第 16 期

第 2~3 版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.B

提示：钟表的时针按顺时针旋转，转过的弧度数为$-2\pi\times\frac{2}{12}=-\frac{\pi}{3}$.故选B.

2.A

提示：若α是钝角，则α是第二象限角；反之，若$\alpha=-210°$，则α是第二象限角，但不是钝角.所以“α是钝角”是“α是第二象限角”的充分不必要条件.故选A.

3.C

提示：因为$\tan\theta>0$，所以θ在第一、三象限，又$\sin\theta<0$，所以θ在第三象限.故选C.

4.A

提示：将$y=\sin x$的图象纵坐标变为原来的$\frac{1}{2}$，得到曲线$y=\frac{1}{2}\sin x$；再向下平移1个单位长度，得到曲线$y=\frac{1}{2}\sin x-1$；然后向右平移$\frac{2\pi}{3}$个单位长度，得到曲线$y=\frac{1}{2}\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)-1$；最后横坐标变为原来的2倍，得到曲线$f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{2\pi}{3}\right)-1$，故选A.

5.A

提示：由图可知，b的振幅最大，因为$f(x)$的振幅为$\sqrt{2}$，$g(x)$，$h(x)$的振幅均为1，所以b为$f(x)$；a的最小正周期最大，因为$f(x)$，$g(x)$的最小正周期均为$\frac{2\pi}{2}=\pi$，$h(x)$的最小正周期为2π，所以a为$h(x)$，从而c为$g(x)$，故选A.

6.D

提示：易知$f(x)$为偶函数，且在$[0,+\infty)$上单调递增.因为$\sin\frac{11\pi}{8}=\sin\left(\pi+\frac{3\pi}{8}\right)=-\sin\frac{3\pi}{8}$，$\cos\frac{5\pi}{8}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=-\sin\frac{\pi}{8}$，$\tan\frac{5\pi}{8}=\tan\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)=-\tan\frac{3\pi}{8}$，所以$a=f\left(\sin\frac{3\pi}{8}\right)$，$b=f\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)$，$c=f\left(\tan\frac{3\pi}{8}\right)$. 因为$0<\sin\frac{\pi}{8}<\sin\frac{3\pi}{8}<\sin\frac{\pi}{2}=1=\tan\frac{\pi}{4}<\tan\frac{3\pi}{8}$，所以$b<a<c$.故选D.

7.C

提示：由已知式，得$\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\beta$，即$\sin\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\beta$，

得$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\beta+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\beta=2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\beta$，

即$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\beta-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\beta=0$，

得$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}-\beta\right)=0$，所以$\alpha+\frac{\pi}{4}-\beta=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

得$\alpha-\beta=k\pi-\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以$\tan(\alpha-\beta)=-1$.故选C.

8.D

提示：由题意，得$\tan\alpha=\frac{\cos75°+\sin75°}{\cos75°-\sin75°}=\frac{1+\tan75°}{1-\tan75°}=\tan(45°+75°)=\tan120°$，故角$\alpha$可以是120°.故选D.

二、多项选择题

9.AD

提示：对于A，α是与$\pm\frac{\pi}{3}$终边相同的角，β是与$\pm\frac{\pi}{3}$，$\frac{2\pi}{3}$，$\frac{4\pi}{3}$终边相同的角，故两个集合不相等，A错误；对于B，α，β都是终边在y轴上的角，故两个集合相等，B正确；对于C，α，β都是终边在y轴上的角，故两个集合相等，C正确；对于D，α是终边在x轴非正半轴上的角，β是终边在x轴上的角，故两个集合不相等，D错误.故选AD.

10.AB

提示：$y=2\tan x$为奇函数，周期为π，在$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$上单调递增，故A符合题意；$y=\frac{1}{2}\sin2x$为奇函数，周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$，当$x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$时，$2x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，所以$y=\frac{1}{2}\sin2x$在$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$上单调递增，故B符合题意；$y=3\tan\frac{x}{3}$的周期为$\frac{\pi}{\frac{1}{3}}=3\pi$，故C不符合题意；$y=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$是非奇非偶函数，故D不符合题意.故选AB.

11.ABD

提示：由已知，得$\tan\alpha=\frac{3\cos\alpha}{8}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，所以$\cos^2\alpha=\frac{8}{3}\sin\alpha$，代入$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$中，解得$\sin\alpha=-3$（舍去），或$\sin\alpha=\frac{1}{3}$，故A正确；因为$\cos\alpha=\frac{8}{\sqrt{8^2+(3\cos\alpha)^2}}>0$，所以$\cos\alpha=\sqrt{\frac{8}{3}\sin\alpha}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，故D正确；$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{7}{9}$，故B正确；$\tan\alpha=\frac{3\cos\alpha}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，故C错误.故选ABD.

12.BCD

提示：因为函数$f(x)=2\sin\omega x(\omega>0)$在区间$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增，所以$\begin{cases}\frac{\omega\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2},\\-\frac{\omega\pi}{4}\geqslant-\frac{\pi}{2},\end{cases}$解得$0<\omega\leqslant\frac{3}{2}$.若函数$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的图象与直线$y=2$有且仅有一个交点，则$\frac{\pi}{2}\leqslant\omega\cdot\frac{\pi}{2}<\frac{5\pi}{2}$，即$1\leqslant\omega<5$.综上，$1\leqslant\omega\leqslant\frac{3}{2}$，故选BCD.

三、填空题

13.$\frac{11\pi}{18}$

提示：令$-610°+k\cdot360°>0$，$k\in\mathbf{Z}$，解得$k>\frac{61}{36}$，故当$k=2$时，得最小正角为$-610°+2\times360°=110°=\frac{11\pi}{18}$.

