22.**解**:(1)由已知,得$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}$,即$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$,解得$a=3$.所以$f(x)=3^x$,$F(x)=-3^{x+1}+10-m$.

因为$F(x)$是单调函数,且在区间$(0,2)$内存在零点,

所以$F(0)F(2)<0$,即$(7-m)(-17-m)<0$,

解得$-17<m<7$.

所以实数m的取值范围为$(-17,7)$.

(2)由(1)及已知条件,可得$g(x)+h(x)=3^x$,

且$g(-x)+h(-x)=-g(x)+h(x)=3^{-x}$,

解得$g(x)=\frac{3^x-3^{-x}}{2}$,$h(x)=\frac{3^x+3^{-x}}{2}$.

因为$x\in(0,1]$时,$2\ln[h(x)]-\ln[g(x)]-t\geqslant 0$恒成立,

所以$t\leqslant\ln\frac{[h(x)]^2}{g(x)}=\ln\frac{(3^x-3^{-x})^2+4}{2(3^x-3^{-x})}$在$x\in(0,1]$上恒成立.

设$u=3^x-3^{-x}$,可知u为$\mathbf{R}$上的增函数,

又$0<x\leqslant 1$,所以$0<u\leqslant\frac{8}{3}$.

所以$t\leqslant\ln\frac{u^2+4}{2u}=\ln\left[\frac{1}{2}\left(u+\frac{4}{u}\right)\right]$在$u\in\left(0,\frac{8}{3}\right]$上恒成立.

因为$u+\frac{4}{u}\geqslant 2\sqrt{u\cdot\frac{4}{u}}=4$,当且仅当$u=\frac{4}{u}$,即$u=2$时,等号成立,所以$t\leqslant\ln 2$.

故实数t的取值范围为$(-\infty,\ln 2]$.

第 12 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B

提示:由题意,得$\alpha=30°$,与α终边相同的角为$\beta=30°+k\cdot 360°$,$k\in\mathbf{Z}$,当$k=-1$时,$\beta=-330°$.故选B.

2.D

提示:因为α是钝角,所以$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$,得$-\frac{\pi}{2}<-\frac{\alpha}{2}<-\frac{\pi}{4}$,所以$-\frac{\alpha}{2}$是第四象限角.故选D.

3.C

提示:对于A,$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$,故A错误;对于B,$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,故B错误;对于C,$\sin\alpha=-\frac{1}{2}$,故C正确;对于D,$\sin\alpha=\frac{1}{2}$,故D错误.故选C.

4.A

提示:由诱导公式可知,$\sin(-x)=-\sin x$,$\sin(\pi+x)=-\sin x$,$\tan(-x)=-\tan x$,$\cos(\pi+x)=-\cos x$,故选A.

5.D

提示:①$\sin 201°=-\sin 21°<0$;②$\cos\left(-\frac{23\pi}{4}\right)=\cos\frac{23\pi}{4}=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)>0$;③$\cos 940°=-\cos 40°<0$;④$\sin 1°>0$.故选D.

6.B

提示:$\cos 1620°=\cos(4\times 360°+180°)=\cos 180°=-1$.故选B.

7.B

提示:因为$\sin 25°=a$,所以$\cos 115°=\cos(90°+25°)=-\sin 25°=-a$,

$\tan 205°=\tan(180°+25°)=\tan 25°=\frac{\sin 25°}{\cos 25°}=\frac{\sin 25°}{\sqrt{1-\sin^2 25°}}=\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$.

所以$\cos 115°\tan 205°=-\frac{a^2}{\sqrt{1-a^2}}$.故选B.

8.C

提示:因为角α的终边与角β的终边关于x轴对称,所以$\alpha+\beta=2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$.

故有$\sin\alpha=\sin(2k\pi-\beta)=-\sin\beta$,$\cos\alpha=\cos(2k\pi-\beta)=\cos\beta$.故选C.

二、多项选择题

9.AD

提示:当$k=3n$,$n\in\mathbf{Z}$时,α的终边落在x轴的非负半轴上;当$k=3n+1$,$n\in\mathbf{Z}$时,α的终边落在第二象限;当$k=3n+2$,$n\in\mathbf{Z}$时,α的终边落在第三象限,则终边不会出现在第一象限和第四象限.故选AD.

10.ACD

提示:由于$\frac{\pi}{2}<2<\pi$,故$\sin 2>0$,$\cos 2<0$,$\tan 2=\frac{\sin 2}{\cos 2}<0$.故选ACD.

11.BC

提示:设扇形原来的半径为r,弧长为l,则圆心角$\alpha=\frac{l}{r}$,面积$S=\frac{1}{2}lr$.

变化后扇形的半径为$2r$,弧长为$2l$,则圆心角$\alpha'=\frac{2l}{2r}=\frac{l}{r}=\alpha$,面积$S'=\frac{1}{2}\cdot 2l\cdot 2r=2lr=4S$.故选BC.

12.AC

提示:由$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha=-\frac{1}{4}$,得$\sin\alpha=\frac{1}{4}$.若$\alpha$与$\beta$“广义互余”,则$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$,即$\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$,所以$\sin\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$,$\cos\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=\frac{1}{4}$,$\cos(\pi+\beta)=-\cos\beta=-\frac{1}{4}$,$\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\pm\sqrt{15}$.结合选项可知选AC.

三、填空题

13.$\left[-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right]$,$k\in\mathbf{Z}$

提示:由图可得,角θ的集合是$\left[-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right]$,$k\in\mathbf{Z}$.

14.$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

提示:原式$=\cos 30°-\sin 30°-\tan\frac{\pi}{3}+0=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-\sqrt{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

15.四

提示:由$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta>0$,得$\sin\theta<0$;

由$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta<0$,得$\cos\theta>0$,

所以θ是第四象限角.

