第 8 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A

提示：$a=\sqrt[3]{(3-\pi)^3}=3-\pi$，$b=\sqrt[4]{(2-\pi)^4}=\pi-2$，所以$a+b=3-\pi+\pi-2=1$.故选A.

2.C

提示：原式$=\left[\left(m^{\frac{5}{2}}\cdot m^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot m^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}$

$=\left(m^{\frac{3}{2}}\cdot m^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=m$.故选C.

3.C

提示：由已知，得$\frac{1}{2a-4}=\frac{1}{a}$，解得$a=4$.故选C.

4.A

提示：设$t=x^2-1$，则$y=\left(\frac{1}{2}\right)^t$.因为$y=\left(\frac{1}{2}\right)^t$在定义域$\mathbf{R}$上是减函数，且函数$t=x^2-1$的单调递减区间是$(-\infty,0]$，所以$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-1}$的单调递增区间是$(-\infty,0]$.故选A.

5.B

提示：因为$a,b\in(0,1)\cup(1,+\infty)$，且当$x<0$时，$b^x>1$，$a^x>1$，所以$0<b<1$，$0<a<1$.又当$x<0$时，$b^x<a^x$，结合指数函数的图象，可知$a<b$，即$0<a<b<1$.故选B.

6.D

提示：$f(x)=|2^x-2|=\begin{cases}2-2^x,x<1,\\2^x-2,x\geqslant 1,\end{cases}$所以$f(x)$在$(-\infty,1)$内单调递减，在$[1,+\infty)$内单调递增，故选D.

7.C

提示：设该湖泊中原来的蓝藻数为a，由题意，得经过30天后的蓝藻数为$a(1+6.25\%)^{30}\approx 6a\Rightarrow(1+6.25\%)^{30}\approx 6$，所以经过60天后的蓝藻数量为$a(1+6.25\%)^{60}=a[(1+6.25\%)^{30}]^2\approx 36a$.所以经过60天后该湖泊的蓝藻数大约为原来的36倍.故选C.

8.B

提示：由题意，得$4^x-(k+1)\cdot 2^x+2>0$在$\mathbf{R}$上恒成立，即$4^x+2>(k+1)\cdot 2^x$在$\mathbf{R}$上恒成立，又$2^x>0$，得$k+1<2^x+\frac{2}{2^x}$在$\mathbf{R}$上恒成立.

因为$2^x+\frac{2}{2^x}\geqslant 2\sqrt{2^x\cdot\frac{2}{2^x}}=2\sqrt{2}$，当且仅当$2^x=\frac{2}{2^x}$，即$x=\frac{1}{2}$时，等号成立，

所以$k+1<2\sqrt{2}$，解得$k<2\sqrt{2}-1$.故选B.

二、多项选择题

9.AD

提示：$a^3\cdot a^4=a^{3+4}=a^7$，故A正确；$(-a^2)^3=-a^6$，故B错误；当$a\geqslant 0$时，$\sqrt[8]{a^8}=a$，当$a<0$时，$\sqrt[8]{a^8}=-a$，故C错误；$\sqrt[5]{(-\pi)^5}=-\pi$，故D正确.故选AD.

10.ACD

提示：因为$y=0.09^x$是减函数，$2.2>1.8>0$，所以$0.09^{2.2}<0.09^{1.8}<1$，即$b<c<1$.又$a=2.01^{1.2}>1$，所以$b<c<a$.故选ACD.

11.AD

提示：函数$y=a^x+b-1(a>0$，且$a\neq 1)$的图象是由函数$y=a^x(a>0$，且$a\neq 1)$的图象向上或向下平移$|b-1|$个单位长度得到的，若$0<a<1$，则函数图象必经过第二象限，不符合题意；若$a>1$，则函数图象不经过第二象限时，需$b-1+1\leqslant 0$，解得$b\leqslant 0$.

故选AD.

12.AC

提示：令$1-x=0$，得$x=1$，此时$f(1)=a^0+1=2$，所以函数$f(x)$恒过定点$(1,2)$，故A正确；因为a的值不确定，所以$f(x)$的单调性无法确定，故B错误；因为$a^{1-x}>0$，所以$a^{1-x}+1>1$，即$f(x)$的值域为$(1,+\infty)$，故C正确；由指数函数的性质可知，函数$f(x)$不具有奇偶性，故D错误.故选AC.

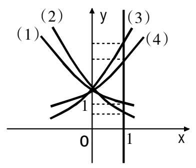
三、填空题

13.4

提示：$\sqrt[3]{x^5}\cdot x^{-1}=x^{\frac{5}{3}}\cdot x^{-1}=x^{\frac{2}{3}}=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2=2^2=4$.

14.$b<a<1<d<c$.

提示：令$x=1$，如图所示，可得$b<a<1<d<c$.



(第 14 题图)

15.$-\frac{3}{2}$

提示：当$a>1$时，$f(x)$在定义域$\mathbf{R}$上是增函数，所以$\begin{cases}f(-1)=a^{-1}+b=-1,\\f(0)=1+b=0,\end{cases}$得$b=-1$，$a$无解，不符合题意，舍去；

当$0<a<1$时，$f(x)$在定义域$\mathbf{R}$上是减函数，所以$\begin{cases}f(-1)=a^{-1}+b=0,\\f(0)=1+b=-1,\end{cases}$解得$b=-2$，$a=\frac{1}{2}$.所以$a+b=-\frac{3}{2}$.

16.$(1,+\infty)$

提示：由已知，可得存在正数x使$a>x+2^x$成立.因为$y=x+2^x$为增函数，$x>0$，所以$y>1$，得$a>1$，所以a的取值范围是$(1,+\infty)$.

四、解答题

17.**解：**(1)原式

$=(0.4^3)^{-\frac{1}{3}}-1+(-2)^{3\times\left(-\frac{4}{3}\right)}+(2^4)^{-0.75}+(0.1^2)^{\frac{1}{2}}$

$=0.4^{-1}-1+(-2)^{-4}+2^{-3}+0.1$

$=2.5-1+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+0.1=\frac{143}{80}$.

(2)原式$=\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}\times 1+2^{\frac{3}{4}}\times 2^{\frac{1}{4}}+\left(2^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{2}}\right)^6-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}}$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}+2^1+2^2\times 3^3-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}=110$.

