$\frac{\sqrt{7}}{4}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin B\leqslant\frac{1}{2}\times56\times\frac{\sqrt{7}}{4}=7\sqrt{7}$，所以△$ABC$ 的面积的最大值为 $7\sqrt{7}$.

四、解答题

17.**解**：(1)因为 $b\sin B\cos C=\cos B(\sqrt{3}a-b\sin C)$，所以 $b(\sin B\cos C+\cos B\sin C)=\sqrt{3}a\cos B$，所以 $b\sin(B+C)=b\sin A=\sqrt{3}a\cos B$，由正弦定理，得 $\sin B\sin A=\sqrt{3}\sin A\cos B$，所以 $\tan B=\sqrt{3}$，又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)得 $B=\frac{\pi}{3}$，因为 $b=2\sqrt{3}$，所以由余弦定理，得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，即 $a^2+c^2-ac=12$，所以 $(a+c)^2-3ac=12$，所以 $(a+c)^2-12=3ac\leqslant3\times\left(\frac{a+c}{2}\right)^2$，所以 $a+c\leqslant4\sqrt{3}$，当且仅当 $a=c=2\sqrt{3}$ 时，等号成立，所以 $a+b+c\leqslant6\sqrt{3}$，所以△ABC 周长的最大值是 $6\sqrt{3}$.

18.**解**：(1)因为 $a=3c$，$b=\sqrt{2}$，$\cos B=\frac{2}{3}$，所以由余弦定理的推论，得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{10c^2-2}{6c^2}=\frac{2}{3}$，解得 $c=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2)因为 $\frac{\sin A}{a}=\frac{\cos B}{2b}$，由正弦定理，得 $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\cos B}{2b}$，所以 $2\sin B=\cos B$，$\cos B>0$，因为 $\sin^2B+\cos^2B=1$，所以 $\sin B=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $\sin\left(B+\frac{\pi}{2}\right)=\cos B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

19.**解**：(1)因为在△ACD 中，$\angle ACD=75°$，$\angle ADC=45°$，所以 $\angle CAD=60°$，由正弦定理，得 $\frac{CD}{\sin\angle CAD}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}$，所以 $AC=\frac{CD\cdot\sin\angle ADC}{\sin\angle CAD}=\frac{100\sqrt{6}}{3}$ 海里，即 C 处与小岛 A 之间的距离为 $\frac{100\sqrt{6}}{3}$ 海里.

(2)因为在△CDB 中，$\angle BCD=30°$，$\angle CDB=120°$，所以 $\angle CBD=30°$.所以 $BD=CD=100$ 海里，由余弦定理，得 $BC^2=CD^2+BD^2-2CD\cdot BD\cos\angle CDB=30000$，所以 $BC=100\sqrt{3}$ 海里.在△ACB 中，$\angle ACB=45°$，由余弦定理，得 $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB=\left(\frac{100\sqrt{6}}{3}\right)^2+(100\sqrt{3})^2-2\times\frac{100\sqrt{6}}{3}\times100\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{50000}{3}$，所以 $AB=\frac{100\sqrt{15}}{3}$ 海里，即 A，B 两座小岛之间的距离为 $\frac{100\sqrt{15}}{3}$ 海里.

20.**解**：(1)由 $ac\sin A=2\sin C(a^2+c^2-b^2)$，得 $a^2c=2c(a^2+c^2-b^2)$，则 $a^2=2b^2-2c^2$，①又 $b-c=\frac{2\sin A}{\sin B+\sin C}$，所以由正弦定理，得 $(b-c)(b+c)=2a$，即 $b^2-c^2=2a$，②

联立①②，可得 $a^2=4a$，所以 $a=4$.设△ABC 的外接圆半径为 R，因为 $\pi R^2=8\pi$，所以 $R=2\sqrt{2}$，由正弦定理，得 $\sin A=\frac{a}{2R}=\frac{4}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)因为 $A=C$，所以 $BC=AB=4$，$\sin A=\sin C$，代入 $ac\sin A=2\sin C(a^2+c^2-b^2)$，得 $a^2+c^2-b^2=\frac{1}{2}ac$，所以 $\cos B=\frac{1}{4}$，$B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\frac{\sqrt{15}}{4}$.在△$ABM$ 中，由正弦定理，得 $\frac{AB}{\sin\angle AMB}=\frac{AM}{\sin B}$，故 $\sin\angle AMB=\frac{AB\cdot\sin B}{AM}=\frac{4\times\frac{\sqrt{15}}{4}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为 $AM>AB$，所以 $\angle AMB<\angle B$，所以 $\angle AMB=\frac{\pi}{3}$.

21.**解**：(1)因为 $a+b=c\cos B+\sqrt{3}c\sin B$，所以由正弦定理，得 $\sin A+\sin B=\sin C\cos B+\sqrt{3}\sin C\sin B$，又 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，所以 $\sin B+\sin B\cos C=\sqrt{3}\sin B\sin C$，又 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B\neq0$，所以 $\sqrt{3}\sin C-\cos C=1$，即 $\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，又 $0<C<\pi$，所以 $-\frac{\pi}{6}<C-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，故 $C-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，解得 $C=\frac{\pi}{3}$.

(2)延长 CD 至 E，使得 $DE=2CD$，因为 $AD=2DB$，所以 $AE//CB$，且 $AE=2CB=2a$，$CE=3CD=6$，又 $\angle ACB=\frac{\pi}{3}$，所以 $\angle CAE=\frac{2\pi}{3}$，在△$ACE$ 中，由余弦定理，得 $CE^2=AC^2+AE^2-2AC\cdot AE\cdot\cos\angle CAE$，所以 $b^2+4a^2+2ab=36$，因为 $b^2+4a^2\geqslant4ab$，所以 $6ab\leqslant36$，得 $ab\leqslant6$，当且仅当 $b=2a=2\sqrt{3}$ 时，等号成立，所以△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}AC\cdot BC\sin\angle ACB=\frac{\sqrt{3}}{4}ab\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$，所以△$ABC$ 面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

22.**解**：(1)若选①，因为 $(a+b)(\sin A-\sin B)=(c-b)\sin C$，由正弦定理，得 $(a+b)(a-b)=c(c-b)$，所以 $b^2+c^2-a^2=bc$，由余弦定理的推论，得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，又 $A\in(0,\pi)$，故 $A=\frac{\pi}{3}$.

若选②，因为 $2b-c-2a\cos C=0$，由正弦定理，得 $2\sin B-2\sin A\cos C=\sin C$，所以 $\sin C=2\sin(A+C)-2\sin A\cos C=2\cos A\sin C$，因为 $C\in(0,\pi)$，则 $\sin C>0$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，又 $A\in(0,\pi)$，故 $A=\frac{\pi}{3}$.

若选③，因为 $\cos^2B+\cos^2C+\sin B\sin C=1+\cos^2A$，则 $2-\sin^2B-\sin^2C+\sin B\sin C=2-\sin^2A$，即 $\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A=\sin B\sin C$，由正弦定理，得 $b^2+c^2-a^2=bc$，由余弦定理的推论，得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，又 $A\in(0,\pi)$，故 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)在△ABC 中，因为 $AC=2$，$BC=2\sqrt{3}$，$A=\frac{\pi}{3}$，所以由余弦定理，得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$，即 $12=AB^2+4-2AB$，解得 $AB=4$ 或 $AB=-2$(舍去)，又△ACD 与△BCD 面积比为 3:5，所以 $AD=\frac{3}{2}$，在△ACD 中，由余弦定理，得 $CD^2=AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cdot\cos A=\frac{13}{4}$，所以 $CD=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

第 12 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A **提示**：数列 $1,\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{5}{16},\cdots$，可以转化为 $\frac{2}{2},\frac{3}{4},\frac{4}{8},\frac{5}{16},\cdots$，则其一个通项公式可以是 $\frac{n+1}{2^n}$.故选 A.

2.C **提示**：由 $a_{n+1}=a_n-2$，得 $a_{n+1}-a_n=-2$，则数列 $\{a_n\}$ 是公差 $d=-2$ 的等差数列，因为 $a_1=2$，所以 $a_{10}=a_1+9d=-16$.故选 C.