14.π

提示：直线$y=a$与$y=\tan x$的图象的相邻两个交点的距离是函数$y=\tan x$的一个周期，即为π.

15.$\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\frac{4}{5}$

提示：因为$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，所以$3\sin\alpha-\sin\beta=3\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{10}\Rightarrow\cos\alpha=3\sin\alpha-\sqrt{10}$，与$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$联立，解得$\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$. 故$\cos\beta=\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos2\beta=2\cos^2\beta-1=2\times\frac{90}{100}-1=\frac{4}{5}$.

16.1

提示：因为$f(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，所以$g(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.当$x\in\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$，所以$2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\in[1,2]$，若$g(x)\geqslant m$在$x\in\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$时恒成立，则$m\leqslant1$，即$m$的最大值为1.

四、解答题

17.**解：**(1)原式$=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(-4\pi-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)+\cos(6\pi+\pi)-\tan\frac{2\pi}{3}-\cos\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{6}-\tan\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{2}+\cos\pi-\tan\frac{2\pi}{3}-\cos\frac{2\pi}{3}$

$=\frac{1}{2}-1+1+(-1)-(-\sqrt{3})-\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}$.

(2)原式$=\frac{(-\tan x)(-\sin x)\cos x(-\cos x)}{(-\cos x)\sin x}=\sin x$.

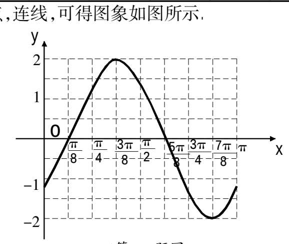
(3)原式$=\frac{\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)-\sin\theta}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)}$

$=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=1$.

18.**解：**(1)表格如下：

$2x-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$
$f(x)$	0	2	0	-2	0

描点，连线，可得图象如图所示.



（第 18 题图）

(2)由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得$-\frac{\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{8}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以函数$f(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{3\pi}{8}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

(3)因为$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，所以$2x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，可得$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$，所以$f(x)\in[-2,\sqrt{2}]$.

19.**解：**(1)因为$f(x)$的图象相邻两最高点的距离为π，所以最小正周期$T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，解得$\omega=2$.

因为对称中心为$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$，所以$2\times\frac{\pi}{3}+\varphi+\frac{\pi}{6}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得$\varphi=k\pi-\frac{5\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$.又$0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$.

(2)由(1)知$f(x)=2a\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

当$a>0$时，由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得$-\frac{5\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$；

当$a<0$时，由$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得$\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

故当$a>0$时，$f(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{\pi}{12}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$；当$a<0$时，$f(x)$的单调递增区间为$\left[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

20.**解：**(1)若$3a=2b$，由图可得$\tan\alpha=\frac{b}{3a}=\frac{1}{2}$，$\tan\beta=\frac{b}{2a}=\frac{3}{4}$，

所以$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}}=2$.

(2)由图可得，$\tan\alpha=\frac{b}{3a}$，$\tan\beta=\frac{b}{2a}$，$\tan\gamma=\frac{b}{a}$，因为$\alpha+\beta=\gamma$，所以$\tan\gamma=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$，即$\frac{\frac{b}{3a}+\frac{b}{2a}}{1-\frac{b}{3a}\cdot\frac{b}{2a}}=\frac{b}{a}$，化简，得$a=b$，所以$\frac{b}{a}=1$.

21.**解：**(1)扇形AOB的弧长为$\frac{\pi}{4}\times200=50\pi$(米)，面积为$\frac{1}{2}\times50\pi\times200=5000\pi$(平方米).

(2)过N作$NP\perp OA$于P，过H作$HE\perp OA$于E，因为$\angle AOB=\frac{\pi}{4}$，所以$OE=HE=NP=200\sin\theta$，又$OP=200\cos\theta$，所以$OM=HN=EP=OP-OE=200(\cos\theta-\sin\theta)$，

所以$S=OM\cdot NP=40000(\cos\theta-\sin\theta)\sin\theta$

$=40000\sin\theta\cos\theta-40000\sin^2\theta$

$=20000\sin2\theta-40000\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}$

$=20000\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{4}\right)-20000$，$0<\theta<\frac{\pi}{4}$.

因为$0<\theta<\frac{\pi}{4}$，所以$\frac{\pi}{4}<2\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$，因此当$2\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即$\theta=\frac{\pi}{8}$时，$S$取到最大值，且最大值为$20000(\sqrt{2}-1)$平方米.

22.**解：**(1)$f(x)=4\cos x\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}$

$=4\cos x\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}$

$=2\cos x\sin x-2\sqrt{3}\cos^2x+\sqrt{3}$

$=\sin2x-\sqrt{3}\cos2x$

$=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

因为$f(\alpha)=\frac{1}{2}$，所以$2\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$，

得$\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}$.

因为$\alpha\in\left(\frac{5\pi}{12},\frac{2\pi}{3}\right)$，所以$2\alpha-\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

所以$\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{15}}{4}$.

所以$\cos2\alpha=\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}-\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}$

$=-\frac{\sqrt{15}}{4}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{8}$.

(2)由$x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$，得$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$，所以当$2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$时，$[f(x)]_{max}=2$，所以$b=2$.

由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得$-\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以$f(x)$的单调递增区间是$\left[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，因为函数$f(x)$在$[a\pi,2\pi](a<2)$上单调递增，所以$-\frac{\pi}{12}+2\pi\leqslant a\pi<2\pi$，得$\frac{23}{12}\leqslant a<2$，所以实数$a$的最小值是$\frac{23}{12}$.