18.**解：**(1)因为$a>0$，且$a^{2x}=\sqrt{2}-1$，

所以$(a^x+a^{-x})(a^x-a^{-x})=a^{2x}-a^{-2x}$

$=\sqrt{2}-1-\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

$=\sqrt{2}-1-(\sqrt{2}+1)=-2$.

(2)$\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}=\frac{\sqrt{2}-1+1}{\sqrt{2}-1-1}$

$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}=-\sqrt{2}-1$.

(3)$\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{(a^x+a^{-x})(a^{2x}-a^xa^{-x}+a^{-2x})}{a^x+a^{-x}}$

$=a^{2x}-a^xa^{-x}+a^{-2x}=\sqrt{2}-1-1+\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

$=2\sqrt{2}-1$.

19.**解：**(1)当$a=1$时，$f(x)=2^{x^2+4x+2}$.

因为$x^2+4x+2=(x+2)^2-2\geqslant -2$，

所以$f(x)\geqslant 2^{-2}=\frac{1}{4}$.

故$f(x)$的值域为$\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$.

(2)令$t=ax^2+4x+2$，因为指数函数$y=2^t$在其定义域内是增函数，

所以要使$f(x)$有最大值16，则t的最大值为4，

故$a<0$，且$\frac{4a\times 2-4^2}{4a}=4$，解得$a=-2$.

20.**解：**选择条件①，$f(x)=a^x+a^{-x}(a>1)$.

(1)$f(x)$是偶函数，理由如下：

$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，因为$\forall x\in\mathbf{R}$，都有$-x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=a^{-x}+a^x=f(x)$，所以$f(x)$是偶函数.

(2)$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，证明如下：

$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且$x_1<x_2$，

则$f(x_1)-f(x_2)=a^{x_1}+a^{-x_1}-(a^{x_2}+a^{-x_2})$

$=(a^{x_1}-a^{x_2})\cdot\frac{a^{x_1}\cdot a^{x_2}-1}{a^{x_1}\cdot a^{x_2}}$.

因为$a>1$，且$x_1<x_2$，所以$a^{x_1}<a^{x_2}$，即$a^{x_1}-a^{x_2}<0$.

因为$a>1$，且$x_1,x_2\in(0,+\infty)$，所以$a^{x_1}>1$，$a^{x_2}>1$，

得$a^{x_1}a^{x_2}-1>0$，$a^{x_1}a^{x_2}>0$.

所以$f(x_1)-f(x_2)<0$，即$f(x_1)<f(x_2)$.

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

(3)实数m的取值范围是$[-5,-1]\cup[1,5]$.

选择条件②，$f(x)=a^x-a^{-x}(0<a<1)$.

(1)$f(x)$是奇函数，理由如下：

$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，因为$\forall x\in\mathbf{R}$，都有$-x\in\mathbf{R}$，且$f(-x)=a^{-x}-a^x=-f(x)$，所以$f(x)$是奇函数.

(2)$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，证明如下：

$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且$x_1<x_2$，

则$f(x_1)-f(x_2)=a^{x_1}-a^{-x_1}-(a^{x_2}-a^{-x_2})$

$=(a^{x_1}-a^{x_2})\cdot\frac{a^{x_1}\cdot a^{x_2}+1}{a^{x_1}\cdot a^{x_2}}$.

因为$0<a<1$，且$x_1<x_2$，所以$a^{x_1}>a^{x_2}$，即$a^{x_1}-a^{x_2}>0$.

又$a^{x_1}>0$，$a^{x_2}>0$，得$a^{x_1}a^{x_2}>0$，$a^{x_1}a^{x_2}+1>0$.

所以$f(x_1)-f(x_2)>0$，即$f(x_1)>f(x_2)$.

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.

(3)实数m的取值范围是$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

21.**解：**(1)因为$y=f(x)$是奇函数，

所以$f(-x)=-f(x)$，

即$2^{-x}+a\cdot 2^x=-2^x-a\cdot 2^{-x}$，即$(a+1)(2^x+2^{-x})=0$.

因为$2^x+2^{-x}>0$，所以$a+1=0$，解得$a=-1$.

(2)因为$y=f(x)$在$(-\infty,2]$上严格单调递减，

所以对$\forall x_1<x_2\leqslant 2$，都有$f(x_1)-f(x_2)>0$，

即$f(x_1)-f(x_2)=(2^{x_1}-2^{x_2})\left(1-\frac{a}{2^{x_1}\cdot 2^{x_2}}\right)>0$恒成立.

由$2^{x_1}-2^{x_2}<0$，知$1-\frac{a}{2^{x_1}\cdot 2^{x_2}}<0$恒成立，

即$2^{x_1}\cdot 2^{x_2}<a$恒成立.

当$x_1<x_2\leqslant 2$时，$2^{x_1}\cdot 2^{x_2}<16$，所以$a\geqslant 16$，即a的取值范围是$[16,+\infty)$.

22.**解：**(1)由图知$f(x)=a^x+b$是增函数且图象经过点$(0,-2)$和$(2,0)$，

所以$a>1$，且$\begin{cases}a^0+b=-2,\\a^2+b=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\sqrt{3},\\b=-3.\end{cases}$

故$f(x)=(\sqrt{3})^x-3$.

(2)由(1)知$f(x)+3=(\sqrt{3})^x>0$对任意$x\in(-\infty,2]$恒成立，

所以由题设得不等式$c\cdot 10^x+6^x>0$对任意$x\in(-\infty,2]$恒成立，

即$c>-\left(\frac{3}{5}\right)^x$对任意$x\in(-\infty,2]$恒成立.

当$x\in(-\infty,2]$时，因为函数$y=-\left(\frac{3}{5}\right)^x$单调递增，所以$y=-\left(\frac{3}{5}\right)^x$的最大值为$-\left(\frac{3}{5}\right)^2=-\frac{9}{25}$，

所以$c>-\frac{9}{25}$.

故实数c的取值范围为$\left(-\frac{9}{25},+\infty\right)$.

扫码免费下载习题讲解 ppt

第 5 期

第 2~3 版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.B

提示：由题意可得$4\times\frac{x}{0.6}\geqslant 50$.

故选B.

2.A

提示：由数轴知$b<a<0$，则$\frac{1}{ab}>0\Rightarrow\frac{b}{ab}<\frac{a}{ab}\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，即$\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$，故A正确；取$b=-2$，$a=-1$，则$a^2<b^2$，$b-a<0$，$|b|a=|a|b$，故B，C，D错误.故选A.

