22.**解**:(1)由已知得当 $a=1$ 时,$f'(x)=2xe^x+x^2e^x+2x+4=(xe^x+2)(x+2)$,令 $g(x)=xe^x+2$,则 $g'(x)=(x+1)e^x$,当 $x<-1$ 时,$g'(x)<0$,当 $x>-1$ 时,$g'(x)>0$,所以函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减,在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增,所以 $g(x)_{min}=g(-1)=-\frac{1}{e}+2>0$,故 $g(x)=xe^x+2>0$,所以当 $x<-2$ 时,$f'(x)<0$,当 $x>-2$ 时,$f'(x)>0$,所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递减,在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增,所以 $f(x)_{min}=f(-2)=4e^{-2}-4$.

(2)$f'(x)=(xe^x+2a)(x+2)$,令 $h(x)=xe^x+2a(x>0)$.①当 $a\geqslant 0$ 时,$h(x)=xe^x+2a>0$,又 $x+2>0$,故 $f'(x)=(xe^x+2a)(x+2)>0$,此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,$f(x)$ 无极值;②当 $a<0$ 时,$h'(x)=(x+1)e^x>0$,$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,又 $h(0)=2a<0$,$h(-2a)=-2a(e^{-2a}-1)>0$,所以 $h(x)=xe^x+2a$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一零点,设为 $x_0(x_0>0)$,所以当 $x\in(0,x_0)$ 时,$h(x)<0$,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时,$h(x)>0$,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,所以当 $a<0$ 时,函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在极值点 x_0.

综上,实数 a 的取值范围为 $(-\infty,0)$.

第 8 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B **提示**:由题意,得 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}=\frac{2a-1}{\sqrt{(2a-1)^2+16}}$,且 $2a-1<0$,即 $a<\frac{1}{2}$,等式两边平方,得 $\frac{9}{25}=\frac{(2a-1)^2}{(2a-1)^2+16}$,即 $(2a-1)^2=9$,解得 $a=-1$ 或 $a=2$(舍去),故选 B.

2.A **提示**:因为 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2$,所以 $\sin\alpha=2\cos\alpha$,又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,$\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$,所以 $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以 $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$.故选 A.

3.A **提示**:因为 α 为锐角,$\sin\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos\alpha=-\frac{1}{3}$,所以 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$,则 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,所以 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}+4}{6}$.故选 A.

4.A **提示**:由 $\theta=\frac{3\pi}{4}$,得 $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sqrt{2}\cdot\sin\theta=-1=\tan\theta$,故充分性成立;由 $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sqrt{2}\cdot\sin\theta=\tan\theta$,得 $\sin\theta=0$ 或 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $\theta=k\pi$ 或 $\theta=2k\pi+\frac{3\pi}{4}$ 或 $\theta=2k\pi+\frac{5\pi}{4}$,$k\in\mathbf{Z}$,故必要性不成立.故"$\theta=\frac{3\pi}{4}$"是"$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\tan\theta$"的充分不必要条件.故选 A.

5.D **提示**:因为 $AB=4$,所以 $AC=2\sqrt{2}$,所以 $S_{半圆AEC}=\frac{1}{2}\times\pi\times(\sqrt{2})^2=\pi$,$S_{弓形}=\frac{1}{4}\times\pi\times2^2-\frac{1}{2}\times2\times2=\pi-2$,故 $S_{阴影}=\pi-(\pi-2)=2$.故选 D.

6.C **提示**:因为 α 为锐角,所以 $\alpha+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$,又 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3}{5}$,所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$,所以 $\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{4}{5}$.故选C.

7.B **提示**:因为 $\alpha\in(0,\pi)$,$\tan\alpha=\frac{1}{2}$,所以 $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{3}{5}$.故选 B.

8.D **提示**:将已知的两式两边同时平方并相加,得 $\sin^2\beta+4\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha+\cos^2\beta+4(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)=3$,即 $4\sin(\alpha-\beta)=-2$,得 $\sin(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$,所以 $\sin(\beta-\alpha)=\frac{1}{2}$,因为 $-\frac{\pi}{2}<\beta-\alpha<\frac{\pi}{2}$,所以 $\beta-\alpha=\frac{\pi}{6}$,得 $\alpha=\beta-\frac{\pi}{6}$,代入 $2\sin\alpha+\cos\beta=\sqrt{2}$,得 $2\sin\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\beta=\sqrt{2}$,即 $\sqrt{3}\sin\beta=\sqrt{2}$,则 $\sin\beta=\frac{\sqrt{6}}{3}$,即 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}$,所以 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}$.故选 D.

9.C **提示**:对于 A,$4\sin15°\sin75°=4\sin15°\cos15°=2\sin30°=1$,故 A 错误;对于 B,$2\left(\cos^2\frac{\pi}{6}-\sin^2\frac{\pi}{6}\right)=2\cdot\cos\frac{\pi}{3}=1$,故 B 错误;对于 C,$\frac{\tan22.5°}{1-\tan^222.5°}=\frac{1}{2}\times\frac{2\tan22.5°}{1-\tan^222.5°}=\frac{1}{2}\tan45°=\frac{1}{2}$,故 C 正确;对于 D,$\sqrt{\frac{1}{2}+\cos\frac{\pi}{3}}=1$,故 D 错误.故选 C.

10.A **提示**:因为 $a=\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}=\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$,$b=2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$,$c=1-2\sin^2\frac{\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $c>b>a$.故选 A.

11.D **提示**:由题意,得 $f(2021)=a\sin(2021\pi+\alpha)+b\cos(2021\pi+\beta)+3=-a\sin\alpha-b\cos\beta+3=5$,所以 $a\sin\alpha+b\cos\beta=-2$,所以 $f(2022)=a\sin(2022\pi+\alpha)+b\cos(2022\pi+\beta)+3=a\sin\alpha+b\cos\beta+3=1$.故选 D.

12.C **提示**:因为 $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{1}{2}$,即 $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{1}{2}$,所以 $\sin\alpha=-3\cos\alpha$,显然 $\cos\alpha\neq0$,

所以 $\tan\alpha=-3$,故 $\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan^2\alpha-\tan\alpha-3}{\tan^2\alpha+1}=\frac{9}{10}$.

故选 C.

