$,半径 $r=1$,所以圆上的点到坐标原点的距离的最小值为 $\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}-r=\sqrt{5}-1$.故选A.

3.A 提示:因为 $a=(\cos\alpha,-1,\sin\alpha)$,$b=(\sin\alpha,-1,\cos\alpha)$,则 $a+b=(\cos\alpha+\sin\alpha,-2,\sin\alpha+\cos\alpha)$,$a-b=(\cos\alpha-\sin\alpha,0,\sin\alpha-\cos\alpha)$,则 $(a+b)\cdot(a-b)=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)=0$,故向量 $a+b$ 与 $a-b$ 的夹角为90°,故选A.

4.A 提示:由双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为2,可得 $\frac{c}{a}=2$,所以 $b^2=3a^2$,所以 $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以渐近线 $y=\frac{a}{b}x$ 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,从而可得该渐近线的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$,所以其两条渐近线所成的锐角为 $\frac{\pi}{3}$.故选A.

5.A 提示:设正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的棱长为2,取AC的中点D,连接DG,DB,分别以DB,DC,DG所在的直线为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系,则 $B_1(\sqrt{3},0,2)$,$G(0,0,2)$,$E\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$,$F(0,-1,1)$,

$\overrightarrow{EF}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},1\right)$,$\overrightarrow{GF}=(0,-1,-1)$,$\overrightarrow{B_1G}=(-\sqrt{3},0,0)$,设平面 B_1GF 的法向量为 $n=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\overrightarrow{B_1G}\cdot n=-\sqrt{3}x=0,\\ \overrightarrow{GF}\cdot n=-y-z=0,\end{cases}$

取 $y=1$,则 $z=-1$,$x=0$,故 $n=(0,1,-1)$,设EF与平面 B_1GF 所成角为 θ,

则 $\sin\theta=\left|\frac{n\cdot\overrightarrow{EF}}{|n|\cdot|\overrightarrow{EF}|}\right|=\left|\frac{-\frac{1}{2}-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\right|=\frac{3}{4}$,所以EF与平面 B_1GF 所成角的正弦值为 $\frac{3}{4}$.故选A.

6.D 提示:设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,且 $y_1>0$,$y_2<0$,则 $M_1(0,y_1)$,$N_1(0,y_2)$,设直线 $l:x=my+2(m>0)$,由 $\begin{cases}x=my+2,\\ y^2=8x,\end{cases}$ 得 $y^2-8my-16=0$,则 $y_1+y_2=8m$,$y_1y_2=-16$,由 $\angle M_1PN_1=120°$,设 $\angle M_1PO=\alpha$,$\angle N_1PO=\beta$,则 $\tan\alpha=\frac{|y_1|}{2}$,$\tan\beta=\frac{|y_2|}{2}$,由 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{|y_1|}{2}+\frac{|y_2|}{2}}{1-\frac{|y_1||y_2|}{4}}=\frac{2(y_1-y_2)}{4+y_1y_2}=-\frac{y_1-y_2}{6}=-\sqrt{3}$,

即 $\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{64m^2+64}=6\sqrt{3}$,解得 $m=\frac{\sqrt{11}}{4}$,故直线 l 的斜率为 $\frac{4\sqrt{11}}{11}$,故选D.

7.C 提示:曲线 $\Gamma:\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1$ 上取点 (x,y),则该点关于x轴对称的点 $(x,-y)$ 也在曲线 Γ 上,故曲线 Γ 关于x轴对称,同理可证曲线 Γ 关于y轴对称,则该点关于原点的对称点 $(-x,-y)$ 也在曲线 Γ 上,故曲线 Γ 关于原点对称,故①②正确;

曲线 $\Gamma:\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1$,则 $|x|>a$,而椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 中,$|x|\leqslant a$,故曲线 Γ 与椭圆C无公共点,③错误.故选C.

8.C 提示:因为 F_2B 是 $\angle AF_2F_1$ 的角平分线,原点 O 为 F_1F_2 的中点,所以 $|BF_1|=|BF_2|$,$\angle BF_1F_2=\angle BF_2F_1=\angle BF_2A=\alpha$.又 $|AF_1|=2c$,所以 $\angle A=2\alpha$,$\angle A+\angle AF_1F_2+\angle AF_2F_1=5\alpha=180°$,所以 $\alpha=36°$,$\angle ABF_2=2\alpha=72°=\angle A$,所以 $|BF_2|=|AF_2|$.由双曲线的定义可得 $|AF_1|-|AF_2|=2a$,则 $|AF_2|=2c-2a$,$|AB|=2c-(2c-2a)=2a$.易知 $\triangle AF_2B\backsim\triangle AF_1F_2$,所以 $\frac{|AB|}{|AF_2|}=\frac{|AF_2|}{|AF_1|}$,即 $\frac{2a}{2c-2a}=\frac{2c-2a}{2c}$,所以 $ac=(c-a)^2$,即 $c^2-3ac+a^2=0$,所以 $e^2-3e+1=0$,又 $e>1$,解得 $e=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$,故选C.

二、多项选择题

9.BC 提示:因为直线 $2x+y-1=0$ 的斜率为-2,所以与直线 $2x+y-1=0$ 垂直的直线斜率 $k=\frac{1}{2}$.