3.D

提示：因为$a,b>1$且$a\neq b$，由基本不等式可得$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$，而$\frac{a+b}{2}>1$，故$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2>\frac{a+b}{2}$.

由$\frac{a^2+b^2}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(a-b)^2}{4}>0$，得$\frac{a^2+b^2}{2}>\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

故选D.

4.A

提示：由$x^2-2x-8<0$，得$(x-4)(x+2)<0$，所以$-2<x<4$.故选A.

5.A

提示：设矩形菜园的长和宽分别为$x$cm，$y$cm，则$x>0$，$y>0$，且$x+y=18$，所以该菜园的面积$S=xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=81$，当且仅当$x=y=9$时，等号成立.故选A.

6.B

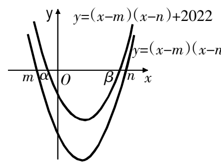
提示：因为$x>0$，$y>0$，且$x+2y=1$，所以$\frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{8}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+2y)=10+\frac{x}{y}+\frac{16y}{x}\geqslant 10+2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{16y}{x}}=18$，当且仅当$\frac{x}{y}=\frac{16y}{x}$，即$x=\frac{2}{3}$，$y=\frac{1}{6}$时，等号成立.故选B.

7.B

提示：由题意，得$\Delta=m^2-4<0$，解得$-2<m<2$.故选B.

8.C

提示：$\alpha,\beta(\alpha<\beta)$是方程$y=0$的两根$\Leftrightarrow\alpha,\beta(\alpha<\beta)$是函数$y=(x-m)(x-n)+2022(m<n)$的零点，显然$m,n$是函数$y=(x-m)(x-n)(m<n)$的零点，因为函数$y=(x-m)(x-n)(m<n)$的图象向上平移2022个单位长度得到函数$y=(x-m)(x-n)+2022(m<n)$的图象，如下图所示，可知$m<\alpha<\beta<n$.故选C.



(第 8 题图)

二、多项选择题

9.AC

提示：不等式$(2x+3)(x-5)>x^2-5x-12$可化为$x^2-2x-3>0$，即$(x+1)(x-3)>0$，解得$x<-1$或$x>3$.原不等式的充分不必要条件即该解集的真子集，结合选项可知选AC.

10.ACD

提示：A显然正确；当$a<0$，$b<0$时，B显然不正确；由基本不等式，得$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$，当且仅当$a=b$时，等号成立，故C正确；因为$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，所以$\frac{2ab}{a+b}\leqslant\frac{2ab}{2\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$，当且仅当$a=b$时，等号成立，故D正确.故选ACD.

11.ABD

提示：对于A，$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}=4$，当且仅当$x=y=2$时，等号成立，故A正确；对于B，由$y>0$，$(x-2)y=1>0$，可知$x-2>0$，所以$x+y=(x-2)+y+2\geqslant 2\sqrt{(x-2)y}+2=4$，当且仅当$x-2=y$，即$x=3$，$y=1$时，等号成立，故B正确；对于C，因为$x^2+y^2=4$，所以$8=2x^2+2y^2=x^2+y^2+x^2+y^2\geqslant x^2+y^2+2xy=(x+y)^2$，则$x+y\leqslant 2\sqrt{2}$，当且仅当$x=y=\sqrt{2}$时，等号成立，故C错误；对于D，由$x^2-5x-y+8=0$，得$y=x^2-5x+8$，所以$x+y=x^2-4x+8=(x-2)^2+4\geqslant 4$，当且仅当$x=2$时，等号成立，故D正确.故选ABD.

12.BD

提示：若原不等式的解集是$\{x|x>3\}$，不等式不可能是一元二次不等式，则$a=0$，不等式为$x+3>0$，解得$x>-3$，故A不满足题意；若原不等式的解集是$\mathbf{R}$，则$a>0$，且$\Delta=1-12a<0$，解得$a>\frac{1}{12}$，故B满足题意；若原不等式的解集是$\varnothing$，则$a<0$，且$\Delta=1-12a\leqslant 0$，此时a的值不存在，故C不满足题意；若原不等式的解集是$\left\{x\middle|-1<x<\frac{3}{2}\right\}$，则$\begin{cases}a<0,\\-1+\frac{3}{2}=-\frac{1}{a},\\-1\times\frac{3}{2}=\frac{3}{a},\end{cases}$解得$a=-2$，故D满足题意.故选BD.

三、填空题

13.右边

提示：$a-b=x^2+y^2+1-2(x+y-1)=x^2+y^2+1-2x-2y+2=(x-1)^2+(y-1)^2+1>0$，所以$a>b$，所以点$A$在点$B$的右边.

14.$\left\{y\middle|-\frac{1}{3}<y<\frac{5}{6}\right\}$

提示：由已知，可得$0<2\alpha<1$，$-\frac{1}{3}<-\frac{\beta}{3}<-\frac{1}{6}$，所以$-\frac{1}{3}<2\alpha-\frac{\beta}{3}<\frac{5}{6}$，即$y$的取值集合是$\left\{y\middle|-\frac{1}{3}<y<\frac{5}{6}\right\}$.

15.$\{a|0\leqslant a<4\}$

提示：由题意，可知对于$\forall x\in\mathbf{R}$，$ax^2+ax+1>0$恒成立.当$a=0$时，$1>0$显然恒成立；

当$a\neq 0$时，需$\begin{cases}a>0,\\\Delta=a^2-4a<0,\end{cases}$解得$0<a<4$.

综上，实数a的取值集合是$\{a|0\leqslant a<4\}$.

16.3

提示：由$x^2-x-6>0$，解得$x>3$或$x<-2$.因为“$x^2-x-6>0$”是“$x>a$”的必要不充分条件，所以$a\geqslant 3$.所以a的最小值为3.

四、解答题

17.**解：**设有x间宿舍，y个学生.根据题意，得$\begin{cases}4x+19=y,\\6(x-1)<y<6x,\end{cases}$解得$9.5<x<12.5$.

因为$x\in\mathbf{Z}$，所以$\begin{cases}x=10,\\y=59,\end{cases}$或$\begin{cases}x=11,\\y=63,\end{cases}$或$\begin{cases}x=12,\\y=67.\end{cases}$

所以宿舍有10间，学生有59人；或宿舍有11间，学生有63人；或宿舍有12间，学生有67人.

18.**证明：**(1)$\frac{a+b}{b}-\frac{c+d}{d}=\frac{d(a+b)-b(c+d)}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}$.