扫码免费下载习题讲解 ppt

第 13 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.D

提示：根据“五点法”作函数$y=\cos x$，$x\in[0,2\pi]$的简图时，只需令$x=0$，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，2π.由于$\cos\pi=-1$，故第三个点的坐标是$(\pi,-1)$.故选D.

2.D

提示：$y=\cos|2x|$为偶函数，$y=|\sin x|$为偶函数，$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos2x$为偶函数，$y=\cos\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)=-\sin2x$为奇函数，且最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$.故选D.

3.C

提示：$f(x)$的最小正周期$T=\frac{\pi}{1}=\pi$.故选C.

4.C

提示：$f(x)=\sin\left(-2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，故$f(x)$的单调递增区间为$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的单调递减区间. 令$2n\pi-\frac{3\pi}{2}\leqslant2x-\frac{\pi}{6}\leqslant2n\pi-\frac{\pi}{2}$，$n\in\mathbf{Z}$，解得$n\pi-\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant n\pi-\frac{\pi}{6}$，$n\in\mathbf{Z}$.

故选C.

5.A

提示：$a=\cos\frac{\pi}{12}$，$b=\sin\frac{41\pi}{6}=\sin\left(6\pi+\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{3}$，$c=\cos\frac{7\pi}{4}=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}$，因为$y=\cos x$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，$0<\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$，所以$\cos\frac{\pi}{12}>\cos\frac{\pi}{4}>\cos\frac{\pi}{3}$，即$a>c>b$.故选A.

6.D

提示：由已知，可得$\frac{\omega\pi}{3}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，则$\omega=3k$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以最小正周期$T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{3|k|}$，$k\in\mathbf{Z}$.

当$k=\pm1$时，T取得最大值为$\frac{2\pi}{3}$.故选D.

7.A

提示：因为$f(-x)=-\frac{1}{2}x-\sin(-x)=-\frac{1}{2}x+\sin x=-\left(\frac{1}{2}x-\sin x\right)=-f(x)$，所以$f(x)$是奇函数，图象关于原点对称，排除B，D；在同一平面直角坐标系中画出直线$y=\frac{1}{2}x$与正弦曲线$y=\sin x$，可知二者有3个交点，所以函数$f(x)$有3个零点，排除C，故选A.

8.A

提示：由$T=\frac{2\pi}{\omega}$，且$\frac{2\pi}{3}<T<\pi$，得$\frac{2\pi}{3}<\frac{2\pi}{\omega}<\pi$，结合$\omega>0$，解得$2<\omega<3$. ①

因为$y=f(x)$的图象关于点$\left(\frac{3\pi}{2},2\right)$中心对称，所以$b=2$，且$\frac{3\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{4}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

得$\omega=\frac{2}{3}\left(k-\frac{1}{4}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$. ②

将②代入①，解得$3.25<k<4.75$，又$k\in\mathbf{Z}$，

所以$k=4$，可得$\omega=\frac{5}{2}$，$f(x)=\sin\left(\frac{5}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)+2$.

所以$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{5}{2}\times\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+2=-1+2=1$.

故选A.

二、多项选择题

9.BC

提示：令$x-\frac{\pi}{4}=\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，可得该函数的图象的对称中心为$\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$.结合选项可知选BC.

10.BC

提示：当$\varphi=\frac{\pi}{2}$时，$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)=\cos\omega x$是偶函数，故B正确，D错误；若$f(x)$是奇函数，则$f(0)=0$，即$\sin\varphi=0$，得$\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，又$0<\varphi<\pi$，所以$\varphi$的值不存在，故A错误，C正确.

故选BC.

11.AD

提示：由$f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，得最小正周期$T=\frac{2\pi}{1}=2\pi$，故A正确；令$x+\frac{\pi}{6}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，可得$f(x)$的对称轴为$x=k\pi-\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，故B错误；当$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时，$x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right)$，可知$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上不具有单调性，故C错误；$f\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+\pi\right)=\cos\frac{3\pi}{2}=0$，故D正确.故选AD.

12.AB

提示：因为$x\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$，$\omega>0$，所以$\omega x\in\left(-\frac{\pi}{6}\omega,\frac{\pi}{6}\omega\right)$.又$y=\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增，所以$\begin{cases}-\frac{\pi}{6}\omega\geqslant-\frac{\pi}{2},\\\frac{\pi}{6}\omega\leqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}$解得$\omega\leqslant3$，又$\omega>0$，所以$0<\omega\leqslant3$.故选AB.

三、填空题

13.$(1,\sqrt{3})$

提示：当$x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$时，$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$，

故$f(x)\in(1,\sqrt{3})$.

14.$\left\{\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right\}$

提示：由$\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，得$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

解得$x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$.

又$x\in[0,\pi]$，所以所求解集为$\left\{\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right\}$.

15.$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

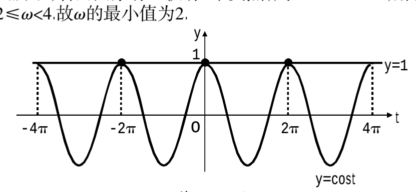
提示：当$x\in(0,\pi)$时，$2x-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$，结合正弦函数在$\left(-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$上的图象，因为方程$f(x)=\frac{1}{3}$在区间$(0,\pi)$上的根为$x_1$，$x_2(x_1<x_2)$，令$2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，得$x=\frac{5\pi}{12}$，所以$x_1$，$x_2$关于直线$x=\frac{5\pi}{12}$对称.所以$x_1+x_2=2\times\frac{5\pi}{12}=\frac{5\pi}{6}$.