对于A,$2x-y+1=0$ 的斜率为2,不成立,故A错误;对于B,$x-2y+1=0$ 的斜率为 $\frac{1}{2}$,成立,故B正确;对于C,$2x-4y+1=0$ 的斜率为 $\frac{1}{2}$,成立,故C正确;对于D,$4x-2y+1=0$ 的斜率为2,不成立,故D错误.故选BC.

10.BD 提示:对于A,$\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,2,1)$,可知 $\overrightarrow{AB}\neq\lambda\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 不共线,A错误;

对于B,因为 $\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$,所以 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5}$,所以 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5},0\right)$,B正确;

对于C,因为 $\overrightarrow{BC}=(-3,1,1)$,所以 $\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{-5}{\sqrt{5}\times\sqrt{11}}=-\frac{\sqrt{55}}{11}$,C错误;

对于D,设平面ABC的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2x+y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-3x+y+z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$,解得 $y=-2$,$z=5$,所以 $\boldsymbol{n}=(1,-2,5)$,即平面 ABC 的一个法向量为 $(1,-2,5)$,D正确.故选BD.

11.ACD 提示:对于A,设圆心为 $C(-2,b)$,圆的半径为r,

由题设可知 $\frac{|-2+\sqrt{3}b-2|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=\sqrt{(-2+1)^2+(b-\sqrt{3})^2}$,

解得 $b=0$,所以 $r=\sqrt{(-2+1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$,故圆C的方程为 $(x+2)^2+y^2=4$,故A正确;

对于B,当AE过圆心C时,AE长度最长为圆的直径4,故B错误;

对于C,线段AE,BF的中点分别为M,N,

所以 $CM\perp AE$,$CN\perp BF$,又 $AE\perp BF$,所以四边形MDNC为矩形,所以MN与CD互相平分,即MN过CD中点 $\left(-\frac{3}{2},0\right)$,故C正确;

对于D,由直角三角形斜边上中线的性质知,存在 $G\left(-\frac{3}{2},0\right)$,使 $|NG|=\frac{1}{2}|CD|=\frac{1}{2}$,为定值,故D正确.故选ACD.

12.BCD 提示:因为点 $A(1,1)$ 在抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 上,所以 $2p=1$,解得 $p=\frac{1}{2}$,所以抛物线C的方程为 $x^2=y$,准线方程为 $y=-\frac{1}{4}$,故A错误;

由于 $A(1,1)$,$B(0,-1)$,则 $k_{AB}=\frac{1-(-1)}{1-0}=2$,所以直线AB的方程为 $y=2x-1$,联立 $\begin{cases}y=2x-1,\\ x^2=y,\end{cases}$ 得 $x^2-2x+1=0$,解得 $x=1$,故直线AB与抛物线C相切,故B正确;

根据对称性及选项B的分析,不妨设过点B的直线方程为 $y=kx-1$ $(k>2)$,与抛物线在第一象限交于 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,联立 $\begin{cases}y=kx-1,\\ y=x^2,\end{cases}$ 整理得 $x^2-kx+1=0$,则 $x_1+x_2=k$,$x_1x_2=1$,$y_1y_2=(kx_1-1)(kx_2-1)=k^2x_1x_2-k(x_1+x_2)+1=1$,$|OP|\cdot|OQ|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}\geqslant\sqrt{2x_1y_1}\cdot\sqrt{2x_2y_2}=2\sqrt{x_1x_2y_1y_2}=2=|OA|^2$,由于等号在 $x_1=x_2=y_1=y_2=1$ 时才能取到,故等号不成立,故C正确;

$|BP|\cdot|BQ|=\sqrt{x_1^2+(y_1+1)^2}\cdot\sqrt{x_2^2+(y_2+1)^2}>\sqrt{x_1^2+4y_1}\cdot\sqrt{x_2^2+4y_2}=\sqrt{5x_1^2}\cdot\sqrt{5x_2^2}=5\sqrt{(x_1x_2)^2}=5=|BA|^2$,故D正确.故选BCD.

三、填空题

13.$x^2+(y-1)^2=10$ 提示:当线段AB为圆的直径时,过点A,B的圆的半径最小,从而周长最小,即圆心为线段AB的中点 $(0,1)$,半径 $r=\frac{1}{2}|AB|=\sqrt{10}$,则所求圆的方程为 $x^2+(y-1)^2=10$.

14.$x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 提示:由双曲线的渐近线方程为 $y=\pm2x$,可设双曲线方程为 $4x^2-y^2=\lambda(\lambda\neq0)$,

将点 $(\sqrt{2},2)$ 代入,得 $\lambda=4$,则双曲线的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$.

