6.D　**提示**：以 C 为原点，以 CA,CC_1,CB 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系. 不妨取 $CB=1$，则 $CA=CC_1=\sqrt{2}CB=\sqrt{2}$.

所以 $A(\sqrt{2},0,0),B(0,0,1),C_1(0,\sqrt{2},0),B_1(0,\sqrt{2},1)$.所以$\overrightarrow{AB_1}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},1),\overrightarrow{BC_1}=(0,\sqrt{2},-1)$，所以 $\cos\langle\overrightarrow{AB_1},\overrightarrow{BC_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{AB_1}||\overrightarrow{BC_1}|}=\frac{1}{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{15}$.故选 D.

7.B　**提示**：以 D 为原点，DC,DP,DA 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，

则 $A(0,0,2),P(0,2,0),C(2,0,0),B(2,0,2)$，

$\overrightarrow{AB}=(2,0,0),\overrightarrow{PA}=(0,-2,2),\overrightarrow{CB}=(0,0,2)$.

设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PA}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2x=0,\\ -2y+2z=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，得 $z=1$，故 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$，

则点 C 到平面 PAB 的距离为 $d=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，故选 B.

8.C　**提示**：取 BB_1 上靠近 B_1 的四等分点为 F，连接 F，此时 $AB_1\perp$ 平面 C_1DF.

证明如下：

因为直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中侧棱长为 2，$AC=BC=1$，$\angle ACB=90°$，D 是 A_1B_1 的中点，

所以 $C_1D\perp$ 平面 AA_1B_1B，又 $AB_1\subset$ 平面 AA_1B_1B，则 $C_1D\perp AB_1$.

以 C_1 为坐标原点，C_1A_1,C_1B_1,C_1C 分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，

则 $A(1,0,2),B_1(0,1,0),D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right),F\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$，

即$\overrightarrow{AB_1}=(-1,1,-2),\overrightarrow{DF}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

此时$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{DF}=0$，即 $AB_1\perp DF$，又 $C_1D\cap DF=D$，

所以 $AB_1\perp$ 平面 C_1DF，由 $DF\subset$ 平面 AA_1B_1B，易知 $\triangle C_1DF$ 上 DF 边的高为 C_1D.

综上，动点 E 在线段 DF 上，且要使直线 C_1E 与侧面 AA_1B_1B 所成角的正弦值最小，只需 E、F 重合，则 $C_1F=\frac{\sqrt{5}}{2}$，又 $C_1D=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故直线 C_1E 与侧面 AA_1B_1B 所成角的正弦值的最小值为$\frac{C_1D}{C_1F}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.故选 C.

二、多项选择题

9.CD　**提示**：因为点 P 为三棱锥 $O-ABC$ 的底面 ABC 所在平面内的一点，所以由平面向量基本定理可知，

$\overrightarrow{AP}=y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}=y(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})+z(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})$，

化简得，$\overrightarrow{OP}=(1-y-z)\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OC}+z\overrightarrow{OB}$，显然有 $1-y-z+y+z=1$，

而$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}-n\overrightarrow{OC}$，所以$\frac{1}{2}+m-n=1\Rightarrow m-n=\frac{1}{2}$.

当 $m=1,n=-\frac{1}{2}$时，$m-n=\frac{3}{2}$，所以 A 不可能；当 $m=\frac{1}{2},n=1$ 时，$m-n=-\frac{1}{2}$，所以 B 不可能；

当 $m=-\frac{1}{2},n=-1$ 时，$m-n=\frac{1}{2}$，所以 C 可能；当 $m=\frac{3}{2},n=1$ 时，$m-n=\frac{1}{2}$，所以 D 可能.故选 CD.

10.BD　**提示**：对于 A，当 $\boldsymbol{a}=(1,0,0),\boldsymbol{b}=(-1,0,0)$时，显然 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，因为 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角是平角，故 A 为假命题；对于 B，因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times(-1)+2\times(-1)+3\times1=0$，所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，因此 B 为真命题；

对于 C，当 $\boldsymbol{a}=(1,0,0),\boldsymbol{b}=(0,2,0),\boldsymbol{c}=(0,0,3)$时，显然 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，但是 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{c}$，因此 C 为假命题；对于 D，假设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是共面向量，所以 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}\Rightarrow(0,0,3)=x(1,0,0)+y(0,2,0)$，所以$\begin{cases}0=x,\\0=2y,\\3=0,\end{cases}$显然不可能，所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不是共面向量，因此 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 可以作为空间中的一组基底，所以 D 为真命题.故选 BD.

11.BCD　**提示**：因为 $A(2,0,0),C_1(0,2,2),E(2,2,1),F(1,0,2)$，所以$\overrightarrow{AC_1}=(-2,2,2)$，所以 $|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}$，故 A 错误；$\cos\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}\rangle=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}}{|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{AF}|}=\frac{(0,2,1)\cdot(-1,0,2)}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{2}{5}$，故 B 正确；设 $\boldsymbol{m}=(4,-1,2)$，则 $\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=(4,-1,2)\cdot(0,2,1)=0,\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AF}=(4,-1,2)\cdot(-1,0,2)=-4+4=0$，而 $AE\cap AF=A$，所以平面 AEF 的一个法向量是$(4,-1,2)$，故 C 正确；

$\overrightarrow{EF}=(-1,-2,1),\overrightarrow{ED}=(-2,-2,-1)$，故点 D 到直线 EF 的距离为$\sqrt{\overrightarrow{ED}^2-\left(\frac{\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EF}}{|\overrightarrow{EF}|}\right)^2}=\sqrt{9-\frac{25}{6}}=\frac{\sqrt{174}}{6}$，故 D 正确.故选 BCD.

12.ACD　**提示**：由 $AD\parallel BC$，$\angle ABC=90°$，得 $AD\perp AB$，又 $PA\perp$平面 $ABCD$，故以 A 为原点，AB,AD,AP 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系.则 $A(0,0,0),B(2,0,0),C(2,2,0),D(0,4,0),P(0,0,2)$.

对于 A，由$\overrightarrow{BP}=(-2,0,2),\overrightarrow{CD}=(-2,2,0)$，

得 $\cos\langle\overrightarrow{BP},\overrightarrow{CD}\rangle=\frac{\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{BP}||\overrightarrow{CD}|}=\frac{4}{2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$，所以$\langle\overrightarrow{BP},\overrightarrow{CD}\rangle=60°$，所以 PB 与 CD 所成的角是 60°，故 A 正确；对于 B，由题意 $\boldsymbol{n}=(0,1,0)$为平面 PAB 的一个法向量.

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 为平面 PCD 的法向量，$\overrightarrow{DP}=(0,-4,2)$，由$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}-2x+2y=0,\\ -4y+2z=0,\end{cases}$令 $x=1$，则 $\boldsymbol{m}=(1,1,2)$.

所以$|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{1}{1\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，所以平面 PCD 与平面 PAB 夹角的余弦值是$\frac{\sqrt{6}}{6}$，故 B 错误；对于 C，$V_{P-ACD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}PA=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times AD\times AB\times PA=\frac{1}{6}\times4\times2\times2=\frac{8}{3}$，故 C 正确；

对于 D，$\overrightarrow{BP}=(-2,0,2)$，设 PB 与平面 PCD 所成的角为θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{BP},\boldsymbol{m}\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{BP}\cdot\boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{BP}||\boldsymbol{m}|}\right|=\frac{2}{2\sqrt{2}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，故 D 正确.故选 ACD.

三、填空题

13.$(1,0,0)$　**提示**：因为向量 $\boldsymbol{a}=(1,0,3)$，所以 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的投影向量为$(1,0,0)$.

14.$\frac{2\pm\sqrt{3}}{4}$　**提示**：因为$\overrightarrow{OA}=(m,n,0)$是单位向量，所以$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{m^2+n^2}=1$，因为$\overrightarrow{OA}=(m,n,0)$与$\overrightarrow{OC}=(1,1,1)$的夹角等于$\frac{\pi}{4}$，所以 $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{m+n}{1\times\sqrt{1+1+1}}\Rightarrow m+n=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

所以$\begin{cases}m^2+n^2=1,\\ m+n=\frac{\sqrt{6}}{2},\end{cases}$解得 $n=\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}$，$\cos\angle AOB=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=n^2=\left(\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{2\pm\sqrt{3}}{4}$.

15.$\frac{8}{3}$　**提示**：以 D 为原点，DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，

则 $A(4,0,0),M(2,0,4),D(0,0,0),B(4,4,0),E(0,2,4),F(2,4,4),N(4,2,4)$.

所以$\overrightarrow{EF}=(2,2,0),\overrightarrow{MN}=(2,2,0),\overrightarrow{AM}=(-2,0,4),\overrightarrow{BF}=(-2,0,4)$，所以$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{MN},\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AM}$，所以 $EF\parallel MN,BF\parallel AM$，所以 $EF\parallel$平面 $AMN,BF\parallel$平面 AMN，又 $EF\cap BF=F$，所以平面 $AMN\parallel$平面 $EFBD$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面 AMN 的法向量，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}=2x+2y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=-2x+4z=0,\end{cases}$取 $z=1$，则 $x=2,y=-2$，得 $\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$.

平面 AMN 到平面 $EFBD$ 的距离就是点 B 到平面 AMN 的距离.