16.$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$

提示:由点$P(\tan\alpha,\sin\alpha-\cos\alpha)$在第一象限,可得$\begin{cases}\tan\alpha>0,\\\sin\alpha>\cos\alpha,\end{cases}$结合三角函数的定义及$0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$,可得$\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$.

四、解答题

17.**解**:$-1560°=240°-5\times 360°$,与$-1560°$角终边相同的角的集合为$\{\alpha|\alpha=240°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

(1)最小的正角为$240°$;

(2)最大的负角为$-120°$;

(3)$360°$~$720°$内的角为$600°$.

18.**解**:(1)由题意知$\beta=45°+k\cdot 360°$,$k\in\mathbf{Z}$,令$-720°\leqslant 45°+k\cdot 360°\leqslant 0°$,解得$-\frac{765}{360}\leqslant k\leqslant-\frac{45}{360}$,从而$k=-2$,或$k=-1$,所以$\beta=-675°$,或$\beta=-315°$.

(2)因为集合$M=\left\{x\left|x=\frac{k}{2}\cdot 180°+45°,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}=\{x|x=(2k+1)\cdot 45°,k\in\mathbf{Z}\}$表示终边落在四个象限的平分线上的角的集合,$N=\left\{x\left|x=\frac{k}{4}\cdot 180°+45°,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}=\{x|x=(k+1)\cdot 45°,k\in\mathbf{Z}\}$表示终边落在坐标轴或四个象限平分线上的角的集合,所以$M\subsetneqq N$.

19.**解**:(1)因为α是第四象限角,且α的终边在直线$y=-2x$上,所以点$P(1,-2)$在α的终边上,所以$\sin\alpha=\frac{-2}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$\tan\alpha=\frac{-2}{1}=-2$.

(2)原式$=\frac{(-\sin\alpha)(-\sin\alpha)\cos\alpha}{-\cos\alpha(-\tan\alpha)}=\sin\alpha\cos\alpha$

$=-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=-\frac{2}{5}$.

20.**解**:(1)由$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$,

得$\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2+\left(\frac{3a-1}{1+a}\right)^2=1$,解得$a=\frac{1}{9}$,或$a=1$.

因为$\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,所以$\sin\theta=\frac{1-a}{1+a}>0$,且$\cos\theta=\frac{3a-1}{1+a}<0$,解得$a\in\left(-1,\frac{1}{3}\right)$.综上,$a=\frac{1}{9}$.

(2)由(1)得$\sin\theta=\frac{4}{5}$,$\cos\theta=-\frac{3}{5}$,

故$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{4}{3}$.

故$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\frac{1}{\tan(\pi-\theta)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}-\frac{1}{\tan\theta}$

$=\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}-\frac{1}{\tan\theta}=-\frac{2}{\tan\theta}=\frac{3}{2}$.

21.**解**:(1)因为$\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{12}{25}$,

所以$\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=-\frac{25}{12}$.

(2)由已知可得$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=1-2\times\left(-\frac{12}{25}\right)=\frac{49}{25}$.

因为α是第二象限角,所以$\sin\alpha>0$,$\cos\alpha<0$,即$\sin\alpha-\cos\alpha>0$,所以$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{7}{5}$.

又$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$,联立两式,解得$\sin\alpha=\frac{4}{5}$,$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$.

所以$\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin^2\alpha(2\cos\alpha-\sin\alpha)}$

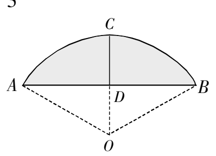
$=\frac{2\times\frac{4}{5}+\left(-\frac{3}{5}\right)}{\left(\frac{4}{5}\right)^2\times\left[2\times\left(-\frac{3}{5}\right)-\frac{4}{5}\right]}=-\frac{25}{32}$.

22.**解**:(1)由题意,如下图所示,可知$\angle AOB=\frac{2\pi}{3}$,$CD=2$,

设圆弧的半径为R,则$OD=R\cos\frac{\pi}{3}=\frac{R}{2}$,所以$CD=OC-OD=R-\frac{R}{2}=2$,解得$R=4$.

所以$OD=2$,$AB=2AD=4\sqrt{3}$,

所以弧田的面积$S=S_{扇形}-S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\times 4^2-\frac{1}{2}\times 2\times 4\sqrt{3}=\frac{16\pi}{3}-4\sqrt{3}$.



(第 22 题图)

(2)由题意知扇形周长$c=\alpha r+2r\Rightarrow r=\frac{c}{\alpha+2}$,

所以扇形面积$S=\frac{1}{2}\alpha r^2=\frac{1}{2}\alpha\cdot\left(\frac{c}{\alpha+2}\right)^2=\frac{1}{2}\alpha\cdot\frac{c^2}{\alpha^2+4\alpha+4}=\frac{c^2}{2\left(\alpha+\frac{4}{\alpha}\right)+8}\leqslant\frac{c^2}{4\sqrt{\alpha\cdot\frac{4}{\alpha}}+8}=\frac{c^2}{16}$,

当且仅当$\alpha=\frac{4}{\alpha}$,即$\alpha=2$时,等号成立.故当α为2弧度时,该扇形面积最大.

扫码免费下载习题讲解 ppt

第 9 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.D

提示:由$2^x=3$,得$x=\log_2 3=\frac{\lg 3}{\lg 2}$.故选D.

2.B

提示:因为$a\log_2 3=6$,所以$\log_2 3^a=6$,即$3^a=2^6$,所以$(\sqrt{3})^a=2^3=8$.故选B.

3.B

提示:当$a=1$,$b=0$时,$\sqrt{a}>\sqrt{b}$成立,但$\log_2 a>\log_2 b$不成立,充分性不成立;若$\log_2 a>\log_2 b$,则$a>b>0$,所以$\sqrt{a}>\sqrt{b}$,必要性成立,故选B.

4.A

提示:$a=\log_{\frac{1}{2}}3<0$,$b=\ln\pi>\ln e=1$,$0<c=e^{-\frac{1}{2}}<1$,所以$b>c>a$.故选A.