15.$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 提示:记AC与BD的交点为O,由正方形性质可知 $AC\perp BD$,所以在翻折后的图中,$OD\perp OA$,$OD\perp OC$,所以 $\angle AOC=\frac{\pi}{2}$,即 $OA\perp OC$,以OC,OD,OA所在直线分别为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系,易知 $OA=OB=OC=OD=1$,则 $A(0,0,1)$,$B(0,-1,0)$,$C(1,0,0)$,$D(0,1,0)$,

则 $\overrightarrow{AB}=(0,-1,-1)$,$\overrightarrow{AC}=(1,0,-1)$,$\overrightarrow{BD}=(0,2,0)$,设 $n=(x,y,z)$ 为平面ABC的法向量,则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot n=-y-z=0,\\ \overrightarrow{AC}\cdot n=x-z=0,\end{cases}$ 取 $x=1$,得 $n=(1,-1,1)$,所以点D到平面ABC的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{BD}\cdot n|}{|n|}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

16.24 提示:由抛物线的方程得 $F(1,0)$,由题意设直线 l_1 的方程为 $y=k_1(x-1)$,直线 l_2 的方程为 $y=k_2(x-1)$,则 $k_1^2+k_2^2=1$,联立 $\begin{cases}y=k_1(x-1),\\ y^2=4x,\end{cases}$ 整理得,$k_1^2x^2-(2k_1^2+4)x+k_1^2=0$,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\frac{2k_1^2+4}{k_1^2}=2+\frac{4}{k_1^2}$,同理可得 $x_D+x_E=2+\frac{4}{k_2^2}$,由抛物线的性质可得 $|AB|=x_1+x_2+p=4+\frac{4}{k_1^2}$,$|DE|=x_D+x_E+p=4+\frac{4}{k_2^2}$,

所以 $|AB|+|DE|=8+\frac{4}{k_1^2}+\frac{4}{k_2^2}=8+\frac{4}{k_1^2k_2^2}\geqslant8+\frac{4}{\left(\frac{k_1^2+k_2^2}{2}\right)^2}=8+16=24$,当且仅当 $k_1^2=k_2^2=\frac{1}{2}$ 时取等号,此时 $|AB|+|DE|$ 的最小值为24.

四、解答题

17.解:(1)因为直线 l 与直线 $3x-y+2=0$ 平行,所以直线 l 的斜率 $k=3$,则 $-\frac{a}{2}=3$,解得 $a=-6$,

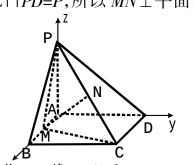
故直线 l 的方程为 $-6x+2y-7=0$,即 $6x-2y+7=0$.

(2)由题意可知圆 C 的圆心坐标为 $(1,2)$,半径为3,因为 $|AB|=4\sqrt{2}$,所以圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{|a-3|}{\sqrt{a^2+4}}=\sqrt{9-8}=1$,解得 $a=\frac{5}{6}$,故直线 l 的方程为 $\frac{5}{6}x+2y-7=0$,即 $5x+12y-42=0$.

18.(1)证明:以 A 为原点建立如图所示空间直角坐标系,则 $M(1,0,0)$,$P(0,0,2)$,$C(2,2,0)$,$N(1,1,1)$,$D(0,2,0)$,

$\overrightarrow{MN}=(0,1,1)$,$\overrightarrow{PC}=(2,2,-2)$,$\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$,

因为 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PC}=2-2=0$,$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PD}=2-2=0$,所以 $MN\perp PC$,$MN\perp PD$.因为 $PC\cap PD=P$,所以 $MN\perp$ 平面 PCD.



(第18题图)

(2)解:$\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$,$\overrightarrow{MP}=(-1,0,2)$,$\overrightarrow{MC}=(1,2,0)$,设平面 PMC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MP}=-x+2z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MC}=x+2y=0,\end{cases}$ 令 $z=1$,则 $x=2$,$y=-1$,所以 $\boldsymbol{n}=(2,-1,1)$.

设直线 PD 与平面 PMC 所成角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{PD}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{PD}|}=\frac{4}{\sqrt{6}\times2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.所以PD与平面PMC所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

19.解:(1)由抛物线的方程知焦点为 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$,由抛物线的定义和已知条件得 $x_0+2p=\frac{5}{2}\left(x_0+\frac{p}{2}\right)$,则 $x_0=\frac{p}{2}$,所以 $P\left(\frac{p}{2},2\right)$.因为点 P 在抛物线上,所以 $4=2p\cdot\frac{p}{2}$.

因为 $p>0$,所以 $p=2$,所以抛物线的方程为 $y^2=4x$.

(2)因为直线 l 过 $M(2,0)$ 且斜率为1,所以直线 l 的方程为 $y=x-2$,联立 $\begin{cases}y=x-2,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 得 $x^2-8x+4=0$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由韦达定理得 $x_1+x_2=8$,$x_1x_2=4$,

$|AB|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=4\sqrt{6}$,$D$ 为 AB 中点,所以点 $D(4,2)$.

由(1)知抛物线的准线方程为 $x=-1$,又因为 $DE\perp AB$,所以直线 DE 的方程为 $y-2=-(x-4)$,即 $y=-x+6$,当 $x=-1$ 时,$y=7$,则 $E(-1,7)$,所以 $|DE|=\sqrt{(4+1)^2+(2-7)^2}=5\sqrt{2}$,

所以 $\frac{|AB|}{|DE|}=\frac{4\sqrt{6}}{5\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{5}$.

20.解:(1)因为AB是 Γ 的短轴,所以 $A(0,2)$,而 $E(4,0)$,故直线AE的方程为 $x+2y-4=0$,由 $\begin{cases}x+2y-4=0,\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 整理得 $3y^2-8y+4=0$,故 $y_A+y_C=\frac{8}{3}$,而 $y_A=2$,所以 $y_C=\frac{2}{3}$,代入直线AE的方程,可得 $x_C=4-2\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$,故点C坐标为 $\left(\frac{8}{3},\frac{2}{3}\right)$.