二、多项选择题

13.BCD **提示**:对于 A,$-\frac{7\pi}{6}=-\pi-\frac{\pi}{6}$ 是第二象限角,故 A 错误;对于 B,扇形的半径为 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{3}}=3$,面积为 $\frac{1}{2}\times\pi\times3=\frac{3\pi}{2}$,故 B 正确;对于 C,$\cos\alpha=\frac{-3}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}=-\frac{3}{5}$,故 C 正确;对于 D,$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-A\right)=-\sin A$,$\sin(\pi+A)=-\sin A$,故 D 正确.故选 BCD.

14.ABD **提示**:因为 $\theta\in(0,\pi)$ 且满足 $\sin\theta\cdot\cos\theta=-\frac{12}{25}$,所以 $\sin\theta>0$,$\cos\theta<0$,所以 $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.因为 $|\sin\theta|>|\cos\theta|$,所以 $\sin\theta>-\cos\theta$,所以 $\sin\theta+\cos\theta>0$,因为 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$,$\sin\theta\cdot\cos\theta=-\frac{12}{25}$,所以 $\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{1}{25}$,所以 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$.由 $\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5},\\ \sin\theta\cdot\cos\theta=-\frac{12}{25},\end{cases}$ 解得 $\sin\theta=\frac{4}{5}$,$\cos\theta=-\frac{3}{5}$,所以 $\tan\theta=-\frac{4}{3}$.故选 ABD.

15.ACD **提示**:由 $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=3$,解得 $\tan\alpha=2$,故 A 正确;因为 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2>0$,又 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$,则 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,所以 $\sin\alpha>0$,$\cos\alpha>0$,由 $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=3>0$,可得 $\sin\alpha-\cos\alpha>0$,故 B 错误;因为 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan^2\alpha-1}{\tan^2\alpha+1}=\frac{3}{5}$,故 C 正确;因为 $\frac{1-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)}=\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{1}{3}$,故 D 正确.故选 ACD.

16.ACD **提示**:因为 $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故 A 正确;$2\sin^275°-1=-(1-2\sin^275°)=-\cos150°=\frac{\sqrt{3}}{2}$,故 B 错误;$\frac{1+\tan15°}{1-\tan15°}=\frac{\tan45°+\tan15°}{1-\tan45°\cdot\tan15°}=\tan60°=\sqrt{3}$,故 C 正确;因为 $\tan20°+\tan40°+\tan120°=\tan60°\cdot(1-\tan20°\cdot\tan40°)-\tan60°=-\tan60°\cdot\tan20°\cdot\tan40°=-\sqrt{3}\tan20°\cdot\tan40°$,故 D 正确.故选 ACD.

17.BD **提示**:因为 $\sqrt{3}\sin(\pi+\theta)=\sin\left(\frac{2021\pi}{2}-\theta\right)$,所以 $-\sqrt{3}\sin\theta=\cos\theta$,即 $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,又 $\theta\in(0,2\pi)$,所以 $\theta=\frac{5\pi}{6}$,或 $\theta=\frac{11\pi}{6}$.故选 BD.

18.AB **提示**:$f(x)=\sin2x+\sqrt{3}\cos2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$,故 A 正确;显然,$f(x)$ 的最小值为 -2,故 B 正确;由 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=0$,可得 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 对称,故 C 错误;由 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right)$,得 $2x+\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{2\pi}{3},0\right)$,所以 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right)$ 上没有单调性,故 D 错误.故选 AB.

三、填空题

19.$\frac{5}{9}$ **提示**:因为 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$,所以 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{2}{3}$,两边平方,可得 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=1-\sin2\alpha=\frac{4}{9}$,则 $\sin2\alpha=\frac{5}{9}$.

20.4;$\frac{6}{5}$ **提示**:因为 $\sin\theta=4\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{6}\cos\theta$,所以 $\sin\theta=4\cos\theta$,所以 $\tan\theta=4$,所以 $\tan(\theta-\pi)=-\tan(\pi-\theta)=\tan\theta=4$,$\frac{2\cos(\theta+2022\pi)-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\theta-\frac{3\pi}{2}\right)-\sin(\theta+\pi)}=\frac{2\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\frac{2+\tan\theta}{1+\tan\theta}=\frac{6}{5}$.

21.$-\frac{\pi}{4}$ **提示**:由 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$,得 $2\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,因为 $\cos2\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{10}$,所以 $\sin2\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.易知 $\alpha-\beta\in\left(\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right)$,因为 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以 $\cos(\alpha-\beta)=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$,所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos[2\alpha-(\alpha-\beta)]=\cos2\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin2\alpha\sin(\alpha-\beta)=-\frac{\sqrt{10}}{10}\times\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)+\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,又 $\alpha+\beta\in\left(-\frac{3\pi}{4},0\right)$,所以 $\alpha+\beta=-\frac{\pi}{4}$.

22.3 **提示**:以 O 点为坐标原点,OA 所在直线为 x 轴,建立平面直角坐标系,设 $\angle AOB=\theta$,$\theta\in[0,\pi]$,则 $B(\cos\theta,\sin\theta)$,$A(\sqrt{2},0)$,则 $\overrightarrow{AB}=(\cos\theta-\sqrt{2},\sin\theta)$,过点 C,B 分别作 $CD\perp x$ 轴,$BE\perp x$ 轴,交 x 轴于点 D,E,显然 $\triangle CAD\cong\triangle ABE$,所以 $CD=AE$,$AD=BE$,所以 $C(\sqrt{2}+\sin\theta,\sqrt{2}-\cos\theta)$,即 $\overrightarrow{OC}=(\sqrt{2}+\sin\theta,\sqrt{2}-\cos\theta)$,所以 $|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{(\sqrt{2}+\sin\theta)^2+(\sqrt{2}-\cos\theta)^2}=\sqrt{5+4\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$,所以当 $\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$,即 $\theta=\frac{3\pi}{4}$ 时,$|\overrightarrow{OC}|_{max}=3$,即线段 OC 长度的最大值是 3.

四、解答题

23.**解**:由题意,得 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=k+\frac{1}{2}$,$\tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta}=k^2-3=1$,得 $k^2=4$,又 $-\frac{3\pi}{4}<\theta<-\frac{\pi}{2}$,所以 $\tan\theta>1$,则 $k=2$,所以 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{5}{2}$,解得 $\tan\theta=2$ 或 $\tan\theta=\frac{1}{2}$(舍去).

