第 12 期

第 2~3 版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.B　**提示:** 抛物线 $y^2=4x$ 的准线方程为 $x=-1$,故选 B.

2.D　**提示:** 因为双曲线的方程为 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}=1$,所以 $a=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$,

则双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}x=\pm\frac{1}{2}x$.故选 D.

3.B　**提示:** 设抛物线方程为 $y^2=-2px(p>0)$,把 $(-1,2)$ 代入,得 $4=2p$,解得 $p=2$,所以抛物线方程为 $y^2=-4x$,故选 B.

4.B　**提示:** 该方程表示的曲线为椭圆,则 $m-2>3-m>0$ 或 $3-m>m-2>0$,解得 $\frac{5}{2}<m<3$ 或 $2<m<\frac{5}{2}$,所以"方程 $\frac{x^2}{m-2}+\frac{y^2}{3-m}=1$ 表示的曲线为椭圆"的充要条件为"$2<m<\frac{5}{2}$ 或 $\frac{5}{2}<m<3$",

所以"$2<m<3$"是"方程 $\frac{x^2}{m-2}+\frac{y^2}{3-m}=1$ 表示的曲线为椭圆"的必要不充分条件,故选 B.

5.A　**提示:** 双曲线 C: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一个焦点 F 到两条渐近线的垂线段分别为 FA,FB, O 为坐标原点,因为四边形 $OAFB$ 是菱形,所以四边形 $OAFB$ 是正方形,所以渐近线的斜率为 ±1,

可知 $a=b$,所以双曲线 C 的离心率为 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{2}$.故选 A.

6.B　**提示:** 由椭圆的离心率为 $\frac{1}{3}$,可设椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9m^2}+\frac{y^2}{8m^2}=1(m>0)$,

所以 $A_1(-3m,0)$, $A_2(3m,0)$, $B(0,2\sqrt{2}m)$,

所以 $\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BA_2}=(-3m,-2\sqrt{2}m)\cdot(3m,-2\sqrt{2}m)=-9m^2+8m^2=-1$,所以 $m^2=1$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.故选 B.

7.C　**提示:** 由抛物线的方程 $x^2=6y$,得 $p=3$,设 A,B,C 的纵坐标分别是 y_1,y_2,y_3,

由 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,得 $\frac{3}{2}-y_1=\frac{1}{3}(y_2-y_1+y_3-y_1)$,即 $y_1+y_2+y_3=\frac{9}{2}$,因为 F 为抛物线的焦点,由抛物线的定义可得,$|AF|=y_1+\frac{p}{2}$, $|BF|=y_2+\frac{p}{2}$, $|CF|=y_3+\frac{p}{2}$,即 $|\overrightarrow{AF}|+|\overrightarrow{BF}|+|\overrightarrow{CF}|=y_1+y_2+y_3+\frac{3p}{2}=9$,故选 C.

8.A　**提示:** 设 $P(x_0,y_0)$,则 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=(-c-x_0,-y_0)\cdot(c-x_0,-y_0)=-c^2+x_0^2+y_0^2$, $x_0^2+y_0^2$ 表示椭圆上的点到原点的距离的平方,所以 $x_0^2+y_0^2\leqslant a^2$,

所以 $(\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2})_{max}=-c^2+a^2$,又 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}\leqslant ac$ 恒成立,

所以 $-c^2+a^2\leqslant ac$,所以 $\frac{c^2}{a^2}+\frac{c}{a}-1\geqslant0$,即 $e^2+e-1\geqslant0$,又因为 $0<e<1$,解得 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\leqslant e<1$,故选 A.

二、多项选择题

9.BD　**提示:** 双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=m^2(m\neq0)$,化为标准方程 $\frac{x^2}{3m^2}-\frac{y^2}{m^2}=1$,

则 $a^2=3m^2$, $b^2=m^2$, $c^2=a^2+b^2=4m^2$,所以焦距 $2c=2|m|$ 与 m 有关,所以 A 不正确;

离心率 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{1}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,与 m 无关,所以 B 正确;

顶点 $(\pm\sqrt{3}|m|,0)$,与 m 有关,所以 C 不正确;

渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$,与 m 无关,所以 D 正确.故选 BD.

10.BCD　**提示:** 因为椭圆 C: $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$,所以 $a^2=6$, $b^2=2$, $c^2=a^2-b^2=4$,

所以 $a=\sqrt{6}$, $b=\sqrt{2}$, $c=2$,因为 A,B 两点都在 C 上,所以 $|AB|\geqslant2\sqrt{2}$,所以 A 错误,D 正确;

因为椭圆 C: $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2, A,B 两点都在 C 上,且 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OB}$,

所以由椭圆的对称性知,$|AF_1|+|BF_1|=|AF_1|+|AF_2|=2a=2\sqrt{6}$,所以 B 正确;

当 A 在 y 轴上时,$\cos\angle F_1AF_2=\frac{6+6-4^2}{2\times6}<0$,则 $\angle F_1AF_2$ 为钝角,所以存在点 A,使得 $AF_1\perp AF_2$,C 正确.故选 BCD.

11.AB　**提示:** 由抛物线 C: $y^2=4x$,可得焦点 $F(1,0)$,因为 $A\left(-\frac{5}{4},0\right)$,且 $\triangle PAF$ 为等腰三角形,所以 $|PA|=|AF|$ 或 $|AF|=|PF|$.当 $|PF|=|AF|=\frac{5}{4}+1=\frac{9}{4}$ 时,设点 $P\left(\frac{m^2}{4},m\right)$,则 $\sqrt{\left(\frac{m^2}{4}-1\right)^2+m^2}=\frac{9}{4}$,解得 $m^2=5$,这时 $P\left(\frac{5}{4},\pm\sqrt{5}\right)$,直线 AP 的斜率 $k=\frac{\pm\sqrt{5}}{\frac{5}{4}+\frac{5}{4}}=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$;

当 $|AF|=|PA|=\frac{9}{4}$ 时,设点 $P\left(\frac{n^2}{4},n\right)$,

则 $\sqrt{\left(\frac{n^2}{4}+\frac{5}{4}\right)^2+n^2}=\frac{9}{4}$,解得 $n^2=2$,

这时 $P\left(\frac{1}{2},\pm\sqrt{2}\right)$,直线 AP 的斜率 $k=\frac{\pm\sqrt{2}}{\frac{1}{2}+\frac{5}{4}}=\pm\frac{4\sqrt{2}}{7}$.故选 AB.

12.ACD　**提示:** 根据椭圆的性质,椭圆关于原点成中心对称图形,也关于坐标轴成轴对称图形.

对于 A,直线 $y=2x-3$ 与直线 l: $y=2x+3$ 平行,且关于原点对称,所以两直线与椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 截得的弦长一样,都是 7,故 A 正确;

对于 B,直线 $y=2x+1$ 与直线 l: $y=2x+3$ 平行,但不关于原点对称,所以两直线与椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 截得的弦长不一样,故 B 不正确;

对于 C,直线 $y=-2x-3$ 与直线 l: $y=2x+3$ 关于 x 轴对称,故此两直线与椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 截得的弦长一样,都是 7,故 C 正确;

对于 D,直线 $y=-2x+3$ 与直线 l: $y=2x+3$ 关于 y 轴对称,故此两直线与椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 截得的弦长一样,都是 7,故 D 正确.故选 ACD.

三、填空题

13.-3　**提示:** 双曲线 $y^2+\frac{x^2}{m}=1$ 化为标准方程可得 $y^2-\frac{x^2}{-m}=1$,所以 $m<0$,双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{\sqrt{-m}}x$,

又双曲线 $y^2+\frac{x^2}{m}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$,所以 $\frac{1}{\sqrt{-m}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,解得 $m=-3$.

14.4　**提示:** 由题意得 $x_A=\frac{p}{4}$,代入 $y^2=2px$,得 $|y_A|=\frac{\sqrt{2}}{2}p$,所以 $|OA|=\sqrt{\left(\frac{p}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}p\right)^2}=\frac{3}{4}p=3$,解得 $p=4$.

15.$(0,\sqrt{3})$　**提示:** 由题意知,$|AB|=4$,因为 $|PA|-|PB|=2<|AB|$,所以 P 在以 A,B 为焦点的双曲线的右支上,且可知焦距 $2c=4$,实轴长 $2a'=2$,即 $c=2$, $a'=1$,所以 $b'^2=c^2-a'^2=3$,

所以双曲线的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1(x>0)$,所以双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$,

曲线 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=0(a>0,b>0)$,整理可得 $y=\pm\frac{b}{a}x$,

由曲线 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=0(a>0,b>0)$ 上存在点 P 满足 $|PA|-|PB|=2$,即 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 与双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1(x>0)$ 有交点,所以 $\frac{b}{a}\in(0,\sqrt{3})$.