因为$\overrightarrow{AB}=(0,4,0)$，所以平面 AMN 与平面 $EFBD$ 的距离为 $d=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{8}{3}$.

16.$\frac{8}{5}$　**提示**：以 D 为原点，DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，

设 $M(4,0,a)(0\leqslant a\leqslant4),N(2,4,0),D_1(0,0,4)$，则$\overrightarrow{MN}=(-2,4,-a),\overrightarrow{D_1N}=(2,4,-4)$，

设平面 D_1MN 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{D_1N}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-2x+4y-az=0,\\ 2x+4y-4z=0,\end{cases}$令 $z=8$，$x=8-2a$，$y=a+4$，则 $\boldsymbol{n}=(8-2a,a+4,8)$，易知平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，设平面 D_1MN 与平面 $ABCD$ 的夹角为θ，

所以 $\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{8}{\sqrt{(8-2a)^2+(a+4)^2+64}}=\frac{8}{\sqrt{5a^2-24a+144}}$，当 $a=\frac{12}{5}$时，$\cos\theta$取得最大值，此时θ取最小值，所以 $A_1M=4-\frac{12}{5}=\frac{8}{5}$.

四、解答题

17.**解**：(1)因为$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6}$，所以 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{c}=(2,4,-2)$或 $\boldsymbol{c}=(-2,-4,2)$.

(2)因为 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(k,2k,-k)+(-2,4,2)=(k-2,2k+4,2-k)$，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(1,2,-1)-(-4,8,4)=(5,-6,-5)$.

由$(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，得$(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$，

即 $5(k-2)-6(2k+4)-5(2-k)=0$，解得 $k=-22$.

18.**证明**：(1)以 C_1 为原点，C_1A_1,C_1B_1,C_1C 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，设 $AC=BC=BB_1=2$，则 $B(0,2,2),C_1(0,0,0),A(2,0,2),B_1(0,2,0)$，$\overrightarrow{BC_1}=(0,-2,-2)$，$\overrightarrow{AB_1}=(-2,2,-2),\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0$，所以 $BC_1\perp AB_1$.

(2)$\overrightarrow{BC_1}=(0,-2,-2),D(1,1,2),A_1(2,0,0),C(0,0,2)$，$\overrightarrow{DA_1}=(1,-1,-2),\overrightarrow{A_1C}=(-2,0,2)$，设平面 A_1CD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA_1}=x-y-2z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}=-2x+2z=0,\end{cases}$令 $x=1$，则 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$，因为$\overrightarrow{BC_1}\cdot\boldsymbol{n}=0$，所以 $BC_1\parallel$平面 A_1CD.

19.(1)**证明**：因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱垂直于底面，$\angle BAC=90°$，

所以以 A 为原点，AB,AC,AA_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，

因为 $AB=AC=AA_1=1$，E,F 分别是棱 C_1C,BC 的中点，

所以 $A(0,0,0),B_1(1,0,1),E\left(0,1,\frac{1}{2}\right),F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$，

$\overrightarrow{B_1F}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right),\overrightarrow{AE}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right),\overrightarrow{AF}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$，

因为$\overrightarrow{B_1F}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\overrightarrow{B_1F}\cdot\overrightarrow{AF}=0$，所以$\overrightarrow{B_1F}\perp\overrightarrow{AE},\overrightarrow{B_1F}\perp\overrightarrow{AF}$，因为 $AE\cap AF=A$，$AE\subset$平面 AEF，$AF\subset$平面 AEF，所以 $B_1F\perp$平面 AEF.

(2)**解**：因为 $A_1(0,0,1)$，所以$\overrightarrow{B_1A_1}=(-1,0,0),\overrightarrow{B_1E}=\left(-1,1,-\frac{1}{2}\right)$，故点 A_1 到直线 B_1E 的距离为 $d=\sqrt{\overrightarrow{B_1A_1}^2-\left(\frac{\overrightarrow{B_1A_1}\cdot\overrightarrow{B_1E}}{|\overrightarrow{B_1E}|}\right)^2}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{1+1+\frac{1}{4}}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

20.**解**：(1)因为三棱锥 $O-ABC$ 的侧棱 OA,OB,OC 两两垂直，所以以 O 为原点，OB,OC,OA 所在的直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，则 $O(0,0,0),B(1,0,0),C(0,2,0),A(0,0,1)$，

因为 E 是 OC 的中点，所以 $E(0,1,0)$，所以$\overrightarrow{BE}=(-1,1,0),\overrightarrow{AC}=(0,2,-1)$，

所以 $\cos\langle\overrightarrow{BE},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{BE}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，所以异面直线 EB 与 AC 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$.

(2)$\overrightarrow{AB}=(1,0,-1),\overrightarrow{AC}=(0,2,-1)$，设平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=x-z=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=2y-z=0,\end{cases}$令 $z=2$，则 $\boldsymbol{m}=(2,1,2)$，因为$\overrightarrow{BE}=(-1,1,0)$，所以点 E 到平面 ABC 的距离为 $d=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BE}|}{|\boldsymbol{m}|}=\frac{|-2+1+0|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{1}{3}$.

21.(1)**证明**：取PF的中点G，连接EG、CG，连接AC交BD于O，连接FO.因为E、G分别为PD、PF的中点，所以$EG\parallel FD$，又$EG\not\subset$平面BDF，$FD\subset$平面BDF，所以$EG\parallel$平面BDF，又$AF=1$，故F为GA的中点，所以$FO\parallel GC$，又$GC\not\subset$平面BDF，$FO\subset$平面BDF，所以$GC\parallel$平面BDF，又$EG\cap CG=G$，$EG,CG\subset$平面CGE，所以平面$CGE\parallel$平面BDF，又$CE\subset$平面CGE，所以$CE\parallel$平面BDF.

(2)**解**：取BC中点Q，连接AQ，因为四边形$ABCD$是$\angle ABC=60°$的菱形，所以$AQ\perp AD$，又$PA\perp$平面$ABCD$，以A为原点，$\overrightarrow{AQ},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AP}$为$x,y,z$轴正方向，建立空间直角坐标系$Axyz$. 则$D(0,3,0),B\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0\right),C\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right),F(0,0,1),P(0,0,3)$.所以$\overrightarrow{DF}=(0,-3,1),\overrightarrow{DB}=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{9}{2},0\right)$. 设平面$BDF$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DF}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\end{cases}$可得$\begin{cases}-3y+z=0,\\ \frac{3\sqrt{3}}{2}x-\frac{9}{2}y=0,\end{cases}$令$z=3$，则$x=\sqrt{3}$，$y=1$，所以$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,3)$. 显然平面$PAD$的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(1,0,0)$，所以$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{39}}{13}$，所以平面$BDF$和平面$PAD$夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{39}}{13}$.

22.(1)**证明**：连接AC，因为底面$ABCD$为菱形，$\angle ABC=60°$，所以$\triangle ABC$是正三角形，因为E是BC的中点，所以$AE\perp BC$，又$AD\parallel BC$，所以$AE\perp AD$，因为$PA\perp$平面$ABCD$，$AE\subset$平面$ABCD$，所以$PA\perp AE$，又$PA\cap AD=A$，所以$AE\perp$平面PAD，又$AE\subset$平面AEM，所以平面$AEM\perp$平面PAD.

(2)**解**：以A为原点，AE,AD,AP为x轴，y轴，z轴，建立空间直角坐标系，不妨设$AB=AP=2$，则$AE=\sqrt{3}$，$A(0,0,0),B(\sqrt{3},-1,0),C(\sqrt{3},1,0),P(0,0,2),D(0,2,0),E(\sqrt{3},0,0),F\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right)$，所以$\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{AF}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right),\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},-1,0)$，设$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PD}=\lambda(0,2,-2)(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，则$M(0,2\lambda,2-2\lambda)$.设平面$ABF$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y+z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}x-y=0,\end{cases}$取$x=1$，则$y=\sqrt{3}$，$z=-\sqrt{3}$，得$\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},-\sqrt{3})$，设直线$EM$与平面$ABF$所成角为$\theta$，$\overrightarrow{EM}=(-\sqrt{3},2\lambda,2-2\lambda)$，$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{EM}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EM}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{EM}|}=\frac{|\sqrt{3}(4\lambda-3)|}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{8\lambda^2-8\lambda+7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，化简得$4\lambda^2-8\lambda+1=0$，则$\lambda=\frac{2-\sqrt{3}}{2}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，故存在点$M$满足题意，此时$\frac{PM}{PD}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

扫码免费下载习题讲解 ppt

第 1 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A　**提示**：$\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.故选 A.

2.B　**提示**：对于 A，因为$\frac{2}{1}\neq\frac{-3}{1}\neq\frac{1}{1}$，所以 A 错误；对于 B，因为$\frac{2}{-4}=\frac{-3}{6}=\frac{1}{-2}$，所以 B 正确；对于 C，因为$\frac{2}{2}=\frac{-3}{-3}\neq\frac{1}{5}$，所以 C 错误；对于 D，因为$\frac{2}{-2}\neq\frac{-3}{-3}\neq\frac{1}{5}$，所以 D 错误.故选 B.