因为$bc-ad\geqslant 0$，所以$ad-bc\leqslant 0$.又$bd>0$，所以$\frac{ad-bc}{bd}\leqslant 0$，即$\frac{a+b}{b}-\frac{c+d}{d}\leqslant 0$.所以$\frac{a+b}{b}\leqslant\frac{c+d}{d}$.

(2)因为$c<d<0$，所以$-c>-d>0$.

又因为$a>b>0$，所以$a-c>b-d>0$.

所以$(a-c)^2>(b-d)^2>0$，故$0<\frac{1}{(a-c)^2}<\frac{1}{(b-d)^2}$.

又$n<0$，所以$\frac{n}{(a-c)^2}>\frac{n}{(b-d)^2}$.

19.**解：**(1)因为$a>0$，$b>0$，且$a+b+ab=3$，

所以$3-ab=a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，

当且仅当$a=b$时，等号成立，

即$3-x\geqslant 2\sqrt{x}$，解得$0<\sqrt{x}\leqslant 1$，

所以$0<x\leqslant 1$.

故x的取值集合为$\{x|0<x\leqslant 1\}$.

(2)由已知，得$a+b=3-ab\geqslant 3-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，

当且仅当$a=b$时，等号成立，

即$y\geqslant 3-\left(\frac{y}{2}\right)^2$，解得$y\leqslant -6$(舍去)，或$y\geqslant 2$.

故y的取值集合为$\{y|y\geqslant 2\}$.

20.**解：**(1)因为集合$B=\{x|x^2+4mx-5m^2<0\}=\{x|-5<x<1\}$，

所以关于x的方程$x^2+4mx-5m^2=0$的两个实数根为-5和1，则有$\begin{cases}-5+1=-4m,\\-5\times 1=-5m^2,\end{cases}$解得$m=1$.

(2)由$x^2-3x-4<0$，得$(x-4)(x+1)<0$，解得$-1<x<4$，所以$A=\{x|-1<x<4\}$.

由$x^2+4mx-5m^2<0$，得$(x+5m)(x-m)<0$.

因为$A\cup B=B$，所以$A\subseteq B$，则$B\neq\varnothing$.

当$m>0$时，$B=\{x|-5m<x<m\}$，

此时有$\begin{cases}-5m\leqslant -1,\\m\geqslant 4,\end{cases}$解得$m\geqslant 4$；

当$m<0$时，$B=\{x|m<x<-5m\}$，

此时有$\begin{cases}m\leqslant -1,\\-5m\geqslant 4,\end{cases}$解得$m\leqslant -1$；

当$m=0$时，$B=\varnothing$，不符合题意.

综上，实数m的取值集合是$\{m|m\leqslant -1$，或$m\geqslant 4\}$.

21.**解：**(1)由$x+y=2\geqslant 2\sqrt{xy}$，可得$xy\leqslant 1$，当且仅当$x=y=1$时，等号成立，

所以$\frac{(x+2)(y+2)}{xy}=\frac{xy+2(x+y)+4}{xy}=1+\frac{8}{xy}\geqslant 9$.

故$\frac{(x+2)(y+2)}{xy}$的最小值为9.

(2)因为$\frac{4}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}(x+y)\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{2}\left(5+\frac{x}{y}+\frac{4y}{x}\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(5+2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{4y}{x}}\right)=\frac{9}{2}$，

当且仅当$x=2y$，即$x=\frac{4}{3}$，$y=\frac{2}{3}$时，等号成立，

所以$\frac{4}{x}+\frac{1}{y}$的最小值为$\frac{9}{2}$.

因为$a\leqslant\frac{4}{x}+\frac{1}{y}$恒成立，所以$a\leqslant\frac{9}{2}$.

故a的最大值为$\frac{9}{2}$.

22.**解：**(1)设售价为x欧元/平方米，销售收入为W万欧元，则$W=x[80-2(x-25)]=-2x^2+130x$.

因为销售收入不低于2000万欧元，所以$W\geqslant 2000$，即$-2x^2+130x\geqslant 2000$，

此不等式可化为$x^2-65x+1000\leqslant 0$，

即$(x-25)(x-40)\leqslant 0$，解得$25\leqslant x\leqslant 40$.

故该种玻璃的售价最多提高到40欧元/平方米.

(2)由题意，可得2021年销售收入为2000万欧元，2022年销售收入为mn(万欧元)，投入之和为$\frac{5}{3}(m^2-600)+500+2m=\frac{5}{3}m^2+2m-500$(万欧元)，要使2022年的销售收入不低于2021年销售收入与2022年投入之和，

则$mn\geqslant 2000+\frac{5}{3}m^2+2m-500=\frac{5}{3}m^2+2m+1500(m>25)$，

所以$n\geqslant\frac{5}{3}m+\frac{1500}{m}+2\geqslant 2\sqrt{\frac{5}{3}m\cdot\frac{1500}{m}}+2=102$，当且仅当$\frac{5}{3}m=\frac{1500}{m}$，即$m=30$时，等号成立.

故销售量至少达到102万平方米时才能满足要求，此时的售价为30欧元/平方米.

第 6 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C

提示:对于A,是两个非空数集之间的关系,且每一个变量x都有唯一的y和其相对应,故是函数关系;同理可知B,D都是函数关系;对于C,每一个x的值,对应的y值不唯一,不是函数关系.故选C.

2.B

提示:要使函数有意义,则$\begin{cases}x-3\neq 0,\\ x-1\geqslant 0,\end{cases}$解得$x\neq 3$且$x\geqslant 1$.所以函数$y$的定义域为$[1,3)\cup(3,+\infty)$.

故选B.

3.C

提示:对于A,函数的定义域为$\{x|x\geqslant 0\}$,而$y=|x|$的定义域为$\mathbf{R}$,故二者不是同一函数;对于B,函数$y=\sqrt[3]{x^3}=x$,与$y=|x|$的对应关系不同,故二者不是同一函数;对于C,$y=|x|=\begin{cases}x,x\geqslant 0,\\ -x,x<0,\end{cases}$二者的定义域相同,对应关系也相同,故是同一函数;对于D,函数的定义域为$\{x|x\neq 0\}$,与$y=|x|$的定义域不同,二者不是同一函数.故选C.

4.C

提示:$f(x)=\frac{2x}{x-1}=\frac{2(x-1)+2}{x-1}=2+\frac{2}{x-1}$,可知$f(x)$在$[2,6]$上是减函数,所以$[f(x)]_{max}=f(2)=4$.