16.$\sqrt{15}$; $\sqrt{15}x-y+2\sqrt{15}=0$　**提示:** 根据椭圆的性质,可得 $2a=6$, $2c=4$,即 $a=3$, $c=2$,所以焦点坐标 $F_1(-2,0)$, $F_2(2,0)$,故圆 O 的方程为 $x^2+y^2=4$,其中圆 O 的半径为 2,即 $|F_1O|=|OA|=2$.因为 $OA\parallel PF_2$,所以 $\frac{|F_1O|}{|F_1F_2|}=\frac{|OA|}{|F_2P|}=\frac{1}{2}$,所以 $|F_2P|=4$.又因为点 P 在椭圆 C 上,所以 $|F_1P|+|F_2P|=2a=6$,即 $|F_1P|=2$.在 $\triangle PF_1F_2$ 中,由余弦定理推论,得 $\cos\angle PF_1F_2=\frac{|PF_1|^2+|F_1F_2|^2-|PF_2|^2}{2|PF_1|\cdot|F_1F_2|}=\frac{2^2+4^2-4^2}{2\times2\times4}=\frac{1}{4}$,

所以 $\sin\angle PF_1F_2=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$,

所以 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\frac{1}{2}|F_1P|\times|F_1F_2|\sin\angle PF_1F_2=\frac{1}{2}\times2\times4\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\sqrt{15}$.

易知 $\tan\angle PF_1F_2=\sqrt{15}$,即直线 PF_1 的斜率为 $\sqrt{15}$,又因为直线 PF_1 过点 $F_1(-2,0)$,所以直线 PF_1 的方程为 $y-0=\sqrt{15}(x+2)$,即 $\sqrt{15}x-y+2\sqrt{15}=0$.

四、解答题

17.**解:**(1)圆 $x^2+y^2-2x=0$ 的标准方程为 $(x-1)^2+y^2=1$,圆心坐标为 $(1,0)$,

即抛物线 C 的焦点为 $F(1,0)$,得到抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.

(2)设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,直线 l: $y=x-1$ 与抛物线 C 的方程 $y^2=4x$ 联立,得 $x^2-6x+1=0$,则 $x_1+x_2=6$, $x_1x_2=1$,

所以弦长 $|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+1^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\times\sqrt{36-4}=8$.

18.**解:**(1)因为抛物线 C: $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 到准线的距离为 2,

所以 $\frac{p}{2}-\left(-\frac{p}{2}\right)=p=2$,所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.

(2)当直线 l 的斜率存在时,设直线 l 为 $y=kx+1$,

联立直线与抛物线方程 $\begin{cases}y=kx+1,\\y^2=4x,\end{cases}$

整理得,$k^2x^2+(2k-4)x+1=0$,

当 $k=0$ 时,$x=\frac{1}{4}$,点 $\left(\frac{1}{4},1\right)$ 是直线 l 与抛物线 C 唯一公共点,故 $k=0$ 时,直线 l 方程为 $y=1$;

当 $k\neq0$ 时,$\Delta=(2k-4)^2-4k^2=0$,解得 $k=1$,此时直线 l 与抛物线相切,直线 l 方程为 $y=x+1$.

当直线 l 的斜率不存在时,y 轴与抛物线 C 有唯一公共点,此时直线 l 方程为 $x=0$.

综上,直线 l 的方程为 $x=0$ 或 $y=1$ 或 $y=x+1$.

19.**解:**(1)设椭圆 C 的半焦距为 c,由题意可得 $\begin{cases}2c=\frac{4\sqrt{6}}{3},\\\sqrt{a^2-1}=\sqrt{3},\\a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $a=2$, $b=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{3y^2}{4}=1$.

(2)当切线 l 的斜率不存在时,直线 l 的方程为 $x=\pm1$, $|AB|=2$, $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times|AB|\times r=\frac{1}{2}\times2\times1=1$.

当切线 l 的斜率存在时,设直线 l 的方程为 $y=kx+m$,由题意可得 $\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=1$,即 $k^2+1=m^2$,

联立 $\begin{cases}y=kx+m,\\\frac{x^2}{4}+\frac{3y^2}{4}=1,\end{cases}$ 得 $(1+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-4=0$,

设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,所以 $x_1+x_2=-\frac{6km}{3k^2+1}$, $x_1x_2=\frac{3m^2-4}{3k^2+1}$,

所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{6km}{3k^2+1}\right)^2-4\times\frac{3m^2-4}{3k^2+1}}=\frac{2\sqrt{1+k^2}}{3k^2+1}\cdot\sqrt{12k^2-3m^2+4}=\frac{2\sqrt{1+k^2}}{3k^2+1}\cdot\sqrt{9k^2+1}=2\cdot\sqrt{1+\frac{4k^2}{9k^4+6k^2+1}}=2\cdot\sqrt{1+\frac{4}{9k^2+\frac{1}{k^2}+6}}\leqslant2\cdot\sqrt{1+\frac{4}{2\cdot\sqrt{9k^2\cdot\frac{1}{k^2}}+6}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,当且仅当 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时,等号成立,所以 $(S_{\triangle OAB})_{max}=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

综上所述,$\triangle OAB$ 面积的最大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

20.(1)**解:** 由题意知 $\begin{cases}\frac{e^2}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1,\\\frac{2}{a^2}-1=1,\\c^2=a^2+b^2,\end{cases}$

结合 $e=\frac{c}{a}\Rightarrow\begin{cases}a=1,\\b=\sqrt{3},\end{cases}$ 所以双曲线 C 的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

(2)**证明:** 因为 $AF_1\parallel BF_2$,延长 BF_2 交双曲线于点 D,所以 $|DF_2|=|AF_1|$,

设 $B(x_1,y_1)$, $D(x_2,y_2)$, $F_2(2,0)(x_1>1,x_2>1)$.

所以 $|BF_2|=\sqrt{(x_1-2)^2+y_1^2}=\sqrt{x_1^2-4x_1+4+3x_1^2-3}=\sqrt{4x_1^2-4x_1+1}=2x_1-1$,

同理 $|AF_1|=|DF_2|=2x_2-1$,设直线 BD 的方程为 $x=my+2$,

联立 $\begin{cases}x=my+2,\\3x^2-y^2=3,\end{cases}$ 整理得,$(3m^2-1)y^2+12my+9=0$,

则 $y_1+y_2=-\frac{12m}{3m^2-1}$, $y_1y_2=\frac{9}{3m^2-1}$,

所以 $\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|BF_2|}=\frac{1}{2x_2-1}+\frac{1}{2x_1-1}=\frac{1}{2my_2+3}+\frac{1}{2my_1+3}$

$=\frac{2m(y_1+y_2)+6}{4m^2y_1y_2+6m(y_1+y_2)+9}=\frac{2m\cdot\frac{-12m}{3m^2-1}+6}{4m^2\cdot\frac{9}{3m^2-1}+6m\cdot\frac{-12m}{3m^2-1}+9}=\frac{-6m^2-6}{-9m^2-9}=\frac{2}{3}$ 为定值.

21.**解:**(1)由题意可得 $\overrightarrow{F_1S}\cdot\overrightarrow{F_1T}=-|\overrightarrow{F_1S}|^2=-\frac{9}{4}$,即 $|\overrightarrow{F_1S}|=\frac{3}{2}=\frac{b^2}{a}=\frac{a^2-1}{a}$,

解得 $a=2$, $b=\sqrt{3}$,所以椭圆 C 的方程为 $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$.

(2)假设存在点 Q 使得 $\angle OQN+\angle OQM=\frac{\pi}{2}$,设 $Q(m,0)$,因为 $\angle OQN+\angle OQM=\frac{\pi}{2}$,所以 $\angle OQN=\angle OMQ$,则 $\tan\angle OQN=\tan\angle OMQ$,即 $\frac{|ON|}{|OQ|}=\frac{|OQ|}{|OM|}$,所以 $|OQ|^2=|ON|\cdot|OM|$.因为直线 $y=y_0$ 交椭圆于 A,B 两点,则 A,B 两点关于 y 轴对称.设 $A(x_0,y_0)$, $B(-x_0,y_0)$, $x_0\neq\pm\sqrt{3}$,因为 $P(\sqrt{3},0)$,则直线 PA 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0-\sqrt{3}}(x-\sqrt{3})$,令 $x=0$,得 $y_M=-\frac{\sqrt{3}y_0}{x_0-\sqrt{3}}$;直线 PB 的方程为 $y=\frac{y_0}{-x_0-\sqrt{3}}(x-\sqrt{3})$,令 $x=0$,得 $y_N=\frac{\sqrt{3}y_0}{x_0+\sqrt{3}}$.因为 $|OQ|^2=|ON|\cdot|OM|$,所以 $m^2=\frac{3y_0^2}{3-x_0^2}$,又因为 $A(x_0,y_0)$ 在椭圆 C: $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$ 上,所以 $3y_0^2=12-4x_0^2$,所以 $m^2=\frac{12-4x_0^2}{3-x_0^2}=4$,即 $m=\pm2$,所以存在点 $Q(\pm2,0)$,使得 $\angle OQN+\angle OQM=\frac{\pi}{2}$ 成立.