5.A

提示:因为该函数的定义域为$\{x|x\neq-1\}$,所以排除B,C,D,故选A.

6.B

提示:要使函数$f(x)$有意义,则$6+x-2x^2>0$,解得$-\frac{3}{2}<x<2$,故$f(x)$的定义域是$\left(-\frac{3}{2},2\right)$.

令$t=-2x^2+x+6$,则函数t在$\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right)$上单调递增,在$\left[\frac{1}{4},2\right)$上单调递减,又函数$y=\log_{\frac{1}{2}}t$在定义域上单调递减,由复合函数的单调性知$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(6+x-2x^2)$的单调递增区间是$\left[\frac{1}{4},2\right)$.故选B.

7.A

提示:由已知,得$-1\leqslant 2\log_{\frac{1}{2}}x\leqslant 1$,

即$-1\leqslant\log_{\frac{1}{2}}x^2\leqslant 1$,所以$\frac{1}{2}\leqslant x^2\leqslant 2$.

再由$x>0$,得$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.故选A.

8.A

提示:根据题意知$f(x)=\log_a(-4x^2+\log_a x)<0$对$\forall x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$恒成立.

当$a>1$时,$\forall x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$,$-4x^2<0$,$\log_a x<0$,所以$-4x^2+\log_a x<0$,$f(x)$无意义,不满足题意;

当$0<a<1$时,可得$-4x^2+\log_a x>1$对$\forall x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$恒成立,即$\log_a x>4x^2+1$,

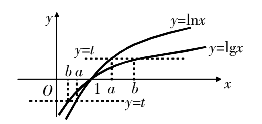
结合单调性可知,只需$\log_a\frac{1}{2}\geqslant 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+1$,

解得$a\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant a<1$.故选A.

二、多项选择题

9.ABD

提示:在同一平面直角坐标系中画出$y=\ln x$与$y=\lg x$的大致图象,如图所示,令$\ln a=\lg b=t$,当$a=b=1$时,$\ln a=\lg b=0$,故A正确;当$a>1$,$b>1$时,$1<a<b$,故B正确;当$a<1$,$b<1$时,$b<a<1$,故C错误,D正确.故选ABD.



(第 9 题图)

10.BD

提示:由图可知,函数$y=\log_a(x+c)$在定义域内为减函数,所以$0<a<1$;又当$x=0$时,$y>0$,即$\log_a c>0$,故$0<c<1$.故选BD.

11.ACD

提示:由题意,知$x,y,z>0$,设$2^x=4^y=6^z=k>1$,则$x=\log_2 k=\frac{\lg k}{\lg 2}$,$y=\log_4 k=\frac{\lg k}{\lg 4}$,$z=\log_6 k=\frac{\lg k}{\lg 6}$.

因为$\frac{x}{y}=\frac{\lg k}{\lg 2}\times\frac{\lg 4}{\lg k}=2$,所以$x=2y$,故A正确,B错误;因为$\frac{x}{3z}=\frac{\lg k}{\lg 2}\times\frac{\lg 6}{3\lg k}=\frac{\lg 6}{\lg 8}<1$,所以$x<3z$,故C正确;因为$\frac{y}{3z}=\frac{\lg k}{\lg 4}\times\frac{\lg 6}{3\lg k}=\frac{\lg 6}{\lg 64}<1$,所以$y<3z$,故D正确.故选ACD.

12.BCD

提示:由$\begin{cases}x-2>0,\\6-x>0,\end{cases}$得$f(x)$的定义域为$(2,6)$.又$f(x)=\ln(x-2)+\ln(6-x)=\ln[(x-2)(6-x)]$,令$t=(x-2)(6-x)$,则$y=f(x)=\ln t$.因为二次函数$t=(x-2)(6-x)$的图象的对称轴为$x=4$,且开口向下,又$f(x)$的定义域为$(2,6)$,$y=\ln t$在定义域上单调递增,所以$f(x)$的图象关于直线$x=4$对称,且在$(2,4)$上单调递增,在$(4,6)$上单调递减,故$f(x)$无最小值,最大值为$f(4)=2\ln 2$.故选BCD.

三、填空题

13.$f_4(x)=2^x$

提示:由指数函数增长最快,可知最终跑在最前面的人具有的函数关系是$f_4(x)=2^x$.

14.2

提示:因为函数$f(x)$的图象与函数$y=a^x(a>0$,且$a\neq 1)$的图象关于直线$y=x$对称,所以$f(x)=\log_a x$,把点$P(4,2)$代入上式,得$\log_a 4=2$,解得$a=2$.

15.5

提示:由已知,结合对数函数$y=\log_a x$过定点$(1,0)$,得$2k-5=1$,且$b=2$,所以$k=3$,故$k+b=5$.

16.$[2,3)$

提示:令$g(x)=x^2-ax+2(a>0$,且$a\neq 1)$,

当$a>1$时,由题意可得$g(x)$在$(-\infty,1]$上单调递减且大于0,所以$\begin{cases}\frac{a}{2}\geqslant 1,\\g(1)=1^2-a+2>0,\end{cases}$解得$2\leqslant a<3$;

当$0<a<1$时,则$g(x)$在$(-\infty,1]$上不具有单调性,不符合题意.

综上,a的取值范围为$[2,3)$.

四、解答题

17.**解**:(1)原式$=\frac{1}{4}-\left(\frac{2}{3}\right)^{3\times\left(-\frac{2}{3}\right)}+\frac{3}{2}\log_2 2$

$=\frac{1}{4}-\frac{9}{4}+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$.

(2)原式$=\log_3\frac{6^2}{4}+\lg 5\times(\lg 5+2\lg 2)+(\lg 2)^2=\log_3 9+(\lg 5)^2+2\lg 5\times\lg 2+(\lg 2)^2=2+(\lg 5+\lg 2)^2=2+1=3$.