3.B **提示**：因为 $a_1+a_4+a_7=18$，所以 $3a_4=18$，则 $a_4=6$，又 $a_6=12$，所以公差 $d=\frac{1}{2}(a_6-a_4)=3$.故选 B.

4.D **提示**：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由 $\begin{cases}S_4=a_5+a_6,\\a_7=15,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}4a_1+6d=2a_1+9d,\\a_1+6d=15,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=3,\\d=2,\end{cases}$ 所以 $S_5=5a_1+10d=35$.故选 D.

5.C **提示**：由题意，设甲、乙、丙、丁、戊、已、庚所分钱数分别为 $a-3d,a-2d,a-d,a,a+d,a+2d,a+3d$，所以 $\begin{cases}a-3d+a-2d=77,\\a+d+a+2d+a+3d=75,\end{cases}$ 解得 $a=31,d=-3$，所以戊分得 $a+d=28$(文)，已分得 $a+2d=25$(文).故选 C.

6.D **提示**：由等差数列的性质，得数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列，设其公差为 d，因为 $\frac{S_{12}}{12}-\frac{S_{10}}{10}=-2$，所以 $2d=-2$，解得 $d=-1$，首项为 $\frac{S_1}{1}=2020$，所以 $\frac{S_{2022}}{2022}=2020-(2022-1)=-1$，则 $S_{2022}=-2022$.故选 D.

7.D **提示**：因为 $S_{2021}=\frac{2021(a_1+a_{2021})}{2}=2021a_{1011}>0$，$S_{2022}=1011(a_1+a_{2022})=1011(a_{1011}+a_{1012})<0$，所以 $a_{1011}>0$，$a_{1011}+a_{1012}<0$，即 $a_{1012}<0$，所以使得 S_n 取得最大值时 $n=1011$.故选 D.

8.D **提示**：由题意，得当 $n=6$ 时，S_n 取得最小值，则 $a_1<0$，$d>0$.①当 $a_6=a_1+5d=0$ 时，S_5 或 S_6 为 S_n 的最小值，此时 $a_1=-5d$，所以 $\frac{a_{17}}{a_9}=\frac{a_1+16d}{a_1+8d}=\frac{11d}{3d}=\frac{11}{3}$.②当 $a_6=a_1+5d<0$，$a_7=a_1+6d\geqslant0$ 时，则 $-6\leqslant\frac{a_1}{d}<-5$，因为 $\frac{a_{17}}{a_9}=\frac{a_1+16d}{a_1+8d}=\frac{\frac{a_1}{d}+16}{\frac{a_1}{d}+8}=1+\frac{8}{8+\frac{a_1}{d}}$，$2\leqslant\frac{a_1}{d}+8<3$，所以 $\frac{11}{3}<1+\frac{8}{8+\frac{a_1}{d}}\leqslant5$，即 $\frac{a_{17}}{a_9}\in\left(\frac{11}{3},5\right]$.综上，$\frac{a_{17}}{a_9}\in\left[\frac{11}{3},5\right]$，所以 $\frac{a_{17}}{a_9}$ 的最小值为 $\frac{11}{3}$.故选 D.

二、多项选择题

9.ABC **提示**：由 $a_{n+1}+a_n=4n-3$，得 $\{a_{n+1}+a_n\}$ 为等差数列，故 A 正确；由 $a_{n+1}+a_n=4n-3$，得 $a_{n+2}+a_{n+1}=4n+1$，所以 $a_{n+2}-a_n=2d=4$，解得 $d=2$，故 B 正确；由 $a_1+a_2=1$，得 $2a_1+d=1$，所以 $a_1=-\frac{1}{2}$，故 C 正确；$a_n=-\frac{1}{2}+2(n-1)=2n-\frac{5}{2}$，令 $a_n=13$，即 $2n-\frac{5}{2}=13$，该方程无正整数解，故 D 错误.故选 ABC.

10.CD **提示**：设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，其前 $n-1$ 项为等差数列，公差 $d=2$，$a_1=25$，$S_n=760$，$a_n=m\leqslant120$，则 $760-m=S_{n-1}=25(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\times2$，所以 $m=-n^2-22n+783\leqslant120$，即 $(n-17)(n+39)\geqslant0$，解得 $n\geqslant17$.故选 CD.

11.BD **提示**：因为 $S_6=S_9$，所以 $a_7+a_8+a_9=0$，又数列 $\{a_n\}$ 是以 d 为公差的等差数列，所以 $3a_8=0$，即 $a_8=a_1+7d=0$，又 $a_1>0$，所以 $d<0$，故 A 错误，B 正确；因为 $S_6-S_5=a_6>0$，所以 $S_6>S_5$，故 C 错误；由以上知，S_7 或 S_8 为 S_n 的最大值，故 D 正确.故选 BD.

12.BC **提示**：因为等差数列 $\{a_n\}$ 是正项递增的数列，所以 $d>0$，$S_7=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=7a_4=28$，所以 $a_4=4$，$a_1=4-3d>0$，所以 $0<d<\frac{4}{3}$，故 A 错误；因为 $a_2\neq a_6$，所以 $a_2a_6<\left(\frac{a_2+a_6}{2}\right)^2=a_4^2=16$，故 B 正确；同理 $0<a_3a_5<16$，所以 $\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_5}=\frac{a_3+a_5}{a_3a_5}=\frac{8}{a_3a_5}>\frac{1}{2}$，故 C 正确；因为 $a_2a_6-a_3a_5=(4-2d)(4+2d)-(4-d)(4+d)=16-4d^2-(16-d^2)=-3d^2<0$，所以 $a_2a_6<a_3a_5$，故 D 错误.故选 BC.

三、填空题

13.2 **提示**：由 $2S_3=3S_2+6$，得 $2(3a_1+3d)=3(2a_1+d)+6$，即 $6d=3d+6$，解得 $d=2$.

14.143 **提示**：因为等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3+a_6+a_9=3a_6=39$，所以 $a_6=13$，所以 $S_{11}=\frac{11(a_1+a_{11})}{2}=11a_6=143$.

15.-1;0 **提示**：因为 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n(n\in\mathbf{N}_+)$，所以 $a_3=1,a_4=-1,a_5=-2,a_6=-1,a_7=1,a_8=2,\cdots$.所以数列 $\{a_n\}$ 是周期为 6 的周期数列，因为 $2022=6\times337$，所以 $S_{2022}=337\times(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)=0$.

16.20 **提示**：因为 $S_{10}>S_{11}>S_9$，所以 $S_{11}-S_{10}<0$，$S_{10}-S_9>0$，所以 $a_{11}<0$，$a_{10}>0$，又 $S_{11}-S_9>0$，所以 $a_{10}+a_{11}>0$，所以 $S_{19}=\frac{19(a_1+a_{19})}{2}=19a_{10}>0$，$S_{20}=\frac{20(a_1+a_{20})}{2}=10(a_{10}+a_{11})>0$，$S_{21}=\frac{21(a_1+a_{21})}{2}=21a_{11}<0$，所以 $S_{20}\cdot S_{21}<0$，所以满足 $S_n\cdot S_{n+1}<0$ 的正整数 n 的值为 20.

四、解答题

17.**解**：(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，根据等差中项的性质，得 a_2 与 a_8 的等差中项为 a_5，所以 $a_5=8$，又 $a_3a_7=28$，即 $(a_5-2d)(a_5+2d)=28$，所以 $d^2=9$，$d=\pm3$，因为 $d>0$，所以 $d=3$，则 $a_5=a_1+4d=8$，所以 $a_1=-4$，所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d=3n-7$.

(2)由(1)可知 $b_n=a_{3n}=9n-7$.令 $9n-7=938$，解得 $n=105\in\mathbf{N}_+$，符合题意，即 $b_{105}=938$，所以 938 是数列 $\{b_n\}$ 中的项.