22.(1)**解:** 由题意知,$b=\sqrt{3}$, $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$,所以 $a=2c$.因为 $a^2=b^2+c^2$,

所以 $c=1$, $a=2$,所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)**证明:** 设 $M(4,y_M)$, $N(4,y_N)$,因为 $F_2(1,0)$,所以 $\overrightarrow{MF_2}=(-3,-y_M)$, $\overrightarrow{NF_2}=(-3,-y_N)$,因为 $\overrightarrow{MF_2}\cdot\overrightarrow{NF_2}=0$,所以 $y_M\cdot y_N+9=0$,

因为 $A_1(-2,0)$,所以直线 A_1M 的斜率为 $k=\frac{y_M}{6}$,所以直线 A_1M 的方程为 $y=\frac{y_M}{6}(x+2)$,

代入椭圆 C 的方程得 $3x^2+4\cdot\frac{y_M^2}{36}(x+2)^2=12$,

整理得 $(27+y_M^2)x^2+4y_M^2x+4y_M^2-108=0$,

设点 $P(x_1,y_1)$,所以 $x_1+(-2)=-\frac{4y_M^2}{27+y_M^2}$,所以 $x_1=\frac{54-2y_M^2}{27+y_M^2}$,

代入直线 A_1M 的方程得 $y_1=\frac{18y_M}{27+y_M^2}$,

所以 $P\left(\frac{54-2y_M^2}{27+y_M^2},\frac{18y_M}{27+y_M^2}\right)$,又 $A_2(2,0)$,所以直线 PA_2 的斜率为 $k_1=\frac{y_1}{x_1-2}=\frac{\frac{18y_M}{27+y_M^2}}{\frac{54-2y_M^2}{27+y_M^2}-2}=\frac{18y_M}{-4y_M^2}=-\frac{9}{2y_M}$,

直线 NA_2 的斜率为 $k_2=\frac{y_N}{2}$,因为 $y_M\cdot y_N+9=0$,所以 $k_2=\frac{y_N}{2}=\frac{-\frac{9}{y_M}}{2}=-\frac{9}{2y_M}=k_1$,所以 P,A_2,N 三点共线.

扫码免费下载 习题讲解 ppt

第 9 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A　**提示:** 椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{7}=1$ 的长轴长为 $2\sqrt{7}$.故选 A.

2.D　**提示:** 由题意知,椭圆 C 的焦点坐标为 $(2,0)$ 和 $(-2,0)$,满足题意的只有 D 选项.故选 D.

3.D　**提示:** 因为焦点坐标为 $(0,-4)$, $(0,4)$,且长半轴长为 6,所以椭圆的焦点在 y 轴上,且半焦距 $c=4$, $a=6$,

所以 $b^2=a^2-c^2=6^2-4^2=20$,所以椭圆的方程为 $\frac{y^2}{36}+\frac{x^2}{20}=1$,故选 D.

4.B　**提示:** "点 M 的轨迹是以 F_1,F_2 为焦点的椭圆"$\Rightarrow$"$|MF_1|+|MF_2|$ 为定值",反之不成立,若 $|MF_1|+|MF_2|\leqslant|F_1F_2|$,点 M 轨迹不是椭圆.因此"$|MF_1|+|MF_2|$ 为定值"是"点 M 的轨迹是以 F_1,F_2 为焦点的椭圆"的必要不充分条件.故选 B.

5.B　**提示:** 依题意可设椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,半焦距为 c.由 $x^2+y^2-2x-15=0$,得 $(x-1)^2+y^2=16$,所以圆 C 半径为 4,故有 $2a=8\Rightarrow a=4$,又 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$,所以 $c=2$,所以 $b^2=a^2-c^2=16-4=12$,所以该椭圆的标准方程是 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.故选 B.

6.B　**提示:** 在椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 中,$a=5$, $b=4$,则半焦距 $c=\sqrt{a^2-b^2}=3$,所以 $|F_1F_2|=2c=6$,由椭圆的定义,得 $|PF_2|=2a-|PF_1|=4$,取 PF_2 的中点为 M,因为 $|PF_1|=|F_1F_2|$,则 $MF_1\perp PF_2$,所以 $|MF_1|=\sqrt{|PF_1|^2-|PM|^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$,所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_2|\cdot|MF_1|=\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$.故选 B.

7.D　**提示:** 以运行轨道长轴所在直线为 x 轴,地心 F 为左焦点建立平面直角坐标系,设神舟十二号的飞行轨道所形成的椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,其中 $a^2=b^2+c^2$,

由题意知,$a-c=R+\frac{R}{30}=\frac{31}{30}R$, $a+c=R+\frac{R}{15}=\frac{16}{15}R$,所以 $2a=\frac{63}{30}R$, $2c=\frac{1}{30}R$,所以所求的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2c}{2a}=\frac{1}{63}$.故选 D.

8.A　**提示:** 由题意知,点 $A(-a,0)$,设 $P(x_0,y_0)$,则 $Q(-x_0,y_0)$,所以 $k_{AP}=\frac{y_0}{x_0+a}$, $k_{AQ}=\frac{y_0}{a-x_0}$,

所以 $k_{AP}\cdot k_{AQ}=\frac{y_0}{x_0+a}\cdot\frac{y_0}{a-x_0}=\frac{y_0^2}{a^2-x_0^2}=\frac{1}{4}$,①

因为 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$,所以 $y_0^2=\frac{b^2(a^2-x_0^2)}{a^2}$,②

将②代入①并整理,得 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$,

所以 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.故选 A.

二、多项选择题

9.CD　**提示:** 因为方程 $x^2+ky^2=2$,即 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{\frac{2}{k}}=1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆,所以 $\frac{2}{k}>2$,解得 $0<k<1$.故选 CD.

10.BD　**提示:** 观察图形可知,$a_1+c_1>a_2+c_2$,故 A 错误;因为椭圆Ⅰ、Ⅱ有公共的右焦点 F 与右顶点 P,

所以 $a_1-c_1=a_2-c_2=|PF|$,故 B 正确;

因为 $a_1-c_1=a_2-c_2>0$, $c_1>c_2>0$,

所以 $\frac{a_1-c_1}{c_1}<\frac{a_2-c_2}{c_2}$,即 $\frac{a_1}{c_1}<\frac{a_2}{c_2}$,所以 $c_1a_2>a_1c_2$,故 C 错误,D 正确.故选 BD.

11.BC　**提示:** 由椭圆 C: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,可得 $a=2$, $b=\sqrt{3}$,则半焦距 $c=\sqrt{a^2-b^2}=1$,

则 $\triangle ABF_2$ 的周长为 $l=|AB|+|AF_2|+|BF_2|=(|AF_1|+|AF_2|)+(|BF_1|+|BF_2|)=2a+2a=8$,

又由椭圆的几何性质,可得椭圆 C 上的点到焦点的最短距离为 $a-c=1$.故选 BC.

12.AC　**提示:** 设直线 l 方程为 $y=k(x+c)$, $k<0$,

圆心 A 到直线 l 的距离 $d=\frac{|kc|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{1}{2}c$,解得 $k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,则 $\angle MF_1F_2=30°$,又 $\overrightarrow{MF_2}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=0$,得 $|MF_1|=2|MF_2|=2\cdot\frac{2c}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}c$,根据椭圆定义得 $a=\sqrt{3}c$, $b=\sqrt{2}c$,可得 $\sin\angle OBF_2=\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\angle OBF_2<45°\Rightarrow\angle F_1BF_2<90°$,又 $\angle F_1QF_2\leqslant\angle F_1BF_2$,故 A 正确;圆心 A 到椭圆左顶点的距离 $2c-a=(2-\sqrt{3})c<\frac{1}{2}c=r$,圆 A 与椭圆 C 有公共点,故 B 错误;当 $a=3$ 时,$b=\sqrt{6}$,椭圆的短轴长为 $2\sqrt{6}$,故 C 正确;$k_{BF_2}=\frac{b}{c}=\sqrt{2}$, $k\cdot k_{BF_2}\neq-1$,所以 F_2B 与 F_1M 不垂直,故 D 错误.故选 AC.

三、填空题

13.$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$(答案不唯一)　**提示:** 由椭圆中心为坐标原点,焦点在坐标轴上,可取在 x 轴上(也可取在 y 轴上),离心率 $e=\frac{1}{3}$,可取 $a=3$, $c=1$,则 $b=\sqrt{a^2-c^2}=2\sqrt{2}$.

所以满足以上三个条件的一个椭圆为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$.

14.$9x+8y-26=0$　**提示:** 设弦的两个端点的坐标分别为 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,因为 A,B 两点均在椭圆上,

所以 $\frac{x_1^2}{16}+\frac{y_1^2}{9}=1$, $\frac{x_2^2}{16}+\frac{y_2^2}{9}=1$,两式相减,得 $\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{16}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{9}=0$,

因为点 $M(2,1)$ 为 AB 的中点,所以 $x_1+x_2=4$, $y_1+y_2=2$,所以直线 AB 的斜率 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{9}{8}$,所以直线 AB 的方程为 $y-1=-\frac{9}{8}(x-2)$,即 $9x+8y-26=0$.