3.B　**提示**：对于①，$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{C_1D_1}$长度相等，方向相反，互为相反向量；对于②，$\overrightarrow{AC_1}$与$\overrightarrow{BD_1}$长度相等，但两向量不共线，所以两向量不是相反向量；对于③，$\overrightarrow{AD_1}$与$\overrightarrow{C_1B}$，易知 AD_1C_1B 是平行四边形，则两向量方向相反，长度相等，互为相反向量；对于④，$\overrightarrow{A_1D}$与$\overrightarrow{B_1C}$，易知 A_1DCB_1 是平行四边形，所以这两向量长度相等，方向相同，所以两向量不是相反向量.故互为相反向量的是①③，共有 2 对，$n=2$.故选B.

4.A　**提示**：因为 M 是 CD 的中点，所以$\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}$，故选 A.

5.A　**提示**：因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $2\times(-2)+(-1)x+3\times1=0$，即$-4-x+3=0$，解得 $x=-1$.故选 A.

6.A　**提示**：$\boldsymbol{d}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=x(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)+y(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3)+z(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)=(x+y+z)\boldsymbol{e}_1+(x+y-z)\boldsymbol{e}_2+(x-y+z)\boldsymbol{e}_3$，

因为 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$，所以$\begin{cases}x+y+z=1,\\ x+y-z=2,\\ x-y+z=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\frac{5}{2},\\ y=-1,\\ z=-\frac{1}{2},\end{cases}$故选A.

7.B　**提示**：在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

$\overrightarrow{PC_1}=\overrightarrow{AC_1}-\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC_1}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.故选 B.

8.B　**提示**：由图形可知，$\angle B_1CD$，$\angle CB_1D$ 总为锐角.以 C 为原点，CA,CB,CC_1 所在直线分别为 x,y,z 轴，建立如图示示空间直角坐标系 $Cxyz$，不妨取 $AC=1$，则 $C(0,0,0),B_1(0,1,1),A_1(1,0,1),B(0,1,0)$，则 $\overrightarrow{B_1A_1}=(1,-1,0)$，$\overrightarrow{A_1B}=(-1,1,-1)$，$\overrightarrow{CB_1}=(0,1,1)$.由 $A_1D=mA_1B$，得$\overrightarrow{A_1D}=m\overrightarrow{A_1B}=(-m,m,-m)(0<m<1)$.

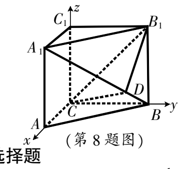
则$\overrightarrow{B_1D}=\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{A_1D}=(1,-1,0)+(-m,m,-m)=(1-m,m-1,-m)$，

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{B_1D}=(1-m,m,1-m)$.

由$\triangle B_1CD$ 为锐角三角形，得$\angle CDB_1$ 为锐角，

则$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{B_1D}=(1-m)^2+m(m-1)+m(m-1)>0$，

得$(m-1)(3m-1)>0$，解得 $m>1$ 或 $m<\frac{1}{3}$.又知 $0<m<1$，所以 $0<m<\frac{1}{3}$.故选 B.



(第 8 题图)

二、多项选择题

9.ABD　**提示**：对于 A，因为 $\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}[(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})]$，所以 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 共面；

对于 B，因为 $\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})]$，所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 共面；

对于 D，因为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，故 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}$ 共面；

对于 C，若 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面，则存在实数 λ,μ，使得 $\boldsymbol{c}=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\mu(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}+(\lambda-\mu)\boldsymbol{b}$，故 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面，这与$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$构成空间的一个基底矛盾，故选 ABD.

10.ABC　**提示**：对于 A，因为$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{0}$，故 A 正确；对于 B，由$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{0}$，得$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$，所以$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{CD}$，故B 正确；对于 C，根据平移，当空间向量的有向线段所在的直线是异面直线时，这两个向量可以是共面向量，故 C 正确；对于 D，只有当 $x+y+z=1$ 时，P,A,B,C 四点才共面，故 D 错误.故选 ABC.

11.ABC　**提示**：在等边$\triangle ABC$ 中，$AB=2,BD=1$，所以 $AD=\sqrt{3}$，则 $A(0,\sqrt{3},0),A_1(0,\sqrt{3},1),C_1(1,0,1),D_1(0,0,1),B_1(-1,0,1)$，$\overrightarrow{AD_1}=(0,-\sqrt{3},1)$，$\overrightarrow{B_1A}=(1,\sqrt{3},-1)$.故选 ABC.

12.BC　**提示**：设 $Q(x_0,y_0,z_0)$，则$\overrightarrow{PQ}=\lambda\boldsymbol{v}$，即$(x_0-1,y_0-2,z_0-3)=\lambda(-4,-1,8)=(-4\lambda,-\lambda,8\lambda)$，

由$|\overrightarrow{PQ}|=18$，得$\sqrt{(-4\lambda)^2+(-\lambda)^2+(8\lambda)^2}=18$，

解得 $\lambda=\pm2$，所以$(x_0-1,y_0-2,z_0-3)=\pm2(-4,-1,8)$，

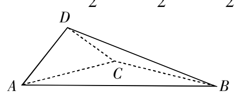
则$\begin{cases}x_0-1=-8,\\ y_0-2=-2,\\ z_0-3=16,\end{cases}$或$\begin{cases}x_0-1=8,\\ y_0-2=2,\\ z_0-3=-16,\end{cases}$解得$\begin{cases}x_0=-7,\\ y_0=0,\\ z_0=19,\end{cases}$或$\begin{cases}x_0=9,\\ y_0=4,\\ z_0=-13,\end{cases}$所以 $Q(-7,0,19)$或 $Q(9,4,-13)$.故选 BC.

三、填空题

13.$\left(\frac{8}{9},-\frac{4}{9},\frac{8}{9}\right)$　**提示**：因为空间向量 $\boldsymbol{a}=(1,0,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,-1,2)$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2+0+2=4$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{4+1+4}=3$，所以向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\times\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{4}{3}\times\frac{1}{3}\times(2,-1,2)=\left(\frac{8}{9},-\frac{4}{9},\frac{8}{9}\right)$.

14.24　**提示**：四面体 $ABCD$ 如图所示，则$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}^2$，又 $AB=2AC=3AD=6$，$\angle BAC=\angle CAD=\angle DAB=\frac{\pi}{3}$，

所以$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=3\times2\times\frac{1}{2}-3\times6\times\frac{1}{2}-6\times2\times\frac{1}{2}+36=24$.



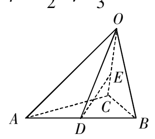
(第 14 题图)

15.$(0,-5,9)$　**提示**：设直线 AB 与坐标平面 yOz 的交点 $C(0,y,z)$，则$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$共线，$\overrightarrow{AB}=(1,3,-6),\overrightarrow{BC}=(-2,y-1,z+3)$，故$\frac{-2}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+3}{-6}$，解得 $y=-5,z=9$，故直线 AB 与坐标平面 yOz 的交点坐标是$(0,-5,9)$.

16.$-\frac{1}{3}$　**提示**：连接 OD，因为四面体 $OABC$ 中，D,E 分别在 AB,OC 上，且 $AD=DB,OE=2EC$，

所以$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$，

所以 $\alpha=-\frac{1}{2},\beta=-\frac{1}{2},\gamma=\frac{2}{3}$，所以 $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{1}{3}$.



(第 16 题图)

四、解答题

17.**解**：(1)$\overrightarrow{AB}=(1,-1,-3),\overrightarrow{AC}=(-2,-2,1)$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1+1+9}=\sqrt{11}$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4+4+1}=3$，

故$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(1,-1,-3)\cdot(-2,-2,1)=-2+2-3=-3$，所以 $\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{-3}{3\sqrt{11}}=-\frac{\sqrt{11}}{11}$.

(2)因为向量 $3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$与向量$\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}$垂直，所以$(3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC})=3\overrightarrow{AB}^2+(3k-1)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-k\overrightarrow{AC}^2=0$，即 $3\times11-3(3k-1)-9k=0$，解得 $k=2$.

18.**解**：(1)$\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{A_1D_1}$，

$\overrightarrow{BD_1}^2=(\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{A_1D_1})^2=\overrightarrow{BB_1}^2+\overrightarrow{B_1A_1}^2+\overrightarrow{A_1D_1}^2+2\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{B_1A_1}+2\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{A_1D_1}+2\overrightarrow{B_1A_1}\cdot\overrightarrow{A_1D_1}=16+4+4+2\times4\times2\cos60°+2\times4\times2\cos120°+0=24$，故$|\overrightarrow{BD_1}|=2\sqrt{6}$，所以 BD_1 的长为 $2\sqrt{6}$.

(2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD_1}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{A_1D_1})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{A_1D_1}=2\times4\cos120°-4+0+2\times4\cos120°+0+4=-8$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})^2}=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2}=2\sqrt{2}$，

由(1)知，$|\overrightarrow{BD_1}|=2\sqrt{6}$，设直线 BD_1 与 AC 所成角为 θ，所以 $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD_1}\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD_1}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD_1}|}\right|=\left|\frac{-8}{2\sqrt{2}\times2\sqrt{6}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以直线 BD_1 与 AC 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

19.**解**：(1)因为$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM},\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，

所以$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$.