所以$\tan(x_1+x_2)=\tan\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

16.2

提示：由$y=-1+\cos\omega x=0$，得$\cos\omega x=1$.因为$x\in[-\pi,\pi]$，$\omega>0$，所以$\omega x\in[-\omega\pi,\omega\pi]$.

设$t=\omega x$，则$t\in[-\omega\pi,\omega\pi]$，作出$y=\cos t$与$y=1$的图象如图所示，若两图象有且仅有3个交点，则$2\pi\leqslant\omega\pi<4\pi$，解得$2\leqslant\omega<4$.故$\omega$的最小值为2.



（第 16 题图）

四、解答题

17.**解：**(1)要使函数有意义，则$\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{6}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得$x\neq\frac{2}{3}+2k$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以函数$f(x)$的定义域为$\left\{x\middle|x\neq\frac{2}{3}+2k,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(2)由$-\frac{\pi}{2}+k\pi<\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

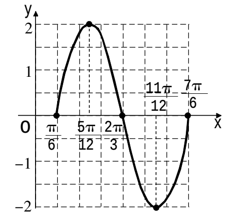
解得$-\frac{4}{3}+2k<x<\frac{2}{3}+2k$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以函数$f(x)$的单调递增区间是$\left(-\frac{4}{3}+2k,\frac{2}{3}+2k\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，无单调递减区间.

18.**解：**(1)表格如下：

$2x-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$
$f(x)$	0	2	0	-2	0

由表格描点并将它们用光滑的曲线连接起来，可得$f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$上的图象如下图所示.



（第 18 题图）

(2)由$f(x)\geqslant1$，得$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\geqslant\frac{1}{2}$，

即$\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{5\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

解得$\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

故原不等式的解集为$\left[\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

19.**解：**(1)由$f(x)=\sqrt{3}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，得最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

由$-\pi+2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{6}\leqslant2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

解得$-\frac{7\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant-\frac{\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以$f(x)$的单调递增区间是$\left[-\frac{7\pi}{12}+k\pi,-\frac{\pi}{12}+k\pi\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

(2)当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，

所以当$2x+\frac{\pi}{6}=\pi$，即$x=\frac{5\pi}{12}$时，$f(x)$取得最小值$-\sqrt{3}$.

20.**解：**(1)若选择条件①，则$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得$\omega=2$；

若选择条件②，则$1+\frac{\sqrt{3}}{2}+m+\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}+m\right)=0$，解得$m=-\frac{\sqrt{3}}{2}$；

若选择条件③，则$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+m=2$，解得$m=2$.

根据题中要求，只能选择①②或①③作为已知条件.

若选择①②，则$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，

此时$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$；

若选择①③，则$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+2$，

此时$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5+\sqrt{3}}{2}$.

(2)根据(1)中所求，不论选择①②还是①③，$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+m$，又其单调性与$h(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$相同，故函数$f(x)$在区间$[0,a]$上单调递增，可转化为$h(x)$在$[0,a]$上单调递增.又当$x\in[0,a]$时，$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},2a-\frac{\pi}{3}\right]$，要满足题意，只需$-\frac{\pi}{3}<2a-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}$，可得$0<a\leqslant\frac{5\pi}{12}$，故实数$a$的最大值为$\frac{5\pi}{12}$.

21.**解：**(1)由题意知，$f(x)$的图象在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上至少有两个最高点.因为$x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\omega>0$，所以$\omega x_0\in\left(0,\frac{\omega\pi}{2}\right)$，因此$\frac{\omega\pi}{2}>\frac{5\pi}{2}$，解得$\omega>5$.故$\omega$的取值范围为$(5,+\infty)$.

(2)依题意得$\frac{5\pi}{3}-\pi\leqslant\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{\omega}$，又$\omega>0$，解得$0<\omega\leqslant\frac{3}{2}$.当$x\in\left(\pi,\frac{5\pi}{3}\right)$时，$\omega x\in\left(\omega\pi,\frac{5\omega\pi}{3}\right)$，其中$\omega\pi\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right]$，$\frac{5\omega\pi}{3}\in\left(0,\frac{5\pi}{2}\right]$，

要使$f(x)$在$\left(\pi,\frac{5\pi}{3}\right)$上单调递增，且存在$m\in\left(\pi,\frac{5\pi}{3}\right)$，使得$f(m)<0$，结合正弦曲线，可得$\omega\pi=\frac{3\pi}{2}$，所以$\omega=\frac{3}{2}$.

故ω的取值集合为$\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

22.**解：**(1)因为$y=\cos x$的定义域为$\mathbf{R}$，

所以$f(x)=\sin(\cos x)$的定义域为$\mathbf{R}$.

(2)$f(x)$在$\mathbf{R}$上为偶函数，理由如下：

$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，因为$\forall x\in\mathbf{R}$，都有$-x\in\mathbf{R}$，

且$f(-x)=\sin[\cos(-x)]=\sin(\cos x)=f(x)$，

所以$f(x)$为偶函数.

(3)$f(x+2\pi)=\sin[\cos(x+2\pi)]=\sin(\cos x)=f(x)$.

因为$y=\cos x$在$[-\pi,0]$上单调递增，且值域为$[-1,1]$，而$y=\sin x$在$[-1,1]$上单调递增，所以$f(x)=\sin(\cos x)$在$[-\pi,0]$上单调递增；因为$y=\cos x$在$[0,\pi]$上单调递减，且值域为$[-1,1]$，又$y=\sin x$在$[-1,1]$上单调递增，所以$f(x)=\sin(\cos x)$在$[0,\pi]$上单调递减.