15.4　**提示:** 由椭圆的定义可知,$|MF_1|+|MF_2|=6$,因为 $|MF_1|-|MF_2|=2$,解得 $|MF_1|=4$, $|MF_2|=2$,因为椭圆的两个焦点是 F_1,F_2,又 $c^2=a^2-b^2=9-4=5$,解得 $c=\sqrt{5}$,所以 $|F_1F_2|=2\sqrt{5}$,因为 $|MF_1|^2+|MF_2|^2=|F_1F_2|^2$,所以 $\triangle F_1F_2M$ 是以 $|MF_1|$, $|MF_2|$ 为直角边的直角三角形,所以 $\triangle F_1F_2M$ 的面积为 $\frac{1}{2}|MF_1|\cdot|MF_2|=\frac{1}{2}\times4\times2=4$.

16.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　**提示:** 设 $|BF_2|=x$,则 $|AF_2|=2x$, $|BF_1|=2a-x$, $|AF_1|=2a-2x$,因为 $|AB|=|BF_1|$,所以 $|AB|=|AF_2|+|BF_2|=3x=2a-x$,解得 $x=\frac{a}{2}$,所以 $|BF_1|=\frac{3}{2}a$, $|AF_2|=|AF_1|=a$,所以 A 为椭圆的上、下顶点,不妨设 A 为上顶点,则 $\cos\angle AF_2F_1=\frac{|OF_2|}{|AF_2|}=\frac{1}{a}$,则 $\cos\angle BF_2F_1=-\frac{1}{a}$,由余弦定理,得 $\frac{|F_1F_2|^2+|BF_2|^2-|BF_1|^2}{2|F_1F_2|\cdot|BF_2|}=\frac{4+\frac{1}{4}a^2-\frac{9}{4}a^2}{2\times2\times\frac{1}{2}a}=-\frac{1}{a}$,解得 $a^2=3$,

所以 $a=\sqrt{3}$,所以椭圆 C 的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

四、解答题

17.**解:**(1)由已知椭圆方程可得焦点坐标为 $(\pm1,0)$,则可设所求的椭圆方程为 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{m-1}=1(m>1)$,

代入点 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$,解得 $m=4$ 或 $m=\frac{1}{4}$(舍去),所以所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)设所求的椭圆方程为 $mx^2+ny^2=1(m>0,n>0,m\neq n)$,

代入 A,B 两点可得 $\begin{cases}4m+\frac{1}{2}n=1,\\2m+\frac{3}{4}n=1,\end{cases}$ 解得 $m=\frac{1}{8}$, $n=1$,故所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{8}+y^2=1$.

18.**解:**(1)设点 $M(x,y)$,则 $\frac{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}{\left|x-\frac{25}{3}\right|}=\frac{3}{5}$,

化简得 $16x^2+25y^2=400$,所以动点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

(2)由(1)知,动点 M 的轨迹是以 F_1,F_2 为焦点的椭圆,所以 $|PF_1|+|PF_2|=10$, $|F_1F_2|=6$,

在 $\triangle PF_1F_2$ 中,由余弦定理,得 $|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos60°=|F_1F_2|^2$,

所以 $(|PF_1|+|PF_2|)^2-3|PF_1||PF_2|=|F_1F_2|^2$,

整理得 $|PF_1||PF_2|=\frac{64}{3}$,

所以 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\sin60°=\frac{1}{2}\times\frac{64}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{16\sqrt{3}}{3}$.

19.**解:**(1)因为 $|PF_1|+|PF_2|=4=2a$,所以 $a=2$,因为 $PF_2\perp x$ 轴,所以 $|F_1F_2|=2c=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=2$,所以 $c=1$,得 $b^2=a^2-c^2=4-1=3$,所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)由 $m=x+y$,可得 $y=-x+m$,

联立方程 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\y=-x+m,\end{cases}$ 整理得,$7x^2-8mx+4m^2-12=0$,

由 $\Delta=64m^2-28(4m^2-12)=48(7-m^2)\geqslant0$,得 $-\sqrt{7}\leqslant m\leqslant\sqrt{7}$,所以 m 的最大值为 $\sqrt{7}$.

20.(1)**解:** 由椭圆 E 的离心率为 $\frac{1}{2}$,可得 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{1}{2}$,所以 $b^2=\frac{3}{4}a^2$,

由点 $A(0,-\sqrt{3})$,可得 $b=\sqrt{3}$,所以 $a^2=4$,所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)**证明:** 假设 $\triangle OBC$ 为等边三角形,由题意设直线 BC 的方程为 $y=kx+m$, $k\neq0$, $m\neq0$,

设点 $B(x_1,y_1)$, $C(x_2,y_2)$,联立 $\begin{cases}y=kx+m,\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$

整理得,$(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$,

则 $x_1+x_2=\frac{-8km}{3+4k^2}$, $x_1x_2=\frac{4m^2-12}{3+4k^2}$,由 $\Delta=64k^2m^2-4(3+4k^2)(4m^2-12)>0$,可得 $m^2<3+4k^2$,

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=-\frac{8k^2m}{3+4k^2}+2m=\frac{6m}{3+4k^2}$,所以 BC 的中点 D 的坐标为 $\left(\frac{-4km}{3+4k^2},\frac{3m}{3+4k^2}\right)$,

则 $k_{OD}=\frac{\frac{3m}{3+4k^2}}{\frac{-4km}{3+4k^2}}=-\frac{3}{4k}\neq-\frac{1}{k}$,与等边三角形 OBC 中,$k_{OD}=-\frac{1}{k}$ 相矛盾,

所以假设不成立,即 $\triangle OBC$ 不可能为等边三角形.

21.(1)**解:** 由 $\begin{cases}2b=2\sqrt{3},\\a-c=1,\\a^2-c^2=b^2,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}b=\sqrt{3},\\a=2,\\c=1,\end{cases}$ 所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)**证明:** 当直线 l 斜率不存在时,直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点分布在 x 轴两侧,不合题意.

所以直线 l 斜率存在,设直线 l 的方程为 $y=kx+m$, $E(x_1,y_1)$, $F(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\y=kx+m,\end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$,

所以 $x_1+x_2=\frac{-8km}{3+4k^2}$, $x_1x_2=\frac{4m^2-12}{3+4k^2}$.

因为 $\angle APE=\angle OPF$,所以 $k_{PE}+k_{PF}=0$,即 $\frac{y_1}{x_1-\frac{2}{3}}+\frac{y_2}{x_2-\frac{2}{3}}=0$,整理得 $2kx_1x_2+\left(m-\frac{2}{3}k\right)(x_1+x_2)-\frac{4m}{3}=0$,化简得 $m=-6k$,

所以直线 l 的方程为 $y=kx-6k=k(x-6)$,所以直线 l 过定点 $(6,0)$.

22.**解:**(1)设 $M(x,y)$ 为椭圆上一点,由题意可知 $|MF|+|ME|=|AE|=2\sqrt{3}>|EF|=2$,所以 M 点轨迹是以 F,E 为左、右焦点,长轴长 $2a=2\sqrt{3}$ 的椭圆,因为 $2c=2$, $2a=2\sqrt{3}$,所以 $c=1$, $a=\sqrt{3}$,则 $b^2=a^2-c^2=2$,所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)由(1)知,$F_1(-1,0)$,假设存在点 $N(t,0)$,使得 $\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{NQ}$ 为常数,

当直线 l 的斜率存在时,设直线 l 的方程为 $y=k(x+1)$, $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$,

则联立方程 $\begin{cases}y=k(x+1),\\\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 得 $(2+3k^2)x^2+6k^2x+3k^2-6=0$,

所以 $x_1+x_2=-\frac{6k^2}{2+3k^2}$, $x_1x_2=\frac{3k^2-6}{2+3k^2}$,

因为 $\overrightarrow{NP}=(x_1-t,y_1)$, $\overrightarrow{NQ}=(x_2-t,y_2)$,

所以 $\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{NQ}=(x_1-t)(x_2-t)+y_1y_2=(x_1-t)(x_2-t)+k^2(x_1+1)\cdot(x_2+1)=(k^2+1)x_1x_2+(k^2-t)(x_1+x_2)+k^2+t^2$

$=\frac{(k^2+1)(3k^2-6)}{2+3k^2}-\frac{(k^2-t)\cdot6k^2}{2+3k^2}+k^2+t^2$

$=\frac{(6t-1)k^2-6}{2+3k^2}+t^2=\frac{\left(2t-\frac{1}{3}\right)(2+3k^2)-\left(4t+\frac{16}{3}\right)}{2+3k^2}+t^2=t^2+2t-\frac{1}{3}-\frac{4t+\frac{16}{3}}{2+3k^2}$,

因为 $\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{NQ}$ 为常数,所以 $t^2+2t-\frac{1}{3}-\frac{4t+\frac{16}{3}}{2+3k^2}$ 与 k 无关,

所以 $4t+\frac{16}{3}=0$,即 $t=-\frac{4}{3}$,此时 $\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{NQ}=-\frac{11}{9}$.