18.(1)**解**：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，因为 $S_3=a_5$，$2a_2=3$，所以 $\begin{cases}3a_1+3d=a_1+4d,\\2a_1+2d=3,\end{cases}$ 解得 $a_1=\frac{1}{2}$，$d=1$，所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{1}{2}+(n-1)\times1=n-\frac{1}{2}$.

(2)**证明**：由(1)知 $S_n=n\times\frac{1}{2}+\frac{n(n-1)}{2}\times1=\frac{n^2}{2}$，所以 $\sqrt{S_n}=\frac{\sqrt{2}}{2}n$，因为 $\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}=\frac{\sqrt{2}}{2}(n+1)-\frac{\sqrt{2}}{2}n=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sqrt{S_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是首项为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，公差为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的等差数列.

19.**解**：(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d\neq0)$，由 $a_3=a_5a_8$，$a_6=1$，得 $1-3d=(1-d)(1+2d)$，即 $d^2-2d=0$，解得 $d=2$，或 $d=0$(舍去)，则 $a_1=a_6-5d=-9$，所以 $a_n=-9+2(n-1)=2n-11$.

(2)由(1)可知 $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=n^2-10n$，由 $S_n<a_n$，得 $n^2-10n<2n-11$，即 $n^2-12n+11<0$，解得 $1<n<11$，又 $n\in\mathbf{N}_+$，所以使 $S_n<a_n$ 成立的最大正整数 n 为 10.

20.**解**：(1)因为等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d\neq0)$，$a_2+a_3+a_7=-15$，所以 $3a_1+9d=-15$，即 $a_1=-5-3d$.

若选①，$a_1+a_6+a_{10}=3a_1+14d=-15+5d=0$，得 $d=3$，则 $a_1=-14$，所以 $a_n=-14+3(n-1)=3n-17$.

若选②，则 $-2a_2=a_{13}$，即 $-2a_1-2d=a_1+12d$，得 $3a_1+14d=-15+5d=0$，得 $d=3$，所以 $a_1=-14$，所以 $a_n=-14+3(n-1)=3n-17$.

若选③，$a_3a_5=a_7^2$，即 $(a_1+2d)(a_1+4d)=(a_1+6d)^2$，即 $(-5-d)(-5+d)=(-5+3d)^2$，解得 $d=3$，或 $d=0$(舍去)，则 $a_1=-14$，所以 $a_n=-14+3(n-1)=3n-17$.

(2)由(1)得 $a_n=3n-17$，所以 $S_k=\frac{k(a_1+a_k)}{2}=\frac{(-14+3k-17)k}{2}=-40$，解得 $k=5$ 或 $k=\frac{16}{3}$(舍去)，所以 k 的值为 5.

21.(1)**解**：设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，所以 $a_n=dn+a_1-d$.又 $a_na_{n+1}=4n^2-1$，解得 $\begin{cases}a_1=1,\\d=2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=-1,\\d=-2.\end{cases}$ 又 $d>0$，所以 $a_1=1$，$d=2$，所以 $a_n=2n-1$.

(2)**证明**：因为 $\frac{2}{a_na_{n+1}}=\frac{2}{4n^2-1}=\frac{2}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$，所以 $\frac{2}{a_1a_2}+\frac{2}{a_2a_3}+\frac{2}{a_3a_4}+\cdots+\frac{2}{a_na_{n+1}}=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=1-\frac{1}{2n+1}<1$.

22.**解**：(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $a_n=a_1+(n-1)\cdot d$，又 $a_{n+1}+a_n=2n+3$，所以 $\begin{cases}a_1+a_2=2a_1+d=5,\\a_3+a_2=2a_1+3d=7,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=2,\\d=1,\end{cases}$ 所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n+1$.

(2)因为 $a_{n+1}+a_n=2n+3$，①

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n+a_{n-1}=2(n-1)+3$，②

①-②，得 $a_{n+1}-a_{n-1}=2$；所以数列 $\{a_{2n}\}$ 是以 a_2 为首项，2 为公差的等差数列，数列 $\{a_{2n-1}\}$ 是以 a_1 为首项，2 为公差的等差数列.又 $a_1+a_2=5$，所以 $a_2=5-a_1$，当 n 为偶数时，$a_n=a_2+\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot2=n+3-a_1$；当 n 为奇数时，$a_n=a_1+\left(\frac{n+1}{2}-1\right)\cdot2=n-1+a_1$.所以 $a_n=\begin{cases}n-1+a_1(n\text{ 为奇数}),\\n+3-a_1(n\text{ 为偶数}).\end{cases}$ 因为对任意的 $n\in\mathbf{N}_+$，都有 $a_n+n^2\geqslant0$ 成立，当 n 为奇数时，$a_n+n^2=n-1+a_1+n^2\geqslant0$ 恒成立，所以 $-a_1\leqslant n^2+n-1$ 在 n 为奇数时恒成立，所以 $-a_1\leqslant1$，所以 $a_1\geqslant-1$；同理，当 n 为偶数时，$a_n+n^2=n+3-a_1+n^2\geqslant0$ 恒成立，所以 $a_1\leqslant n^2+n+3$ 在 n 为偶数时恒成立，所以 $a_1\leqslant9$.

综上，a_1 的取值范围是 $[-1,9]$.

扫码免费下载
习题讲解 ppt

第 9 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B **提示**：对于 A，函数 $y=\sin x$ 的最小正周期为 2π，不符合题意；对于 B，函数 $y=|\cos x|$ 的最小正周期为 π，且在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，符合题意；对于 C，函数 $y=\tan x$ 的最小正周期为 π，且在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，不符合题意；对于 D，函数 $y=\cos x$ 的最小正周期为 2π，不符合题意.故选 B.

2.D **提示**：令 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，当 $k=-1$ 时，$x=-\frac{\pi}{12}$，所以 $\left(-\frac{\pi}{12},-1\right)$ 为 $f(x)$ 图象的一个对称中心.故选 D.

3.B **提示**：由题意，得 $\sin\left(-2\times\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=0$，则 $-\frac{4\pi}{3}+\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=k\pi+\frac{4\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，当 $k=-1$ 时，$|\varphi|$ 取得最小值 $\frac{\pi}{3}$.故选 B.

4.D **提示**：$f(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，由 $2k\pi-\pi\leqslant x-\frac{\pi}{3}\leqslant2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $2k\pi-\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，令 $k=0$，得 $-\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，可排除 A；令 $k=1$，得 $\frac{4\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{3}$，可排除 B，C；$\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)\subseteq\left[\frac{4\pi}{3},\frac{7\pi}{3}\right]$，故 D 正确.故选 D.

5.B **提示**：由图可知，$A=2$，因为 $f(0)=-1$，所以 $2\sin\varphi=-1$，即 $\sin\varphi=-\frac{1}{2}$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$，由图知，$x=\frac{7\pi}{12}$ 是函数 $y=f(x)$ 在 y 轴右侧的第二个零点，所以 $f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=2\sin\left(\frac{7\pi}{12}\omega-\frac{\pi}{6}\right)=0$，则 $\frac{7\pi}{12}\omega-\frac{\pi}{6}=\pi$，解得 $\omega=2$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，将其图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得 $y=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $g(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.故选 B.

6.B **提示**：函数 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，其最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，故①正确；把 $y=2\sin2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，可得 $y=2\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$ 的图象，故②错误；函数 $y=2\cos\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=f(x)$，故③正确；当 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right]$ 时，$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\right]$，则函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增，故④正确；因为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 不对称，故⑤错误；因为 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=0$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$ 对称，故⑥正确.故选 B.

7.A **提示**：h 与 t 的函数解析式为 $h=A\sin(\omega t+\varphi)+B\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$，由题意，得 $h_{max}=3$，$h_{min}=-1$，所以 $\begin{cases}A+B=3,\\-A+B=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=2,\\B=1,\end{cases}$ 由 $T=\frac{2\pi}{\omega}=60$，得 $\omega=\frac{\pi}{30}$，所以 $h=2\sin\left(\frac{\pi}{30}t+\varphi\right)+1$.当 $t=0$ 时，$h=0$，所以 $2\sin\varphi+1=0$，则 $\sin\varphi=-\frac{1}{2}$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$，所以 $h=2\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)+1$.故选 A.