(2)因为 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=(1,0,0),\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AD}=(0,1,0),A(0,0,0),P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$，

所以 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AP}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$.所以$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}(0,1,0)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)-\frac{1}{2}(1,0,0)=\left(-\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)$.

20.**解**：(1)因为 $\boldsymbol{a}=(1,-3,2),\boldsymbol{b}=(-2,2,-1)$，所以 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(0,-4,3)$，所以$|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{0+16+9}=5$.

(2)设$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}$，由 $A(-3,1,4),B(-2,2,2)$，得$\overrightarrow{AB}=(1,1,-2)$，

则$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}=(\lambda,\lambda,-2\lambda)$，故$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=(-3,1,4)+(\lambda,\lambda,-2\lambda)=(\lambda-3,\lambda+1,-2\lambda+4)$，

因为$\overrightarrow{OE}\perp\boldsymbol{b}$，所以$\overrightarrow{OE}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $-2(\lambda-3)+2(\lambda+1)-(-2\lambda+4)=0$，解得 $\lambda=-2$，所以$\overrightarrow{AE}=(-2,-2,4)$，

设 $E(x,y,z)$，则$\overrightarrow{AE}=(x+3,y-1,z-4)=(-2,-2,4)$，

所以$\begin{cases}x+3=-2,\\ y-1=-2,\\ z-4=4,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-5,\\ y=-1,\\ z=8,\end{cases}$所以 $E(-5,-1,8)$.

21.**解**：因为$\angle ACD=90°$，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，所以$\angle BAC=90°$，所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

因为 AB 与 CD 成 60°角，

所以$\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}\rangle=60°$或 120°.

所以$|\overrightarrow{BD}|^2=|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}|^2$

$=|\overrightarrow{BA}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$

$=3+2|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{CD}|\cos\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}\rangle=3+2\cos\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}\rangle$.

当$\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}\rangle=60°$时，$|\overrightarrow{BD}|^2=4$，解得$|\overrightarrow{BD}|=2$；

当$\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CD}\rangle=120°$时，$|\overrightarrow{BD}|^2=2$，解得$|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{2}$.

所以 BD 的长为 2 或$\sqrt{2}$.

22.(1)**证明**：连接 AC，可知 $AC\perp BC$，因为 $CC_1\perp$平面 ABC，所以 $CC_1\perp BC$，

因为 $CC_1\cap AC=C$，所以 $BC\perp$平面 ACC_1，所以 $BC\perp AC_1$.

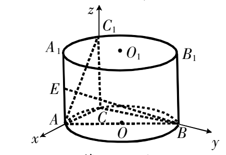
(2)**解**：如图，以 C 为原点，CA,CB,CC_1 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系 $Cxyz$，

设圆柱的高为 h，因为 $AB=4,BC=2\sqrt{3}$，所以 $AC=2$.所以 $A(2,0,0),B(0,2\sqrt{3},0),C_1(0,0,h),E\left(2,0,\frac{h}{2}\right)$，

所以$\overrightarrow{AC_1}=(-2,0,h),\overrightarrow{BE}=\left(2,-2\sqrt{3},\frac{h}{2}\right)$，

由题意得，$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{BE}=-4+\frac{h^2}{2}=0$，解得 $h=2\sqrt{2}$，

故该圆柱的体积 $V=\pi r^2h=8\sqrt{2}\pi$.



(第 22 题图)

第 2 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C　**提示**：由题意得，$\boldsymbol{m}=(2,-4,-2)$与 $\boldsymbol{n}=(-1,2,k)$平行，故 $\boldsymbol{m}=t\boldsymbol{n}$，即$\begin{cases}2=-t,\\ -4=2t,\\ -2=kt,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=1,\\ t=-2.\end{cases}$故选 C.

2.B　**提示**：设平面 α 内的一点为 $P(x,y,z)$(不与点A重合)，则$\overrightarrow{AP}=(x-2,y+1,z-2)$，因为 $\boldsymbol{n}=(3,1,2)$是平面 α 的一个法向量，所以$\overrightarrow{AP}\perp\boldsymbol{n}$，所以$\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}=3(x-2)+(y+1)+2(z-2)=0$，即 $3x+y+2z=9$.

对于 A，$3\times1+(-1)+2\times1=4\neq9$，故 A 不正确；对于 B，$3\times1+3+2\times\frac{3}{2}=9$，故 B 正确；对于 C，$3\times1+(-3)+2\times\frac{3}{2}=3\neq9$，故 C 不正确；对于 D，$3\times(-1)+3+2\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-3\neq9$，故 D 不正确，故选 B.

3.B　**提示**：因为 l_1 的一个方向向量为 $\boldsymbol{a}=(1,2,-2)$，l_2 的一个方向向量为 $\boldsymbol{b}=(-2,3,m)$，且 $l_1\perp l_2$，

所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2+6-2m=0$，解得 $m=2$，故选 B.

4.C　**提示**：因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=-3+4-1=0$，所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{n}$，所以 $l\parallel\alpha$ 或 $l\subset\alpha$，故选 C.

5.A　**提示**：设正方体 $ABCD-A'B'C'D'$的棱长为 1，则 $D(0,0,0),D'(0,0,1),B(1,1,0),C'(0,1,1),B'(1,1,1),C(0,1,0),A(1,0,0)$.

对于①，因为$\overrightarrow{DD'}=(0,0,1)$，所以直线 DD'的一个方向向量为 $\boldsymbol{v}_1=(0,0,1)$正确；对于②，因为$\overrightarrow{BC'}=(-1,0,1)$，所以直线 BC'的一个方向向量为 $\boldsymbol{v}_2=(0,1,1)$不正确；

对于③，因为 $DA\perp$平面 $ABB'A'$，又$\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$，所以平面 $ABB'A'$的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(0,1,0)$不正确；

对于④，因为 $\boldsymbol{n}_2=(1,1,1)$，$\overrightarrow{DB'}=(1,1,1)$，$\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DB'}=1+1+1=3\neq0$，所以平面 $B'CD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(1,1,1)$不正确.故选 A.

6.C　**提示**：因为四边形 $ABCD$ 是正方形，且 $AB=\sqrt{2}$，所以 $AO=OC=1$，所以 $OA_1=1$，所以 $A(0,-1,0),B(1,0,0),C(0,1,0),A_1(0,0,1)$，所以$\overrightarrow{AB}=(1,1,0),\overrightarrow{OC}=(0,1,0)$，又$\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}=(1,1,0)$，所以 $B_1(1,1,1)$，$\overrightarrow{OB_1}=(1,1,1)$，设平面 OCB_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OB_1}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}y=0,\\ x+y+z=0,\end{cases}$得 $y=0,x=-z$，结合选项，可得 $\boldsymbol{n}=(1,0,-1)$，故选 C.

7.B　**提示**：因为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 a，$A_1M=AN=\frac{\sqrt{2}a}{3}$，所以$\overrightarrow{MB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A_1B},\overrightarrow{CN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$，

所以$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{B_1B}-\overrightarrow{B_1A_1})+\overrightarrow{B_1C_1}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{B_1A_1}-\overrightarrow{B_1C_1})=\frac{2}{3}\overrightarrow{B_1B}+\frac{1}{3}\overrightarrow{B_1C_1}$，

又因为$\overrightarrow{CD}$是平面 BB_1C_1C 的法向量，且$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CD}=\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{B_1B}+\frac{1}{3}\overrightarrow{B_1C_1}\right)\cdot\overrightarrow{CD}=0$，所以$\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{CD}$，

所以 $MN\parallel$平面 BB_1C_1C，故选 B.

8.A　**提示**：以 D 为坐标原点，$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立空间直角坐标系，设该正方体的棱长为 1，则 $D(0,0,0),A(1,0,0),C(0,1,0),B(1,1,0),C_1(0,1,1),A_1(1,0,1)$.当$\overrightarrow{A_1P}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A_1C}$时，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1P}=\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{A_1C}=(0,0,1)+\frac{1}{3}(-1,1,-1)=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，$\overrightarrow{DB}=(1,1,0),\overrightarrow{DC_1}=(0,1,1)$，

设平面 BC_1D 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DC_1}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x+y=0,\\ y+z=0,\end{cases}$令 $x=1$，得 $\boldsymbol{m}=(1,-1,1)$，则$\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{m}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=0$，所以直线 $AP\parallel$平面 BC_1D，故 A 正确，B 不正确.

同理，可得平面 ACD_1 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$.

当$\overrightarrow{A_1P}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A_1C}$时，$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1P}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{A_1C}=(0,-1,0)+(0,0,1)+\frac{1}{3}(-1,1,-1)=\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$，

所以$\overrightarrow{BP}$与 $\boldsymbol{n}$ 不共线，所以直线 BP 与平面 ACD_1 不垂直，故 C 不正确；

①

若$\overrightarrow{A_1P}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1C}$时，$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1P}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1C}=(0,-1,0)+(0,0,1)+\frac{1}{2}(-1,1,-1)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

所以$\overrightarrow{BP}$与$\boldsymbol{n}$不共线,所以直线BP与平面ACD_1不垂直,故D不正确.故选A.

二、多项选择题

9.ABC　**提示:**若$l/\!/\alpha$,则$\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$,即$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$,根据选择项验证可知:

对于A,$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=-2$;对于B,$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=6$;对于C,$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=-1$;对于D,$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$.故选ABC.