当直线 l 的斜率不存在时,直线 l 的方程为 $x=-1$,此时 $P\left(-1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $Q\left(-1,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$,

所以 $\overrightarrow{NP}=\left(-1-t,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $\overrightarrow{NQ}=\left(-1-t,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$,

当 $t=-\frac{4}{3}$ 时,$\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{NQ}=(1+t)^2-\frac{4}{3}=-\frac{11}{9}$.

综上,在 x 轴上存在一点 $N\left(-\frac{4}{3},0\right)$,使得 $\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{NQ}$ 为常数,这个常数为 $-\frac{11}{9}$.

第10期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.D　**提示**:当 $a=3$ 时,点 P 满足 $|PF_1|-|PF_2|=6<|F_1F_2|$,依照双曲线的定义,P 点的轨迹是双曲线的一支;当 $a=5$ 时,点 P 满足 $|PF_1|-|PF_2|=10=|F_1F_2|$,故 P 点的轨迹是一条射线.

综上,P 点的轨迹是双曲线的一支和一条射线.故选D.

2.C　**提示**:由 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$,得 $a=3$,又离心率 $e=\frac{5}{3}$,所以 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{9}}=\frac{5}{3}$,解得 $b=4$,所以该双曲线的虚轴长为 $2b=8$.故选 C.

3.D　**提示**:由已知可得 $m>0$,所以双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{m}}{2}x$,因为双曲线 C 的一条渐近线方程为 $y=\frac{3}{4}x$,即 $\frac{\sqrt{m}}{2}=\frac{3}{4}$,所以 $m=\frac{9}{4}$,故选 D.

4.A　**提示**:方程 $\frac{x^2}{6-k}-\frac{y^2}{k-2}=1$ 表示双曲线,则 $(6-k)\cdot(k-2)>0$,解得 $2<k<6$,因为 $\{k|2<k<3\}\subsetneqq\{k|2<k<6\}$,

所以"$2<k<3$"是"方程 $\frac{x^2}{6-k}-\frac{y^2}{k-2}=1$ 表示双曲线"的充分不必要条件,故选 A.

5.A　**提示**:由题意知,$F_1(-\sqrt{10},0)$,$F_2(\sqrt{10},0)$,$|F_1F_2|=2\sqrt{10}$,因为 $|PF_1|=3|PF_2|$,所以由双曲线的定义知 $|PF_1|-|PF_2|=2a=4$,解得 $|PF_2|=2$,所以 $|PF_1|=6$,所以 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$,

所以 $\angle F_1PF_2=90°$,所以 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times2\times6=6$.故选 A.

6.C　**提示**:由题意知,点 A 和 B 关于原点对称,$M(-4,0)$,设 $A(m,n)$,则 $B(-m,-n)$,且 $\frac{m^2}{16}-\frac{n^2}{9}=1$,所以 $k_{MA}\cdot k_{MB}=\frac{n}{m+4}\cdot\frac{-n}{-m+4}=\frac{n^2}{m^2-16}=\frac{\left(\frac{m^2}{16}-1\right)\times9}{m^2-16}=\frac{9}{16}$.故选 C.

7.A　**提示**:设 $|RF_2|=m$,因为 $|RF_1|=2|RF_2|$,所以 $|RF_1|=2m$,由双曲线的定义知,$|RF_1|-|RF_2|=2a$,即 $m=2a$,所以 $|RF_1|=4a$,$|RF_2|=2a$,在 $\triangle RF_1F_2$ 中,由余弦定理,知 $|F_1F_2|^2=|RF_1|^2+|RF_2|^2-2|RF_1|\cdot|RF_2|\cos\angle F_1RF_2$,所以 $4c^2=16a^2+4a^2-2\cdot4a\cdot2a\cos60°$,化简得 $c=\sqrt{3}a$,

所以 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$.故选 A.

8.B　**提示**:设 $|RF_2|=x$,由 $|RF_1|:|RF_2|=4:1$,得 $|RF_1|=4x$,因为 $\angle F_1RF_2=120°$,$|F_1F_2|=2c$,所以由余弦定理推论,得 $\cos120°=\frac{x^2+16x^2-4c^2}{2x\cdot4x}=-\frac{1}{2}$,解得 $x=\frac{2\sqrt{21}}{21}c$,则 $|RF_1|-|RF_2|=2a=3x=\frac{2\sqrt{21}}{7}c$,即 $a=\frac{\sqrt{21}}{7}c$,①

又 C 经过点 $Q\left(2,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$,所以 $\frac{4}{a^2}-\frac{4}{3(c^2-a^2)}=1$,②

联立①②,解得 $a=\sqrt{3}$,$c=\sqrt{7}$,所以 C 的实轴长为 $2\sqrt{3}$.故选 B.

二、多项选择题

9.AC　**提示**:由渐近线的方程 $y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$,可设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=\lambda$,$\lambda\neq0$,结合选项知,当 $\lambda=1$ 时,A 正确,当 $\lambda=-1$ 时,C 正确.故选 AC.

10.BCD　**提示**:因为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$,由题意可知 $\frac{b}{a}\geqslant2$,

所以 $e^2=1+\frac{b^2}{a^2}\geqslant5$,所以 $e\geqslant\sqrt{5}$.故选 BCD.

11.BD　**提示**:因为曲线 C 的方程为 $\frac{y^2}{m}-\frac{x^2}{n}=1$,

对于 A,曲线 C 为焦点在 x 轴上的椭圆,则 $\frac{x^2}{-n}+\frac{y^2}{m}=1$,即 $-n>m>0$,故 A 错误;

对于 B,当 $m=-n>0$ 时,曲线 C 表示圆,故 B 正确;

对于 C,若 $m=-n=1$,满足 $mn<0$,曲线 C 为 $x^2+y^2=1$,表示圆,故 C 错误;

对于 D,若 $\frac{y^2}{m}-\frac{x^2}{n}=1$ 为双曲线,则 $mn>0$,所以双曲线 C 的渐近线方程为 $\frac{y^2}{m}-\frac{x^2}{n}=0$,即 $y=\pm\sqrt{\frac{m}{n}}x$,故 D 正确.故选 BD.

12.BD　**提示**:当直线 l 的倾斜角越小时,$\triangle PQA_1$ 的周长越大,故 A 不正确;

$\triangle PF_1Q$ 的周长为 $|PF_1|+|QF_1|+|PQ|=4a+|PF_2|+|QF_2|+|PQ|=4a+2|PQ|$,

所以 $\triangle PF_1Q$ 的周长与 $2|PQ|$ 之差为 $4a$,故 B 正确;

设 $P(x,y)$,则 $\tan\alpha=\frac{|y|}{a+x}$,$\tan\beta=-\frac{|y|}{x-a}$,由 $\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=\frac{a-x}{a+x}$ 不是常量,故 C 不正确;

由 $\tan\alpha\cdot\tan\beta=\frac{|y|}{a+x}\cdot\frac{|y|}{a-x}=\frac{y^2}{a^2-x^2}=\frac{\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)b^2}{a^2-x^2}=-\frac{b^2}{a^2}$ 为常量,故 D 正确.故选 BD.

三、填空题

13.$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{5}=1$　**提示**:设等轴双曲线 C 的方程为 $x^2-y^2=\lambda(\lambda\neq0)$,

由点 $P(3,2)$ 在等轴双曲线 C 上,得 $3^2-2^2=\lambda$,即 $\lambda=5$.所以双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{5}=1$.

14.2($(1,\sqrt{5}]$ 内的任意一个值都满足题意)

提示:双曲线 C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $e=\frac{c}{a}$,双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$,直线 $y=2x$ 与 C 无公共点,得 $\frac{b}{a}\leqslant2$,即 $\frac{b^2}{a^2}\leqslant4$,即 $\frac{c^2-a^2}{a^2}\leqslant4$,即 $e^2-1\leqslant4$,又 $e>1$,得 $1<e\leqslant\sqrt{5}$,所以满足条件"直线 $y=2x$ 与 C 无公共点"的 e 的一个值可以为 2.

15.24　**提示**:由题意知,$|AF_1|+|BF_1|=2|AB|$,根据双曲线的定义知 $|AF_1|-|AF_2|=2a$,$|BF_1|-|BF_2|=2a$,两式相加得 $|AF_1|+|BF_1|-|AB|=4a$,所以 $|AF_1|+|BF_1|=8a$,$|AB|=4a$,

故 $\triangle ABF_1$ 的周长为 $12a$,因为 $2a=4$,所以 $\triangle ABF_1$ 的周长为 24.

16.8　**提示**:由双曲线 $\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{5}=1(m>0)$ 的一条渐近线方程为 $\sqrt{5}x+2y=0$,可得 $\frac{\sqrt{5m}}{m}=\frac{\sqrt{5}}{2}$,解得 $m=4$,所以 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$,所以双曲线的左焦点坐标为 $F(-3,0)$,右焦点坐标为 $F'(3,0)$,

由双曲线的定义,知 $|PF|-|PF'|=4$,即 $|PF|=4+|PF'|$,由圆 $x^2+(y-4)^2=1$,得圆心 $C(0,4)$,半径为 $r=1$,$|PQ|+|PF|=4+|PF'|+|PQ|\geqslant|QF'|+4$,当 P,Q,F′三点共线时,等号成立,

即 $|QF'|_{min}=|CF'|-1=\sqrt{(3-0)^2+(0-4)^2}-1=5-1=4$,所以 $(|PQ|+|PF|)_{min}=4+4=8$.