8.C **提示**：因为 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right]$ 上单调递增，所以 $\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}$，则 $0<\omega\leqslant\frac{12}{13}$，由 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{4}\right]$，得 $\omega x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{6}\right]$，则 $\begin{cases}-\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{6}\geqslant-\frac{\pi}{2},\\\frac{3\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 解得 $\omega\leqslant\frac{8}{9}$，所以 $0<\omega\leqslant\frac{8}{9}$，当 $x\in[0,\pi]$ 时，$\omega x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\omega\pi-\frac{\pi}{6}\right]$，要使 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上只取得一次最大值，只需 $\frac{\pi}{2}\leqslant\omega\pi-\frac{\pi}{6}<\frac{5}{2}\pi$，解得 $\omega\in\left[\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right)$，所以 ω 的取值范围是 $\left[\frac{2}{3},\frac{8}{9}\right]$.故选 C.

二、多项选择题

9.ACD **提示**：设 $t=\omega x+\varphi$，当 $x\in[0,2\pi]$ 时，$\varphi\leqslant t\leqslant2\pi\omega+\varphi$，由题意，得 $y=\cos t$ 在 $[\varphi,2\pi\omega+\varphi]$ 上有 4 个零点，则 $\frac{7\pi}{2}\leqslant2\pi\omega+\varphi<\frac{9\pi}{2}$，所以 $\frac{7}{4}-\frac{\varphi}{2\pi}\leqslant\omega<\frac{9}{4}-\frac{\varphi}{2\pi}$，又 $\varphi\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$，所以 $\frac{7}{4}-\frac{\frac{\pi}{6}}{2\pi}\leqslant\omega<\frac{9}{4}-\frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi}$，即 $\frac{5}{3}\leqslant\omega<\frac{17}{8}$，结合选项，故选 ACD.

10.ACD **提示**：由题意，得 $3\times\frac{\pi}{4}-\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $\varphi=\frac{\pi}{4}-k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，$f(x)=\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$，所以函数 $f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=\sin3x$ 为奇函数，故 A 正确；当 $x\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right]$ 时，$3x-\frac{\pi}{4}\in\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$，则 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right]$ 上不单调，故 B 错误；若 $|f(x_1)-f(x_2)|=2$，则 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 一个等于 1，另一个等于 -1，故 $|x_1-x_2|$ 的最小值为半个周期，即 $\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$，故 C 正确；把函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到函数 $y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos3x$ 的图象，故 D 正确.故选 ACD.

11.BCD **提示**：因为 $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\cos x)-\frac{1}{2}\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=2\pi$，故 A 错误；$f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 B 正确；将函数 $f(x)$ 图象向左平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $y=\cos\left(x+\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}=-\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的图象，关于 y 轴对称，故 C 正确；由 $x\in\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$，得 $x+\frac{\pi}{6}\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 上单调递减，故 D 正确.故选 BCD.

12.AC **提示**：当 $\omega=2$ 时，$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，因为 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=2$，故 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称，故 A 正确；当 $\omega=\frac{1}{2}$ 时，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则 $\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{12}\right]$，所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上不单调，故 B 错误；当 $x\in[0,\pi]$ 时，则 $\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\omega\pi+\frac{\pi}{3}\right]$，若 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最小值为 -2，$\omega\pi+\frac{\pi}{3}\geqslant\frac{3\pi}{2}$，解得 $\omega\geqslant\frac{7}{6}$，故 C 正确；当 $x\in[-\pi,0]$ 时，$\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left[-\omega\pi+\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$，若 $f(x)$ 在 $[-\pi,0]$ 上恰有 2 个零点，则 $-2\pi<-\omega\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant-\pi$，解得 $\frac{4}{3}\leqslant x<\frac{7}{3}$，即 ω 的取值范围为 $\left[\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right)$，故 D 错误.故选 AC.

三、填空题

13.π **提示**：因为 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin2x-\frac{1}{2}\cos2x+\cos2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2x+\frac{1}{2}\cos2x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，所以该函数的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

14.$-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **提示**：令 $2x-\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，因为方程 $f(x)=\frac{1}{3}$ 在区间 $(0,\pi)$ 上的根为 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，所以 x_1，x_2 关于直线 $x=\frac{5\pi}{12}$ 对称，所以 $x_1+x_2=\frac{5\pi}{6}$，则 $\tan(x_1+x_2)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

15.$-\frac{\sqrt{3}}{4}$ **提示**：因为 $f(x)$ 最小正周期为 4π，所以 $\frac{2\pi}{\omega}=4\pi$，得 $\omega=\frac{1}{2}$，因为 $f(x)$ 图象的一条对称轴为 $x=\frac{4\pi}{3}$，所以 $\frac{1}{2}\times\frac{4\pi}{3}+\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=k\pi-\frac{2\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$，$f'(x)=-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

16.$\frac{105}{4}$ **提示**：由题意，知 $\begin{cases}-\frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_1\pi,\\\frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_2\pi+\frac{\pi}{2},\end{cases}$ $k_1,k_2\in\mathbf{Z}$，则 $\begin{cases}\omega=\frac{3(2k+1)}{4},\\\varphi=\frac{k'\pi}{2}+\frac{\pi}{4},\end{cases}$ $k,k'\in\mathbf{Z}$，其中 $k=k_2-k_1$，$k'=k_2+k_1=k+2k_1$，故 k 与 k' 同为奇数或同为偶数.由题意知 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{5}\right)$ 上有且只有一个最大值点，且要求 ω 最大，则 $\left(\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{5}\right)$ 包含的周期应该最多，所以 $\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{15}\leqslant2T$，即 $\frac{2\pi}{15}\leqslant\frac{16\pi}{3(2k+1)}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $k\leqslant19.5$.①当 $k=19$ 时，$\omega=\frac{117}{4}$，k' 为奇数，则 $\varphi=\frac{3\pi}{4}$，当 $x\in\left(\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{5}\right)$ 时，$\frac{117}{4}x+\frac{3\pi}{4}\in(2.7\pi,6.6\pi)$，当 $\frac{117}{4}x_1+\frac{3\pi}{4}=\frac{9}{2}\pi$ 或 $\frac{13}{2}\pi$ 时，$f(x_1)=3$ 都成立，舍去；②当 $k=18$ 时，$\omega=\frac{111}{4}$，k' 为偶数，则 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，当 $x\in\left(\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{5}\right)$ 时，$\frac{111}{4}x+\frac{\pi}{4}\in(2.1\pi,5.8\pi)$，当 $\frac{111}{4}x_1+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{2}\pi$ 或 $\frac{9}{2}\pi$ 时，$f(x_1)=3$ 都成立，舍去；③当 $k=17$ 时，$\omega=\frac{105}{4}$，k' 为奇数，则 $\varphi=\frac{3\pi}{4}$，当 $x\in\left(\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{5}\right)$ 时，$\frac{105}{4}x+\frac{3\pi}{4}\in(2.5\pi,6\pi)$，当 $\frac{105}{4}x_1+\frac{3\pi}{4}=\frac{9}{2}\pi$ 时，$f(x_1)=3$ 成立，符合题意.综上，ω 的最大值为 $\frac{105}{4}$.

四、解答题

17.**解**：(1)令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.当 $k=0$ 时，$-\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$，因为函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$ 在 $[0,a]$ 上单调递增，所以 $0<a\leqslant\frac{\pi}{3}$，即实数 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$.

(2)由 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}=0$，得 $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，则 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$，或 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $x=2k\pi$，或 $x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.又 $x\in[0,2\pi]$，所以 $x=0,\frac{2\pi}{3},2\pi$，即函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的所有零点为 $0,\frac{2\pi}{3},2\pi$，故所有零点之和为 $0+\frac{2\pi}{3}+2\pi=\frac{8\pi}{3}$.

18.**解**：(1)由题意，可得 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得 $\omega=2$.