(1)原式 $=\frac{\sin\theta+5\cos\theta}{2\cos\theta+\sin\theta}=\frac{\tan\theta+5}{\tan\theta+2}=\frac{7}{4}$.

(2)原式 $=\frac{\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{\tan\theta-1}{\tan^2\theta+1}=\frac{1}{5}$.

24.**解**:(1)$f(\alpha)=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(-\cos\alpha)}{-\cos\alpha\cdot\sin\alpha}=\cos\alpha$.

(2)因为 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\frac{1}{3}=-\sin\alpha$,所以 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$,又 α 是第二象限角,所以 $f(\alpha)=\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

25.**解**:(1)因为 $\boldsymbol{a}=\left(\cos\frac{4\pi}{3},\sin(\pi+\alpha)\right)=\left(-\frac{1}{2},-\sin\alpha\right)$,$\boldsymbol{b}=(-1,1-2\cos\alpha)$,又 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,所以 $-\frac{1}{2}(1-2\cos\alpha)-\sin\alpha=0$,则 $\sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{1}{2}$,两边平方,得 $1-\sin2\alpha=\frac{1}{4}$,则 $\sin2\alpha=\frac{3}{4}$.

(2)由(1)知 $\sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{1}{2}$,$\sin2\alpha=\frac{3}{4}$,又 $\alpha\in(-\pi,0)$,所以 $\alpha\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$,则 $\sin\alpha+\cos\alpha=-\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=-\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}=-\frac{\sqrt{7}}{2}$,联立 $\begin{cases}\sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{1}{2},\\ \sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{2},\end{cases}$ 解得 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{7}+1}{4}$,$\cos\alpha=\frac{1-\sqrt{7}}{4}$,则 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4+\sqrt{7}}{3}$.

26.**解**:(1)$f(x)=\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)-4\sin^2\omega x+2=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin2\omega x-\frac{1}{2}\cos2\omega x+2\cos2\omega x=\sqrt{3}\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$ $(\omega>0)$,因为 $f(x)$ 的图象与 x 轴相邻两个交点间的距离为 $\frac{\pi}{2}$,所以 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$,则 $\omega=1$,所以 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,由 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得 $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,所以函数 $f(x)$ 图象的对称轴为 $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

(2)因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $2x+\frac{\pi}{3}\in\left[0,\frac{4\pi}{3}\right]$,所以当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{12}\right]$ 时,$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,$f(x)$ 为增函数;当 $x\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$ 时,$2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{4\pi}{3}\right]$,$f(x)$ 为减函数.所以 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递增,在 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减.

第 5 期

第 2~3 版同步周测参考答案

扫码免费下载习题讲解 ppt

一、单项选择题

1.B **提示**:因为函数 $f(x)=2x+\ln x-4$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数,且 $f(1)=-2<0$,$f(2)=\ln2>0$,所以函数 $f(x)$ 的零点所在区间为 $(1,2)$.故选 B.

2.B **提示**:因为 $f(1.375)>0$,$f(1.3125)<0$,且 $1.375-1.3125=0.0625<0.1$,所以方程 $x^3-x-1=0$ 的根在 $(1.3125,1.375)$ 内.故选 B.

3.C **提示**:作出函数 $y=f(x)$ 与 $y=\frac{1}{2}x$ 的图象(图略),当 $x\geqslant1$ 时,不等式为 $\left(\frac{1}{2}\right)^x\leqslant\frac{1}{2}x$,由图象可知,此时 $x\in[1,+\infty)$;当 $-1<x<1$ 时,不等式为 $\log_4(x+1)\leqslant\frac{1}{2}x$,函数 $y=\log_4(x+1)$ 与 $y=\frac{1}{2}x$ 的图象的交点坐标为 $(0,0)$,$\left(1,\frac{1}{2}\right)$,结合图象知,此时 $x\in(-1,0]$,所以不等式 $f(x)\leqslant\frac{1}{2}x$ 的解集为 $(-1,0]\cup[1,+\infty)$.故选 C.

4.C **提示**:函数 $f(x)=4^x-(x+1)^2$ 的零点个数,即方程 $4^x-(x+1)^2=0$ 根的个数,即 $y=4^x$ 与 $y=(x+1)^2$ 图象交点的个数,作出 $y=4^x$ 与 $y=(x+1)^2$ 的图象(图略),由图象可知两个函数的交点个数为 3.故选 C.

5.D **提示**:由题意,得提升前的信息传递速度 $C=W\log_21000=3W\log_210=\frac{3W}{\lg2}\approx10W$,提升后的信息传递速度 $C'=2W\log_2\frac{10S}{\frac{1}{5}N}=2W\log_250000=2W\cdot\frac{5-\lg2}{\lg2}\approx\frac{94W}{3}$,所以信息传递速度 C 增加了 $\frac{C'-C}{C}\approx2.13=213\%$.故选 D.

6.D **提示**:当 $x\in[0,1]$ 时,$f(x)=2-2^x$,可知函数 $f(x)$ 单调递减,因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,且 $f(2-x)=f(x)$,即函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,作出函数 $f(x)$ 的大致图象(图略),因为方程 $f(x)=\log_a(x+1)$ 在 $(-1,3)$ 内只有 3 个解,则当 $0<a<1$ 时,函数 $y=f(x)$ 与 $y=\log_a(x+1)$ 的图象只有一个交点,不符合题意,舍去.所以 $a>1$,且满足 $0<\log_a(2+1)<1$,解得 $a>3$,所以实数 a 的取值范围是 $(3,+\infty)$.故选 D.