10.ACD　**提示:**对于A,B,若$\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$分别是平面$\alpha,\beta$的法向量,则$\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow\alpha/\!/\beta$,故A正确,B错误;

对于C,若$\boldsymbol{n}$是平面α内的法向量,则$\boldsymbol{n}$与平面α内的任意直线的方向向量均垂直,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=0$,故C正确;

对于D,“若两个平面垂直,则它们的法向量垂直”是真命题,所以“若两个平面的法向量不垂直,则这两个平面一定不垂直”也是真命题,故D正确.故选ACD.

11.BCD　**提示:**对于A,若直线$b\subset\alpha$,则$\boldsymbol{p}\cdot\overrightarrow{AB}=0$成立,故$b/\!/\alpha$不是$\boldsymbol{p}\cdot\overrightarrow{AB}=0$的必要条件,故A错误;

对于B,若$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OC}$,则$\frac{2}{5}(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})=\frac{1}{5}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})+\frac{2}{5}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP})$,所以$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$,所以$P,A,B,C$四点共面,故B正确;

对于C,由题意得$k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-k,k+2,2k+3)$,$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-2,0,1)$,若$k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$垂直,则$(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2k+2k+3=0$,解得$k=-\frac{3}{4}$,故C正确;

对于D,由题意知$\overrightarrow{AB}=(5,0,2)$,$\overrightarrow{AC}=(4,-3,0)$,

则$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$,$\cos A=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|}=\frac{20}{5\sqrt{29}}=\frac{4\sqrt{29}}{29}$,所以$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\sqrt{\frac{13}{29}}$,所以$AC$边上的高$|BD|=|\overrightarrow{AB}|\sin A=\sqrt{29}\times\sqrt{\frac{13}{29}}=\sqrt{13}$,故D正确.故选BCD.

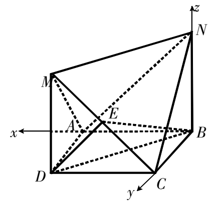
12.ABD　**提示:**对于A,因为四边形$ABCD$是边长为1的正方形,所以$BC\perp AB$,因为$NB\perp$平面$ABCD$,$BC\subset$平面$ABCD$,所以$BC\perp NB$,又$AB\cap NB=B$,所以$BC\perp$平面ABN,因为$BC\subset$平面BCE,所以平面$BCE\perp$平面ABN,故A正确;

对于B,以B为原点,BA为x轴,BC为y轴,BN为z轴,建立空间直角坐标系,则$M(1,1,1)$,$C(0,1,0)$,$A(1,0,0)$,$N(0,0,1)$,$\overrightarrow{MC}=(-1,0,-1)$,$\overrightarrow{AN}=(-1,0,1)$,$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AN}=0$,所以$MC\perp AN$,故B正确;

对于C,$\overrightarrow{NM}=(1,1,0)$,$\overrightarrow{NA}=(1,0,-1)$,$\overrightarrow{NC}=(0,1,-1)$,设平面$AMN$的法向量$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{NM}=x+y=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{NA}=x-z=0,\end{cases}$取$x=1$,得$\boldsymbol{m}=(1,-1,1)$,设平面$CMN$的法向量$\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{NM}=x_1+y_1=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{NC}=y_1-z_1=0,\end{cases}$取$x_1=1$,得$\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$,因为$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=1+1-1=1\neq0$,所以平面$CMN$与平面$AMN$不垂直,故C错误;

对于D,由$B(0,0,0)$,$D(1,1,0)$,$E\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$,

得$\overrightarrow{BD}=(1,1,0)$,$\overrightarrow{BE}=\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$,设平面$BDE$的法向量$\boldsymbol{p}=(a,b,c)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{p}\cdot\overrightarrow{BD}=a+b=0,\\\boldsymbol{p}\cdot\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}a+b+\frac{1}{2}c=0,\end{cases}$取$a=1$,得$\boldsymbol{p}=(1,-1,1)$,因为平面$AMN$的法向量$\boldsymbol{m}=(1,-1,1)$,所以$\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{p}$,所以平面$BDE/\!/$平面$AMN$,故D正确.故选ABD.



(第12题图)

三、填空题

13.$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$(答案不唯一)　**提示:**由题设,$\overrightarrow{AB}=(-1,1,2)$,$\overrightarrow{AC}=(-3,-1,2)$,设$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$是平面$ABC$的法向量,则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=-x+y+2z=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=-3x-y+2z=0,\end{cases}$令$y=-1$,则$\boldsymbol{m}=(1,-1,1)$,故平面$ABC$的一个单位法向量是$\frac{\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{m}|}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

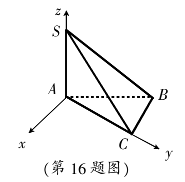
14.$\frac{15}{4}$　**提示:**因为$\alpha/\!/\beta$,所以$\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2$,所以$\frac{x}{-1}=\frac{1}{y}=\frac{-2}{\frac{1}{2}}$,解得$x=4$,$y=-\frac{1}{4}$,所以$x+y=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$.

15.$\left(1,\frac{1}{2},1\right)$　**提示:**由题意得,$D(0,0,0)$,$A(1,0,0)$,$C(0,2,0)$,$D_1(0,0,1)$,则$\overrightarrow{D_1C}=(0,2,-1)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,2,0)$,因为点$P$在平面$A_1B_1C_1D_1$内,所以设点$P(m,n,1)$,则$\overrightarrow{DP}=(m,n,1)$,若$DP\perp$平面$ACD_1$,则$\begin{cases}\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{D_1C}=0,\\\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2n-1=0,\\-m+2n=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}n=\frac{1}{2},\\m=1,\end{cases}$所以点$P$的坐标是$\left(1,\frac{1}{2},1\right)$.

16.垂直　**提示:**以A为坐标原点,AC,AS所在直线分别为y轴,z轴建立空间直角坐标系$Axyz$,

由$AC=2$,$BC=\sqrt{13}$,$SB=\sqrt{29}$,得$AB=\sqrt{4+13}=\sqrt{17}$,$SA=\sqrt{29-17}=2\sqrt{3}$,

所以$B(-\sqrt{13},2,0)$,$S(0,0,2\sqrt{3})$,$C(0,2,0)$,$\overrightarrow{SC}=(0,2,-2\sqrt{3})$,$\overrightarrow{CB}=(-\sqrt{13},0,0)$.因为$\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{CB}=0$,所以$SC\perp BC$.



(第16题图)

四、解答题

17.**解:**以A为原点,分别以AB,AD,AP所在直线为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系.

(1)因为$PA\perp$平面$ABCD$,所以$PA\perp AD$,又$AD\perp AB$,$PA\cap AB=A$,所以$AD\perp$平面PAB,所以平面PAB的法向量为$(0,1,0)$.

(2)因为$B(3,0,0)$,$C(3,3,0)$,$P(0,0,3)$,所以$\overrightarrow{PB}=(3,0,-3)$,$\overrightarrow{PC}=(3,3,-3)$,

设平面PBC的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$所以$\begin{cases}3x-3z=0,\\3x+3y-3z=0,\end{cases}$令$x=1$,得平面$PBC$的法向量为$\boldsymbol{n}=(1,0,1)$.

18.**证明:**由题意知,$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,0\right)$,$A'\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,1\right)$,$B\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2},0\right)$,$B'\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2},1\right)$,$C'(0,\sqrt{2},1)$,$D'(0,0,1)$,$\overrightarrow{AA'}=(0,0,1)$.

因为E是$C'D'$的中点,所以$E\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$,则$\overrightarrow{A'E}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$,$\overrightarrow{B'E}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$,

所以$\overrightarrow{A'E}\cdot\overrightarrow{B'E}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+0=0$,$\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{B'E}=0$,

所以$\overrightarrow{A'E}\perp\overrightarrow{B'E}$,$\overrightarrow{AA'}\perp\overrightarrow{B'E}$,即$A'E\perp B'E$,$AA'\perp B'E$,

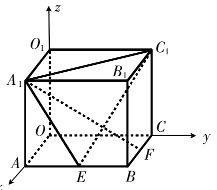
又$A'E,AA'\subset$平面$AA'E$,$A'E\cap AA'=A'$,所以$B'E\perp$平面$AA'E$,又$B'E\subset$平面$BB'E$,

所以平面$AA'E\perp$平面$BB'E$.

19.**证明:**(1)如图所示,以点O为原点,分别以$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OC}$,$\overrightarrow{OO_1}$的方向为x轴,y轴,z轴的正方向,建立空间直角坐标系.设$AE=BF=x$,其中$0\leqslant x\leqslant1$.

则$A_1(1,0,1)$,$F(1-x,1,0)$,$C_1(0,1,1)$,$E(1,x,0)$,则$\overrightarrow{A_1F}=(-x,1,-1)$,$\overrightarrow{C_1E}=(1,x-1,-1)$,所以$\overrightarrow{A_1F}\cdot\overrightarrow{C_1E}=-x+(x-1)+1=0$,所以$\overrightarrow{A_1F}\perp\overrightarrow{C_1E}$,即$A_1F\perp C_1E$.