(2)设 $A(x_0,y_0)$,则直线AE的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0-4}(x-4)$,由 $\begin{cases}y=\frac{y_0}{x_0-4}(x-4),\\ x^2+2y^2=8,\end{cases}$ 得 $x^2+\frac{2y_0^2}{(x_0-4)^2}(x-4)^2=8$,

由韦达定理有 $x_0x_C=\frac{\frac{32y_0^2}{(x_0-4)^2}-8}{1+\frac{2y_0^2}{(x_0-4)^2}}=\frac{64x_0-24x_0^2}{24-8x_0}$,

所以 $x_C=\frac{8-3x_0}{3-x_0}$,故 $y_C=\frac{y_0}{3-x_0}$,同理得,$x_D=\frac{8+3x_0}{3+x_0}$,$y_D=\frac{-y_0}{3+x_0}$,当 $x_0\neq0$ 时,取 $T\left(\frac{8}{3},0\right)$,则 $k_{TC}=\frac{\frac{y_0}{3-x_0}}{\frac{8-3x_0}{3-x_0}-\frac{8}{3}}=-\frac{3y_0}{x_0}$,

同理 $k_{TD}=-\frac{3y_0}{x_0}$,故T,C,D共线,此时CD过定点 $T\left(\frac{8}{3},0\right)$;当 $x_0=0$ 时,$x_C=x_D=\frac{8}{3}$,此时CD过定点 $T\left(\frac{8}{3},0\right)$.

综上,CD过定点 $T\left(\frac{8}{3},0\right)$.

21.解:(1)由直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为4,可得 $V_{A_1-ABC}=\frac{1}{3}V_{A_1B_1C_1-ABC}=\frac{4}{3}$,设A到平面 A_1BC 的距离为d,由 $V_{A_1-ABC}=V_{A-A_1BC}$,所以 $\frac{1}{3}S_{\triangle A_1BC}\cdot d=\frac{4}{3}$,所以 $\frac{1}{3}\times2\sqrt{2}\cdot d=\frac{4}{3}$,解得 $d=\sqrt{2}$.所以A到平面 A_1BC 的距离为 $\sqrt{2}$.

(2)连接 AB_1 交 A_1B 于点E,因为 $AA_1=AB$,所以四边形 ABB_1A_1 为正方形,所以 $AB_1\perp A_1B$,又因为平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1,平面 $A_1BC\cap$ 平面 $ABB_1A_1=A_1B$,所以 $AB_1\perp$ 平面 A_1BC,所以 $AB_1\perp BC$,由直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$,知 $BB_1\perp$ 平面ABC,所以 $BB_1\perp BC$,又 $AB_1\cap BB_1=B_1$,所以 $BC\perp$ 平面 ABB_1A_1,所以 $BC\perp AB$,以B为坐标原点,BC,BA,BB_1 所在直线为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系,

因为 $AA_1=AB$,所以 $BC\times\sqrt{2}AB\times\frac{1}{2}=2\sqrt{2}$,又 $\frac{1}{2}AB\times BC\times AA_1=4$,解得 $AB=BC=AA_1=2$,则 $B(0,0,0)$,$A(0,2,0)$,$C(2,0,0)$,$A_1(0,2,2)$,$D(1,1,1)$,则 $\overrightarrow{BA}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{BD}=(1,1,1)$,$\overrightarrow{BC}=(2,0,0)$,设平面ABD的法向量为 $n=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{BA}=2y=0,\\ n\cdot\overrightarrow{BD}=x+y+z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$,则 $n=(1,0,-1)$,

设平面BCD的法向量为 $m=(a,b,c)$,

则 $\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{BC}=2a=0,\\ m\cdot\overrightarrow{BD}=a+b+c=0,\end{cases}$ 令 $b=1$,则 $m=(0,1,-1)$,所以 $\cos\langle n,m\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$,

所以二面角A-BD-C的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

22.解:(1)将点 $A(2,1)$ 代入双曲线C的方程得 $\frac{4}{a^2}-\frac{1}{a^2-1}=1$,化简得 $a^4-4a^2+4=0$,所以 $a^2=2$,故双曲线C的方程为 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$,由题显然直线 l 的斜率存在,设 $l:y=kx+m$,$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{2}-y^2=1,\end{cases}$ 得 $(2k^2-1)x^2+4kmx+2m^2+2=0$,故 $x_1+x_2=-\frac{4km}{2k^2-1}$,$x_1x_2=\frac{2m^2+2}{2k^2-1}$,$k_{AP}+k_{AQ}=\frac{y_1-1}{x_1-2}+\frac{y_2-1}{x_2-2}=\frac{kx_1+m-1}{x_1-2}+\frac{kx_2+m-1}{x_2-2}=0$,化简得,$2kx_1x_2+(m-1-2k)(x_1+x_2)-4(m-1)=0$,故 $\frac{2k(2m^2+2)}{2k^2-1}+(m-1-2k)\left(-\frac{4km}{2k^2-1}\right)-4(m-1)=0$,即 $(k+1)\cdot(m+2k-1)=0$,而直线 l 不过A点,故 l 的斜率 $k=-1$.