7.B **提示**:因为 $[f(x)]^2-(k+1)\cdot xf(x)+kx^2=0$,即 $[f(x)-x]\cdot[f(x)-kx]=0$ 有且只有三个不同的实数解,所以关于 x 的方程 $f(x)=x$ 与 $f(x)=kx$ 共有三个不同的实数解.①讨论方程 $f(x)=x$ 的解的个数:当 $x\leqslant0$ 时,由 $x^2+\frac{1}{2}x=x$,可得 $x=0$;当 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时,由 $2x=x$,可得 $x=0$(舍去);当 $x>\frac{1}{2}$ 时,由 $2-2x=x$,可得 $x=\frac{2}{3}$,所以方程 $f(x)=x$ 只有两解 $x=0$ 和 $x=\frac{2}{3}$;②讨论方程 $f(x)=kx$ 的解的个数:当 $x\leqslant0$ 时,由 $x^2+\frac{1}{2}x=kx$,解得 $x=0$ 或 $x=k-\frac{1}{2}$;当 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时,由 $2x=kx$,可得 $k=2$,此时方程 $f(x)=kx$ 有无数个解,不符合题意;当 $x>\frac{1}{2}$ 时,由 $2-2x=kx$,可得 $x=\frac{2}{k+2}$.因为 $k>0$,所以三个实数解为 $0,\frac{2}{3},\frac{2}{k+2}$,所以正实数 k 需同时满足 $k-\frac{1}{2}\geqslant0$,$\frac{2}{k+2}>\frac{1}{2}$,$\frac{2}{k+2}\neq\frac{2}{3}$,解得 $\frac{1}{2}\leqslant k<1$ 或 $1<k<2$,所以实数 k 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},1\right)\cup(1,2)$.故选 B.

8.D **提示**:作出 $f(x)$ 的大致图象(图略),由题意知,当 $0<x<4$ 时,$f(x)=|\log_2x|$ 与 $y=a$ 的交点横坐标为 x_1,x_2,所以 $-\log_2x_1=\log_2x_2$,所以 $x_1x_2=1$,且 $\frac{1}{4}<x_1<1<x_2<4$;当 $4\leqslant x\leqslant10$ 时,$f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x-\frac{5\pi}{6}\right)$ 与 $y=a$ 交点的横坐标为 x_3,x_4,又 $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x-\frac{5\pi}{6}\right)$ 的对称轴方程为 $x=3k+4$,$k\in\mathbf{Z}$,所以 x_3,x_4 关于直线 $x=7$ 对称,故 $x_3+x_4=14$,则 $x_1+x_2+x_3+x_4=x_2+\frac{1}{x_2}+14$,由对勾函数的单调性,得 $14+x_2+\frac{1}{x_2}\in\left(16,\frac{73}{4}\right)$,所以 $x_1+x_2+x_3+x_4$ 的取值范围为 $\left(16,\frac{73}{4}\right)$.故选 D.

二、多项选择题

9.ACD **提示**:对于 A,令 $f(x)=0$,解得 $x=\pm2$,$f(x)$ 在区间 $(1,3)$ 上有零点 2;对于 B,因为 $f(x)$ 在 $(1,3)$ 上为增函数,则 $f(x)>f(1)=\frac{1}{2}$,所以 $f(x)$ 在 $(1,3)$ 上不存在零点;对于 C,因为 $f(x)$ 在 $(1,3)$ 上为增函数,$f(1)=-1<0$,$f(3)=\frac{2}{3}>0$,所以 $f(x)$ 在区间 $(1,3)$ 上有零点;对于 D,由 $f(x)$ 在 $(1,3)$ 上为增函数,$f(1)=-1<0$,$f(3)=\sqrt{3}-\frac{2}{3}>0$,得 $f(x)$ 在区间 $(1,3)$ 上有零点.故选 ACD.

10.AD **提示**:作出函数 $f(x)$ 的大致图象(图略),则 $f(x)$ 为偶函数,故 A 正确;函数 $f(x)$ 有 2 个零点,故B错误;$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不单调,故 C 错误;令 $y=f(f(x))-5=0$,得 $f(f(x))=5$,令 $t=f(x)$,则 $f(t)=5$,即 $|4-t^2|=5$,解得 $t=3$ 或 $t=-3$,当 $t=3$ 时,$f(x)=3$ 有 4 个根,当 $t=-3$ 时,$f(x)=-3$ 有 2 个根,所以函数 $y=f(f(x))-5$ 有 6 个零点,故 D 正确.故选 AD.

11.BD **提示**:作出 $f(x)$ 的图象(图略),令 $f(x)=t$,由题意,得方程 $t^2+2t-m=0$ 的 $\Delta=4+4m>0$,所以该方程有 2 个不等的实根,设为 t_1,t_2,且 $t_1+t_2=-2$,$t_1\cdot t_2=-m<0$,所以不妨设 $t_1>0$,$t_2<0$,要使关于 x 的方程 $[f(x)]^2+f(x)-m=0$ 有 4 个不同的实根,则关于 x 的 2 个方程 $f(x)=t_1$ 与 $f(x)=t_2$ 总共有 4 个不等实根,所以 $y=f(x)$ 与 $y=t_1$,$y=t_2$ 共有 4 个交点,交点的横坐标即为原方程的根,所以 $t_1\in(0,1]$,所以 $t_2=-2-t_1\in[-3,-2)$,且 $x_1<-1<x_2<0<x_3<1<x_4$,当 $t_2=-2$ 时,$2-\left(\frac{1}{2}\right)^x=-2$,得 $x=-2$,当 $t_2=-3$ 时,代入 $t^2+2t-m=0$,得 $m=3$,故 D 正确;由 $2-\left(\frac{1}{2}\right)^x=-3$,得 $x=-\log_25$,所以 $x_1\in[-\log_25,-2)$,所以 $x_1\geqslant-\log_25>-3$.故 A 错误;又 $x_2\in(-1,0]$,$x_1+x_2<-2$,所以 B 正确;又 $f(x_3)=f(x_4)$,$0<x_3<1<x_4$,所以 $-\log_2x_3=\log_2x_4$,所以 $x_3x_4=1$,故 C 错误.故选 BD.

12.BCD **提示**:对于 A,当 $\lambda=-1$ 时,对于函数 $f(x)=c$(c 为任意常数),都有 $f(x-1)-f(x)=0$,即 $f(x-1)=f(x)$,故 A 错误;对于 B,$f(x+\lambda)=2(x+\lambda)+1=2x+2\lambda+1$,若 $f(x+\lambda)+\lambda f(x)=0$,即 $2(\lambda+1)x=-3\lambda-1$,则当 $\lambda=-1$ 时,该方程等价为 $0=2$ 不成立;当 $\lambda\neq-1$ 时,该方程只有一个解,不符合题意,故 $f(x)=2x+1$ 不是"λ~特征函数",故 B 正确;对于 C,当 $\lambda=\frac{1}{3}$ 时,满足 $f\left(x+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}f(x)=0$,令 $x=0$,得 $f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}f(0)$,若 $f(0)=0$,则 $f(x)=0$ 显然有实根 0 和 $\frac{1}{3}$,若 $f(0)\neq0$,则 $f\left(\frac{1}{3}\right)f(0)=-\frac{1}{3}[f(0)]^2<0$,又 $f(x)$ 的图象是连续不断的,所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{3}\right)$ 内至少存在一个零点,故 C 正确;对于 D,由 $f(x+\lambda)+\lambda f(x)=0$,得 $e^{x+\lambda}+\lambda e^x=0$,即 $e^x(e^\lambda+\lambda)=0$,则 $e^\lambda+\lambda=0$,易知方程 $e^\lambda+\lambda=0$ 在区间 $(-1,0)$ 有解,即存在常数 $\lambda(\lambda\in\mathbf{R})$ 使得 $f(x+\lambda)+\lambda f(x)=0$ 对任意实数 x 都成立,故 $f(x)=e^x$ 是一个"λ~特征函数",故 D 正确.故选 BCD.