(2)由(1)知 $f(x)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant2x-\frac{\pi}{6}\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，可得 $k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$，单调递减区间为 $\left[-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{6}\right]$.

(3)因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$，所以 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，所以 $3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{3}{2},3\right]$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域为 $\left[-\frac{3}{2},3\right]$.

19.**解**：因为函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期为 π，所以 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$.

(1)若选条件①：因为 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 对称，所以 $2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\varphi=-\frac{2\pi}{3}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，故 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

③

若选条件②：因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称，所以 $2\times\frac{\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，故 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

（2）由（1）得 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，当 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，所以当 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{12}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 2；当 $2x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$，即 $x=-\frac{\pi}{3}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 $-\sqrt{3}$，故 $f(x)$ 的最大值和最小值分别是 2 和 $-\sqrt{3}$，此时相应的 x 的值分别是 $\frac{\pi}{12}$ 和 $-\frac{\pi}{3}$.

20.**解**：（1）化简得 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}+m$，因为 $f(x)$ 的最小值为 -3，所以 $-1+\frac{1}{2}+m=-3$，解得 $m=-\frac{5}{2}$，所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-2$. 令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.

（2）$f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]-2=\cos2x-2$，所以 $a\sin x+f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=a\sin x+\cos2x-2=-2\sin^2x+a\sin x-1$，令 $t=\sin x$，$x\in(0,\pi)$，则 $t\in(0,1]$，所以原不等式可转化为 $-2t^2+at-1<0$，即 $a<2t+\frac{1}{t}$，又 $2t+\frac{1}{t}\geqslant2\sqrt{2t\cdot\frac{1}{t}}=2\sqrt{2}$，当且仅当 $2t=\frac{1}{t}$，即 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号，所以 $a<2\sqrt{2}$，即实数 a 的取值范围为 $(-\infty,2\sqrt{2})$.

21.**解**：（1）由题意知，$R=OA=4$，周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=60$，则 $\omega=\frac{\pi}{30}$，因为 $t=0$ 时，$A(2\sqrt{3},-2)$，所以 $f(0)=-2$，即 $4\sin\varphi=-2$，则 $\sin\varphi=-\frac{1}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$，或 $\varphi=\frac{7\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$. 所以 $f(t)=4\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)$.

（2）当点 P 到水面的距离等于 4m，即 $f(t)=2$ 时，则 $4\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)=2$，即 $\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，或 $\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$，解得 $t_1=10,t_2=30$，则 $t_2-t_1=20$，所以当水车转动一圈时，点 P 到水面的距离不低于 4m 的持续时间为 20 秒.

22.**解**：$f(\theta)=4\cos^2\theta-4\cos\theta+3\sin^2\theta=\cos^2\theta-4\cos\theta+3$，$g(\theta)=m\cos\theta$.

（1）对任意的 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，若 $f(\theta)\geqslant g(\theta)$，即 $\cos^2\theta-4\cos\theta+3\geqslant m\cos\theta$，$\cos\theta\in(0,1]$，所以 $\cos\theta+\frac{3}{\cos\theta}-4\geqslant m$，设 $\cos\theta=t,t\in(0,1]$，则 $h(t)=t+\frac{3}{t}-4$ 在 $(0,1]$ 上是减函数，所以函数 $h(t)=t+\frac{3}{t}-4$ 在 $(0,1]$ 上的最小值为 $h(1)=0$，所以 $m\leqslant0$，所以 m 的取值范围为 $(-\infty,0]$.

（2）对 $\theta\in[-\pi,\pi]$，$f(\theta)=g(\theta)$ 有两个不等实根，即 $\cos^2\theta-4\cos\theta+3=m\cos\theta$ 有两个不等实根，$\cos\theta\in[-1,1]$. 当 $\cos\theta=0$ 时，上述方程不成立，所以 $\cos\theta\neq0$，所以两边同除以 $\cos\theta$，得 $\cos\theta+\frac{3}{\cos\theta}-4=m$ 有两个不等实根. 设 $\cos\theta=t$，$t\in[-1,0)\cup(0,1]$，则 $F(t)=t+\frac{3}{t}-4$ 与 $y=m$ 在 $[-1,0)$ 和 $(0,1]$ 上有交点，并且此函数在两个区间上是减函数，又函数 $F(t)=t+\frac{3}{t}-4$ 在 $(0,1]$ 上的最小值为 $F(1)=0$，在 $[-1,0)$ 的最大值为 $F(-1)=-8$，所以要使对 $\theta\in[-\pi,\pi]$，$f(\theta)=g(\theta)$ 有两个不等实根，m 的取值范围为 $(-\infty,-8]\cup[0,+\infty)$.

第 10 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B　**提示**：若 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的长度相同，方向任意，故 A 错误；若向量 $\boldsymbol{a}$ 是向量 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量，即 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，故 B 正确；当 $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 时，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，但不存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，故 C 错误；当四边形 $ABCD$ 是平行四边形时，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ 才成立，故 D 错误. 故选 B.

2.B　**提示**：由题意，得 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}=(k-6,3k+2)$，因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$，所以 $-3(3k+2)-(k-6)=0$，解得 $k=0$. 故选 B.

3.C　**提示**：因为 $\boldsymbol{e}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以 $|\boldsymbol{e}|=1$，又 $\boldsymbol{e}$ 为与 $\boldsymbol{b}$ 同向的向量，所以 $\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\boldsymbol{e}$，所以 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量 $\boldsymbol{c}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\cdot\boldsymbol{e}=4\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=(1,\sqrt{3})$. 故选 C.

4.A　**提示**：因为 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，所以 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle-|\boldsymbol{b}|^2=0$，又 $\sqrt{3}|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$，即 $|\boldsymbol{b}|=\frac{\sqrt{3}}{2}|\boldsymbol{a}|$，所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}|\boldsymbol{a}|^2\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{3}{4}|\boldsymbol{a}|^2$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$. 故选 A.

5.D　**提示**：过 E 作 $EF/\!/BC$，交 AB 于点 F，设 A 到 BC 的距离为 h，则 $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle AEF}+S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}EF\cdot h$，$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\cdot CD\cdot h$，因为 $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ACD}$，所以 $EF=CD=\frac{1}{2}BD$，故 E 为 AD 的中点，$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD})=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$，所以 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right)\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}^2+\frac{1}{6}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\times3^2+\frac{1}{3}\times3^2+\frac{1}{6}\times3^2\times\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}$. 故选 D.

6.C　**提示**：分别取 AC,BC 的中点 D,E，连接 DE，因则 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PD}$，$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PE}$，因为 $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}+2(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=\mathbf{0}$，所以 $2\overrightarrow{PD}+4\overrightarrow{PE}=\mathbf{0}$，所以 $\overrightarrow{PD}=-2\overrightarrow{PE}$，所以点 P 为线段 DE 上靠近点 E 的三等分点，所以 $S_{\triangle CDE}=\frac{3}{2}S_{\triangle PCD}$，$S_{\triangle ABC}=4S_{\triangle CDE}=6S_{\triangle PCD}$，$S_{\triangle APC}=2S_{\triangle PCD}$，所以 $S_{\triangle ABC}:S_{\triangle APC}=3:1$. 故选 C.

7.D　**提示**：由题意，得 $\boldsymbol{a}=(-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(3,\lambda-4)$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2,\lambda-2)$，因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角，所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})<0$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 不共线，所以 $\begin{cases}-2+2(\lambda-2)<0,\\-(\lambda-2)-4\neq0,\end{cases}$ 解得 $\lambda<3$ 且 $\lambda\neq-2$，所以 λ 的取值范围为 $(-\infty,-2)\cup(-2,3)$. 故选 D.