(2)设直线AP的倾斜角为 α,由 $\tan\angle PAQ=2\sqrt{2}$,得 $\frac{2\tan\frac{\angle PAQ}{2}}{1-\tan^2\frac{\angle PAQ}{2}}=2\sqrt{2}$,解得 $\tan\frac{\angle PAQ}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

由 $k_{AP}+k_{AQ}=0$,得 $2\alpha+\angle PAQ=\pi$,所以 $\alpha=\frac{\pi-\angle PAQ}{2}$,得 $k_{AP}=\tan\alpha=\sqrt{2}$,即 $\frac{y_1-1}{x_1-2}=\sqrt{2}$,联立 $\frac{y_1-1}{x_1-2}=\sqrt{2}$,及 $\frac{x_1^2}{2}-y_1^2=1$,得 $x_1=\frac{10-4\sqrt{2}}{3}$,$y_1=\frac{4\sqrt{2}-5}{3}$,代入直线 l 得 $m=\frac{5}{3}$,故 $x_1+x_2=\frac{20}{3}$,$x_1x_2=\frac{68}{9}$,而 $|AP|=\sqrt{3}|x_1-2|$,$|AQ|=\sqrt{3}|x_2-2|$,由 $\tan\angle PAQ=2\sqrt{2}$,得 $\sin\angle PAQ=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,故 $S_{\triangle PAQ}=\frac{1}{2}|AP|\cdot|AQ|\sin\angle PAQ=\sqrt{2}|x_1x_2-2(x_1+x_2)+4|=\frac{16\sqrt{2}}{9}$.

第15期
第2~3版综合测试(三)参考答案

一、单项选择题

1.A 提示:根据题意,得 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,由正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,可得 $\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.故选A.

2.B 提示:直线 $l_1:x-2y-3=0$,即 $-3x+6y+9=0$,所以直线 l_1 与 l_2 之间的距离为 $\frac{|9+1|}{\sqrt{(-3)^2+6^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$.故选B.

3.B 提示:由题意知,抛物线C的准线方程为 $y=-4$,根据抛物线定义,得 $|MF|=y_0+4=3y_0$,解得 $y_0=2$,所以 $x_0^2=16y_0=32$,所以 $|x_0|=4\sqrt{2}$.故选B.

4.C 提示:圆 $O_1:x^2+y^2=4$ 圆心为 $O_1(0,0)$,半径为 $R=2$,圆 $O_2:x^2+y^2-2mx-2my-4=0(m\neq0)$,化成标准方程为 $(x-m)^2+(y-m)^2=4+2m^2(m\neq0)$,圆心为 $O_2(m,m)$,半径为 $r=\sqrt{4+2m^2}$,则 $|O_1O_2|=\sqrt{2m^2}<R+r$,$\sqrt{2m^2}>r-R$.故圆 O_1 和圆 O_2 的位置关系是相交,

所以同时与圆 O_1 和圆 O_2 相切的直线有2条.故选C.

5.C 提示:由椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$,得 $a^2=9$,所以 $a=3$,因为点 M 在 C 上,所以 $|MF_1|+|MF_2|=2a=6$,

所以 $|MF_1|\cdot|MF_2|\leqslant\left(\frac{|MF_1|+|MF_2|}{2}\right)^2=\left(\frac{6}{2}\right)^2=9$,

当且仅当 $|MF_1|=|MF_2|=3$ 时,等号成立,所以 $|MF_1|\cdot|MF_2|$ 最大值为9,故选C.

6.B 提示:由题意知,$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1C}+(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})+\frac{2}{3}\overrightarrow{BA_1}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}+(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AA_1}$,因为 $\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AA_1}$,所以 $x+y+z=\frac{1}{3}-1+\frac{1}{6}=-\frac{1}{2}$.故选B.

7.D 提示:因伞柄底端正好位于该椭圆的长轴上,由图可知,椭圆的短半轴长 $b=2$,

由正弦定理,得 $\frac{2a}{\sin(60°+45°)}=\frac{4}{\sin60°}$,

解得 $a=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}}{3}$,则 $e^2=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2=1-\left(\frac{2}{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}}{3}}\right)^2=3\sqrt{3}-5$,故选D.

8.B 提示:双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,渐近线的方程为 $y_1=\frac{b}{a}x$,$y_2=-\frac{b}{a}x$,不妨设双曲线E的渐近线的平行线方程为 $y'_1=\frac{b}{a}x+m(m\neq0)$,$y'_2=-\frac{b}{a}x+n(n\neq0)$,与x轴的交点为 $A\left(\frac{-ma}{b},0\right)$,$B\left(\frac{na}{b},0\right)$,与y轴交点为 $C(0,m)$,$D(0,n)$,所以 $(|OA|+|OB|)\cdot(|OC|+|OD|)=\left(\left|\frac{ma}{b}\right|+\left|\frac{na}{b}\right|\right)\cdot(|m|+|n|)=(|m|+|n|)\cdot\frac{a}{b}\cdot(|m|+|n|)=(m^2+2|m||n|+n^2)\cdot\frac{a}{b}\geqslant4|m||n|\cdot\frac{a}{b}$,当且仅当 $|m|=|n|$ 时取等号,$12|OC||OD|=12|m|\cdot|n|$,因为 $(|OA|+|OB|)\cdot(|OC|+|OD|)\geqslant12|OC|\cdot|OD|$ 恒成立,所以 $4|m||n|\cdot\frac{a}{b}\geqslant12|m||n|$,所以 $\frac{b}{a}\leqslant\frac{1}{3}$,所以 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\leqslant\sqrt{1+\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{10}}{3}$,又 $e>1$,所以 $1<e\leqslant\frac{\sqrt{10}}{3}$,故选B.