故选C.

5.C

提示:当$x\geqslant 2$时,$f(x)=x(x-2)=x^2-2x=(x-1)^2-1$,可知此时$f(x)$单调递增;当$x<2$时,$f(x)=-x(x-2)=-x^2+2x$,函数图象的对称轴为$x=1$,抛物线开口向下,可知当$1<x<2$时,$f(x)$单调递减,即$f(x)$的单调递减区间为$(1,2)$.故选C.

6.C

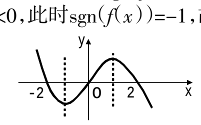
提示:对于A,设$F(x)=f(x)+f(-x)$,可得$F(-x)=f(-x)+f(x)=F(x)$,所以$F(x)$为偶函数,故A不符合;对于B,设$F(x)=f(|x|)$,可得$F(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=F(x)$,所以$F(x)$为偶函数,故B不符合;对于C,设$F(x)=f(x)-f(-x)$,可得$F(-x)=f(-x)-f(x)=-F(x)$,所以$F(x)$为奇函数,故C符合;对于D,设$F(x)=f(x^4)$,可得$F(-x)=f((-x)^4)=f(x^4)=F(x)$,所以$F(x)$为偶函数,故D不符合.故选C.

7.B

提示:由题意,可设$f(x)-2x=c$,则$f(x)=2x+c$,所以$f(c)=2c+c=6$,解得$c=2$,所以$f(x)=2x+2$.所以$f(6)=14$.故选B.

8.C

提示:由符号函数的表达式可知$\mathrm{sgn}(f(x))=\begin{cases}1,f(x)>0,\\ 0,f(x)=0,\\ -1,f(x)<0.\end{cases}$因为$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数,所以$f(x)$的图象关于原点对称,结合当$x\in(0,+\infty)$时,$f(x)=-x^2+2x$,画出$f(x)$的大致图象如图所示,可知当$x<-2$或$0<x<2$时,$f(x)>0$,此时$\mathrm{sgn}(f(x))=1$;当$x=-2,0,2$时,$f(x)=0$,此时$\mathrm{sgn}(f(x))=0$;当$-2<x<0$或$x>2$时,$f(x)<0$,此时$\mathrm{sgn}(f(x))=-1$,故选C.



(第 8 题图)

二、多项选择题

9.BC

提示:当$a\geqslant 0$时,$f(a)=\frac{a}{2}+1=a$,解得$a=2$;当$a<0$时,$f(a)=\frac{2}{a}=a$,解得$a=-\sqrt{2}$,或$a=\sqrt{2}$(舍去).故选BC.

10.AC

提示:对于A,$f(x)=\sqrt{x^2+1}\geqslant 1$,符合题意;对于B,$f(x)=\frac{2x+1}{x+1}=2-\frac{1}{x+1}\neq 2$,不符合题意;对于C,令$t=\sqrt{2x-1}$,则$x=\frac{1+t^2}{2}$且$t\geqslant 0$,所以$y=f(x)=\frac{1+t^2}{2}+1-t=\frac{1}{2}(t^2-2t+3)=\frac{1}{2}(t-1)^2+1\geqslant 1$,符合题意;对于D,$f(x)$的值域为$\mathbf{R}$,不符合题意.故选AC.

11.ABC

提示:由已知,可得$\begin{cases}\frac{k}{2}\geqslant 1,\\ k-1>0,\\ 1-k+10\geqslant k-1,\end{cases}$

解得$2\leqslant k\leqslant 6$,结合选项可知选ABC.

12.BD

提示:因为奇函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,且$f(3)=0$,所以$f(-x)=-f(x)$,$f(-3)=-f(3)=0$,且$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增,所以$\frac{f(x)-f(-x)}{2}=f(x)>0$,当$x>0$时,可得$x>3$;当$x<0$时,可得$-3<x<0$.

故选BD.

三、填空题

13.4

提示:由函数的定义,集合A中的元素在集合B中都有唯一的元素与其对应,从A到B的函数情况有:(1)$f(1)=f(2)=3$;(2)$f(1)=f(2)=4$;(3)$f(1)=3$,$f(2)=4$;(4)$f(1)=4$,$f(2)=3$,共有4个.

14.0

提示:由已知,可得$f(-x)=-f(x)$,即$-ax^3+b=-ax^3-b$,则$b=-b$,得$b=0$.

15.$\frac{9}{2}$

提示:由$f(x)$的图象开口向上,对称轴为$x=1$,可知函数$f(x)$在定义域$[1,b]$上是增函数,所以$f(x)$的最小值为$f(1)=a-\frac{1}{2}=1$,最大值为$f(b)=\frac{1}{2}b^2-b+a=b$,解得$a=\frac{3}{2}$,$b=3$或$b=1$(舍去).所以$a+b=\frac{9}{2}$.

16.$f(x)=x$(答案不唯一)

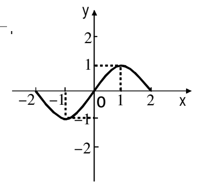
提示:由条件②知$f(x)$为奇函数,由条件③知$f(x)$为增函数,所以$f(x)=x$(答案不唯一).

四、解答题

17.**解:**(1)$f\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)^2+2\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{8}{9}$,

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$.

(2)当$-2\leqslant x<0$时,$f(x)=x^2+2x=(x+1)^2-1$;当$0\leqslant x\leqslant 2$时,$f(x)=-x^2+2x=-(x-1)^2+1$,由此可得$f(x)$的简图如图所示.



(第 17 题图)

(3)由简图可知$f(x)$的值域为$[-1,1]$.

(4)由简图知$f(x)$为奇函数,证明如下:

当$0<x\leqslant 2$时,$-2\leqslant -x<0$,则$f(-x)=(-x)^2+2(-x)=x^2-2x=-f(x)$;

当$-2\leqslant x<0$时,$0<-x\leqslant 2$,则$f(-x)=-(-x)^2+2(-x)=-x^2-2x=-f(x)$.

又$f(0)=0=-f(0)$,所以$f(x)$在定义域$[-2,2]$上是奇函数.

18.**解:**(1)要使函数有意义,则$\begin{cases}x-2\geqslant 0,\\ 3-x\geqslant 0,\end{cases}$解得$2\leqslant x\leqslant 3$.所以函数$y$的定义域为$[2,3]$.