所以$f(x)$的最小正周期为2π，且$f(x)$在$[(2k-1)\pi,2k\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$上严格单调递增，在$[2k\pi,(2k+1)\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$上严格单调递减.

由$x\in\mathbf{R}$，得$\cos x\in[-1,1]$，又$[-1,1]\subseteq\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，

所以$\sin(\cos x)\in[\sin(-1),\sin1]=[-\sin1,\sin1]$，即$f(x)$的值域为$[-\sin1,\sin1]$.

第 14 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B

提示：$\tan\alpha=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\tan\frac{\pi}{4}}=\dfrac{-3-1}{1-3\times1}=2$.故选B.

2.A

提示：原式$=\sin78°\cos18°-\cos78°\sin18°=\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.故选A.

3.A

提示：因为$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,所以$\alpha-\beta\in(-\pi,0)$.

由$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\alpha\sin\beta$，得$\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)$.所以$\alpha-\beta=-\frac{\pi}{6}$.故选A.

4.A

提示：由$\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$,$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$,得$\frac{\pi}{4}-\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,$\frac{\pi}{4}+\beta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

又$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=-\frac{3}{5}$,$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)=\frac{5}{13}$,

所以$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{4}{5}$,$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)=\frac{12}{13}$.

所以$\cos(\alpha+\beta)=\cos\left[\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]$

$=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$

$=\frac{5}{13}\times\frac{4}{5}+\frac{12}{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{16}{65}$.故选A.

5.C

提示：由$\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha+2}{\tan\alpha-1}=2$,解得$\tan\alpha=4$,所以$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times4}{1-4^2}=-\frac{8}{15}$.故选C.

6.D

提示：$y=\cos2x+2\sin x=1-2\sin^2x+2\sin x=-2\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$,当$\sin x=\frac{1}{2}$时,$y$取得最大值$\frac{3}{2}$;当$\sin x=-1$时,$y$取得最小值-3.故函数$y$的值域为$\left[-3,\frac{3}{2}\right]$.故选D.

7.C

提示：因为$y=\sin^2x-\sin^4x=\sin^2x\ (1-\sin^2x)=\sin^2x\cos^2x=\frac{\sin^22x}{4}=\frac{1-\cos4x}{8}$,所以该函数的最小正周期$T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.故选C.

8.C

提示：当$-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$时,$\cos x\geqslant0$,$f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$,令$f(x)=\sqrt{3}$,得$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,因为$-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$,所以$-\frac{\pi}{3}\leqslant x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{2\pi}{3}$,所以$x+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$或$\frac{\pi}{3}$,解得$x=\frac{\pi}{2}$或$\frac{\pi}{6}$;

当$\frac{\pi}{2}<x\leqslant\frac{3\pi}{2}$时,$\cos x\leqslant0$,$f(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$,令$f(x)=\sqrt{3}$,得$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,因为$\frac{\pi}{2}<x\leqslant\frac{3\pi}{2}$,所以$\frac{\pi}{3}<x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{4\pi}{3}$,所以$x-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$,解得$x=\frac{5\pi}{6}$.

综上,方程$f(x)=\sqrt{3}$有3个解.故选C.

二、多项选择题

9.ACD

提示：对于A,原式$=\tan45°=1$;对于B,原式$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$;对于C,原式$=2\sin30°=1$;对于D,原式$=\sin68°\cdot\cos22°+\sin22°\cos68°=\sin(68°+22°)=\sin90°=1$.故选ACD.

10.AC

提示：由已知,得$\tan\alpha+\tan\beta=\sqrt{3}(1-\tan\alpha\tan\beta)$,所以$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\sqrt{3}$.故$\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$.结合选项,可知选AC.

11.CD

提示：$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\in[-\sqrt{2},\ \sqrt{2}]$,故A,B错误;$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin2\alpha\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$,故C,D正确.故选CD.

12.BD

提示：$f(\theta)=\sin\left[a\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right]+\cos\left(a\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\sin a\theta\cos\frac{a\pi}{4}+\cos a\theta\sin\frac{a\pi}{4}-\sin a\theta=\left(\cos\frac{a\pi}{4}-1\right)\sin a\theta+\sin\frac{a\pi}{4}\cos a\theta$，则其最大值为$\sqrt{\left(\cos\frac{a\pi}{4}-1\right)^2+\left(\sin\frac{a\pi}{4}\right)^2}=\sqrt{2}$，可得$\cos\frac{a\pi}{4}=0$,所以$\frac{a\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,解得$a=2+4k$,$k\in\mathbf{Z}$.所以该函数的周期为$\frac{2\pi}{|a|}=\frac{\pi}{|1+2k|}$,$k\in\mathbf{Z}$.结合选项可知选BD.

三、填空题

13.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

提示：原式$=\cos30°\sin15°+\sin30°\cos15°=\sin(15°+30°)=\sin45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

14.$\frac{3}{4}$

提示：因为$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=3$,且$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{4}$,

所以$\sin(\alpha+\beta)=3\cos\alpha\cos\beta=\frac{3}{4}$.

15.$\sqrt{2}$

提示：因为$\cos\theta=-\frac{1}{3}$,θ是第二象限角,所以$\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

所以$\tan\frac{\theta}{2}=\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\sqrt{2}$.