8.A　**提示**：设 $AC\cap BD=O$，因为 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，所以 $AC\perp BD$，因为四边形 $ABCD$ 中，$AB=5$，$CD=2$，$BC=\sqrt{13}$，设 $OC=x$，则 $OB=\sqrt{13-x^2}$，$OD=\sqrt{4-x^2}$，所以 $OA=\sqrt{12+x^2}$，所以 $AD=\sqrt{OD^2+OA^2}=4$，由 $AB/\!/CD$，得 $\frac{OD}{OB}=\frac{CD}{AB}$，即 $\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{13-x^2}}=\frac{2}{5}$，得 $x^2=\frac{16}{7}$，所以 $BD=OD+OB=\sqrt{21}$. 在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理的推论，得 $\cos\angle DAB=\frac{16+25-21}{2\times4\times5}=\frac{1}{2}$，又 $|\overrightarrow{AM}|+|\overrightarrow{AN}|=2$，设 $|\overrightarrow{AM}|=t$，则 $|\overrightarrow{AN}|=2-t$，其中 $0<t<2$，所以 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=|\overrightarrow{AM}|\cdot|\overrightarrow{AN}|\cdot\cos\angle DAB=t\cdot(2-t)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}[-(t-1)^2+1]\leqslant\frac{1}{2}$，当 $t=1$ 时，等号成立. 所以 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$. 故选 A.

二、多项选择题

9.BC　**提示**：因为 A,B,C 三点共线，所以存在唯一的实数 $k(k\neq0)$，使得 $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$，所以 $2\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=k[(\lambda-1)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}]$，所以 $\begin{cases}k(\lambda-1)=2,\\k=\lambda,\end{cases}$ 解得 $\lambda=-1$，或 $\lambda=2$，所以实数 λ 的可能的取值为 -1 或 2. 故选 BC.

10.ABD　**提示**：对于 A，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos60°=1\times2\times\frac{1}{2}=1$，故 A 正确；对于 B，$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=4\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4\times1+4\times1+4=12$，所以 $|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2\sqrt{3}$，故 B 正确；对于 C，$(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4\times1-4\times1+4=4$，所以 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$，故 C 错误；对于 D，因为 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，即向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为 90°，故 D 正确. 故选 ABD.

11.BC　**提示**：因为在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$，所以 D 是 BC 中点，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，设 $\overrightarrow{AE}=t\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}t\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}t\overrightarrow{AC}$，$0<t\leqslant1$，又 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，所以 $\lambda=\mu=\frac{1}{2}t$，$0<\lambda,\mu\leqslant\frac{1}{2}$，故 A 错误，B 正确；$\frac{1}{4\lambda}+\mu=\frac{1}{4\lambda}+\lambda\geqslant2\sqrt{\frac{1}{4\lambda}\cdot\lambda}=1$，当且仅当 $\frac{1}{4\lambda}=\lambda$，即 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，故 C 正确；$\frac{4}{\lambda}+\mu=\frac{4}{\lambda}+\lambda$ 在 $\lambda\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 上单调递减，所以当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，$\frac{4}{\lambda}+\mu$ 取得最小值 $\frac{17}{2}$，故 D 错误. 故选 BC.

12.BCD　**提示**：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD})=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=3\times1\times(-1)+3\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{2}$，故 A 错误；由 $\overrightarrow{OE}=u\overrightarrow{OC}+u\overrightarrow{OD}$，知 E 为弧 CD 的中点，又 $\angle AOB=120°$，由平行四边形法则可知 $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$，则 $u=1$，故B正确；由 $\angle DOE=30°$，知 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OE}=0$，$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OE}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，设 $\overrightarrow{OE}=x\overrightarrow{OC}+y\overrightarrow{OD}$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OE}=x-\frac{1}{2}y=0,\\\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OE}=-\frac{1}{2}x+y=\frac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{3},\\y=\frac{2\sqrt{3}}{3},\end{cases}$ 故 $\overrightarrow{OE}=\frac{\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{OC}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{OD}$，故 C 正确. $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}=(\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{EO}^2+\overrightarrow{EO}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1-3\cos\angle BOE-3\cos(120°-\angle BOE)-\frac{9}{2}=-\frac{3}{2}\cos\angle BOE-\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\angle BOE-\frac{7}{2}=-3\sin\left(\angle BOE+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{7}{2}\geqslant-\frac{13}{2}$，当且仅当 $\angle BOE=60°$ 时，等号成立，故 $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}$ 的最小值为 $-\frac{13}{2}$，故 D 正确. 故选 BCD.

三、填空题

13.$-\frac{3}{4}$　**提示**：因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=m+3m+3=0$，解得 $k=-\frac{3}{4}$.

14.4　**提示**：设 $\frac{2\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}=(1-t)\overrightarrow{AB}+2t\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$，则 $|\overrightarrow{AD}|=2$，$\overrightarrow{AE}=(1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AD}$，又 $t+(1-t)=1$，所以 B,D,E 三点共线，所以当 $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{BD}$ 时，$\left|(1-t)\overrightarrow{AB}+2t\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right|=|\overrightarrow{AE}|$ 取得最小值 $\sqrt{2}$，又 $|\overrightarrow{AB}|=2$，$|\overrightarrow{AD}|=2$，所以 $\angle BAC=90°$，所以 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=|\overrightarrow{BA}|^2=4$.

15.$\sqrt{3}$　**提示**：以 C 为坐标原点，以 CB,CA 所在直线分别为 x 轴，y 轴，建立平面直角坐标系，则 $C(0,0)$，$A(0,2)$，$B(2\sqrt{3},0)$，所以直线 AB 的方程为 $\frac{x}{2\sqrt{3}}+\frac{y}{2}=1$，设 $P(x,y)$，则 $y=2-\frac{x}{\sqrt{3}}$，$0\leqslant x\leqslant2\sqrt{3}$，$\overrightarrow{PB}=(2\sqrt{3}-x,-y)$，$\overrightarrow{PC}=(-x,-y)$，所以 $|\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|^2=(2\sqrt{3}-2x)^2+(2y)^2=4x^2+4\left(2-\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2-8\sqrt{3}x+12=\frac{16}{3}x^2-\frac{40\sqrt{3}}{3}x+28=\frac{16}{3}\left(x-\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2+3$，当 $x=\frac{5\sqrt{3}}{4}$ 时，$|\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|^2$ 取得最小值 3，所以 $|\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|$ 的最小值为 $\sqrt{3}$.

16.$\frac{4}{5}$　**提示**：因为 O 为 $\triangle ABC$ 的内心，所以 $S_A:S_B:S_C=a:b:c$，又 $S_A\overrightarrow{OA}+S_B\overrightarrow{OB}+S_C\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，所以 $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，所以 $a\overrightarrow{AO}=b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=b(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO})+c(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO})=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}-(b+c)\overrightarrow{AO}$，所以 $(a+b+c)\overrightarrow{AO}=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AO}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$，又 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，所以 $x=\frac{b}{a+b+c}$，$y=\frac{c}{a+b+c}$，所以 $x+y=\frac{b+c}{a+b+c}=\frac{1}{\frac{a}{b+c}+1}$. 由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-\frac{7}{4}bc=(b+c)^2-\frac{15}{4}bc\geqslant(b+c)^2-\frac{15}{4}\times\left(\frac{b+c}{2}\right)^2=\frac{1}{16}(b+c)^2$，当且仅当 $b=c$ 时，取等号，所以 $\frac{a^2}{(b+c)^2}\geqslant\frac{1}{16}$，即 $\frac{a}{b+c}\geqslant\frac{1}{4}$，所以 $x+y\leqslant\frac{1}{\frac{1}{4}+1}=\frac{4}{5}$，当且仅当 $b=c$ 时，取等号，所以 $x+y$ 的最大值为 $\frac{4}{5}$.

四、解答题

17.**解**：（1）因为向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(3,2)$. 所以 $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2k-3,k-2)$，$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(8,5)$，因为 $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 共线，所以 $5(2k-3)=8(k-2)$，解得 $k=-\frac{1}{2}$.

（2）因为 $\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}$，且 A,B,C 三点共线，所以存在 $\lambda\in\mathbf{R}$，使 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC}$，所以 $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}+m\lambda\boldsymbol{b}$，所以 $\begin{cases}2=\lambda,\\3=m\lambda,\end{cases}$ 解得 $m=\frac{3}{2}$.