(2)要使函数有意义,则$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0,\\ 2x^2-3x-2\neq 0,\end{cases}$

解得$-2\leqslant x<2$且$x\neq -\frac{1}{2}$.

所以函数y的定义域为$\left[-2,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},2\right)$.

19.(1)**证明:**$\forall x_1,x_2\in(-\infty,0)$,且$x_1<x_2$,

则$f(x_1)-f(x_2)=\left(-\frac{3}{x_1}+1\right)-\left(-\frac{3}{x_2}+1\right)=\frac{3(x_1-x_2)}{x_1x_2}$.

由$x_1,x_2\in(-\infty,0)$,得$x_1x_2>0$;由$x_1<x_2$,得$x_1-x_2<0$.

所以$f(x_1)-f(x_2)<0$,即$f(x_1)<f(x_2)$.

所以$y=f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增.

(2)**解:**因为$y=f(x)$是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上的偶函数,所以$f(x)=f(-x)$.

当$x>0$时,$-x<0$,所以$f(-x)=-\frac{3}{-x}+1=\frac{3}{x}+1=f(x)$,

故当$x>0$时,$f(x)=\frac{3}{x}+1$.

20.**解:**(1)设$f(x)=kx+b\ (k\neq 0)$,则$f(x-1)=k(x-1)+b=2x+a$,得$k=2$,$a=b-k=b-2$.所以$f(x)=2x+a+2$.

若选①:由$f(a)=5$,得$2a+a+2=5$,解得$a=1$.所以$f(x)=2x+3$.

若选②:由$f\left(\frac{1}{2}\right)=4a$,得$1+a+2=4a$,解得$a=1$.所以$f(x)=2x+3$.

若选③:由$4f(1)-2f(2)=6$,得$4(4+a)-2(6+a)=6$,解得$a=1$.所以$f(x)=2x+3$.

(2)由(1)可得$g(x)=xf(x)+\lambda f(x)+x=x(2x+3)+\lambda(2x+3)+x=2x^2+(4+2\lambda)x+3\lambda$,

则$g(x)$的图象开口向上,对称轴为$x=-\frac{2+\lambda}{2}$,

当$-\frac{2+\lambda}{2}\leqslant 1$,即$\lambda\geqslant -4$时,$g(x)$在$[0,2]$上的最大值为$g(2)=16+7\lambda=2$,解得$\lambda=-2$;

当$-\frac{2+\lambda}{2}>1$,即$\lambda<-4$时,$g(x)$在$[0,2]$上的最大值为$g(0)=3\lambda=2$,解得$\lambda=\frac{2}{3}$(舍去).

综上,$\lambda=-2$.

21.**解:**(1)由图可得,当$x<0$时,$f(x)=3$;

当$0\leqslant x\leqslant 4$时,设$f(x)=a(x-2)^2-1$,把点$(1,0)$代入,求得$a=1$,所以$f(x)=(x-2)^2-1$;

当$x>4$时,设$f(x)=mx+n$,把点$(4,3)$,$(5,0)$代入,得$\begin{cases}4m+n=3,\\ 5m+n=0,\end{cases}$解得$m=-3$,$n=15$,所以$f(x)=-3x+15$.

所以$f(x)=\begin{cases}3,x<0,\\ (x-2)^2-1,0\leqslant x\leqslant 4,\\ -3x+15,x>4.\end{cases}$

(2)由$f(x)\leqslant\frac{1}{2}x+1$,当$x<0$时,得$3\leqslant\frac{1}{2}x+1$,

解得$x\geqslant 4$,不符合要求,舍去;

当$0\leqslant x\leqslant 4$时,得$(x-2)^2-1\leqslant\frac{1}{2}x+1$,

解得$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 4$;

当$x>4$时,得$-3x+15\leqslant\frac{1}{2}x+1$,

解得$x\geqslant 4$,则$x>4$.

综上,原不等式的解集为$\left\{x\middle|x\geqslant\frac{1}{2}\right\}$.

22.**解:**(1)因为$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-1,0<x<1,\\ (x-1)^2,x\geqslant 1,\end{cases}$

所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$[1,+\infty)$上单调递增.

由$0<a<b$,且$f(a)=f(b)$,可得$0<a<1<b$,且$\frac{1}{a}-1=(b-1)^2$,故$\left(\frac{1}{a}\right)^2+(b-1)^2=\left(\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{a}-1$.

令$u=\frac{1}{a}$,则$u>1$,函数$y=u^2+u-1$的图象开口向上,对称轴为$u=-\frac{1}{2}$,

所以$y=u^2+u-1$在$(1,+\infty)$上单调递增,

所以$y>1$,即$\left(\frac{1}{a}\right)^2+(b-1)^2$的取值范围为$(1,+\infty)$.

(2)假设存在满足条件的正实数a,b且$a<b$,

当$a,b\in(0,1)$时,$f(x)=\frac{1}{x}-1$在$(0,1)$上单调递减,则$\begin{cases}f(a)=\frac{1}{a}-1=b-1,\\ f(b)=\frac{1}{b}-1=a-1,\end{cases}$解得$ab=1$,与$a,b\in(0,1)$矛盾;

当$a,b\in[1,+\infty)$时,$f(x)=(x-1)^2$在$[1,+\infty)$上单调递增,则$\begin{cases}f(a)=(a-1)^2=a-1,\\ f(b)=(b-1)^2=b-1,\end{cases}$解得$a=1$,或$a=2$,$b=1$,或$b=2$,又$a<b$,所以$a=1$,$b=2$;

当$a\in(0,1)$,$b\in[1,+\infty)$时,由于$a-1<0$,而$f(x)\geqslant 0>a-1$,故此时不存在满足条件的实数a,b.

综上所述,存在满足条件的正实数a,b,且$a=1$,$b=2$.

第 7 期

第 3~4 版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.C

提示:因为$|\pm 2|=2$,而$|-1|\neq 2$,故选C.

2.B

提示:由表得$g(f(2))=g(4)=2$,$g(f(3))=g(2)=4$,$g(f(4))=g(5)=4$,$g(f(5))=g(2)=4$,所以$g(f(x))$的值域为$\{2,4\}$.故选B.

3.B

提示:因为$f(x)=2x+3$,所以$g(x+2)=f(x-1)=2(x-1)+3=2x+1=2(x+2)-3$,所以$g(x)=2x-3$.故选B.