(2)由(1)知,$\overrightarrow{A_1F}=(-x,1,-1)$,$\overrightarrow{A_1C_1}=(-1,1,0)$,$\overrightarrow{A_1E}=(0,x,-1)$,因为$A_1,E,F,C_1$四点共面,所以$\overrightarrow{A_1F}=\lambda\overrightarrow{A_1C_1}+\mu\cdot\overrightarrow{A_1E}$,得$\begin{cases}-x=-\lambda,\\1=\lambda+\mu x,\\-1=-\mu,\end{cases}$解得$\lambda=\frac{1}{2}$,$\mu=1$.所以$\overrightarrow{A_1F}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{A_1E}$.



(第19题图)

20.**解:**以D为原点,DA,DC,DD_1所在直线分别为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系.则$A(3,0,0)$,$C(0,4,0)$,$D_1(0,0,2)$,所以$\overrightarrow{AC}=(-3,4,0)$,$\overrightarrow{AD_1}=(-3,0,2)$.设$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面$ACD_1$的法向量,则$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0$,

即$\begin{cases}-3x+4y=0,\\-3x+2z=0,\end{cases}$取$z=6$,得$x=4$,$y=3$.所以$\boldsymbol{n}=(4,3,6)$是平面$ACD_1$的一个法向量.

由$A_1(3,0,2)$,$C(0,4,0)$,$B_1(3,4,2)$,得$\overrightarrow{A_1B_1}=(0,4,0)$,$\overrightarrow{B_1C}=(-3,0,-2)$.设点$P$满足$\overrightarrow{B_1P}=\lambda\overrightarrow{B_1C}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,则$\overrightarrow{B_1P}=(-3\lambda,0,-2\lambda)$,所以$\overrightarrow{A_1P}=\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1P}=(-3\lambda,4,-2\lambda)$.

令$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1P}=0$,得$-12\lambda+12-12\lambda=0$,解得$\lambda=\frac{1}{2}$,

所以$\overrightarrow{B_1P}=\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C}$,即存在$P$为线段$B_1C$的中点时,$A_1P/\!/$平面$ACD_1$.

21.**证明:**(1)以D为原点,DA,DC,DE所在直线分别为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系$Dxyz$,则$D(0,0,0)$,$A(1,0,0)$,$E(0,0,2)$,$B(1,\sqrt{2},0)$,$F(1,0,1)$,$\overrightarrow{BF}=(0,-\sqrt{2},1)$,因为$DE\perp$平面$ABCD$,所以$DE\perp AD$,又$AD\perp DC$,$DE\cap DC=D$,所以$AD\perp$平面$CDE$,所以$\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$为平面$CDE$的法向量,

因为$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BF}=0$,所以$\overrightarrow{DA}\perp\overrightarrow{BF}$,又$BF\not\subset$平面$CDE$,所以$BF/\!/$平面$CDE$.

(2)由(1)可知,$G\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$,$\overrightarrow{AG}=\left(-1,\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$,$\overrightarrow{DE}=(0,0,2)$,$\overrightarrow{DB}=(1,\sqrt{2},0)$,

所以$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AG}=0$,$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AG}=0$,所以$DE\perp AG$,$DB\perp AG$,又$DB\cap DE=D$,所以$AG\perp$平面$DBE$.

22.**证明:**(1)以B为原点,BA,BC,BB_1所在的直线分别为x轴,y轴,z轴建立空间直角坐标系,

则$B(0,0,0)$,$D(0,2,2)$,$B_1(0,0,4)$,设$BA=a$,则$A(a,0,0)$,所以$\overrightarrow{BA}=(a,0,0)$,$\overrightarrow{BD}=(0,2,2)$,$\overrightarrow{B_1D}=(0,2,-2)$,$\overrightarrow{B_1D}\cdot\overrightarrow{BA}=0$,$\overrightarrow{B_1D}\cdot\overrightarrow{BD}=0+4-4=0$,即$B_1D\perp BA$,$B_1D\perp BD$.

又$BA\cap BD=B$,所以$B_1D\perp$平面ABD.

(2)由(1)知,$E(0,0,3)$,$G\left(\frac{a}{2},1,4\right)$,$F(0,1,4)$,则$\overrightarrow{EG}=\left(\frac{a}{2},1,1\right)$,$\overrightarrow{EF}=(0,1,1)$,

$\overrightarrow{B_1D}\cdot\overrightarrow{EG}=0+2-2=0$,$\overrightarrow{B_1D}\cdot\overrightarrow{EF}=0+2-2=0$,即$B_1D\perp EG$,$B_1D\perp EF$.

又$EG\cap EF=E$,所以$B_1D\perp$平面EGF.结合(1)可知平面$EGF/\!/$平面ABD.

第3期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C　**提示:**依题意,$|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}\right|=\left|\frac{-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\right|=\frac{1}{2}$,所以异面直线$l_1$与$l_2$所成角的大小为60°.故选C.

2.B　**提示:**因为$|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以两平面夹角的大小为45°.故选B.

3.C　**提示:**因为$\overrightarrow{PA}=(-2,-6,2)$,$\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}=(-2,-6,2)\cdot(-3,0,4)=14$,$|\boldsymbol{n}|=5$,

所以点P到直线l的距离为$d=\frac{|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{14}{5}$.故选C.

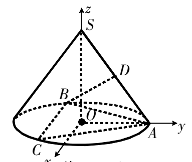
4.A　**提示:**以C为原点,CD,CB,CC_1所在直线为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系,设$BC=CD=1$,则$CC_1=2$,$D(1,0,0)$,$B(0,1,0)$,$C_1(0,0,2)$,所以$\overrightarrow{BC_1}=(0,-1,2)$,$\overrightarrow{DC_1}=(-1,0,2)$.设平面$BDC_1$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=-y+2z=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC_1}=-x+2z=0,\end{cases}$取$z=1$,得$\boldsymbol{n}=(2,2,1)$.又$\overrightarrow{CD}=(1,0,0)$,设$CD$与平面$BDC_1$所成角为$\theta$,则$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{CD}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{CD}|}=\frac{2}{3\times1}=\frac{2}{3}$,故选A.

5.B　**提示:**因为$A(1,0,-1)$,$B(0,-1,1)$,所以$\overrightarrow{AB}=(-1,-1,2)$,又平面$\alpha$的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(1,2,1)$,所以点$A$到平面$\alpha$的距离为$\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{6}}{6}$,故选B.

6.A　**提示:**因为该圆锥的侧面积是底面积的2倍,所以该圆锥的母线长是底面半径的2倍.

设底面半径为1,以底面圆心O为原点,建立如图所示的空间直角坐标系,

则$A(0,1,0)$,$S(0,0,\sqrt{3})$,$B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$,$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$,$D\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{AC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0\right)$,$\overrightarrow{BD}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,则$|\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|}=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{3}\times\sqrt{\frac{5}{2}}}=\frac{\sqrt{30}}{20}$,故异面直线$AC$与$BD$所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{30}}{20}$.故选A.



(第6题图)

7.A　**提示:**以A为原点,AB,AD,AA_1所在直线为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系,则$A(0,0,0)$,$E(1,1,2)$,$F(1,2,1)$,$C(2,2,0)$,$\overrightarrow{AE}=(1,1,2)$,$\overrightarrow{AF}=(1,2,1)$,设平面$AEF$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=x+y+2z=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=x+2y+z=0,\end{cases}$令$y=-1$,得$\boldsymbol{n}=(3,-1,-1)$,又$\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$,故点$C$到平面$AEF$的距离为$\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{6-2}{\sqrt{9+1+1}}=\frac{4\sqrt{11}}{11}$.故选A.

8.B　**提示:**以点D为原点,DA,DC,DD_1所在直线分别为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系,则$A_1(6,0,6)$,$D(0,0,0)$,$C_1(0,6,6)$,

由题意知,当$E(6,3,0)$,$F(3,6,0)$时,A_1,E,F,C_1共面,设平面A_1DE的法向量为$\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,$\overrightarrow{DA_1}=(6,0,6)$,$\overrightarrow{DE}=(6,3,0)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DA_1}=6x_1+6z_1=0,\\\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DE}=6x_1+3y_1=0,\end{cases}$取$x_1=1$,得$\boldsymbol{n}_1=(1,-2,-1)$.设平面$C_1DF$的法向量为$\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$,$\overrightarrow{DC_1}=(0,6,6)$,$\overrightarrow{DF}=(3,6,0)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DC_1}=6y_2+6z_2=0,\\\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DF}=3x_2+6y_2=0,\end{cases}$取$x_2=2$,得$\boldsymbol{n}_2=(2,-1,1)$,设平面$A_1DE$与平面$C_1DF$的夹角为$\theta$,

则$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\frac{1}{2}$,所以平面$A_1DE$与平面$C_1DF$夹角的余弦值为$\frac{1}{2}$.

故选B.

二、多项选择题

9.AC　**提示:**因为点$A(-1,3,0)$,$P(-2,1,z)$,所以$\overrightarrow{AP}=(-1,-2,z)$,又$\boldsymbol{n}=(-2,-2,1)$,点$P$到$\alpha$的距离为$\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|2+4+z|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{|6+z|}{3}=\frac{10}{3}$,解得$z=4$或$z=-16$.故选AC.