18.**解**：（1）因为向量 $\boldsymbol{m}=(\cos x,-\sin x)$，$\boldsymbol{n}=(3,\sqrt{3})$，$\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 共线，所以 $\sqrt{3}\cos x+3\sin x=0$，所以 $\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，即 $\tan x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（2）由题意，得 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=3\cos x-\sqrt{3}\sin x$，$|\boldsymbol{m}|=1$，$|\boldsymbol{n}|=2\sqrt{3}$，又 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，所以 $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}$，即 $\frac{1}{2}=\frac{3\cos x-\sqrt{3}\sin x}{1\times2\sqrt{3}}$，整理得 $\sqrt{3}\cos x-\sin x=1$，即 $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，由 $x\in[0,\pi]$，得 $x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，所以 $x+\frac{\pi}{6}=$

$\frac{\pi}{3}$，解得 $x=\frac{\pi}{6}$.

19.**解**：（1）当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，所以 D,E 分别是 AB,BC 的中点，所以 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$，所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CD}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}+\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{CB}^2=-\frac{1}{2}\times1^2-\frac{1}{4}\times2\times1\times\cos60°+\frac{1}{4}\times2^2=\frac{1}{4}$.

（2）假设存在非零实数 λ，使得 $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{CD}$，由 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}$，得 $\overrightarrow{AD}=\lambda(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})$，所以 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+\lambda(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=\lambda\overrightarrow{CB}+(1-\lambda)\overrightarrow{CA}$，因为 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}$，所以 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})+\lambda(-\overrightarrow{CB})=(1-\lambda)\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$，所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CD}=\lambda(1-\lambda)\overrightarrow{CB}^2+[(1-\lambda)^2-\lambda]\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}-(1-\lambda)\overrightarrow{CA}^2=4\lambda(1-\lambda)+(1-\lambda)^2-\lambda-(1-\lambda)=-3\lambda^2+2\lambda=0$，解得 $\lambda=\frac{2}{3}$ 或 $\lambda=0$（舍去），所以存在非零实数 $\lambda=\frac{2}{3}$，使得 $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{CD}$.

20.**解**：（1）设 $\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{AB}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，则 $\overrightarrow{OG}\cdot(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BO})=\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{OA}=(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}^2+\lambda|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{OA}|\cos\frac{3\pi}{4}=100-100\lambda$，则 $\lambda=0$ 时，$\overrightarrow{OG}\cdot(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BO})$ 取得最大值 100.

（2）设 $\angle AOB=\theta,\theta\in(0,\pi)$，则 $\angle OBP=\frac{\pi-\theta}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}-\frac{\theta}{2}$，在 $\triangle AOB$ 中，由余弦定理，得 $AB^2=OA^2+OB^2-2OA\times OB\times\cos\theta=200(1-\cos\theta)=400\sin^2\frac{\theta}{2}$，即 $AB=20\sin\frac{\theta}{2}$，又 $\angle PBA=\angle QAB=60°$，$AQ=QP=PB$，所以 $AB=2BP$，则 $BP=10\sin\frac{\theta}{2}$. 连接 OP，在 $\triangle OBP$ 中，由余弦定理，得 $OP^2=OB^2+BP^2-2OB\cdot BP\cdot\cos\angle OBP=100+\left(10\sin\frac{\theta}{2}\right)^2-2\times10\times10\sin\frac{\theta}{2}\times\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\theta}{2}\right)=100+50\sqrt{3}\sin\theta$，所以当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，OP 最长，所以该奖杯比较美观时 $\angle AOB$ 的大小为 $\frac{\pi}{2}$.

21.**解**：（1）因为点 E 为边 AC 中点，AD 与 BE 交于点 P，且 $\overrightarrow{BP}=4\overrightarrow{PE}$，所以 $\overrightarrow{BP}=\frac{4}{5}\overrightarrow{BE}=\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$，又点 D 为边 BC 上一点，所以存在实数 t，使得 $\overrightarrow{BC}=t\overrightarrow{BD}$，所以 $\overrightarrow{BP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BA}=\frac{2}{5}t\overrightarrow{BD}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$，因为 A,P,D 三点共线，所以 $\frac{2}{5}t+\frac{2}{5}=1$，则 $t=\frac{3}{2}$，即 $\overrightarrow{BC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BD}$，所以 $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$，整理得 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，又 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，所以 $x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{2}{3}$，所以 $y-x=\frac{1}{3}$.

（2）取 AB 的中点 F，连接 OE,OF，则 $OF\perp AB$，$OE\perp AC$，所以 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FO})\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{FO}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$，$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2$，因为 $|AB|=|AC|=2$，所以由（1）知 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{3}|\overrightarrow{AC}|^2=\frac{4}{6}+\frac{4}{3}=2$，所以 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD}$ 是定值 2.

22.**解**：（1）因为 $\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}=\frac{1}{2}$，即 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AD}\cdot(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(4|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2)=0$.

（2）因为点 E 为 BC 的中点，设 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 θ，所以 $\frac{1}{|\overrightarrow{AE}|^2}+\frac{1}{|\overrightarrow{BC}|^2}=\frac{4}{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2}+\frac{1}{(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})^2}=\frac{4}{5+4\cos\theta}+\frac{1}{5-4\cos\theta}=\frac{1}{10}(5+4\cos\theta+5-4\cos\theta)\cdot\left(\frac{4}{5+4\cos\theta}+\frac{1}{5-4\cos\theta}\right)=\frac{1}{10}\left[5+\frac{5+4\cos\theta}{5-4\cos\theta}+\frac{4(5-4\cos\theta)}{5+4\cos\theta}\right]\geqslant\frac{1}{10}\times(5+4)=\frac{9}{10}$. 当且仅当 $5+4\cos\theta=2(5-4\cos\theta)$，即 $\cos\theta=\frac{5}{12}$ 时，等号成立，此时 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}\times1\times2\times\sqrt{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2}=\frac{\sqrt{119}}{12}$.

第 11 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B　**提示**：因为 $\cos A=\frac{1}{8}$，所以 $\sin A=\frac{3\sqrt{7}}{8}$，因为 $b=5$，$\sin B=\frac{5\sqrt{7}}{16}$，由正弦定理，得 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}=6$. 故选 B.

2.B　**提示**：由余弦定理，得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-2ac-2ac\cos B=49-2\times8-2\times8\times\frac{1}{2}=25$，所以 $b=5$. 故选 B.

3.B　**提示**：因为 $a^2+b^2-c^2=\sqrt{3}ab$，所以由余弦定理的推论，得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{6}$，又 $b\sin A=2\sin C$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}b\sin A=\frac{1}{2}\times2\sin C=\frac{1}{2}$. 故选 B.

4.B　**提示**：由题意结合余弦定理的推论，得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{c^2+ac}{2bc}=\frac{c+a}{2b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $a+c=\sqrt{3}b$，所以 $a^2+2ac+c^2=3b^2$，因为 $b^2=a^2+ac$，所以 $a^2+2ac+c^2=3(a^2+ac)$，即 $2a^2+ac-c^2=0$，所以 $(2a-c)(a+c)=0$，因为 $a>0,c>0$，所以 $c=2a$，由余弦定理的推论及 $b^2=a^2+ac$，得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{c^2-ac}{2ac}=\frac{c-a}{2a}=\frac{1}{2}$，又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$. 故选 B.

5.C　**提示**：因为 $(b+c)^2=a^2+(2-\sqrt{2})bc$，所以 $b^2+c^2-a^2=-\sqrt{2}bc$，由余弦定理的推论，得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{-\sqrt{2}bc}{2bc}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{3\pi}{4}$，$\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，因为 $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A=\frac{1}{2}$，所以 $\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. 故选 C.