4.B

提示:对于A,定义域为$\{x|x<0\}$,不关于原点对称,不具备奇偶性;对于B,定义域为$\mathbf{R}$,$f(-x)=\frac{2}{x^2+1}=f(x)$,是偶函数;对于C,函数图象不关于$y$轴对称,不是偶函数;对于D,定义域为$\mathbf{R}$,$f(-x)=|x-1|\neq f(x)$,不是偶函数.故选B.

5.C

提示:要使函数有意义,则$x^2-5x+4\geqslant 0$,解得$x\leqslant 1$,或$x\geqslant 4$.又$y=\sqrt{t}$在定义域上是增函数,抛物线$t=x^2-5x+4$的开口向上,对称轴为$x=\frac{5}{2}$,由复合函数的单调性原则,知函数$y=\sqrt{x^2-5x+4}$的单调递增区间是$[4,+\infty)$.故选C.

6.B

提示:由幂函数$y=x^3$在$\mathbf{R}$上是增函数,可知$f(x)=-x^3+m$在$\mathbf{R}$上是减函数,所以$g(x)=f(x)+x^3+x^2-kx=x^2-kx+m$在$[-1,1]$上是减函数,则必有$x=\frac{k}{2}\geqslant 1$,解得$k\geqslant 2$.故选B.

7.C

提示:由题意,该学生离开家的过程中,y随着x的增大而增大;返回家的过程中,y随着x的增大而减小;最后由家乘坐出租车以更快的速度赶往学校的过程中,y随着x的增大而增大,且y增加的速度比第一次离开家增大的快,由此可知选C.

8.D

提示:由已知,当$x>0$时,$-x<0$,所以$f(-x)=(-x-1)^3=-f(x)$,所以$f(x)=(x+1)^3$.

所以$f(x)$在$\mathbf{R}$上是增函数.当$x\in[1,2]$时,$27f(x)=27(x+1)^3=[(3x+2)+1]^3=f(3x+2)$,

所以$f(x+m)\leqslant 27f(x)$,即$f(x+m)\leqslant f(3x+2)$,所以$x+m\leqslant 3x+2$,即$m\leqslant 2x+2$在$x\in[1,2]$上有解.

因为当$x\in[1,2]$时,$2x+2\in[4,6]$,所以$m\leqslant 6$.所以实数m的最大值是6.故选D.

二、多项选择题

9.CD

提示: 对于A,$y=|x|-1=\begin{cases}-x-1,x<0,\\ x-1,x\geqslant 0\end{cases}$与$y=x-1$对应法则不相同,不表示同一函数,故A错误;对于B,$y=\frac{x^2-9}{x-3}$的定义域是$\{x|x\neq 3\}$,$y=x+3$的定义域是$\mathbf{R}$,不表示同一函数,故B错误;对于C,$y=(\sqrt{x+2})^2=x+2\ (x\geqslant -2)$与$y=x+2\ (x\geqslant -2)$对应法则相同,定义域相同,表示同一函数,故C正确;对于D,$y=x^0=1\ (x\neq 0)$与$y=1\ (x\neq 0)$对应法则相同,定义域相同,表示同一函数,故D正确.故选CD.

10.AB

提示:根据题意,当$f(a)\leqslant 0$时,$f(f(a))=3f(a)+5=2$,解得$f(a)=-1$,

若$a\leqslant 0$,则$f(a)=3a+5=-1$,解得$a=-2$;

若$a>0$,则$f(a)=a+\frac{1}{a}=-1$,即$a^2+a+1=0$,此方程无解.

当$f(a)>0$时,$f(f(a))=f(a)+\frac{1}{f(a)}=2$,解得$f(a)=1$,

若$a\leqslant 0$,则$f(a)=3a+5=1$,解得$a=-\frac{4}{3}$;

若$a>0$,则$f(a)=a+\frac{1}{a}=1$,即$a^2-a+1=0$,此方程无解.

故选AB.

11.AC

提示:由题意,对于$g(x)$,有$\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 9,\\ 1\leqslant x^2\leqslant 9,\end{cases}$解得$1\leqslant x\leqslant 3$,即$g(x)$的定义域为$[1,3]$.

由$g(x)=[f(x)]^2+f(x^2)=(x+1)^2+x^2+1=2x^2+2x+2=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$,可知$g(x)$在$[1,3]$上是增函数,所以$g(x)$的最小值为$g(1)=6$,最大值为$g(3)=26$.故选AC.

12.ABC

提示:$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,$f(0)=0$,当$x>0$时,$-x<0$,则$f(-x)=\frac{-x}{1-(-x)}=-\frac{x}{1+x}=-f(x)$,当$x<0$时,$-x>0$,则$f(-x)=\frac{-x}{1+(-x)}=-\frac{x}{1-x}=-f(x)$,所以$\forall x\in\mathbf{R}$,$f(-x)=-f(x)$,故$f(x)$为奇函数,A正确;当$x\geqslant 0$时,$f(x)=\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}$,此时$f(x)$单调递增,因为$f(x)$为奇函数,其图象关于原点对称,所以$f(x)$在$(-\infty,0]$上也单调递增,故$f(x)$在$\mathbf{R}$上为增函数,B正确;当$x\geqslant 0$时,$f(x)=1-\frac{1}{1+x}\in[0,1)$,则当$x\leqslant 0$时,$f(x)=-f(-x)\in(-1,0]$,故$f(x)\in(-1,1)$,即$|f(x)|<1$,故C正确,D错误.故选ABC.

三、填空题

13.$x=\frac{1}{2}$

提示:结合$y=|x|$的图象,可得$f(x)$图象的对称轴方程为$x=\frac{1}{2}$.

14.2

提示:因为$f(x)$,$g(x)$分别是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数和奇函数,所以$f(1)=f(-1)$,$-g(1)=g(-1)$.

又$f(x)+g(x)=x^2-x$,所以$f(1)-g(1)=f(-1)+g(-1)=(-1)^2-(-1)=2$.

15.4

提示:因为$f(x)$是幂函数,所以$m^2-m-1=1$,解得$m=-1$或$m=2$.

当$m=-1$时,$f(x)=\frac{1}{x}$,图象不关于y轴对称,舍去;当$m=2$时,$f(x)=x^2$,图象关于y轴对称,故$f(m)=2^2=4$.