四、解答题

17.**解**:(1)设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,因为 $a=2\sqrt{5}$,且经过点 $A(-5,2)$,则 $\frac{25}{20}-\frac{4}{b^2}=1$,解得 $b^2=16$,

所以双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{16}=1$.

(2)设双曲线方程为 $mx^2-ny^2=1$,因为双曲线经过两点 $A(-7,-6\sqrt{2})$,$B(2\sqrt{7},3)$,

所以 $\begin{cases}49m-72n=1,\\28m-9n=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=\frac{1}{25},\\n=\frac{1}{75},\end{cases}$

所以双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{75}=1$.

18.**解**:(1)由题意可设双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=\lambda$,

代入 $M(\sqrt{2},-\sqrt{2})$,得 $\frac{2}{2}-\frac{2}{4}=\lambda$,解得 $\lambda=\frac{1}{2}$,所以双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

(2)由 $\begin{cases}y=x+m,\\x^2-\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 得 $x^2-2mx-m^2-2=0$,

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

则 AB 中点坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$,

由韦达定理,得 $x_1+x_2=2m$,所以 $y_1+y_2=(x_1+x_2)+2m=4m$,

所以 AB 中点坐标为 $(m,2m)$,因为点 $(m,2m)$ 在圆 $x^2+y^2=20$ 上,所以 $m^2+(2m)^2=20$,解得 $m=\pm2$.

19.**解**:(1)联立方程 $\begin{cases}x^2-y^2=2,\\y=kx-1,\end{cases}$ 消去 y,得 $(1-k^2)x^2+2kx-3=0$,因为 l 与 C 有两个不同的交点,

所以 $\Delta=4k^2+12(1-k^2)>0$,且 $1-k^2\neq0$,解得 $k^2<\frac{3}{2}$ 且 $k^2\neq1$,所以 $-\frac{\sqrt{6}}{2}<k<\frac{\sqrt{6}}{2}$ 且 $k\neq\pm1$.所以实数 k 的取值范围是 $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},-1\right)\cup(-1,1)\cup\left(1,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

(2)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由(1)可知,$x_1+x_2=\frac{2k}{k^2-1}$,$x_1\cdot x_2=\frac{3}{k^2-1}$,又因为 AB 中点的横坐标为 $-\frac{2}{3}$,

所以 $\frac{k}{k^2-1}=-\frac{2}{3}$,即 $2k^2+3k-2=0$,解得 $k=-2$ 或 $k=\frac{1}{2}$,又由(1)可知,l 与 C 有两个不同交点时,$k^2<\frac{3}{2}$,所以 $k=\frac{1}{2}$,

所以 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{12}{1-k^2}}=\frac{4\sqrt{10}}{3}$,

所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\frac{10\sqrt{2}}{3}$.

20.(1)**解**:由题意知,$\begin{cases}\frac{3}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1,\\a=b,\end{cases}$ 解得 $a=b=\sqrt{2}$.

(2)**证明**:由(1)知,双曲线 C 的方程为 $x^2-y^2=2$.易知直线 AB 一定不为水平直线,设其方程为 $x=my+n$,且 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$D(-x_2,y_2)$,联立 $\begin{cases}x^2-y^2=2,\\x=my+n,\end{cases}$ 整理得 $(m^2-1)y^2+2mny+n^2-2=0$,则 $y_1y_2=\frac{n^2-2}{m^2-1}$,

由于外接圆过原点且关于 y 轴对称,设其方程为 $x^2+y^2+Ey=0$,则 $\begin{cases}x_1^2+y_1^2+Ey_1=0,\\x_2^2+y_2^2+Ey_2=0,\end{cases}$ 所以 $y_2(x_1^2+y_1^2)=y_1(x_2^2+y_2^2)$,

所以 $y_2(2y_1^2+2)=y_1(2y_2^2+2)$,所以 $y_1y_2=1$,

则 $y_1y_2=\frac{n^2-2}{m^2-1}=1$,$n^2=m^2+1$,所以原点到直线 AB 的距离 $d=\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}=1$,所以直线 AB 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切.

21.**解**:(1)设 $S(x_1,y_1)$,$T(x_2,y_2)$,则 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{4}-\frac{y_1^2}{16}=1,\\\frac{x_2^2}{4}-\frac{y_2^2}{16}=1,\end{cases}$

两式相减得 $\frac{x_1^2-x_2^2}{4}=\frac{y_1^2-y_2^2}{16}$,即 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=4\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$,因为点 $N(1,4)$ 是线段 ST 的中点,所以 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=4\times\frac{2\times1}{2\times4}=1$,即直线 ST 的斜率为 1,所以直线 ST 的方程为 $y-4=x-1$,即 $y=x+3$.

(2)联立方程组 $\begin{cases}4x^2-y^2=16,\\y=kx+m,\end{cases}$ 得 $(4-k^2)x^2-2kmx-(m^2+16)=0$,因为直线 $l:y=kx+m(k\neq\pm2)$ 与双曲线有唯一的公共点 M,所以 $\begin{cases}k\neq\pm2,\\\Delta=4k^2m^2+4(4-k^2)(m^2+16)=0,\end{cases}$ 得 $m^2=4(k^2-4)$,所以点 M 的横坐标为 $\frac{1}{2}\cdot\frac{2km}{4-k^2}=\frac{km}{-\frac{m^2}{4}}=-\frac{4k}{m}$,则纵坐标为 $-\frac{4k^2}{m}+m=\frac{m^2-4k^2}{m}=-\frac{16}{m}$.

所以点 M 的坐标为 $\left(-\frac{4k}{m},-\frac{16}{m}\right)$,其中 $km\neq0$,因为过点 M 且与 l 垂直的直线为 $y+\frac{16}{m}=-\frac{1}{k}\left(x+\frac{4k}{m}\right)$,

令 $y=0$,得 $x_0=-\frac{20k}{m}$;令 $x=0$,得 $y_0=-\frac{20}{m}$,所以 $x_0^2=\frac{400k^2}{m^2}=\frac{400}{m^2}\left(\frac{m^2}{4}+4\right)=100+\frac{1600}{m^2}=100+4y_0^2$,故点 $P(x_0,y_0)$ 的轨迹方程为 $\frac{x_0^2}{100}-\frac{y_0^2}{25}=1(y_0\neq0)$.

22.(1)**解**:由已知可得 $a=2$,所以双曲线 C 的渐近线方程为 $bx\pm2y=0$,因为点 A 到双曲线 C 的渐近线的距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$,所以 $\frac{2b}{\sqrt{b^2+4}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,解得 $b=\sqrt{2}$,所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$.

(2)**证明**:由题意可知直线 MN 的斜率不为 0,设直线 MN 的方程为 $x=my+t$,

联立 $\begin{cases}x=my+t,\\x^2-2y^2=4,\end{cases}$ 可得 $(m^2-2)y^2+2mty+t^2-4=0$,

设点 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

则 $\Delta=(2mt)^2-4(m^2-2)(t^2-4)>0$,且 $m^2-2\neq0$,

故 $m^2\neq2$,$t^2+2m^2>4$,$y_1+y_2=\frac{-2mt}{m^2-2}$,$y_1y_2=\frac{t^2-4}{m^2-2}$.

又直线 MA:$y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$,令 $x=0$,得 $y=\frac{2y_1}{x_1+2}$;直线 NB:$y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$,令 $x=0$,得 $y=\frac{-2y_2}{x_2-2}$.

因为直线 NB 在 y 轴上的截距是直线 MA 在 y 轴上截距的 2 倍,所以 $2\times\frac{2y_1}{x_1+2}=\frac{-2y_2}{x_2-2}$,

即 $2y_1(x_2-2)+y_2(x_1+2)=0$,整理可得 $3my_1y_2+2(t-2)y_1+(t+2)y_2=0$,

将 $y_1y_2=\frac{t^2-4}{m^2-2}$,$y_2=\frac{-2mt}{m^2-2}-y_1$ 代入上式,

整理可得 $(t-6)\left[\frac{m}{m^2-2}(t+2)+y_1\right]=0$,

要使上式恒成立,必有 $t-6=0$,解得 $t=6$,所以直线 MN 过定点 $(6,0)$.

第11期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.D　**提示**:抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$,即 $x^2=2y$,则它的焦点坐标为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$,故选D.

2.D　**提示**:抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$,即 $x^2=4y$,则 $2p=4$,解得 $p=2$,所以抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的焦点到准线的距离为2.故选D.

3.B　**提示**:因为抛物线 C 的方程为 $y^2=8x$,点 $P(x_0,2\sqrt{2})$ 在 C 上,所以 $8=8x_0$,所以 $x_0=1$,又抛物线C的准线方程为 $x=-2$,所以 $|PF|=1+2=3$.故选B.