16.$\frac{\sqrt{5}}{5}$

提示：$f(x)=\sin x+2\cos x=\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin x+\frac{2}{\sqrt{5}}\cos x\right)=\sqrt{5}\sin(x+\varphi)$,其中$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}$,$\sin\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}$.结合题意,可知当$f(x)$取得最大值时,$x_0+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,得$x_0=\frac{\pi}{2}+2k\pi-\varphi$,$k\in\mathbf{Z}$，所以$\sin x_0=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi-\varphi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

四、解答题

17.**解**：(1)因为$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,且$\sin\alpha=\frac{3}{5}$,所以$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{4}{5}$.

所以$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

(2)由(1)可得$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{4}$,

所以$\sin2\alpha+\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=2\sin\alpha\cos\alpha+\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}$

$=2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}+\dfrac{1+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=\frac{199}{25}$.

18.**解**：(1)由$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2$,$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,与$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$联立,解得$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$,$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

所以$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{2}{5}$.

(2)由题可得$\alpha+\beta\in(0,\pi)$,因为$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

所以$\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha=\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\times\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{3}{5}$.

19.**解**：(1)因为α为锐角,$\cos\alpha=\frac{1}{7}$,

所以$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

所以$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=4\sqrt{3}$.

所以$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{8\sqrt{3}}{47}$.

(2)由(1)知$\tan\alpha=4\sqrt{3}>\sqrt{3}$,且$\alpha$为锐角,可得$\alpha\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$.又$\sin(\alpha+\beta)=\frac{5\sqrt{3}}{14}\in\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,所以$\alpha+\beta\in\left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right)$,所以$\cos(\alpha+\beta)=-\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}=-\frac{11}{14}$.所以$\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=-\frac{11}{14}\times\frac{1}{7}+\frac{5\sqrt{3}}{14}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{1}{2}$,又$\beta$为锐角,所以$\beta=\frac{\pi}{3}$.

20.**解**：(1)$f(x)=\dfrac{\sin^2x+\cos^2x-2\sin(\pi-x)\cos(\pi+x)}{\sin\left(\frac{9\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{13\pi}{2}+x\right)}=\dfrac{1-2\sin x(-\cos x)}{\cos x+\sin x}=\dfrac{(\cos x+\sin x)^2}{\cos x+\sin x}=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

所以$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

(2)结合(1)可得$f(\alpha)=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}$,所以$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$.所以$\sin2\alpha=-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\left[1-2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right]=-\left(1-2\times\frac{1}{9}\right)=-\frac{7}{9}$.

21.(1)**解**：$f(x)=2\sqrt{2}\sin x\cos x+\sqrt{2}\cos^2x-\sqrt{2}\cdot\sin^2x=\sqrt{2}\sin2x+\sqrt{2}\cos2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$,

故$f(x)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,解得$-\frac{3\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{8}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$.故$f(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{3\pi}{8}+k\pi,\frac{\pi}{8}+k\pi\right]$,$k\in\mathbf{Z}$.

(2)**证明**：当$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$时,$2x+\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$,则$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$,所以$f(x)\leqslant2$,当且仅当$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$,即$x=\frac{\pi}{8}$时,等号成立.又$x^2-2x+3=(x-1)^2+2\geqslant2$,当且仅当$x=1$时,等号成立,因为$f(x)\leqslant2$与$x^2-2x+3\geqslant2$中等号成立的条件不同,所以$f(x)<x^2-2x+3$,得证.

22.**解**：若选①:$f(x)=[h(x)]^2+[g(x)]^2$

$=\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\dfrac{1-\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)}{2}+\dfrac{1+\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)}{2}$

$=1+\frac{1}{2}\left[\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)-\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$=1-\frac{1}{2}\times2\sin2x\sin\frac{2\pi}{3}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x$.

(1)$f(x)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)当$x\in\left[-\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]$时,$2x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$,

$\sin2x\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$,故$f(x)\in\left[1-\frac{\sqrt{3}}{2},1+\frac{\sqrt{6}}{4}\right]$.

若选②:$f(x)=[h(x)]^2-[g(x)]^2=\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\dfrac{1-\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)}{2}-\dfrac{1+\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)}{2}$

$=-\frac{1}{2}\left[\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\right]$

$=-\frac{1}{2}\times2\cos2x\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\cos2x$.

(1)$f(x)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)当$x\in\left[-\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]$时,$2x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$,

$\cos2x\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$,故$f(x)\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2}\right]$.

若选③:$f(x)=h(x)g(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)$

$=\frac{1}{4}\sin x\cos x-\frac{\sqrt{3}}{4}\cos^2x-\frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2x+\frac{3}{4}\sin x\cos x$

$=\sin x\cos x-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}\sin2x-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

(1)$f(x)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)当$x\in\left[-\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]$时,$2x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$,$\sin2x\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$,

故$f(x)\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$.

第 15 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B

提示：由题意,当$x=0$时,$8\times0-\frac{\pi}{9}=-\frac{\pi}{9}$,则初相为$-\frac{\pi}{9}$.故选B.

2.D

提示：$y=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{5}\right)=2\sin\left[3\left(x+\frac{\pi}{15}\right)\right]$,故将其图象上所有的点向右平移$\frac{\pi}{15}$个单位长度，可以得到$y=2\sin\left[3\left(x+\frac{\pi}{15}-\frac{\pi}{15}\right)\right]=2\sin3x$的图象.故选D.

3.A

提示：将$y=\cos2x$图象上所有的点向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度,得到$y=\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象,再将所得各点的纵坐标伸长到原来的2倍,横坐标不变,得到$g(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象.故选A.