16.$(-\infty,2]$

提示:当$a-1\leqslant 0$,即$a\leqslant 1$时,y在$[1,+\infty)$上单调递增,则$y\geqslant 1+\frac{a-1}{1}=a$,满足题设;当$a-1>0$,即$a>1$时,若$a-1\geqslant 1$,即$a\geqslant 2$,则$y$在$[1,\sqrt{a-1})$上单调递减,在$(\sqrt{a-1},+\infty)$上单调递增,所以当$x=\sqrt{a-1}$时,$y=2\sqrt{a-1}=a$,解得$a=2$;若$a-1<1$,即$1<a<2$,则$y$在$[1,+\infty)$上单调递增,所以$y\geqslant 1+\frac{a-1}{1}=a$,满足题设.综上,$a$的取值范围是$(-\infty,2]$.

四、解答题

17.**解:**(1)由已知,得$f(2)=2^\alpha=\sqrt{2}$,解得$\alpha=\frac{1}{2}$.所以$f(x)=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$.

(2)由(1)知$f(x)$在定义域$[0,+\infty)$上单调递增,

则$f(1+a)>f(3-a)$可化为$\begin{cases}1+a\geqslant 0,\\ 3-a\geqslant 0,\\ 1+a>3-a,\end{cases}$

解得$1<a\leqslant 3$.

所以实数a的取值范围是$(1,3]$.

18.**解:**(1)要使函数有意义,则$x^2-4\neq 0$,解得$x\neq\pm 2$.所以函数$f(x)$的定义域为$\{x|x\neq\pm 2\}$.

(2)函数$f(x)$在$(2,+\infty)$上单调递减.证明如下:

$\forall x_1,x_2\in(2,+\infty)$,且$x_1<x_2$,则$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1^2-4}-\frac{1}{x_2^2-4}=\frac{(x_1+x_2)(x_2-x_1)}{(x_1^2-4)(x_2^2-4)}$.

由$x_1,x_2\in(2,+\infty)$,得$x_1^2-4>0$,$x_2^2-4>0$,$x_1+x_2>0$;由$x_1<x_2$,得$x_2-x_1>0$.

所以$f(x_1)-f(x_2)>0$,即$f(x_1)>f(x_2)$.

所以函数$f(x)$在$(2,+\infty)$上单调递减.

19.**解:**(1)若函数$f(x)$是$\mathbf{R}$上的偶函数,

则$f(-x)=f(x)$,

即$\frac{m(-x)+1}{1+(-x)^2}=\frac{mx+1}{1+x^2}$,解得$m=0$.

所以$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$,$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减.

(2)由(1)知$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减,又$f(x)$是$\mathbf{R}$上的偶函数,所以$f(x)$在$(-\infty,0]$上单调递增.所以$f(x)$在$[-3,0]$上单调递增,在$[0,2]$上单调递减.又$f(-3)=\frac{1}{10}$,$f(0)=1$,$f(2)=\frac{1}{5}$,所以$f(x)$的最大值为1,最小值为$\frac{1}{10}$.

20.**解:**(1)由已知,$y=100x-[600+c(x)]$,

当$0<x<100$时,$c(x)=\frac{1}{3}x^2+40x-650$;

当$x\geqslant 100$时,$c(x)=101x+\frac{10000}{x-2}-3600$,

化简可得

$y=\begin{cases}-\frac{1}{3}x^2+60x+50,0<x<100,x\in\mathbf{N}_+,\\ -\left(x+\frac{10000}{x-2}\right)+3000,x\geqslant 100,x\in\mathbf{N}_+.\end{cases}$

(2)当$0<x<100$,$x\in\mathbf{N}_+$时,$y=-\frac{1}{3}x^2+60x+50=-\frac{1}{3}(x-90)^2+2750$,

所以当$x=90$时,y取得最大值2750;

当$x\geqslant 100$,$x\in\mathbf{N}_+$时,$y=-\left(x+\frac{10000}{x-2}\right)+3000=-\left(x-2+\frac{10000}{x-2}\right)+2998\leqslant -2\sqrt{(x-2)\cdot\frac{10000}{x-2}}+2998=2798$,

当且仅当$x-2=\frac{10000}{x-2}$,即$x=102$时,y取得最大值2798.

因为$2750<2798$,所以当年产量为102台时,该企业在这一款净水设备的生产中获利最大,最大利润是2798万元.

21.(1)**解:**因为对一切$m>0$,$n>0$,都有$f\left(\frac{m}{n}\right)=f(m)-f(n)+2$,

令$m=n=1$,得$f(1)=f(1)-f(1)+2=2$.

(2)**证明:**设$0<x_1<x_2$,则$\frac{x_2}{x_1}>1$,所以$f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)<2$,

所以$f(x_2)-f(x_1)=f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)-2<0$,即$f(x_2)<f(x_1)$,

所以$f(x)$在定义域$(0,+\infty)$上是减函数.

(3)**解:**由$f(x-2)-f(8-2x)<-1$,得$f\left(\frac{x-2}{8-2x}\right)-2<-1$,即$f\left(\frac{x-2}{8-2x}\right)<1=f(4)$.

由(2)知$f(x)$在定义域$(0,+\infty)$上是减函数,

所以$\begin{cases}x-2>0,\\ 8-2x>0,\\ \frac{x-2}{8-2x}>4,\end{cases}$解得$\frac{34}{9}<x<4$.

故不等式的解集为$\left\{x\middle|\frac{34}{9}<x<4\right\}$.

22.**解:**(1)由已知条件,知$f(x)$的图象开口向上,对称轴为$x=a>1$,所以$f(x)$在$[1,a]$上单调递减.

所以$f(x)$在$[1,a]$上的最大值为$f(1)=6-2a$,最小值为$f(a)=5-a^2$,所以$\begin{cases}6-2a=a,\\ 5-a^2=1,\end{cases}$解得$a=2$.

(2)因为$f(x)$的图象开口向上,对称轴为$x=a>1$,

所以$f(x)$在$[1,a+1]$上的最小值为$f(a)=5-a^2$.

因为$f(x)$在区间$(-\infty,2]$上单调递减,

所以$a\geqslant 2$,

则$a-1\geqslant 1=(a+1)-a$,

所以$f(x)$在$[1,a+1]$上的最大值为$f(1)=6-2a$.

因为$\forall x\in[1,a+1]$,总有$[f(x)]_{max}-[f(x)]_{min}\leqslant 4$,所以$6-2a-(5-a^2)\leqslant 4$,解得$-1\leqslant a\leqslant 3$.

综上,实数a的取值范围是$[2,3]$.