三、填空题

13.-1 **提示**:因为 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2\times\frac{\pi}{3}+\frac{7\pi}{6}\right)=\sin\frac{11\pi}{6}=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$,所以 $a=f\left(f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\log_2\frac{1}{2}=-1$.

14.$(10,12)$ **提示**:因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数,$f(8)f(12)<0$,所以 $f(8)<0$,$f(12)>0$,因为 $f(10)=-\frac{1}{10}<0$,所以 $f(10)f(12)<0$,所以经过下一次计算可知 $x_0\in(10,12)$.

15.$\frac{\sqrt{5}}{5}$;4 **提示**:由题意,得 $4\%P_0=P_0\cdot e^{4\ln k}$,即 $k^4=4\%$,因为 $k>0$,所以 $k=\frac{\sqrt{5}}{5}$.因为污染物的残留含量不得超过原污染物总量的 0.25%,所以 $P\leqslant0.25\%P_0$,即 $P_0\cdot e^{t\ln k}\leqslant0.25\%P_0$,所以 $t\ln\frac{\sqrt{5}}{5}\leqslant\ln0.25\%$,即 $-t\ln\sqrt{5}\leqslant\ln\frac{1}{400}=-2\ln20$,所以 $t\geqslant2\log_{\sqrt{5}}20=4\log_520=4(1+2\log_52)\approx7.44$,所以 t 至少为8,即至少还需要再过滤 4 小时,所以正整数 n 的最小值为 4.

16.$[0,+\infty)$ **提示**:当 $x>1$ 时,$f(x)=\frac{x}{e\ln x}$,$f'(x)=\frac{\ln x-1}{e(\ln x)^2}$.当 $1<x<e$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,当 $x>e$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,故 $x=e$ 时,$f(x)_{min}=f(e)=1$;当 $x\leqslant1$ 时,$f(x)=x^3-3x+a$,$f'(x)=3x^2-3$,当 $x<-1$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,当 $-1<x<1$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,所以当 $x=-1$ 时,$f(x)$ 有极大值 $f(-1)=2+a$,当 $x=1$ 时,$f(1)=-2+a$,作出 $f(x)$ 的大致图象(图略),由题意,得 $[f(x)]^2-(t+2)f(x)+2t=0$,即 $[f(x)-2][f(x)-t]=0$ 有 7 个不同的实根.当 $f(x)=2$ 有三个根,$f(x)=t$ 有四个实根时,则 $2+a=2$ 或 $-2+a>2$,得 $a=0$ 或 $a>4$;当 $f(x)=2$ 有四个根,$f(x)=t$ 有三个实根时,则 $-2+a\leqslant2<2+a$,得 $0<a\leqslant4$.综上,$a\geqslant0$,即实数 a 的取值范围是 $[0,+\infty)$.

四、解答题

17.(1)**解**:由题意,得 $a^2=\frac{1}{4}$,所以 $a=\frac{1}{2}$.

(2)**解**:由(1)知 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,所以 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{1}{2},1\right]$ 上的最大值为 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}$.

(3)**证明**:$g(x)=f(x)-x=\left(\frac{1}{2}\right)^x-x$,因为 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递减,且 $g(0)=1>0$,$g(1)=-\frac{1}{2}<0$,所以 $g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内存在零点.

18.**解**:(1)当 $0<x<40$ 时,$L(x)=9\times100x-10x^2-500x-2500=-10x^2+400x-2500$,当 $x\geqslant40$ 时,$L(x)=9\times100x-901x-\frac{6400}{x}+6300-2500=3800-\left(x+\frac{6400}{x}\right)$,所以 $L(x)=\begin{cases}-10x^2+400x-2500,0<x<40,\\ 3800-\left(x+\frac{6400}{x}\right),x\geqslant40.\end{cases}$

(2)当 $0<x<40$ 时,$L(x)=-10(x-20)^2+1500$;当 $x=20$ 时,$L(x)$ 取得最大值 1500;当 $x\geqslant40$ 时,$L(x)=3800-\left(x+\frac{6400}{x}\right)\leqslant3800-2\sqrt{x\cdot\frac{6400}{x}}=3640$,当且仅当 $x=\frac{6400}{x}$,即 $x=80$ 时,等号成立,因为 $3640>1500$,所以当 2022 年的总产量为 80 百辆时,企业所获利润最大,最大利润为 3640 万元.

19.**解**:(1)化简得 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$.令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,解得 $-\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,解得 $\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right]$,$k\in\mathbf{Z}$,单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{2\pi}{3}+k\pi\right]$,$k\in\mathbf{Z}$.

(2)因为函数 $g(x)=f(x)+a$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有且仅有两个零点,所以函数 $y=f(x)$ 与直线 $y=-a$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有且仅有 2 个不同的交点,由(1)可知当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时,$f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 单调递增,在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 单调递减,又 $f(0)=1$,$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$,$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$,所以 $1\leqslant-a<\frac{3}{2}$,得 $-\frac{3}{2}<a\leqslant-1$,所以实数 a 的取值范围为 $\left(-\frac{3}{2},-1\right]$.

20.**解**:(1)当 $m=2$ 时,$f(x)=4\cdot(2^x)^2-4\cdot2^x-6$,令 $2^x=t$,则 $t>0$,$g(t)=4t^2-4t-6$,$t\in(0,+\infty)$.当 $t=\frac{1}{2}$ 时,$g(t)_{min}=-7$,所以 $f(x)$ 的值域为 $[-7,+\infty)$.