4.A　**提示**:因为等边 $\triangle OAB$ 的面积为 $\sqrt{3}$,所以 $\frac{1}{2}\times OA^2\times\sin60°=\sqrt{3}$,所以 $OA=2$,根据抛物线的对称性,进而可得 $A(\sqrt{3},1)$,所以 $1=2\sqrt{3}p$,解得 $p=\frac{\sqrt{3}}{6}$.故选A.

5.B　**提示**:设点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,联立方程 $\begin{cases}y=x-1,\\y^2=2px,\end{cases}$ 整理得 $x^2-2(1+p)x+1=0$,则 $x_1+x_2=2(1+p)$,$y_1+y_2=x_1+x_2-2=2p$,因为 N 为 AB 的中点,所以 $N(1+p,p)$,设 $M(x_0,y_0)$,因为 $\overrightarrow{OM}=3\overrightarrow{ON}$,所以 $M(3+3p,3p)$,又因为点 M 在抛物线 C 上,

所以 $(3p)^2=2p\cdot3(1+p)$,即 $p^2-2p=0$,解得 $p=2$ 或 $p=0$(舍去),所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.故选B.

6.B　**提示**:抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 $F(1,0)$,因为点 $B(3,0)$,所以 $|BF|=2$,所以 $|AF|=|BF|=2$,因为点A在C上,

所以由抛物线的定义可知 $A(1,2)$(不妨令A在第一象限),所以 $|AB|=\sqrt{(3-1)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{2}$.故选B.

7.B　**提示**:由题意知,点 $F(2,0)$,设直线 l 的方程为 $x=my+2$,与抛物线方程联立 $\begin{cases}x=my+2,\\y^2=8x,\end{cases}$ 消去 x,得 $y^2-8my-16=0$,

设点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=8m$,$y_1y_2=-16$,

所以 $x_1+x_2=8m^2+4$,$x_1x_2=\frac{(y_1y_2)^2}{64}=4$,所以 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{|AF|+|BF|}{|AF||BF|}=\frac{x_1+x_2+4}{(x_1+2)(x_2+2)}=\frac{1}{2}$,所以 $|AF|-\frac{9}{|BF|}=|AF|+\frac{9}{|AF|}-\frac{9}{2}\geqslant6-\frac{9}{2}=\frac{3}{2}$,当且仅当 $|AF|=3$ 时,等号成立.故选B.

8.C　**提示**:由题意可得 $F(2,0)$,直线 l 的斜率存在,且不为 0,

设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$,由 $\begin{cases}y=k(x-1),\\y^2=8x,\end{cases}$

可得 $k^2x^2-(2k^2+8)x+k^2=0$,

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=2+\frac{8}{k^2}$,$x_1x_2=1$,

由抛物线定义得 $|AF|\cdot|BF|=(x_1+2)(x_2+2)=x_1x_2+2(x_1+x_2)+4=9+\frac{16}{k^2}$,因为点 Q 既在直线 l 上,又在抛物线 C 的准线上,所以 $Q(-2,-3k)$,由两点之间距离公式可得 $|QF|^2=16+9k^2$,

因为 $|QF|^2=2|AF||BF|$,所以 $16+9k^2=2\left(9+\frac{16}{k^2}\right)$,解得 $|k|=\sqrt{2}$,故选 C.

二、多项选择题

9.AC　**提示**:结合选项,点 $(1,-2)$ 满足 $y^2=4x$,$x^2=-\frac{1}{2}y$,所以过点 $(1,-2)$ 的抛物线的标准方程可能是 $y^2=4x$,$x^2=-\frac{1}{2}y$,故选AC.

10.BD　**提示**:由抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$,可得焦点为 $F(0,1)$,故A错误;

因为 $|MF|=5$,所以 $y_0+1=5$,解得 $y_0=4$,所以 $x_0=\pm4$.故B正确,C错误;

$|OM|=\sqrt{x_0^2+y_0^2}=4\sqrt{2}$,故D正确.故选BD.

11.AD　**提示**:因为 $y=6x^2$ 可化为 $x^2=\frac{1}{6}y$,所以抛物线 $y=6x^2$ 的焦点为 $\left(0,\frac{1}{24}\right)$,因为 $(0-2)^2+\frac{1}{24^2}<6$,所以焦点落在圆 $(x-2)^2+y^2=6$ 的内部,A正确;

因为抛物线 $y^2=-2x$ 的焦点为 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$,$\left(-\frac{1}{2}-2\right)^2+0>6$,所以焦点在圆 $(x-2)^2+y^2=6$ 外部,B错误;

因为 $y=\frac{1}{6}x^2$ 可化为 $x^2=6y$,所以抛物线 $y=\frac{1}{6}x^2$ 的焦点为 $\left(0,\frac{3}{2}\right)$,又 $(0-2)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2>6$,所以焦点在圆 $(x-2)^2+y^2=6$ 的外部,C错误;

抛物线 $y^2=6(x-1)$ 可由抛物线 $y^2=6x$ 向右平移1个单位长度得到,所以抛物线 $y^2=6(x-1)$ 的焦点为 $\left(\frac{5}{2},0\right)$,因为 $\left(\frac{5}{2}-2\right)^2+0<6$,所以焦点落在圆 $(x-2)^2+y^2=6$ 的内部,D正确.故选AD.

12.ACD　**提示**:因为 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$,$M(p,0)$,且 $|AF|=|AM|$,所以点 A 在 FM 垂直平分线上,所以 $A\left(\frac{3p}{4},\frac{\sqrt{6}p}{2}\right)$,所以 $k_{AB}=k_{AF}=\frac{\frac{\sqrt{6}p}{2}-0}{\frac{3p}{4}-\frac{p}{2}}=2\sqrt{6}$,故A正确;直线AB的方程为 $y=2\sqrt{6}\left(x-\frac{p}{2}\right)$,由 $\begin{cases}y=2\sqrt{6}\left(x-\frac{p}{2}\right),\\y^2=2px,\end{cases}$ 得 $12x^2-13px+3p^2=0$,解得 $x=\frac{3p}{4}$ 或 $x=\frac{p}{3}$,所以点 B 的横坐标为 $\frac{p}{3}$,所以点 B 的纵坐标为 $-\frac{\sqrt{6}p}{3}$,所以 $|OB|=\sqrt{\frac{p^2}{9}+\frac{6p^2}{9}}=\frac{\sqrt{7}p}{3}$,$|OF|=\frac{p}{2}$,所以 $|OB|\neq|OF|$,故B错误;$|AB|=\frac{3p}{4}+\frac{p}{3}+p=\frac{25p}{12}>2p=4|OF|$,故C正确;$|OA|^2=\frac{33p^2}{16}$,$|OB|^2=\frac{7p^2}{9}$,$|AM|^2=\frac{25p^2}{16}$,$|BM|^2=\frac{10p^2}{9}$,$|AB|^2=\frac{625p^2}{144}$,因为 $|OA|^2+|OB|^2<|AB|^2$,$|AM|^2+|BM|^2<|AB|^2$,

所以 $\angle AOB$,$\angle AMB$ 均为钝角,可得 $\angle OAM+\angle OBM<180°$,故D正确.故选ACD.

三、填空题

13.$x^2=-8y$　**提示**:由抛物线的准线方程为 $y=2$,可知抛物线的焦点在 y 轴负半轴上,设其方程为 $x^2=-2py(p>0)$,则其准线方程为 $y=\frac{p}{2}=2$,得 $p=4$,所以该抛物线的标准方程是 $x^2=-8y$.

14.2　**提示**:设 $|FM|=m$,由抛物线的方程,可知 $F\left(\frac{3}{2},0\right)$,

因为该抛物线关于x轴对称,所以不妨设 M 在第一象限,过 M 作 $MN\perp OF$,垂足为 N,因为 $\angle MFO=60°$,

所以 $|NF|=|FM|\cdot\cos60°=\frac{1}{2}m$,$|MN|=|FM|\cdot\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}m$,

所以 M 的坐标为 $\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}m,\frac{\sqrt{3}}{2}m\right)$,

所以 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}m\right)^2=6\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}m\right)$,解得 $m=2$,或 $m=-6$(舍去).

15.6　**提示**:抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$,将 $y=\frac{p}{2}$ 代入 $x^2=2py$,得 $x=\pm p$,则 $A\left(p,\frac{p}{2}\right)$,$B\left(-p,\frac{p}{2}\right)$,所以 $|AB|=2p$,所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times\frac{p}{2}\times2p=18$,解得 $p=6$.