二、多项选择题

9.BC 提示:由题可知,圆心 $C(1,0)$ 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|1+a|}{\sqrt{2}}<1$,解得 $-1-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}-1$,

当 AB 为直径时,直线 AB 过圆心 $C(1,0)$,则 $1+0+a=0$,解得 $a=-1$;

当 OA 或 OB 为直径时,直线 AB 过点 $(2,0)$,则 $2+0+a=0$,解得 $a=-2$.故选BC.

10.AC 提示:当焦点在 x 轴上时,设椭圆C的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,由椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,且过点 $(2,1)$,得 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$,$a^2=b^2+c^2$,解得 $a=2\sqrt{2}$,$b=\sqrt{2}$,故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$;

当焦点在 y 轴上时,设椭圆C的标准方程为 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1(a>b>0)$,由椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,且过点 $(2,1)$,得 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\frac{4}{b^2}+\frac{1}{a^2}=1$,$a^2=b^2+c^2$,解得 $a=\sqrt{17}$,$b=\frac{\sqrt{17}}{2}$.故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{\frac{17}{4}}+\frac{y^2}{17}=1$.故选AC.

11.BCD 提示:对于A,直线 EC_1 与直线AD都在平面 B_1ADC_1 中,故A错误;对于B,连接 A_1C_1,BC_1,取 A_1C_1 的中点F,则 $EF/\!/BC_1$,因为 $BC_1\perp$ 平面 A_1CD,所以 $EF\perp$ 平面 A_1CD,故B正确;对于C,取 B_1C 的中点M,可证 $BM\perp$ 平面 A_1CD,所以 $\angle BA_1M$ 即为直线 BA_1 与平面 A_1CD 所成角,因为 $BM=\frac{1}{2}BA_1$,$\angle BMA_1=\frac{\pi}{2}$,所以 $\angle BA_1M=\frac{\pi}{6}$,故C正确;

对于D,因为 $BM\perp$ 平面 A_1CD,所以点B到平面 A_1CD 的距离 $d=|BM|=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故D正确.故选BCD.

12.AC 提示:设 $\sqrt{2}x+2y=t_1$ 为直线 l,则 $x=-\sqrt{2}y+\frac{t_1}{\sqrt{2}}$,联立 $\begin{cases}x=-\sqrt{2}y+\frac{t_1}{\sqrt{2}},\\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 整理得,$2t_1y=\frac{t_1^2}{2}-4$.若 $t_1=0$,则 l 为双曲线C的渐近线,与双曲线C无交点,不符合题意,

故 $t_1\neq0$,则 $y=\frac{t_1}{4}-\frac{2}{t_1}$,$x=-\sqrt{2}y+\frac{t_1}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{t_1}+\frac{\sqrt{2}}{4}t_1$,故 $A\left(\frac{2\sqrt{2}}{t_1}+\frac{\sqrt{2}}{4}t_1,\frac{t_1}{4}-\frac{2}{t_1}\right)$,

因为双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$,所以 $a^2=4$,$b^2=2$,$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{6}$,故 $F(\sqrt{6},0)$,

所以 $|AF|^2=\left(\frac{2\sqrt{2}}{t_1}+\frac{\sqrt{2}}{4}t_1-\sqrt{6}\right)^2+\left(\frac{t_1}{4}-\frac{2}{t_1}\right)^2=\frac{12}{t_1^2}-\frac{8\sqrt{3}}{t_1}+7-\sqrt{3}t_1+\frac{3}{16}t_1^2$,①

同理可得,$|BF|^2=\frac{12}{t_2^2}-\frac{8\sqrt{3}}{t_2}+7-\sqrt{3}t_2+\frac{3}{16}t_2^2$,②

将选项A,B,C,D依次代入①②两式验证可得,A,C正确,B,D错误.故选AC.

三、填空题

13.$-\sqrt{2}$ 提示:向量 $\boldsymbol{a}=(1,\lambda,1)$,$\boldsymbol{b}=(2,-1,-2)$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$,

所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{-\lambda}{\sqrt{2+\lambda^2}\cdot\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$,

则 $\lambda<0$,解得 $\lambda=-\sqrt{2}$.

14.2 提示:根据题意,圆 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$,其圆心为 $C(1,1)$,半径为1,

设 $P(2,3)$,则 $|PC|=\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{5}$,所以切线长为 $\sqrt{5-1}=2$.