(2)因为 $f(x)=4^{x+1}-2m\cdot2^x-3m=4\cdot(2^x)^2-2m\cdot2^x-3m$,令 $t=2^x$,则 $f(x)$ 有且只有一个零点等价于方程 $4t^2-2mt-3m=0$ 有且只有一个正实根.设该方程的两个根分别为 t_1,t_2.

①若 $4t^2-2mt-3m=0$ 有一个根为 0 时,则 $t_1t_2=-\frac{3}{4}m=0$,即 $m=0$,则 $t_1+t_2=\frac{m}{2}=0$,所以 $t_1=t_2=0$,不符合题意,舍去;②若 $4t^2-2mt-3m=0$ 有一个正实根和一负实根时,则 $t_1t_2=-\frac{3}{4}m<0$,即 $m>0$;③若 $4t^2-2mt-3m=0$ 有两个相等的正实根时,则 $\Delta=4m^2+48m=0$,且 $t_1+t_2=\frac{m}{2}>0$,且 $t_1t_2=-\frac{3}{4}m>0$,则解集为 $\varnothing$.

综上,实数 m 的取值范围为 $(0,+\infty)$.

21.**解**:(1)若 $a<0$,则 $f(a)=\lg(-a)=1$,解得 $a=-10$;若 $a\geqslant0$,则 $f(a)=|e^a-2|=1$,解得 $a=0$ 或 $\ln3$.故 a 的值为 0 或 -10 或 $\ln3$.

(2)由题可知 $f(x)=\begin{cases}\lg(-x),x<0,\\ -e^x+2,0\leqslant x<\ln2,\\ e^x-2,x\geqslant\ln2,\end{cases}$

当 $x<0$ 时,$f(x)$ 单调递减,且 $f(x)\in\mathbf{R}$;当 $0\leqslant x<\ln2$ 时,$f(x)$ 单调递减,且 $f(x)\in(0,1]$;当 $x\geqslant\ln2$ 时,$f(x)$ 单调递增,且 $f(x)\in[0,+\infty)$.作出 $f(x)$ 的图象(图略).

令 $t=f(x)$,则关于 x 的方程 $[f(x)]^2+mf(x)+2m+1=0$ 恰有 5 个实数根等价于关于 t 的方程 $t^2+mt+2m+1=0$ 有 2 个不相等的实数根,设两个实根分别为 t_1,t_2.

不妨设 $t_1>t_2$,则 $\begin{cases}t_2=0,\\ 0<t_1\leqslant1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}t_1>1,\\ 0<t_2\leqslant1,\end{cases}$ 令 $h(t)=t^2+mt+2m+1$,若 $t_1>1$,$0<t_2<1$,则 $\begin{cases}h(0)>0,\\ h(1)<0,\\ \Delta>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2m+1>0,\\ 3m+2<0,\\ m^2-8m-4>0,\end{cases}$

解集为$\varnothing$；若 $t_1>1,t_2=1$，则$\begin{cases}h(0)>0,\\h(1)=0,\\\Delta>0,\end{cases}$即$\begin{cases}2m+1>0,\\3m+2=0,\\m^2-8m-4>0,\end{cases}$解集为$\varnothing$；若 $t_2=0,0<t_1\leqslant1$，则$\begin{cases}h(0)=0,\\h(1)\geqslant0,\\\Delta>0,\end{cases}$即$\begin{cases}2m+1=0,\\3m+2\geqslant0,\\m^2-8m-4>0,\end{cases}$解得 $m=-\frac{1}{2}$.所以实数 m 的取值范围是$\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

22.**解**：(1)$|f(x)-g(x)|=\left|x+\frac{1}{4x}-1\right|,\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}$，设 $h(x)=x+\frac{1}{4x}-1,\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}$，则 $h'(x)=\frac{4x^2-1}{4x^2}$，所以当 $x\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，当 $x\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，所以 $h(x)$的最小值是 $h\left(\frac{1}{2}\right)=0$，又 $h\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4},h\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{12}$，所以$|f(x)-g(x)|\leqslant\frac{1}{4}<1$，所以在区间$\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$上，$f(x)$可被 $g(x)$替代.

(2)由题意，得$|f(x)-g(x)|=||\sin x|-\ln(a+\cos^2x)|\leqslant1$对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，即$|\ln(a+1-\sin^2x)-|\sin x||\leqslant1$对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，令$|\sin x|=t$，则 $t\in[0,1]$，则$|\ln(a+1-t^2)-t|\leqslant1$对任意 $t\in[0,1]$恒成立，即$|\ln(a+1-t^2)-\ln e^t|\leqslant1$对任意 $t\in[0,1]$恒成立，所以$\left|\ln\frac{a+1-t^2}{e^t}\right|\leqslant1$对任意 $t\in[0,1]$恒成立，即 $e^{-1}\leqslant\frac{a+1-t^2}{e^t}\leqslant e$ 对任意 $t\in[0,1]$恒成立，所以$\begin{cases}a\geqslant e^{t-1}+t^2-1,\\a\leqslant e^{t+1}+t^2-1\end{cases}$对任意 $t\in[0,1]$恒成立，设 $s(t)=e^{t-1}+t^2-1$，该函数在$[0,1]$上为增函数，则 $s(t)_{max}=s(1)=1$，所以 $a\geqslant1$；设 $\varphi(t)=e^{t+1}+t^2-1$，该函数在$[0,1]$上也是增函数，则 $\varphi(t)_{min}=\varphi(0)=e-1$，所以 $a\leqslant e-1$.

综上，实数 a 的取值范围是$[1,e-1]$.

第 6 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.D **提示**：由题意，知$\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=2\times\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}=2f'(1)=10$.故选 D.

2.C **提示**：由 $l(t)=t^3+4\ln t$，得 $l'(t)=3t^2+\frac{4}{t}$，则 $t=2$s 时的瞬时速度是 $l'(2)=14$.故选 C.

3.C **提示**：当 $0<x<2$ 或 $x>4$ 时，$f'(x)<0$，故函数 $f(x)$在$(0,2)$和$(4,+\infty)$上单调递减，当 $2<x<4$ 或 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，故函数 $f(x)$在$(2,4)$和$(-\infty,0)$上单调递增，所以当 $x=0$ 或 $x=4$ 时函数取得极大值，所以函数 $f(x)$最大值为 $\max\{f(0),f(4)\}$，无最小值.故选 C.