18.**解**:(1)因为$3^a=5$,所以$27^a=(3^3)^a=(3^a)^3=5^3=125$.

因为$b=\log_{25}3=\frac{\log_5 3}{\log_5 25}=\frac{1}{2}\log_5 3=\log_5\sqrt{3}$,

所以$5^b=5^{\log_5\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.所以$27^a+5^b=125+\sqrt{3}$.

(2)因为$3^a=5$,所以$a=\log_3 5$.

又由(1)可知$b=\log_{25}3=\frac{1}{2}\log_5 3$,

所以$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)$

$=\left(\log_3 5+\frac{1}{\log_{25}3}\right)\left(\log_{25}3+\frac{1}{\log_3 5}\right)$

$=(\log_3 5+\log_3 25)\left(\frac{1}{2}\log_5 3+\log_5 3\right)$

$=3\log_3 5\times\frac{3}{2}\log_5 3$

$=3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$.

19.**解**:(1)将$x=-1$代入方程,得$1-(\lg a)^2-(1-\lg a)+2=0$,

即$(\lg a)^2-\lg a-2=0$,解得$\lg a=2$,或$\lg a=-1$,

所以$a=100$,或$a=\frac{1}{10}$.

(2)若方程只有一解,当$1-(\lg a)^2=0$,即$\lg a=\pm 1$时,若$\lg a=1$,则原方程为$2=0$,无解;若$\lg a=-1$,则原方程为$2x+2=0$,解得$x=-1$,满足题意,此时$a=\frac{1}{10}$.

当$1-(\lg a)^2\neq 0$,即$\lg a\neq\pm 1$时,

由已知得$\Delta=(1-\lg a)^2-8[1-(\lg a)^2]=0$,

即$9(\lg a)^2-2\lg a-7=0$,解得$\lg a=1$(舍去),或$\lg a=-\frac{7}{9}$.所以$a=10^{-\frac{7}{9}}$.

综上,$a=\frac{1}{10}$,或$a=10^{-\frac{7}{9}}$.

20.**解**:(1)对于$f(x)=\log_a(x+2)-1$,令$x+2=1$,得$x=-1$,$f(-1)=-1$.所以定点M的坐标为$(-1,-1)$.

(2)因为$f(x)$在$[0,1]$上的最大值和最小值互为相反数,且$f(x)$在$[0,1]$上具有单调性,

所以$f(0)+f(1)=0$,即$\log_a 2-1+\log_a 3-1=0$,即$\log_a 6=2$,解得$a=\sqrt{6}$.

(3)若$y=f(x)$的图象不经过第二象限,则$\begin{cases}a>1,\\\log_a 2-1\leqslant 0,\end{cases}$解得$a\geqslant 2$.所以$a$的取值范围为$[2,+\infty)$.

21.**解**:(1)由题意可得$3-ax>0$,即$ax<3$,又$a>0$,所以$x<\frac{3}{a}$.故$f(x)$的定义域为$\left(-\infty,\frac{3}{a}\right)$.

(2)假设存在实数a,使函数$f(x)$在区间$[1,2]$上单调递减,并且最大值为2.

设函数$g(x)=3-ax$,由$a>0$,得$g(x)$在区间$[1,2]$上单调递减,

又$g(x)>0$在区间$[1,2]$上恒成立,则$g(2)=3-2a>0$,解得$0<a<\frac{3}{2}$.

因为$f(x)$在区间$[1,2]$上单调递减,

所以$a>1$,即$1<a<\frac{3}{2}$.

又因为$f(x)$在区间$[1,2]$上的最大值为2,

所以$f(1)=\log_a(3-a)=2$,即$a^2=3-a$,

解得$a=\frac{\sqrt{13}-1}{2}$(舍去负值).

因为$3<\sqrt{13}<4$,所以$\frac{\sqrt{13}-1}{2}\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$,

所以存在实数$a=\frac{\sqrt{13}-1}{2}$满足题意.

22.**解**:(1)令$t=\log_4 x$,$x\in[1,16]$,则$t\in[0,2]$,函数转化为$y=(2t-2)\left(t+\frac{1}{2}\right)=2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$,

可知当$t=\frac{1}{4}$时,$y_{\min}=-\frac{9}{8}$;当$t=2$时,$y_{\max}=5$.

故当$x\in[1,16]$时,该函数的值域为$\left[-\frac{9}{8},5\right]$.

(2)$f(x)<m\log_4 x$对于$x\in[4,16]$恒成立,

即$(2\log_4 x-2)\left(\log_4 x+\frac{1}{2}\right)<m\log_4 x$对于$x\in[4,16]$恒成立,

设$t=\log_4 x$,$x\in[4,16]$,则$t\in[1,2]$,

即$(2t-2)\left(t+\frac{1}{2}\right)<mt$对于$t\in[1,2]$恒成立,

即$m>2t-\frac{1}{t}-1$对于$t\in[1,2]$恒成立.

因为函数$y=2t$及$y=-\frac{1}{t}$在$[1,2]$上均单调递增,

所以函数$y=2t-\frac{1}{t}-1$在$[1,2]$上单调递增,

所以此函数的最大值为$2\times 2-\frac{1}{2}-1=\frac{5}{2}$.

所以$m>\frac{5}{2}$,

即实数m的取值范围为$\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$.

③ **第10期**

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B

提示：因为函数图象与x轴的交点为$(2,0)$，所以函数$f(x)$的零点为2.故选B.

2.C

提示：当$x>0$时，由$f(x)=x\ln(x+1)=0$，解得$x=0$(舍去)；当$x\leqslant0$时，由$f(x)=2x^2-3x-2=0$，解得$x=2$(舍去)，或$x=-\frac{1}{2}$.故选C.

3.B

提示：由题得$f(1)f(2)<0$，$f(1.5)f(2)<0$，$f(1.75)f(2)<0$，即$f(x)$在$(1.75,2)$内存在一个零点，故方程$x^3+2x-9=0$的一个近似根x所在区间为$(1.75,2)$.故选B.