6.C　**提示**：因为 $a^2=b^2+c^2+\sqrt{2}bc$，所以由余弦定理的推论，得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{3\pi}{4}$，又 $a=\sqrt{2}$，所以由正弦定理，得 $b=\frac{a\sin B}{\sin A}=2\sin B$，$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=2\sin C$，又 $B+C=\frac{\pi}{4}$，所以 $S+\sqrt{2}\cos B\cos C=\frac{1}{2}bc\sin A+\sqrt{2}\cos B\cos C=\frac{\sqrt{2}}{4}\times2\sin B\times2\sin C+\sqrt{2}\cos B\cos C=\sqrt{2}(\sin B\sin C+\cos B\cos C)=\sqrt{2}\cos(B-C)=\sqrt{2}\cos\left(2B-\frac{\pi}{4}\right)$，又 $B\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $2B-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$，所以当 $2B-\frac{\pi}{4}=0$，即 $B=\frac{\pi}{8}$ 时，$S+\sqrt{2}\cos B\cos C$ 取得最大值 $\sqrt{2}$. 故选 C.

7.C　**提示**：设 AC 与 BD 的交点为 E，由题意，得在 $\triangle ACD$ 中，$\angle ADC=150°$，$\angle ACD=\angle CAD=15°$，所以 $AD=DC=50$m，由余弦定理，得 $AC^2=50^2+50^2-2\times50\times50\cos150°=2500(2+\sqrt{3})$，则 $AC=50\sqrt{2+\sqrt{3}}$. 在 $\triangle CDE$ 中，由 $\angle BDC=\angle DCA=15°$，得 $DE=CE$，$\angle CED=150°$，由余弦定理，得 $DE^2+CE^2-2DE\cdot CE\cos150°=50^2$，解得 $CE=\frac{50}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$. 在 $\triangle BCE$ 中，易知 $\angle BEC=\angle CBE=30°$，所以 $BC=CE=\frac{50}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$，在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos120°=2500(2+\sqrt{3})+\frac{2500}{2+\sqrt{3}}-2\times50\sqrt{2+\sqrt{3}}\times\frac{50}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=12500$，所以 $AB=50\sqrt{5}$ m. 故选 C.

8.D　**提示**：因为 $\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C=\sin A\cdot\sin B$，所以由正弦定理，得 $a^2+b^2-c^2=ab$，所以由余弦定理的推论，得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$，因为 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$，因为 $\frac{\sin B\sin C}{3\sin A}=\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos C}{c}$，所以 $\frac{1}{3}\times\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B}{\sin A}=\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos C}{c}$，所以 $\frac{\sqrt{3}}{6}\times\frac{b}{a}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2abc}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}=\frac{b}{ac}$，所以 $c=2\sqrt{3}$，由正弦定理，得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=4$，所以 $a+b=4\sin A+4\sin B=4\sin A+4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=4\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$，由锐角 $\triangle ABC$，得 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$C=\frac{2\pi}{3}-A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $A\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $4\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\in(6,4\sqrt{3}]$，所以 $\frac{c^2}{a+b}=\frac{12}{4\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)}\in[\sqrt{3},2)$. 故选 D.

二、多项选择题

9.AD　**提示**：对于 A，$A>90°$，$a>b$，只有一解，故 A 正确；对于 B，$a=b\sin A$，有一解，故 B 错误；对于 C，$a<b\sin A$，无解，故 C 错误；对于 D，$\sin B=\frac{\sqrt{6}\sin60°}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{2}>1$，无解，故 D 正确. 故选 AD.

10.BD　**提示**：由余弦定理，得 $a^2+c^2-b^2=2ac\cos B$，代入已知等式得 $2ac\cdot\cos B\tan B=\sqrt{3}ac$，则 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$ 或 $B=\frac{2\pi}{3}$. 故选 BD.

11.BCD　**提示**：对于 A，因为 $\tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=7$，所以 $\sin C=7\cos C>0$，因为 $\sin^2C+\cos^2C=1$，所以 $\sin C=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，$\cos C=\frac{\sqrt{2}}{10}$，因为 $\sin A=\frac{4}{5}<\frac{7\sqrt{2}}{10}$，所以 $\sin A<\sin C$，由正弦定理，得 $a<c$，所以 $A<C$，所以 $\cos A>0$，所以 $\cos A=\frac{3}{5}$，故 A 错误；对于 B，$\cos B=\cos[\pi-(A+C)]=-\cos(A+C)=-\cos A\cos C+\sin A\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$，故 B 正确；对于 C，由正弦定理，得 $b=\frac{a\sin B}{\sin A}=5\sqrt{2}$，故 C 正确；对于 D，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times8\times5\sqrt{2}\times\frac{7\sqrt{2}}{10}=28$，故 D 正确. 故选 BCD.

12.ABD　**提示**：因为 $(b+c):(c+a):(a+b)=4:5:6$，可设 $b+c=4k$，$a+c=5k$，$a+b=6k$，得 $a=\frac{7k}{2}$，$b=\frac{5k}{2}$，$c=\frac{3k}{2}$，所以 $a:b:c=7:5:3$，由正弦定理，得 $\sin A:\sin B:\sin C=7:5:3$，故 A 正确；若 $c=6$，则 $b=10$，由 A 项及余弦定理的推论，得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{2}$，则 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=15\sqrt{3}$，故 B 正确；由 B 项可得 $\cos A=-\frac{1}{2}<0$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=bc\cos A<0$，故C 错误；若 $b+c=8$，则 $k=2$，$a=7$，又 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，则由正弦定理，得 $2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{14\sqrt{3}}{3}$，所以 $\triangle ABC$ 的外接圆半径是 $\frac{7\sqrt{3}}{3}$，故 D 正确. 故选 ABD.

三、填空题

13.$\frac{\pi}{4}$　**提示**：因为 $b^2+c^2-a^2=4$，结合余弦定理，可得 $2bc\cos A=4>0$，所以 A 为锐角，又 $\frac{1}{2}bc\sin A=1$，所以 $bc\sin A=2$，则 $\tan A=1$，所以 $A=\frac{\pi}{4}$.

14.4　**提示**：因为 $a\cos B+b\cos A-2c\cos C=0$，由正弦定理，得 $\sin A\cos B+\sin B\cos A-2\sin C\cos C=0$，所以 $\sin(A+B)-2\sin C\cos C=0$，因为 $A+B=\pi-C$，所以 $\sin(A+B)=\sin C$，所以 $\sin C-2\sin C\cos C=0$，所以 $\sin C(1-2\cos C)=0$，因为 $\sin C>0$，所以 $\cos C=\frac{1}{2}$，因为 $c=2\sqrt{3}$，$a=2$，所以由余弦定理，得 $12=4+b^2-2\times2\times b\times\frac{1}{2}$，即 $b^2-2b-8=0$，解得 $b=4$ 或 $b=-2$（舍去）.

15.10　**提示**：因为 $OA\perp$ 平面 COD，$OC,OD\subset$ 平面 COD，所以 $OA\perp OC$，$OA\perp OD$. 设塔高 $OA=x$，在 $\mathrm{Rt}\triangle AOC$ 中，$\angle ACO=45°$，则 $OC=AO=x$，在 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 中，$\angle ADO=30°$，所以 $OD=\sqrt{3}x$，由题意，得 $\angle OCD=120°$，在 $\triangle OCD$ 中，由余弦定理，得 $OD^2=CO^2+CD^2-2CO\cdot CD\cos120°$，所以 $3x^2=x^2+100+10x$，解得 $x=10$ 或 -5（舍去），所以塔高 OA 为 10m.

16.$7\sqrt{7}$　**提示**：因为 $\angle D=\frac{2\pi}{3}$，所以 $\cos D=-\frac{1}{2}$，$\sin D=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $AD=2$，$CD=4$，所以在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理，得 $AC^2=AD^2+CD^2-2\cdot AD\cdot CD\cdot\cos D=28$，$AC=2\sqrt{7}$. 在 $\triangle ABC$ 中，$\cos B=\frac{3}{4}$，由余弦定理，得 $AB^2+BC^2-28=2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos B=\frac{3}{2}AB\cdot BC\geqslant2AB\cdot BC-28$，则 $AB\cdot BC\leqslant56$，当且仅当 $AB=BC=2\sqrt{14}$ 时，等号成立，由 $\cos B=\frac{3}{4}$，得 $\sin B=$