4.C **提示**：令 $g(x)=f(x)-\frac{3}{2}x^2$，则当 $x\geqslant0$ 时，$g'(x)=f'(x)-3x>0$，所以 $g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，因为 $y=f(x)$与 $y=-\frac{3}{2}x^2$ 为偶函数，所以 $g(x)$为偶函数，$g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，因为 $f(2)=8$，所以 $g(2)=2$，由 $2f(x)>3x^2+4$，得 $f(x)-\frac{3}{2}x^2>2$，所以 $g(x)>g(2)$，则$|x|>2$，解得 $x>2$ 或 $x<-2$.故选 C.

5.B **提示**：因为 $f(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x$，所以 $f'(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x\geqslant2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-2=0$，当且仅当 $x=0$ 时取等号，所以 $f(x)$为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，又 $2^a=5$，即 $a=\log_25>2$，$b=\log_32\in(0,1)$，$c=\ln3\in(1,2)$，所以 $a>c>b$，则 $f(a)>f(c)>f(b)$.故选 B.

6.B **提示**：因为 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，所以 $f'(x)=a-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos2x-\sin x\leqslant0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，所以 $a\leqslant-\sin^2x+\sin x+1=-\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，因为 $\sin x\in[-1,1]$，所以当 $\sin x=-1$ 时，$y=-\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$取得最小值$-1$，所以 $a\leqslant-1$，即实数 a 的取值范围是$(-\infty,-1]$.故选 B.

7.A **提示**：设 $g(x)=\frac{f(x)}{\sin x},x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $g'(x)=\frac{f'(x)\sin x-f(x)\cos x}{\sin^2x}$，因为 $f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上恒有$f(x)\cos x-f'(x)\sin x<0$ 成立，所以 $g'(x)>0$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上恒成立，故 $g(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增，又 $y=f(x)$与 $y=\sin x$ 为奇函数，所以 $g(x)$为偶函数，所以 $g(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$上单调递减.对于 A，由 $g\left(-\frac{\pi}{3}\right)>g\left(-\frac{\pi}{6}\right)$，得 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)<\sqrt{3}f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$，故 A 正确；对于 B，由 $g\left(\frac{\pi}{6}\right)<g\left(\frac{\pi}{4}\right)$，得$\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{6}\right)<f\left(\frac{\pi}{4}\right)$，故 B 错误；对于 C，$g\left(-\frac{\pi}{4}\right)<g\left(-\frac{\pi}{3}\right)$，得$\sqrt{3}f\left(-\frac{\pi}{4}\right)>\sqrt{2}f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$，故C 错误；对于 D，由 $g\left(\frac{\pi}{4}\right)<g\left(\frac{\pi}{3}\right)$，得$\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{4}\right)<\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，故 D 错误.故选 A.

8.B **提示**：因为函数 $f(x)=\frac{x}{\ln x},x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$，所以 $f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$，所以 $f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,e)$上单调递减，在$(e,+\infty)$上单调递增，当 $x=e$ 时，$f(x)$的极小值为 $f(e)=e$，由此作出$f(x)$的大致图象（图略），故 A 错误；对于 B，设函数 $g(x)(x\in\mathbf{R})$的值域为 G，函数 $f(x)$在$(1,+\infty)$上的值域为 E.所以 $G=[a,+\infty)$，$E=[e,+\infty)$.由题意可知 $G\subseteq E$，所以 $a\geqslant e$，故 B 正确；对于 C，由函数 $f(x)=\frac{x}{\ln x}$在$(0,1)$上单调递减，可得函数 $y=\frac{\ln x}{x}$在$(0,1)$上单调递增，所以当 $0<x_1<x_2<1$ 时，$\frac{\ln x_1}{x_1}<\frac{\ln x_2}{x_2}$，即 $x_1\ln x_2>x_2\ln x_1$，故 C 错误；对于 D，因为方程 $f(|x|)=k$ 有 4 个不等的实根，即当 $x>0$，且 $x\neq1$ 时，$f(x)=k$ 有 2 个不等的实根，所以由图象可知 $k>e$，故 D 错误.故选 B.

二、多项选择题

9.CD **提示**：$(3^x)'=3^x\ln3$，故 A 正确；$(x^2\ln x)'=2x\ln x+x$，故 B 正确；因为$\left(\frac{\cos x}{x}\right)'=\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}$，故 C 错误；$(\sin x\cos x)'=\cos^2x-\sin^2x=\cos2x$，故 D 错误.故选 CD.

10.ACD **提示**：对于 A，$f'(x)=1-\cos x$，$f''(x)=\sin x$，当 $x\in(0,2\pi)$时，$\sin x$ 的值有正有负，故 A 凹凸性不确定；对于B，$f'(x)=2x+\cos x$，$f''(x)=2-\sin x$，当 $x\in(0,2\pi)$时，$f''(x)>0$ 恒成立，故 B 是“凹函数”；对于 C，$f'(x)=1+\frac{1}{x}$，$f''(x)=-\frac{1}{x^2}$，当 $x\in(0,2\pi)$时，$f''(x)<0$ 恒成立，故 C 不是“凹函数”；对于 D，$f'(x)=e^x-\ln x-1$，$f''(x)=e^x-\frac{1}{x}$，当 $x\in(0,2\pi)$时，$f''(x)$有正有负，故 D 凹凸性不确定.故选 ACD.

11.AC **提示**：令 $g(x)=f(x)\ln x(x>0)$，则 $g'(x)=\ln x\cdot f'(x)+\frac{1}{x}\cdot f(x)>0$，所以 $g(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增，又 $g(1)=0$，所以当 $0<x<1$ 时，$g(x)<0$，当 $x>1$ 时，$g(x)>0$，又$\frac{1}{e}\in(0,1)$，$e\in(0,+\infty)$，所以 $g\left(\frac{1}{e}\right)=-f\left(\frac{1}{e}\right)<0$，$g(e)=f(e)>0$，即 $f\left(\frac{1}{e}\right)>0$，$f(e)>0$.故选 AC.