4.C

提示：因为第一次所取区间为$[-2,6]$，所以第二次所取区间可能为$[-2,2]$，$[2,6]$，第三次所取区间可能为$[-2,0]$，$[0,2]$，$[2,4]$，$[4,6]$.故选C.

5.C

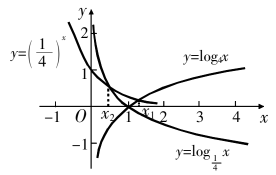
提示：由于每等分一次，零点所在区间的长度变为原来的$\frac{1}{2}$，故等分n次后的区间长度变为原来的$\frac{1}{2^n}$，由题意可得$\frac{1}{2^n}<0.01$，即$2^n>100>2^6$，所以$n>6$，故至少等分7次.故选C.

6.D

提示：设$f(x)=x^2$，则$f(0)=0$，即$f(x)$在区间$[-2,2]$上有零点，但$f(-2)f(2)>0$，充分性不成立；设$f(x)=\begin{cases}-1,-2\leqslant x\leqslant0,\\1,0<x\leqslant2,\end{cases}$则$f(-2)f(2)=-1<0$，但$f(x)$在$[-2,2]$上无零点，必要性不成立.故选D.

7.B

提示：由题意可得x_1是$y=\log_4x$的图象和$y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$的图象的交点的横坐标，$x_2$是$y=\log_{\frac{1}{4}}x$的图象和$y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$的图象的交点的横坐标，且$x_1,x_2$都是正实数，如图所示，可知$\log_{\frac{1}{4}}x_2>\log_4x_1$，得$\log_4x_1+\log_4x_2<0$，即$\log_4(x_1x_2)<0$，所以$0<x_1x_2<1$.故选B.



(第7题图)

8.B

提示：由题意得$\begin{cases}6.25=3^{a+b},\\2.25=3^{3a+b},\end{cases}$两式相除，可得$3^a=\frac{3}{5}$，则$3^b=\frac{5}{3}\times6.25$.令$3^{at+b}\leqslant0.1$，即$(3^a)^t\cdot3^b\leqslant0.1$，得$\left(\frac{3}{5}\right)^t\leqslant\frac{0.1}{\frac{5}{3}\times6.25}\approx0.010$，所以$t\geqslant9$.故选B.

二、多项选择题

9.CD

提示：对于A，B，易知函数有零点且在零点左右函数值的符号相反，可以用二分法求零点的近似值；对于C，D，$y=\frac{1}{2}x^2+4x+8=\frac{1}{2}(x+4)^2\geqslant0$，$y=|x|\geqslant0$，有零点，但不能用二分法求零点的近似值，故选CD.

10.AC

提示：因为$f(1.25)f(1.5)<0$，所以$f(x)$在区间$(1.25,1.5)$内存在零点.因为$f(1.375)f(1.5)<0$，所以零点在区间$(1.375,1.5)$内.因为$f(1.375)f(1.4375)<0$，所以零点在区间$(1.375,1.4375)$内，又$|1.4375-1.375|=0.0625<0.1$，所以区间$[1.375,1.4375]$内的任意实数均可以作为精确度为0.1的近似值，则A，C正确，D错误；因为$f(1.40625)f(1.4375)<0$，所以零点在区间$(1.40625,1.4375)$内，又$|1.40625-1.375|=0.03125>0.01$，故B错误.故选AC.

11.AD

提示：易知$f(x)$过点$(1,0)$，则函数$f(x)$有且只有一个零点$\Leftrightarrow$函数$y=2^x-a(x\leqslant0)$没有零点$\Leftrightarrow$函数$y=2^x(x\leqslant0)$的图象与直线$y=a$没有公共点.当$x\leqslant0$时，$y=2^x\in(0,1]$，所以$a\leqslant0$或$a>1$.结合选项可知选AD.

12.BCD

提示：设商品A的单价为x元/件，销售总收入为y万元，则$y=x\left(10-0.5\cdot\frac{x-2}{0.2}\right)=15x-\frac{5}{2}x^2$.令$15x-\frac{5}{2}x^2\geqslant22.4$，解得$2.8\leqslant x\leqslant3.2$.故选BCD.

三、填空题

13.$\frac{5}{8}$

提示：设$f(x)=2x^3+3x-3$，因为$f(0)=-3<0$，$f(1)=2>0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{4}<0$，所以$f\left(\frac{1}{2}\right)f(1)<0$，则零点在区间$\left(\frac{1}{2},1\right)$内；第二次取区间$\left(\frac{1}{2},1\right)$的中点$x_2=\frac{3}{4}$，因为$f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{32}>0$，所以$f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{3}{4}\right)<0$，则零点在区间$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$，则第三次取区间$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$的中点为$x_3=\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{2}=\frac{5}{8}$.

14.$h=-\frac{1}{k}\ln\frac{p}{p_0}$

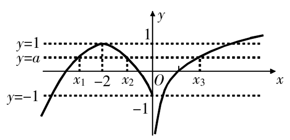
提示：由$p=p_0e^{-kh}$，得$\frac{p}{p_0}=e^{-kh}$，故$h=-\frac{1}{k}\ln\frac{p}{p_0}$.

15.6

提示：由题意，$1.5^n\geqslant10$，所以$n\lg1.5\geqslant1$，所以$n\geqslant\frac{1}{\lg1.5}=\frac{1}{\lg3-\lg2}\approx\frac{1}{0.1761}\approx5.7$.因为$n\in\mathbf{N}$，所以$n$的最小值为6.