15.$\frac{\sqrt{5}}{3}$ 提示:设椭圆C的左焦点为 F_1,因为圆 C':$\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2=\frac{b^2}{16}$ 与AF相切于点B,所以 $|C'B|=\frac{b}{4}$,$C'\left(\frac{c}{2},0\right)$,所以 $\frac{|C'F|}{|F_1F|}=\frac{1}{4}$,因为 $\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{BF}$,所以 $\frac{|\overrightarrow{BF}|}{|\overrightarrow{AF}|}=\frac{1}{4}$,所以 $C'B/\!/AF_1$,$|AF_1|=4|C'B|=b$,$\angle F_1AF=\angle C'BF=\frac{\pi}{2}$,由椭圆定义得 $|AF|=2a-b$,在 $Rt\triangle AF_1F$ 中,$|AF|^2+|AF_1|^2=|F_1F|^2$,所以 $(2a-b)^2+b^2=(2c)^2$,整理得 $3b=2a$,所以椭圆C的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

16.$y=\pm2x$ 提示:设双曲线的半焦距为c,因为以 AB 为直径的圆恰好经过双曲线的右焦点 F,所以以 AB 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=c^2$,圆也过左焦点 F_1,所以 AB 与 F_1F 相等且平分,所以四边形 AF_1BF 为矩形,所以 $|AF|=|BF_1|$,不妨设点B在双曲线右支上,设 $|AF|=m$,$|BF|=n$,则 $|AF|-|BF|=|BF_1|-|BF|=m-n=2a$,所以 $m^2+n^2-2mn=4a^2$,因为 $AF\perp BF$,所以 $m^2+n^2=|AB|^2=4c^2$,因为 $\triangle ABF$ 的面积为 $4a^2$,所以 $\frac{1}{2}mn=4a^2$,得 $mn=8a^2$,所以 $4c^2-16a^2=4a^2$,得 $c^2=5a^2$,所以 $a^2+b^2=5a^2$,所以 $b^2=4a^2$,得 $b=2a$,

所以双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm2x$.

四、解答题

17.解:(1)因为圆C的圆心在直线 $l:2x-y-3=0$ 上,所以设圆心 $C(a,2a-3)$,半径为r,则圆C的方程为 $(x-a)^2+(y-2a+3)^2=r^2$,把点 $A(5,2)$ 和点 $B(3,-2)$ 代入圆C的方程,得 $\begin{cases}(5-a)^2+(2-2a+3)^2=r^2,\\ (3-a)^2+(-2-2a+3)^2=r^2,\end{cases}$ 解得 $a=2$,$r^2=10$,故圆C的标准方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=10$.

(2)圆C的方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=10$.点 $D(-1,2)$ 满足 $(-1-2)^2+(2-1)^2=10$,则D在圆C上,$k_{DC}=\frac{2-1}{-1-2}=-\frac{1}{3}$,

则切线的斜率 $k=-\frac{1}{k_{DC}}=3$,故所求的切线的方程为 $y-2=3(x+1)$,即 $3x-y+5=0$.

18.(1)解:由题意知,$\frac{1}{2}+\frac{p}{2}=|n|$,$n^2=2p\times\frac{1}{2}$,解得 $p=1$,故抛物线的方程为 $y^2=2x$.

(2)证明:设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,直线 l 的方程为 $x=my+t$,联立 $\begin{cases}y^2=2x,\\ x=my+t,\end{cases}$ 整理得,$y^2-2my-2t=0$,则 $y_1y_2=-2t$,$x_1x_2=\frac{1}{4}(y_1y_2)^2=t^2$,因为 $OA\perp OB$,所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=t^2-2t=0$,解得 $t=2$ 或 $t=0$(舍去),故直线 l 方程为 $x=my+2$,直线 l 与x轴的交点 $(2,0)$ 为定点.

19.(1)证明:在 $\triangle ABD$ 中,因为E,F分别是AB,AD的中点,所以 $EF/\!/DB$,$EF=\frac{1}{2}BD$,又因为 $EF\not\subset$ 平面PBD,$BD\subset$ 平面PBD,所以 $EF/\!/$ 平面PBD,因为 $EF\subset$ 平面 α,$\alpha\cap$ 平面 $PBD=MN$,所以 $EF/\!/MN$,所以 $MN/\!/BD$.

(2)解:由 $EF=2MN$,可得 $\frac{MN}{BD}=\frac{1}{4}$,$\overrightarrow{PM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{PB}$.连接AC交BD于O,以O为坐标原点,$\overrightarrow{OE}$ 为x轴方向,$\overrightarrow{OP}$ 为z轴方向,建立空间直角坐标系,因为 $PA=\sqrt{6}$,$AB=2$,所以 $PO=2$,则 $A(1,-1,0)$,$E(1,0,0)$,$F(0,-1,0)$,$B(1,1,0)$,$P(0,0,2)$,$\overrightarrow{AP}=(-1,1,2)$,$\overrightarrow{EF}=(-1,-1,0)$,$\overrightarrow{PB}=(1,1,-2)$,$\overrightarrow{EB}=(0,1,0)$,$\overrightarrow{MB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{PB}=\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4},-\frac{3}{2}\right)$,$\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{MB}=\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{2}\right)$.设平面 α 的法向量为 $n=(x,y,z)$,由 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{EF}=-x-y=0,\\ n\cdot\overrightarrow{EM}=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{3}{2}z=0,\end{cases}$ 令 $x=3$,则 $n=(3,-3,2)$,设直线PA与平面 α 所成角为 θ,则 $\sin\theta=|\cos\langle n,\overrightarrow{AP}\rangle|=\frac{2}{\sqrt{6}\times\sqrt{22}}=\frac{\sqrt{33}}{33}$,故直线PA与平面 α 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{33}}{33}$.