4.C

提示：由题意,得$f(x)=2\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\right]=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.令$2x-\frac{\pi}{6}=k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$，解得$x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$，当$k=-1$时,$x=-\frac{5\pi}{12}$.故选C.

5.C

提示：由题意,平移后图象的解析式为$y=\tan\left[\omega\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\tan\left(\omega x-\frac{\omega\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)$，因为此函数图象与函数$y=\tan\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象重合,所以$-\frac{\omega\pi}{12}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,得$\omega=-12k+2$,$k\in\mathbf{Z}$.代入$\omega>0$中,解得$k<\frac{1}{6}$.所以$k=0$时,$\omega$取得最小值2.故选C.

6.C

提示：由题意,令$H(t)\geqslant10$,得$\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{2\pi}{3}\right)\geqslant-\frac{1}{2}$.①

因为$0\leqslant t<24$,所以$-\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{12}t-\frac{2\pi}{3}<\frac{4\pi}{3}$,所以由①,可得$-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{12}t-\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{7\pi}{6}$,解得$6\leqslant t\leqslant22$.所以该港口一天内水深不小于10m的时长为22-6=16h.故选C.

7.C

提示：由角速度为$15°/\mathrm{s}=\frac{\pi}{12}\mathrm{rad/s}$,得第11s时点$P$转过的角度为$\frac{11\pi}{12}$，所以$x=2\cos\frac{11\pi}{12}$,$y=2\sin\frac{11\pi}{12}$，所以$x+y=2\cos\frac{11\pi}{12}+2\sin\frac{11\pi}{12}=2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{11\pi}{12}\right)=2\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{6}=-2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{6}=-\sqrt{2}$.故选C.

8.B

提示：由振幅为$\sqrt{3}$,得$A=\sqrt{3}$.根据题意,$|EF|=T=\frac{2\pi}{\omega}$,$|DE|^2=(2A)^2+\left(\frac{T}{2}\right)^2=12+\frac{\pi^2}{\omega^2}$.因为$\triangle DEF$是等腰三角形,所以$|DE|=|EF|$,即$12+\frac{\pi^2}{\omega^2}=\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^2$,解得$\omega=\frac{\pi}{2}$,所以频率$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}=0.25\mathrm{Hz}$.故选B.

二、多项选择题

9.BCD

提示：将函数$y=\sin2x$的图象先关于y轴对称,得到$y=\sin(-2x)=-\sin2x$的图象;再向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度,得到$y=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象,故选BCD.

10.AC

提示：将曲线$y=\sin x$向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到曲线$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$,再将所有点的横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$,得到曲线$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,即①④,故A正确,B错误;将曲线$y=\sin x$上所有点的横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$，得到曲线$y=\sin2x$,再向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度,得到曲线$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,即④②,故C正确,D错误.故选AC.

11.AD

提示：由题意,平移后所得图象的函数解析式为$y=2\sin\left(2x-2\varphi-\frac{\pi}{3}\right)$,再将所得图象上每一点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$,得到$f(x)=2\sin\left(4x-2\varphi-\frac{\pi}{3}\right)$.因为$f(x)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{4}$对称，所以$4\times\frac{\pi}{4}-2\varphi-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,解得$\varphi=\frac{\pi}{12}-\frac{k\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$.又$\varphi>0$,结合选项可知选AD.

12.AC

提示：令$s=1$,得$\sin(\omega t+\varphi)=\frac{1}{2}$,可得$t=\dfrac{2k\pi+\frac{\pi}{6}-\varphi}{\omega}$,或$t=\dfrac{2k\pi+\frac{5\pi}{6}-\varphi}{\omega}$,$k\in\mathbf{Z}$,所以两相邻时刻差为$\frac{2\pi}{3\omega}$或$\frac{4\pi}{3\omega}$.当$\frac{2\pi}{3\omega}=\frac{\pi}{3}$时,解得$\omega=2$;当$\frac{4\pi}{3\omega}=\frac{\pi}{3}$时,解得$\omega=4$.故选AC.

三、填空题

13.$y=2\sin(4x-3)$

提示：由题意,得$A=2$,$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\omega=4$,又$\varphi=-3$,故解析式为$y=2\sin(4x-3)$.

14.3

提示：由题意,当ω最小时,有$2\times\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}T=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{\omega}$,所以$\omega=3$.

15.20.5℃

提示：据题意得$\begin{cases}a+A=28,\\a-A=18,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=23,\\A=5.\end{cases}$

所以$y=23+5\cos\left[\frac{\pi}{6}(x-6)\right]$.

令$x=10$,得$y=23+5\cos\frac{2\pi}{3}=20.5$℃.

16.$\frac{\pi}{12}$,$\frac{\pi}{12}$

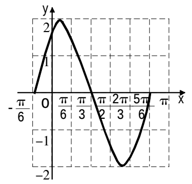
提示：由点$M\left(\theta,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$在函数$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象上,得$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,因为$0<\theta<\frac{\pi}{4}$,所以$\frac{\pi}{6}<2\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$,所以$2\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$,得$\theta=\frac{\pi}{12}$.因为将函数$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象至少向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度得到函数$y=\sin2x$的图象上,所以$t$的最小值为$\frac{\pi}{12}$.

四、解答题

17.**解**：(1)列表如下：

$2x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
y	0	2	0	-2	0

描点并用光滑的曲线连接起来,得到该函数在一个周期内的简图如下图所示.



(第 17 题图)

(2)先将函数$y=\sin x$的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度,再将所得图象上各点的横坐标变为原来的$\frac{1}{2}$(纵坐标不变),最后将图象上各点的纵坐标变为原来的2倍(横坐标不变),即可得到函数$y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象.