16.$\left[-\frac{7}{2},-2\right)$

提示：方程$f(x)=a$有三个不同的实数根等价于函数$y=f(x)$的图象与直线$y=a$有三个交点.画出$f(x)$的图象如图所示，不妨设$x_1<x_2<x_3$，结合图象可得$x_1+x_2=-4$，且$-1\leqslant\log_2x_3<1$，即$\frac{1}{2}\leqslant x_3<2$，所以$-\frac{7}{2}\leqslant x_1+x_2+x_3<-2$.


(第16题图)

四、解答题

17.(1)**解**：当$a=0$时，$f(x)=x^2+2x$，令$f(x)=0$，解得$x=0$，或$x=-2$.所以函数$f(x)$的零点为0或-2.

(2)**证明**：因为$f(x)=2ax^3+x^2+2x+a$，所以$f(-1)=-a-1$，$f(1)=3a+3$，所以$f(-1)f(1)=-3(a+1)^2$.

当$a=-1$时，$f(x)=-2x^3+x^2+2x-1=(2x-1)(1-x^2)$，此时$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，故$f(x)$在区间$(-1,1)$上有零点；

当$a\neq-1$时，$f(-1)f(1)<0$，由零点存在定理可知$f(x)$在区间$(-1,1)$上有零点.

综上，对所有实数a，函数$f(x)$在区间$(-1,1)$上总有零点.

18.**解**：(1)因为函数$y=3^x$是$\mathbf{R}$上的增函数，$y=3x-8$是$\mathbf{R}$上的增函数，

所以$f(x)=3^x+3x-8$是$\mathbf{R}$上的增函数.

又$f(x)$的图象是一条连续不断的曲线，$f(1)=-2<0$，$f(2)=7>0$，即$f(1)f(2)<0$，

所以$f(x)$有且只有一个零点.

(2)由(1)可知$f(x)$在区间$(1,2)$内有且只有一个零点，设零点为x_0，

取区间中点$x_1=1.5$，计算得$f(1.5)=3^{1.5}+3\times1.5-8\approx5.196+4.5-8=1.696>0$，

因为$f(1)f(1.5)<0$，所以$x_0\in(1,1.5)$.

再取区间中点$x_2=1.25$，计算得$f(1.25)=3^{1.25}+3\times1.25-8\approx3.948+3.75-8=-0.302<0$，

因为$f(1.25)f(1.5)<0$，所以$x_0\in(1.25,1.5)$.

同理，可得$f(1.375)=3^{1.375}+3\times1.375-8\approx4.529+4.125-8=0.654>0$，$x_0\in(1.25,1.375)$.

因为$|1.375-1.25|=0.125<0.15$，所以$y=f(x)$在$[1,2]$内函数的零点的近似值可取为1.25.

19.**解**：(1)由$\begin{cases}x+1>0,\\x-1>0,\end{cases}$解得$x>1$，所以$g(x)$的定义域为$(1,+\infty)$.

令$g(x)=0$，得$\log_3(x+1)-\log_3(x-1)-2=0$，即$\log_3\frac{x+1}{x-1}=2$，得$\frac{x+1}{x-1}=9$，解得$x=\frac{5}{4}>1$.所以$g(x)$的零点为$\frac{5}{4}$.

(2)由(1)及题设知$\frac{x+1}{x-1}=\frac{a}{x}$在$x\in(1,+\infty)$上有解，且$a>0$，

所以$a=\frac{x(x+1)}{x-1}=x-1+\frac{2}{x-1}+3\geqslant2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{2}{x-1}}+3=3+2\sqrt{2}$，当且仅当$x-1=\frac{2}{x-1}$，即$x=\sqrt{2}+1$时，等号成立. 所以$a\geqslant3+2\sqrt{2}$，即$a$的取值范围为$[3+2\sqrt{2},+\infty)$.

20.**解**：(1)2017年至2018年增长了40万人，2018年至2019年增长了48万人，增长速度越来越快，符合指数增长模型，故函数模型$y=ka^x(k>0,a>1)$更合适.将$(1,200)$，$(2,240)$代入$y=ka^x(k>0,a>1)$中，可得$\begin{cases}ak=200,\\a^2k=240,\end{cases}$解得$a=\frac{6}{5}$，$k=\frac{500}{3}$，所以该模型的函数解析式为$y=\frac{500}{3}\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^x$.

(2)当三峡大坝游客年游览人数约是2018年的2倍时，游览人数约是480万人，

所以$\frac{500}{3}\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^x=480$，即$\left(\frac{6}{5}\right)^x=\frac{72}{25}$，

得$x=\frac{\lg72-\lg25}{\lg6-\lg5}=\frac{2(\lg6-\lg5)+\lg2}{\lg6-\lg5}$

$=2+\frac{\lg2}{2\lg2+\lg3-1}\approx2+\frac{0.3}{2\times0.3+0.48-1}$

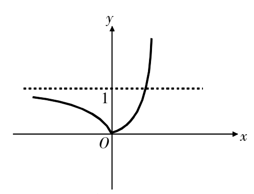
$=5.75\approx6$.

故大约在2022年，三峡大坝游客年游览人数约是2018年的2倍.

21.(1)**证明**：当$m=0$时，$h(x)=f(x)-g(x)=x^2-3-e^x(x<0)$，因为$y=x^2-3$在$(-\infty,0)$上单调递减，$y=-e^x$在$(-\infty,0)$上单调递减，所以$h(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，又$h(-3)=6-\frac{1}{e^3}>0$，$h(-1)=-2-\frac{1}{e}<0$，即$h(-3)h(-1)<0$，所以$h(x)$在$(-\infty,0)$上恰有一个负零点.

(2)**解**：由$f(x)=0$，化简可得$(x-2)(x+m+2)=0$，解得$x=2$，或$x=-(m+2)$.

令$\varphi(x)=f(|g(x)|)=0$，则$|g(x)|=2$，或$|g(x)|=-(m+2)$.作出函数$y=|g(x)|=|e^x-1|$的图象如图所示，因为$|g(x)|=2$只有一个实数根，所以要使函数$\varphi(x)=f(|g(x)|)$恰有三个零点，则$|g(x)|=-(m+2)$有且仅有两个实数根，由图象可得，$0<-(m+2)<1$，解得$-3<m<-2$.故实数m的取值范围为$(-3,-2)$.