20.解:(1)椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,由 C_1 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,得 $\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,即 $a=2b$,

所以 C_2 的离心率为 $\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$.

(2)当 $a=2$,$b=1$ 时,椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$,双曲线 C_2 的方程为 $y^2-\frac{x^2}{4}=1$,

由题意可得直线 l 的斜率存在且不为0,设过点 $A(0,1)$ 的直线 l 的方程为 $y=kx+1$,

由 $\begin{cases}y=kx+1,\\ x^2+4y^2=4,\end{cases}$ 解得 $P\left(-\frac{8k}{1+4k^2},\frac{1-4k^2}{1+4k^2}\right)$.

由 $\begin{cases}y=kx+1,\\ 4y^2-x^2=4,\end{cases}$ 解得 $Q\left(\frac{8k}{1-4k^2},\frac{1+4k^2}{1-4k^2}\right)$.

由P恰好是 AQ 的中点,可得 $-\frac{16k}{1+4k^2}=\frac{8k}{1-4k^2}$,解得 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以直线 l 的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x+1$.

21.(1)解:因为 $BC=BD=1$,$AB=\sqrt{2}$,所以 $\angle DBC=90°$,所以 $\angle ADB=90°$,以D为原点,DA,DB,DD_1 所在直线分别为x轴、y轴、z轴,建立空间直角坐标系,设 $DD_1=a$,则 $D(0,0,0)$,$A_1(1,0,a)$,$B(0,1,0)$,$C(-1,1,0)$,$C_1(-1,1,a)$,$\overrightarrow{DA_1}=(1,0,a)$,$\overrightarrow{DB}=(0,1,0)$,$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,a)$,设平面 A_1BD 的法向量为 $n_1=(x_1,y_1,z_1)$,则 $\begin{cases}n_1\cdot\overrightarrow{DA_1}=0,\\ n_1\cdot\overrightarrow{DB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1+az_1=0,\\ y_1=0,\end{cases}$ 所以可取 $n_1=(a,0,-1)$,设直线 CC_1 与平面 A_1BD 所成角为 θ,所以 $\sin\theta=|\cos\langle n_1,\overrightarrow{CC_1}\rangle|=\left|\frac{-a}{a\cdot\sqrt{a^2+1}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{3}$,解得 $a=\sqrt{2}$,所以 $n_1=(\sqrt{2},0,-1)$,$\overrightarrow{DC_1}=(-1,1,\sqrt{2})$,所以点 C_1 到平面 A_1BD 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{DC_1}\cdot n_1|}{|n_1|}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

(2)解:设平面 C_1BD 的法向量为 $n_2=(x_2,y_2,z_2)$,则 $\begin{cases}n_2\cdot\overrightarrow{DC_1}=0,\\ n_2\cdot\overrightarrow{DB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x_2+y_2+\sqrt{2}z_2=0,\\ y_2=0,\end{cases}$ 可取 $n_2=(\sqrt{2},0,1)$,所以 $|\cos\langle n_1,n_2\rangle|=\frac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$,所以平面 A_1BD 与平面 C_1BD 夹角的余弦值为 $\frac{1}{3}$.

22.解:(1)由题意得,$\begin{cases}b=1,\\ 2c=2\sqrt{3},\end{cases}$ 所以 $b=1$,$c=\sqrt{3}$,所以 $a=2$,所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)由已知,过点 $P(-2,1)$ 的直线为 $y-1=k(x+2)$,设 $B(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases}y-1=k(x+2),\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 整理得,$(1+4k^2)x^2+(16k^2+8k)x+16k^2+16k=0$,因为直线与椭圆E相交,所以 $\Delta=(16k^2+8k)^2-4(1+4k^2)(16k^2+16k)>0$,所以 $k<0$,由韦达定理,得 $x_1+x_2=-\frac{16k^2+8k}{1+4k^2}$,$x_1x_2=\frac{16k^2+16k}{1+4k^2}$,因为 $k_{AB}=\frac{y_1-1}{x_1}$,所以直线 AB 的方程为 $y=\frac{y_1-1}{x_1}x+1$,令 $y=0$,则 $x=\frac{x_1}{1-y_1}$,所以 $M\left(\frac{x_1}{1-y_1},0\right)$,同理,$N\left(\frac{x_2}{1-y_2},0\right)$,

所以 $|MN|=\left|\frac{x_1}{1-y_1}-\frac{x_2}{1-y_2}\right|=\left|\frac{x_1}{-k(x_1+2)}-\frac{x_2}{-k(x_2+2)}\right|$

$=\left|\frac{1}{k}\cdot\frac{2(x_2-x_1)}{(x_2+2)(x_1+2)}\right|=\left|\frac{1}{k}\cdot\frac{2\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}\right|$

$=\left|\frac{2}{k}\cdot\frac{\sqrt{\left(-\frac{16k^2+8k}{1+4k^2}\right)^2-\frac{4(16k^2+16k)}{1+4k^2}}}{\frac{16k^2+16k}{1+4k^2}-\frac{2(16k^2+8k)}{1+4k^2}+4}\right|=2$,

所以 $\left|\frac{2}{k}\cdot\frac{\sqrt{-64k}}{4}\right|=2$,所以 $\left|\frac{\sqrt{-k}}{k}\right|=\frac{1}{2}$,

解得 $k=-4$.