16.0　**提示**:因 $\odot M$ 与抛物线 C 有且仅有两个公共点,而 $\odot M$ 与抛物线 C 都关于 x 轴对称,

因此,两个公共点的横坐标相同,并且唯一,由 $\begin{cases}(x-r)^2+y^2=\frac{3r^2}{4},\\y^2=4x,\end{cases}$ 整理得,$x^2-2(r-2)x+\frac{r^2}{4}=0$,且 $x\geqslant0$,于是得 $\begin{cases}r-2\geqslant0,\\\Delta=4(r-2)^2-r^2=3r^2-16r+16=0,\end{cases}$ 解得 $r=4$,即点 $M(4,0)$,显然直线 l 不垂直于 y 轴,设直线 l 的方程为 $x=ty+4$,

由 $\begin{cases}x=ty+4,\\y^2=4x,\end{cases}$ 整理得,$y^2-4ty-16=0$,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=4t$,$y_1y_2=-16$,所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{y_1^2}{4}\cdot\frac{y_2^2}{4}+y_1y_2=\frac{(-16)^2}{16}+(-16)=0$.

四、解答题

17.**解**:(1)由 $x^2-y^2=4$,得 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$,则双曲线的中心为 $O(0,0)$,所以抛物线的顶点为 $(0,0)$,又 $a^2=4$,$b^2=4$,所以 $c^2=a^2+b^2=8$,则 $c=2\sqrt{2}$.所以抛物线的焦点坐标为 $(2\sqrt{2},0)$.设抛物线方程是 $y^2=2px(p>0)$,则 $\frac{p}{2}=2\sqrt{2}$,所以 $p=4\sqrt{2}$,所以抛物线方程是 $y^2=8\sqrt{2}x$.

(2)由椭圆 $9x^2+16y^2=144$,得 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$,则椭圆的中心坐标为 $(0,0)$,

所以抛物线的顶点坐标为 $(0,0)$,又 $a^2=16$,$b^2=9$,所以 $c^2=a^2-b^2=7$,则 $c=\sqrt{7}$,可得椭圆左焦点为 $(-\sqrt{7},0)$,所以抛物线焦点坐标为 $(-\sqrt{7},0)$.设抛物线方程是 $y^2=-2px(p>0)$,则 $\frac{p}{2}=\sqrt{7}$,$p=2\sqrt{7}$,所以抛物线的方程为 $y^2=-4\sqrt{7}x$.

18.**解**:(1)因为 $M(1,t)$ 在抛物线 $C:y^2=2px$ 上,且 $|MF|=\frac{3}{2}$,所以 $|MF|=1+\frac{p}{2}=\frac{3}{2}$,则 $p=1$,故抛物线 C 的方程为 $y^2=2x$.

(2)由 $\begin{cases}y=x-2,\\y^2=2x,\end{cases}$ 可得 $x^2-6x+4=0$.设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=6$,$x_1x_2=4$,

所以 $|AB|=\sqrt{2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\times\sqrt{6^2-4\times4}=2\sqrt{10}$.

19.**解**:(1)由 $\begin{cases}y=x+m,\\y^2=4x,\end{cases}$ 整理得,$y^2-4y+4m=0$,

因为 l 与 C 有公共点,所以 $\Delta=16-16m\geqslant0$,解得 $m\leqslant1$,故 m 的取值范围为 $(-\infty,1]$.

(2)抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 $F(1,0)$,则 $m=-1$,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

由(1)知,$y_1+y_2=4$,$y_1y_2=4m=-4$,

则 $|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=4\sqrt{2}$,

所以 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_1-y_2|=2\sqrt{2}$,故 $\triangle OAB$ 的面积为 $2\sqrt{2}$.

20.(1)**解**:抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$,又点 $P(1,y_0)$ 在抛物线 C 上,且 $|PF|=2$,所以 $1+\frac{p}{2}=2$,解得 $p=2$,所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.

(2)**证明**:由(1)知,抛物线 C 的焦点为 $F(1,0)$,准线方程为 $x=-1$,

设直线 AB 的方程为 $x=my+1$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,联立 $\begin{cases}x=my+1,\\y^2=4x,\end{cases}$ 消去 x,可得 $y^2-4my-4=0$,

因为直线 AB 与抛物线C交于 A,B 两点,所以 $y_1+y_2=4m$,$y_1y_2=-4$,

因为 $x_1=my_1+1$,$x_2=my_2+1$,所以 $x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2=4m^2+2$,

所以 $|AB|=x_1+x_2+2=4(m^2+1)$,设 AB 的中点为 $M(x_M,y_M)$,

则 $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}=2m^2+1$,所以点 M 到准线 $x=-1$ 的距离 $d=2m^2+2$,所以 $d=\frac{|AB|}{2}$,

所以以弦 AB 为直径的圆与抛物线 C 的准线相切.

21.(1)**解**:联立 $x^2=-y$ 与 $y=kx-3$,得 $x^2+kx-3=0$.

因为 $\Delta_1=k^2+12>0$,所以 l 与抛物线 $x^2=-y$ 恒有2个交点.

若 $m\geqslant3$,则 l 与抛物线 $x^2=4y$ 至少有1个交点.

联立 $x^2=4y$ 与 $y=kx-3$,得 $x^2-4kx+12=0$.

所以 $\Delta_2=16k^2-48\geqslant0$.结合 $k>0$,得 $k\geqslant\sqrt{3}$.所以 k 的最小值为 $\sqrt{3}$.

(2)**证明**:若 $m=3$,则 l 与抛物线 $x^2=4y$ 只有1个交点.

结合(1),可知 $k=\sqrt{3}$,$x^2-4\sqrt{3}x+12=0$,解得 $x=2\sqrt{3}$,所以 $A(2\sqrt{3},3)$.

由于 $F(0,1)$ 为抛物线 $x^2=4y$ 的焦点,则 $|\overrightarrow{FA}|=3+1=4$.

设 $B(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=-k=-\sqrt{3}$,$x_1x_2=-3$.

所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)-6=-9$,$y_1y_2=(kx_1-3)(kx_2-3)=k^2x_1x_2-3k(x_1+x_2)+9=9$.又 $\overrightarrow{FB}=(x_1,y_1-1)$,$\overrightarrow{FC}=(x_2,y_2-1)$,

所以 $\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FC}=x_1x_2+(y_1-1)(y_2-1)=x_1x_2+y_1y_2-(y_1+y_2)+1=16$.

所以 $\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FC}=|\overrightarrow{FA}|^2$.

22.**解**:(1)设 $M(x,y)$,当 MD 垂直于 x 轴时,可知 $x=p$,由抛物线的定义知 $|MF|=x+\frac{p}{2}=p+\frac{p}{2}=3$,所以 $p=2$.故 C 的方程为 $y^2=4x$.

(2)设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,$A(x_3,y_3)$,$B(x_4,y_4)$,则 $\tan\alpha=k_{MN}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y_1-y_2}{\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_2^2}{4}}=\frac{4}{y_1+y_2}$,由(1)可知 $F(1,0)$,$D(2,0)$,又 N,D,B 三点共线,则 $k_{ND}=k_{BD}$,即 $\frac{y_2-0}{x_2-2}=\frac{y_4-0}{x_4-2}$,所以 $\frac{y_2-0}{\frac{y_2^2}{4}-2}=\frac{y_4-0}{\frac{y_4^2}{4}-2}$,得 $y_2y_4(y_4-y_2)+8(y_4-y_2)=0$,又 $y_2\neq y_4$,所以 $y_2y_4=-8$,

即 $y_4=-\frac{8}{y_2}$;同理由 M,D,A 三点共线,得 $y_3=-\frac{8}{y_1}$.则 $\tan\beta=\frac{y_3-y_4}{x_3-x_4}=\frac{4}{y_3+y_4}=\frac{y_1y_2}{-2(y_1+y_2)}$.由题意知,直线 MN 的斜率不为0,设直线MN的方程为 $x=my+1$,由 $\begin{cases}y^2=4x,\\x=my+1,\end{cases}$ 得 $y^2-4my-4=0$,所以 $y_1+y_2=4m$,$y_1y_2=-4$,则 $\tan\alpha=\frac{4}{4m}=\frac{1}{m}$,$\tan\beta=\frac{-4}{-2\times4m}=\frac{1}{2m}$,则 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{m}-\frac{1}{2m}}{1+\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{2m}}=\frac{1}{2m+\frac{1}{m}}$,当 $m>0$ 时,$\tan(\alpha-\beta)=\frac{1}{2m+\frac{1}{m}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2m\cdot\frac{1}{m}}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$;当 $m<0$ 时,$\tan(\alpha-\beta)$ 无最大值,所以当且仅当 $2m=\frac{1}{m}$,即 $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,上述不等式的等号成立,$\tan(\alpha-\beta)$ 取最大值,即 $\alpha-\beta$ 取得最大值,此时直线 AB 的方程为 $y-y_3=\frac{4}{y_3+y_4}(x-x_3)$,

即 $4x-(y_3+y_4)y+y_3y_4=0$,又 $y_3+y_4=-\frac{8}{y_1}-\frac{8}{y_2}=\frac{-8(y_1+y_2)}{y_1y_2}=8m=4\sqrt{2}$,$y_3y_4=\frac{-8}{y_1}\cdot\frac{-8}{y_2}=-16$,

所以直线 AB 的方程为 $4x-4\sqrt{2}y-16=0$,

即 $x-\sqrt{2}y-4=0$.