(第21题图)

22.**解**：(1)由题意得$(100-x)(1+4x\%)a\geqslant100a(a>0)$，解得$0<x\leqslant75$.

所以调整后的技术人员最多有75人.

(2)由条件①，得$a\left(m-\frac{2x}{25}\right)\geqslant a$，解得$m\geqslant\frac{2x}{25}+1$.

因为$x\in\mathbf{N}_+$，且$45\leqslant x\leqslant75$，所以$\frac{2x}{25}+1$的最大值为$\frac{2\times75}{25}+1=7$，所以$m\geqslant7$.

由条件②，得$(100-x)(1+4x\%)a\geqslant xa\left(m-\frac{2x}{25}\right)$，

两边同时除以ax，得$\left(\frac{100}{x}-1\right)\left(1+\frac{x}{25}\right)\geqslant m-\frac{2x}{25}$，

整理得$m\leqslant\frac{100}{x}+\frac{x}{25}+3$.

因为$\frac{100}{x}+\frac{x}{25}+3\geqslant2\sqrt{\frac{100}{x}\cdot\frac{x}{25}}+3=7$，当且仅当$\frac{100}{x}=\frac{x}{25}$，即$x=50$时，等号成立.

所以$m\leqslant7$.所以$m=7$.所以存在实数$m=7$满足条件.

第11期

第2~3版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.C

提示：原式$=a-1+|1-a|+1-a=a-1+a-1+1-a=a-1$.故选C.

2.D

提示：原式$=[(-3)^3]^{\frac{2}{3}}\times(3^2)^{-\frac{3}{2}}=(-3)^2\times3^{-3}=9\times\frac{1}{27}=\frac{1}{3}$.故选D.

3.B

提示：因为$a^0=1$，所以$y=a^0+3=4$，所以该函数的图象恒过定点$(0,4)$.故选B.

4.B

提示：因为$a>1$，所以$y=a^{x-1}$是增函数，排除C，D；而$y=\log_a(-x)$的定义域为$(-\infty,0)$，且在定义域内为减函数，排除A，故选B.

5.C

提示：因为函数在定义域内为减函数，所以排除B，D.因为$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+y}=\left(\frac{1}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^y$，所以$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$满足题意.故选C.

6.D

提示：因为$f(x)$在定义域$(0,+\infty)$上单调递增，且$f(2)=\ln2-2<0$，$f(3)=\ln3>0$，所以$f(x)$存在唯一零点$x_0\in(2,3)$，所以$m=3$.所以$27^{\frac{1}{m}}+\log_3m=3+1=4$.故选D.

7.A

提示：因为$a=\log_23=\log_2\sqrt[3]{27}$，$b=\log_4x=\log_2\sqrt{x}$，$c=\log_865=\log_2\sqrt[3]{65}$，所以$a<b<c$，得$3<\sqrt{x}<\sqrt[3]{65}$，解得$9<x<65^{\frac{2}{3}}$.故选A.

8.D

提示：因为$f(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\frac{1-2^x}{1+2^x}=-f(x)$，

所以$f(x)$是$\mathbf{R}$上的奇函数，

则不等式$f(a^2-2a-m)+f(1-2a)<0$可化为$f(a^2-2a-m)<f(2a-1)$.(＊)

又$f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}=1-\frac{2}{2^x+1}$，由$y=2^x$是$\mathbf{R}$上的增函数且恒大于0，可得$f(x)$是$\mathbf{R}$上的增函数，

所以(＊)式可转化为$a^2-2a-m<2a-1$，即$m>a^2-4a+1$对$a\in[-1,4]$恒成立，只需$m>(a^2-4a+1)_{\max}$.

因为$a^2-4a+1=(a-2)^2-3$，当$a=-1$时，$(a^2-4a+1)_{\max}=6$，所以$m>6$，结合选项可知选D.

二、多项选择题

9.CD

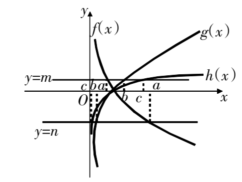
提示：由$2^x\leqslant4$，解得$x\leqslant2$，所以不等式$2^x\leqslant4$成立的充分不必要条件是集合$\{x|x\leqslant2\}$的真子集，故选CD.

10.AD

提示：因为$a=5^{0.6}>5^{0.5}=\sqrt{5}>2$，$0<b=0.6^5<1$，$1=\log_{0.6}0.6<c=\log_{0.6}0.5<\log_{0.6}0.36=2$，$d=\log_50.6<0$，所以最大数为$a$，最小数为$d$.故选AD.

11.ABC

提示：当$f(a)=g(b)=h(c)=0$时，$a=b=c=1$，故B正确；当$f(a)=g(b)=h(c)=m$时，如图所示，此时$a<b<c$，故A正确；当$f(a)=g(b)=h(c)=n$时，如图所示，此时$a>b>c$，故C正确.故选ABC.



(第11题图)

12.ABC

提示：设每小时的油耗为yL，则$y=\frac{1}{5}\left(x-k+\frac{4500}{x}\right)$，当$x=120$时，$y=\frac{1}{5}\left(120-k+\frac{4500}{120}\right)=11.5$，解得$k=100$，所以$y=\frac{1}{5}\left(x-100+\frac{4500}{x}\right)$.令$y\leqslant9$，得$\frac{1}{5}\left(x-100+\frac{4500}{x}\right)\leqslant9$，化简得，$x^2-145x+4500\leqslant0$，解得$45\leqslant x\leqslant100$.又$60\leqslant x\leqslant120$，所以$x$的取值范围为$[60,100]$.故选ABC.