10.AC　**提示:**对于A,$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|-2|}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$,满足题意;对于B,$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|13|}{\sqrt{13}\times\sqrt{29}}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{29}}\neq$

$\frac{2\sqrt{13}}{13}$,不满足题意;对于C,$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{2+6}{4\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$,满足题意;对于D,$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|-2\sqrt{5}-6|}{\sqrt{13}\times\sqrt{10}}\neq\frac{2\sqrt{13}}{13}$,不满足题意.故选AC.

11.BCD　**提示:**若$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{n}$,则直线$a/\!/$平面$\alpha$或$a\subset\alpha$,故A不正确;若$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{n}$,则$\boldsymbol{a}$也是平面$\alpha$的一个法向量,所以直线$a\perp$平面$\alpha$,故B正确;直线与平面所成角的正弦值等于直线的方向向量与平面法向量夹角的余弦值的绝对值,所以若$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{1}{2}$,则直线$a$与平面$\alpha$所成角的大小为$\frac{\pi}{6}$,故C正确;两个平面夹角与它们法向量的不大于90°的夹角相等,故D正确.故选BCD.

12.BD　**提示:**以D为原点,DA,DC,DD_1所在直线为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系,则$A(1,0,0)$,$B(1,1,0)$,$C(0,1,0)$,$B_1(1,1,1)$,$C_1(0,1,1)$,$D_1(0,0,1)$.

对于A,$\overrightarrow{BC_1}=(-1,0,1)$,$\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,1)$,因为$\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{AD_1}$,所以$BC_1/\!/AD_1$,故A不正确;

对于B,$\overrightarrow{B_1D}=(-1,-1,-1)$,$\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,1)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$,因为$\overrightarrow{B_1D}\cdot\overrightarrow{AD_1}=1+0-1=0$,$\overrightarrow{B_1D}\cdot\overrightarrow{AC}=1-1+0=0$,所以$B_1D\perp AD_1$,$B_1D\perp AC$,而$AC\cap AD_1=A$,$AC,AD_1\subset$平面$ACD_1$,因此$B_1D\perp$平面$ACD_1$,故B正确;

对于C,因为$B_1D\perp$平面ACD_1,所以$\overrightarrow{B_1D}$是平面ACD_1的法向量,$\overrightarrow{B_1C}=(-1,0,-1)$,

所以点B_1到平面ACD_1的距离为$\frac{|\overrightarrow{B_1C}\cdot\overrightarrow{B_1D}|}{|\overrightarrow{B_1D}|}=\left|\frac{1+0+1}{\sqrt{3}}\right|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,故C不正确;

对于D,因为$\cos\langle\overrightarrow{B_1C},\overrightarrow{B_1D}\rangle=\frac{\overrightarrow{B_1C}\cdot\overrightarrow{B_1D}}{|\overrightarrow{B_1C}|\cdot|\overrightarrow{B_1D}|}=\frac{1+0+1}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,所以直线$B_1C$与平面$ACD_1$所成角的余弦值为$\sqrt{1-\cos^2\langle\overrightarrow{B_1C},\overrightarrow{B_1D}\rangle}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,故D正确.故选BD.

三、填空题

13.$\frac{\sqrt{33}}{3}$　**提示:**设AC的中点为O,以O为原点,OA,OB所在直线为x轴,y轴,建立空间直角坐标系,则$A(1,0,0)$,$B_1(0,\sqrt{3},2\sqrt{2})$,$C(-1,0,0)$,$\overrightarrow{AB_1}=(-1,\sqrt{3},2\sqrt{2})$,$\overrightarrow{AC}=(-2,0,0)$,所以$C$到直线$AB_1$的距离为$\sqrt{\overrightarrow{AC}^2-\left(\frac{\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB_1}|}\right)^2}=\sqrt{4-\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{\sqrt{33}}{3}$.

14.$\frac{\sqrt{6}}{3}$　**提示:**以A为原点,AD,AB,AS所在直线为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系,则$D\left(\frac{1}{2},0,0\right)$,$C(1,1,0)$,$S(0,0,1)$,

可知$\overrightarrow{AD}=\left(\frac{1}{2},0,0\right)$是平面$SAB$的一个法向量.

设平面SCD的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,因为$\overrightarrow{SD}=\left(\frac{1}{2},0,-1\right)$,$\overrightarrow{DC}=\left(\frac{1}{2},1,0\right)$,所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{SD}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}\frac{x}{2}-z=0,\\\frac{x}{2}+y=0,\end{cases}$令$x=2$,则$y=-1$,$z=1$,所以$\boldsymbol{n}=(2,-1,1)$.

设平面SCD与平面SAB的夹角为θ,则$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\left|\frac{1}{2}\times2\right|}{\frac{1}{2}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

15.$\frac{\sqrt{2}}{3}$　**提示:**以D为原点,DA,DC,DD_1所在直线为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系,

设该正方体的棱长为2,$|\overrightarrow{BP}|=\lambda(\lambda\in(0,2])$,

则$A_1(2,0,2)$,$D(0,0,0)$,$B(2,2,0)$,$O(1,1,0)$,$P(2,2,\lambda)$,设平面A_1BD的法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

$\overrightarrow{DA_1}=(2,0,2)$,$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$,$\overrightarrow{OP}=(1,1,\lambda)$,

由$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DA_1}=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}2x+2z=0,\\2x+2y=0,\end{cases}$令$x=-1$,得$\boldsymbol{m}=(-1,1,1)$,

所以$\sin\alpha=|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{OP}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{OP}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{OP}|}=\frac{|\lambda|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{\lambda^2+2}}=\frac{\lambda}{\sqrt{3(2+\lambda^2)}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{6}{\lambda^2}+3}}$,

因为$\lambda\in(0,2]$,所以$\lambda=2$时,$\sin\alpha$有最大值,最大值为$\frac{\sqrt{2}}{3}$.

16.$\frac{2}{3}$　**提示:**以D为原点,DC,DA,DD_1所在直线分别为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系,则$A(0,1,0)$,$C(2,0,0)$,

因为E,F,H分别是AB,CD,A_1B_1的中点,所以$E(1,1,0)$,$F(1,0,0)$,$H(1,1,2)$,则$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AF}=(1,-1,0)$,所以$EC/\!/AF$,又$EC\not\subset$平面$AFH$,$AF\subset$平面$AFH$,所以$EC/\!/$平面$AFH$,所以点$E$到平面$AFH$的距离即为直线$EC$到平面$AFH$的距离,设平面$AFH$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\\overrightarrow{AH}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$因为$\overrightarrow{AH}=(1,0,2)$,所以$\begin{cases}x-y=0,\\x+2z=0,\end{cases}$取$x=2$,则$y=2$,$z=-1$,所以$\boldsymbol{n}=(2,2,-1)$是平面$AFH$的一个法向量,又向量$\overrightarrow{AE}=(1,0,0)$,所以点$E$到平面$AFH$的距离为$\frac{|\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{3}$,即直线$EC$到平面$AFH$的距离为$\frac{2}{3}$.

四、解答题

17.**解:**以D为原点,分别以DA,DC,DD_1所在直线为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系,则$A(1,0,0)$,$B(1,1,0)$,$D_1(0,0,1)$,$E\left(\frac{1}{2},1,1\right)$,$F\left(0,\frac{1}{2},1\right)$,则$\overrightarrow{D_1B}=(1,1,-1)$,$\overrightarrow{D_1E}=\left(\frac{1}{2},1,0\right)$,$\overrightarrow{FA}=\left(1,-\frac{1}{2},-1\right)$,设平面$BED_1$的法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{D_1B}=x+y-z=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{D_1E}=\frac{1}{2}x+y=0,\end{cases}$令$x=2$,则$y=-1$,$z=1$,即$\boldsymbol{m}=(2,-1,1)$,设$AF$与平面$BED_1$所成角为$\theta$,则$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{FA},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{FA}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{FA}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{2+\frac{1}{2}-1}{\frac{3}{2}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$,

故AF与平面BED_1所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{6}}{6}$.

18.**解:**(1)设正四棱柱的高为h,以A_1为原点,A_1B_1,A_1D_1,A_1A所在的直线分别为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系,则$A(0,0,h)$,$B_1(1,0,0)$,$D_1(0,1,0)$,$C(1,1,h)$,$\overrightarrow{AB_1}=(1,0,-h)$,$\overrightarrow{AD_1}=(0,1,-h)$,$\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$.设平面$AB_1D_1$的法向量为$\boldsymbol{n}=(u,v,w)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0,\end{cases}$

即$\begin{cases}u\cdot1+v\cdot0+w\cdot(-h)=0,\\u\cdot0+v\cdot1+w\cdot(-h)=0,\end{cases}$得$u=hw$,$v=hw$,所以$\boldsymbol{n}=(hw,hw,w)$.取$w=1$,得$\boldsymbol{n}=(h,h,1)$.由点$C$到平面$AB_1D_1$的距离为$d=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|h+h+0|}{\sqrt{h^2+h^2+1}}=\frac{4}{3}$,解得$h=2$.所以正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的高为2.

(2)由(1)可知$A_1(0,0,0)$,$A(0,0,2)$,$B_1(1,0,0)$,$C_1(1,1,0)$,$E\left(\frac{1}{2},0,1\right)$.