18.**解**：(1)由最小正周期T=2,得$\omega=\frac{\pi}{T}=\frac{\pi}{2}$,故$f(x)=2\tan\left(\frac{\pi}{2}x+\varphi\right)$.

因为函数$f(x)$的图象过点$(1,2\sqrt{3})$,

所以$f(1)=2\sqrt{3}$,得$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=\sqrt{3}$,

所以$\frac{\pi}{2}+\varphi=\frac{\pi}{3}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,得$\varphi=-\frac{\pi}{6}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,

又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=-\frac{\pi}{6}$,故$f(x)=2\tan\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$.

令$\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{6}=\frac{k\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,解得$x=k+\frac{1}{3}$,$k\in\mathbf{Z}$,

故$f(x)$的对称中心为$\left(k+\frac{1}{3},0\right)$,$k\in\mathbf{Z}$.

(2)先将函数$y=\tan x$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度,然后将所得图象上各点的横坐标变为原来的$\frac{2}{\pi}$(纵坐标不变),最后将图象上各点的纵坐标变为原来的2倍(横坐标不变),就可得到函数$f(x)=2\tan\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象.

19.**解**：(1)$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos x+\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\frac{3}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

当$x\in[0,\pi]$时,$x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$,因为函数$y=\cos t$在$t\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$上的单调递增区间是$\left[\pi,\frac{7\pi}{6}\right]$,由$\pi\leqslant x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{7\pi}{6}$,得$\frac{5\pi}{6}\leqslant x\leqslant\pi$.故函数$f(x)$在$[0,\pi]$上的单调递增区间为$\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$.

(2)由题意,平移后得到$y=\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象,故$g(x)=2\sqrt{3}\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1$.

由$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,得$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$,所以$\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$.故$g(x)\in[-2,2\sqrt{3}+1]$.

20.**解**：(1)因为在一次振动中,小球从最高点运动至最低点所用时间为1s,所以$T=2=\frac{2\pi}{\omega}$,得$\omega=\pi$.

因为最高点与最低点的距离为10cm,所以$A=\frac{10}{2}=5$.

所以$h=5\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$,$t\in[0,+\infty)$.

(2)由题意,当$t=\frac{1}{4}$时,小球第一次到达最高点,以后每隔一个周期都到达一次最高点,因为小球在t_0s内经过最高点的次数恰为50次,所以$\frac{1}{4}+49T\leqslant t_0<\frac{1}{4}+50T$,其中$T=2$,所以$98\frac{1}{4}\leqslant t_0<100\frac{1}{4}$.

故t_0的取值范围为$\left[98\frac{1}{4},100\frac{1}{4}\right)$.

21.**解**：(1)由题意,可知$A=50$,$h=60$,$T=6$,

所以$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{3}$,故$f(t)=50\sin\left(\frac{\pi}{3}t+\varphi\right)+60$.

因为$f(0)=10$,得$\sin\varphi=-1$,又$|\varphi|<\pi$,所以$\varphi=-\frac{\pi}{2}$.

所以$f(t)=50\sin\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{2}\right)+60=-50\cos\frac{\pi t}{3}+60$.

所以$f(2017)=-50\cos\frac{\pi\times2017}{3}+60=-50\cos\frac{\pi}{3}+60=35$,

故 2017min 时点 P 距离地面的高度为 35m.

(2)由(1)知$f(t)=-50\cos\frac{\pi t}{3}+60$,

令$f(t)\geqslant60+25\sqrt{3}$,得$\cos\frac{\pi t}{3}\leqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}$,可得在一个周期内,$\frac{5\pi}{6}\leqslant\frac{\pi t}{3}\leqslant\frac{7\pi}{6}$,解得$\frac{5}{2}\leqslant t\leqslant\frac{7}{2}$,

因为$\frac{7}{2}-\frac{5}{2}=1$，所以转一圈中有1min时间可以看到公园全貌.

22.**解**：(1)由图可知,$f(t)$的最大值为7,最小值为3,所以$\begin{cases}A+k=7,\\-A+k=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}A=2,\\k=5.\end{cases}$

又最小正周期$T=2\times(8-2)=\frac{2\pi}{\omega}$,解得$\omega=\frac{\pi}{6}$.

当$x=2$时,$f(t)$取得最大值,所以$\frac{\pi}{6}\times2+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,

得$\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,

又$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=\frac{\pi}{6}$.

所以$f(t)=2\sin\left(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{6}\right)+5$,$t\in[0,24)$.

(2)①由题意,令$f(t)\geqslant4.5+1.5$,得$\sin\left(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{6}\right)\geqslant\frac{1}{2}$,

所以$\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,

得$12k\leqslant t\leqslant4+12k$,$k\in\mathbf{Z}$.

因为$t\in[0,24)$,所以$0\leqslant t\leqslant4$,或$12\leqslant t\leqslant16$.

所以该船满载时一天之内0点到4点或12点到16点能安全进出港口.

②由题意,令$f(t)\geqslant2.5+1.5$,得$\sin\left(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{6}\right)\geqslant-\frac{1}{2}$,

所以$-\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{7\pi}{6}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,

得$-2+12k\leqslant t\leqslant6+12k$,$k\in\mathbf{Z}$.

又$t\in[0,24)$,所以$0\leqslant t\leqslant6$,或$10\leqslant t\leqslant18$,或$22\leqslant t<24$.

因为该船凌晨3点准备离港,所以最迟在5:30之前离港才能确保安全.