三、填空题

13.$\left(1,\frac{3}{2}\right)$

提示：计算得$f(1)=-1<0$，$f(2)=6>0$，$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{11}{8}>0$，所以$f(1)f\left(\frac{3}{2}\right)<0$，故第二次确定的区间是$\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

14.$\left(\frac{3}{4},1\right]$

提示：要使函数有意义，则$\begin{cases}\log_{0.5}(4x-3)\geqslant0,\\4x-3>0,\end{cases}$解得$\frac{3}{4}<x\leqslant1$.故$f(x)$的定义域是$\left(\frac{3}{4},1\right]$.

15.$(1,3]$

提示：根据题意，可得$a>1$且$a^0\geqslant3a-8$，解得$1<a\leqslant3$.故实数a的取值范围是$(1,3]$.

16.$\frac{17}{12}$

提示：$\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

$=1+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}$

$=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}}$，

舍去$\sqrt{2}-1$得到逼近$\sqrt{2}$的一个有理数为$1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}=\frac{17}{12}$.

四、解答题

17.**解**：(1)由$\log_2(4^x-3)=x+1$，得$4^x-3=2^{x+1}$，即$(2^x)^2-2\cdot2^x-3=0$，即$(2^x+1)(2^x-3)=0$，所以$2^x=3$，则$x=\log_23$.

(2)原式$=(0.4^3)^{-\frac{1}{3}}+(-2)^{-3\times\frac{4}{3}}+(2^4)^{-0.75}-\frac{1}{2}\times\lg10^{-1}-2\log_23\times\log_32=\frac{10}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}-2=\frac{19}{16}$.

18.(1)**证明**：因为$f(x)=2x^3-x^2-3x+1$，所以$f(1)=-1<0$，$f(2)=7>0$，所以$f(1)f(2)=-7<0$，又$f(x)$的图象在$(1,2)$内连续，所以$f(x)$在区间$(1,2)$上存在零点.

(2)**解**：由(1)知，$f(x)$在区间$(1,2)$上存在零点，设零点为x_0，

取区间中点$x_1=1.5$，由表得$f(1.5)>0$，

因为$f(1)f(1.5)<0$，所以$x_0\in(1,1.5)$.

再取区间中点$x_2=1.25$，由表得$f(1.25)<0$，因为$f(1.25)f(1.5)<0$，所以$x_0\in(1.25,1.5)$.

同理，$f(1.375)>0$，$x_0\in(1.25,1.375)$；

$f(1.3125)<0$，$x_0\in(1.3125,1.375)$.

因为$|1.375-1.3125|=0.0625<0.1$，

所以$f(x)=0$的近似解可取为1.3125.

19.**解**：(1)在$f(x)=\log_a(x+2)-1$中，令$x+2=1$，得$x=-1$，$f(-1)=-1$，所以函数$f(x)$的图象恒过定点$A(-1,-1)$，又$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$，所以$g(-1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$.

(2)$F(x)=f(x)-g(x)=\log_a(x+2)-1-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$，因为$F(x)$的图象过点$\left(2,\frac{1}{2}\right)$，所以$F(2)=\log_a4-1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，又$a>0$，且$a\neq1$，解得$a=2$.所以$F(x)=\log_2(x+2)-1-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$.

因为$y=\log_2(x+2)$在定义域上是增函数，$y=-1-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$在定义域上也是增函数，所以$F(x)$在定义域上是增函数.因为$F(1)=\log_23-2$，$F(2)=\frac{1}{2}$，所以$x\in[1,2]$时，$F(x)$的值域为$\left[\log_23-2,\frac{1}{2}\right]$.

20.**解**：(1)$f(x)-\frac{1}{f(x)}=2\Leftrightarrow3^x-\frac{1}{3^x}=2$，即$(3^x)^2-2\cdot3^x-1=0$，解得$3^x=1\pm\sqrt{2}$.

因为$3^x>0$，所以$3^x=1+\sqrt{2}$，解得$x=\log_3(1+\sqrt{2})$.

(2)因为$f(x)=3^x$在$\mathbf{R}$上单调递增，所以关于x的方程$f(ax^2-4x)=9$在区间$[1,2]$上有实数解$\Leftrightarrow ax^2-4x=2$在区间$[1,2]$上有实数解$\Leftrightarrow a=\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x}$在区间$[1,2]$上有实数解.当$x\in[1,2]$时，$\frac{1}{x}\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，则$y=\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x}=2\left(\frac{1}{x}+1\right)^2-2\in\left[\frac{5}{2},6\right]$，所以实数$a$的取值范围为$\left[\frac{5}{2},6\right]$.

21.**解**：(1)对于函数$y=\lg x+kx+1$(k为常数)，当$x=100$时，$y=4$，代入解得$k=\frac{1}{100}$，所以$y=\lg x+\frac{1}{100}x+1$.当$x\in[60,200]$时，$y=\lg x+\frac{1}{100}x+1$是增函数，当$x=200$时，$y=\lg200+2+1\approx5.3<200\times5\%=10$，

所以业绩为200万元的业务员可以得到约5.3万元的奖励.

(2)对于函数$f(x)=\frac{1}{4}x^2-(a-0.05)x+100a-9000$，由题意，可得$f(x)$在$[60,200]$上单调递增，

所以$\frac{a-0.05}{2\times\frac{1}{4}}\leqslant60$，解得$a\leqslant30.05$；且$f(x)\leqslant x\cdot5\%$，得$\frac{1}{4}x^2-ax+100a-9000\leqslant0$对于$x\in[60,200]$恒成立.

记$g(x)=\frac{1}{4}x^2-ax+100a-9000$，则二次函数$g(x)$的图象开口向上，且对称轴方程为$x=2a\leqslant60.1$，所以$g(x)$在$[60,200]$上的最大值为$g(200)=1000-100a\leqslant0$，解得$a\geqslant10$.所以$10\leqslant a\leqslant30.5$.

故实数a的取值范围为$[10,30.5]$.