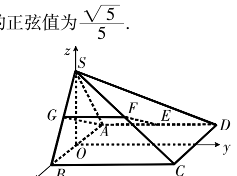
则$\overrightarrow{A_1E}=\left(\frac{1}{2},0,1\right)$,$\overrightarrow{A_1C_1}=(1,1,0)$.

所以点E到直线A_1C_1的距离为$\sqrt{\overrightarrow{A_1E}^2-\left(\frac{\overrightarrow{A_1E}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}}{|\overrightarrow{A_1C_1}|}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{4}-\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

19.**解:**(1)如图,取SB的中点G,连接AG,FG,因为F为SC的中点,所以$FG/\!/BC$且$FG=\frac{1}{2}BC$,因为E为AD的中点,底面$ABCD$是矩形,所以$AE/\!/BC$且$AE=\frac{1}{2}BC$,所以$FG/\!/AE$且$FG=AE$,所以四边形$AGFE$是平行四边形,所以$AG/\!/EF$,因为$EF\perp$平面SBC,所以$AG\perp$平面SBC,又$SB\subset$平面SBC,所以$AG\perp SB$,所以$SA=AB$,又$SB=SA$,所以$\triangle SBA$是等边三角形,所以$AB=SA=2$.

(2)因为平面$SAB\perp$平面$ABCD$,$SB=SA=2$,取AB的中点O,连接SO,以O为原点,OB,OS所在直线为x轴,z轴,建立如图所示的空间直角坐标系,因为$AD=\sqrt{3}AB=2\sqrt{3}$,所以$S(0,0,\sqrt{3})$,$C(1,2\sqrt{3},0)$,$D(-1,2\sqrt{3},0)$,$E(-1,\sqrt{3},0)$,$F\left(\frac{1}{2},\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,所以$\overrightarrow{EF}=\left(\frac{3}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{SC}=(1,2\sqrt{3},-\sqrt{3})$,$\overrightarrow{CD}=(-2,0,0)$,

设平面SCD的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=-2x=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{SC}=x+2\sqrt{3}y-\sqrt{3}z=0,\end{cases}$令$y=1$,则$\boldsymbol{n}=(0,1,2)$,设直线$EF$与平面$SCD$所成角为$\theta$,则$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{EF},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{EF}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,即直线$EF$与平面$SCD$所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$.



(第19题图)

20.**解:**(1)以A为原点,分别以AB,AD,AP所在直线为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系,则$A(0,0,0)$,$B(2,0,0)$,$C(2,4,0)$,$D(0,4,0)$,$P(0,0,4)$,则$\overrightarrow{PB}=(2,0,-4)$,$\overrightarrow{PC}=(2,4,-4)$,$\overrightarrow{PD}=(0,4,-4)$.

设$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PD}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,则$\overrightarrow{PM}=(0,4\lambda,-4\lambda)$,

所以$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PB}=(-2,4\lambda,4-4\lambda)$,由$BM\perp PD$,得$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{PD}=0+16\lambda-4(4-4\lambda)=0$,所以$\lambda=\frac{1}{2}$,所以$M$为$PD$中点,

所以$M(0,2,2)$,$\overrightarrow{CM}=(-2,-2,2)$,$|\cos\langle\overrightarrow{PB},\overrightarrow{CM}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{CM}|}{|\overrightarrow{PB}|\cdot|\overrightarrow{CM}|}=\frac{|-4+0-8|}{2\sqrt{5}\times2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

所以异面直线PB与CM所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{15}}{5}$.

(2)由(1),可知$\overrightarrow{AP}=(0,0,4)$,$\overrightarrow{AC}=(2,4,0)$,设平面$PAC$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

由$\begin{cases}\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}4z=0,\\2x+4y=0,\end{cases}$所以$z=0$,取$x=2$,得$y=-1$,则$\boldsymbol{n}=(2,-1,0)$.

所以点M到平面PAC的距离为$\frac{|\overrightarrow{CM}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|-4+2+0|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+0}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

21.**解:**以D为原点,以$\overrightarrow{DA}$,$\overrightarrow{DC}$的方向分别为x轴,y轴的正方向,建立空间直角坐标系$Dxyz$,则$D(0,0,0)$,$A(\sqrt{3},0,0)$,$B(\sqrt{3},1,0)$,$C(0,2,0)$,$E\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$.

因为$PB=PC$,E为BC的中点,所以$PE\perp BC$.

因为平面$PBC\perp$平面$ABCD$且平面$PBC\cap$平面$ABCD=BC$,所以$PE\perp$平面$ABCD$,设$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},a\right)$.

(1)**证明:**因为$\overrightarrow{DB}=(\sqrt{3},1,0)$,$\overrightarrow{AE}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$,$\overrightarrow{AP}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},a\right)$,

所以$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AE}=0$,$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AP}=0$,所以$DB\perp AE$,$DB\perp AP$.因为$AE\cap AP=A$,$AE,AP\subset$平面$PAE$,所以$DB\perp$平面$PAE$.因为$DB\subset$平面$PBD$,所以平面$PBD\perp$平面$PAE$.

(2)**解:**由$V_{P\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot a=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times(1+2)a=\sqrt{3}$,

解得$a=2$,即$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},2\right)$.所以$\overrightarrow{DA}=(\sqrt{3},0,0)$,$\overrightarrow{DP}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},2\right)$,设平面$PAD$的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA}=\sqrt{3}x=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y+2z=0,\end{cases}$令$y=4$,得$\boldsymbol{n}=(0,4,-3)$.取平面$PAE$的法向量为$\overrightarrow{DB}=(\sqrt{3},1,0)$.

因为$|\cos\langle\overrightarrow{DB},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{DB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{DB}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{4}{2\times5}=\frac{2}{5}$,所以平面$PAD$与平面$PAE$夹角的余弦值为$\frac{2}{5}$.

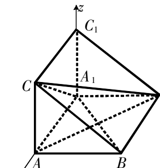
22.(1)**证明:**由三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$,得四边形ABB_1A_1是平行四边形,又$AB=AA_1=3$,所以平行四边形ABB_1A_1是菱形,所以$A_1B\perp AB_1$.又因为$AA_1\perp$平面ABC,所以$AC\perp AA_1$.

又$AB_1\perp A_1C_1$,所以$AC\perp AB_1$,又$AA_1\cap AB_1=A$,所以$AC\perp$平面ABB_1A_1,所以$AC\perp A_1B$.

因为$AC\cap AB_1=A$,所以$A_1B\perp$平面CAB_1.因为$CB_1\subset$平面CAB_1,所以$CB_1\perp A_1B$.

(2)**解:**由(1)可知,$A_1C_1\perp$平面ABB_1A_1,又$AA_1\perp$平面ABC,以A_1为原点,分别以AA_1,A_1B_1,A_1C_1所在直线为x轴,y轴,z轴,建立空间直角坐标系.

设$AC=a$,则$A_1(0,0,0)$,$C(3,0,a)$,$B(3,3,0)$.设平面A_1BC的法向量为$\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$.又$\overrightarrow{A_1C}=(3,0,a)$,$\overrightarrow{A_1B}=(3,3,0)$,所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{A_1C}=0,\\\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}3x+az=0,\\3x+3y=0,\end{cases}$取$x=a$,可得$\boldsymbol{n}_1=(a,-a,-3)$.显然平面$A_1B_1C_1$的一个法向量为$\boldsymbol{n}_2=(1,0,0)$,因为平面$A_1BC$与平面$A_1B_1C_1$夹角的余弦值为$\frac{2\sqrt{17}}{17}$,所以$\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{2\sqrt{17}}{17}$,即$\frac{a}{\sqrt{2a^2+9}}=\frac{2\sqrt{17}}{17}$.解得$a=2$,所以$AC=2$.



(第22题图)

第4期

第2~3版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.B　**提示:**正六棱柱$ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$中,$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$,

$\overrightarrow{AE_1}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EE_1}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BB_1}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$.故选B.

2.C　**提示:**$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|^2=\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2+2(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC})=3+2\left(0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=5$,故$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=\sqrt{5}$,故选C.

3.B　**提示:**由题意,向量$\boldsymbol{a}=(1,0,-1)$,$\boldsymbol{b}=(-2,1,0)$,可得$\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}=(1+2k,-k,-1)$,$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(-3,2,-1)$,

由$\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$互相垂直,得$-3\times(1+2k)+2\times(-k)+1=0$,即$-2-8k=0$,解得$k=-\frac{1}{4}$.故选B.

4.D　**提示:**因为四边形$ABCD$为平行四边形,所以$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,设$D(x,y,z)$,则$\overrightarrow{AB}=(-2,-6,-2)$,$\overrightarrow{DC}=(3-x,7-y,-5-z)$,

所以$\begin{cases}3-x=-2,\\7-y=-6,\\-5-z=-2,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=5,\\y=13,\\z=-3.\end{cases}$故选D.

5.A　**提示:**因为一个平面的单位法向量方向可以不同,所以有2个,故①错误;当一条直线的方向向量和一个平面的法向量平行时,则这条直线和这个平面垂直,故②错误;因为两个平面的法向量平行时,两平面平行,所以两个平面的法向量不平行,则这两个平面相交,故③正确;若一条直线的方向向量垂直于一个平面内两条相交直线的方向向量,则该直线和这个平面垂直,故④错误.故选A.