12.BC **提示**：设曲线 $y=f(x)$上两点 $A(x_1,f(x_1))$，$B(x_2,f(x_2))$，$P(1,1)$，对于 A，直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$，$k_{OP}=1$，由图知 $k_{AB}<1,k_{AB}=1,k_{AB}>1$ 均有可能，又 $0<x_1<x_2<1$，所以 $f(x_1)-f(x_2)>x_1-x_2$，$f(x_1)-f(x_2)=x_1-x_2$，$f(x_1)-f(x_2)<x_1-x_2$ 均有可能，故 A 错误；对于 B，设直线 OA,OB 的斜率分别为 k_{OA},k_{OB}，由图可知，$k_{OA}>k_{OB}$，即$\frac{f(x_1)}{x_1}>\frac{f(x_2)}{x_2}$，$0<x_1<x_2<1$，所以 $x_2f(x_1)>x_1f(x_2)$，故 B 正确；对于 C，设线段 AB 的中点为 R，则 $R\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)$，$\overset{\frown}{AB}$ 的中点为 S，则 $S\left(\frac{x_1+x_2}{2},f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$，由图知$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，故 C 正确；对于 D，当 $0<x_1<x_2<1$ 时，$f'(x_1)>f'(x_2)$，则$[f'(x_1)-f'(x_2)](x_1-x_2)<0$，故 D 错误.故选 ABC.

三、填空题

13.$\frac{3\pi}{4}$ **提示**：因为$\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2-\Delta x)}{\Delta x}=-2$，所以$\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)+f(2)-f(2-\Delta x)}{\Delta x}=2f'(2)=-2$，则 $f'(2)=-1$，所以曲线 $f(x)$在点$(2,f(2))$处切线的斜率为-1，即切线的倾斜角为$\frac{3\pi}{4}$.

14.3 **提示**：设切点坐标为$\left(x_0,\frac{x_0^2}{4}-3\ln x_0\right)$，$x_0>0$，因为 $y=\frac{x^2}{4}-3\ln x$，所以 $y'=\frac{1}{2}x-\frac{3}{x}$，由题意，得$\frac{1}{2}x_0-\frac{3}{x_0}=\frac{1}{2}$，解得 $x_0=3$，或 $x_0=-2$（舍去），所以 $x_0=3$.

15.$[-2,0]\cup[2,+\infty)$ **提示**：设函数 $h(x)=\frac{f(x)}{x}$，因为 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $h(x)$为偶函数，又当 $x>0$ 时，$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0$，即 $h'(x)<0$，则 $h(x)$为减函数，且 $h(2)=\frac{f(2)}{2}=0$，由 $h(x)>0$，解得$-2<x<2$，且 $x\neq0$，由 $h(x)<0$，解得 $x<-2$ 或 $x>2$，不等式 $x^2f(x)\leqslant0$ 等价于 $x^3h(x)\leqslant0$，即$\begin{cases}x^3\leqslant0,\\h(x)\geqslant0,\end{cases}$或$\begin{cases}x^3\geqslant0,\\h(x)\leqslant0,\end{cases}$解得$-2\leqslant x\leqslant0$ 或 $x\geqslant2$.故所求不等式的解集为$[-2,0]\cup[2,+\infty)$.

16.$\left[\frac{7}{9},+\infty\right)$ **提示**：因为函数 $h(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2+2x$在$(0,3)$上存在单调递减区间，所以 $h'(x)=\frac{1}{x}-ax+2\leqslant0$在$(0,3)$上有解，即 $a\geqslant\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}$在$(0,3)$上有解，令 $u=\frac{1}{x}$，$f(u)=u(u+2)$，则 $u>\frac{1}{3}$，所以 $a\geqslant f(u)$在$\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$上有解，因为 $f(u)$在$\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$上单调递增，所以 $a\geqslant f(u)_{min}=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{9}$，即实数 a 的取值范围为$\left[\frac{7}{9},+\infty\right)$.

四、解答题

17.**解**：(1)化简，得$f(x)=\frac{2e^x}{1-x}$.因为$f'(x)=\left(\frac{2e^x}{1-x}\right)'=\frac{(2e^x)'(1-x)-2e^x(1-x)'}{(1-x)^2}=\frac{2(2-x)e^x}{(1-x)^2}$，所以 $f'(2)=0$.

(2)因为 $f'(x)=\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)'-x'+(\ln x)'=-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}-1+\frac{1}{x}$，所以 $f'(1)=-\frac{3}{2}$.

18.**解**：$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，$g'(x)=\frac{a}{x}(x>0)$.由已知，得$\begin{cases}\sqrt{x}=a\ln x,\\\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{a}{x},\end{cases}$解得 $a=\frac{e}{2}$，$x=e^2$.所以两条曲线的交点坐标为(e^2,e)，切线的斜率 $k=f'(e^2)=\frac{1}{2e}$，所以切线的方程为 $y-e=\frac{1}{2e}(x-e^2)$，即$\frac{x}{2e}-y+\frac{e}{2}=0$.

19.**解**：(1)当 $a=2e$ 时，$f(x)=x-2e\ln x$，$f'(x)=1-\frac{2e}{x}$，则 $f'(e)=-1$，又 $f(e)=-e$，则所求的切线的方程为 $y-(-e)=-(x-e)$，即 $x+y=0$.

(2)$h(x)=f(x)-g(x)=x-a\ln x+\frac{1+a}{x}$，$x>0$，$h'(x)=1-\frac{a}{x}-\frac{1+a}{x^2}=\frac{(x+1)[x-(1+a)]}{x^2}$，当 $1+a\leqslant0$，即 $a\leqslant-1$ 时，$x>0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增；当 $1+a>0$，即 $a>-1$ 时，$0<x<1+a$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，$x>1+a$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增.

综上，当 $a\leqslant-1$ 时，$h(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$；当 $a>-1$ 时，$h(x)$的单调递减区间为$(0,1+a)$，单调递增区间为$(1+a,+\infty)$.

20.**解**：(1)$a=16$ 时，$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{16}{x}$，$f'(x)=x^2-\frac{16}{x^2}=\frac{x^4-16}{x^2}=\frac{(x+2)(x-2)(x^2+4)}{x^2}$，令 $f'(x)>0$，解得 $x>2$ 或 $x<-2$，故 $f(x)$的单调递增区间是$(-\infty,-2)$，$(2,+\infty)$.

(2)因为 $g(x)=f(x)-\frac{2}{3}x^2=\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{x}-\frac{2}{3}x^2$ 在$(0,+\infty)$上单调递增，所以 $g'(x)=x^2-\frac{4}{3}x-\frac{a}{x^2}\geqslant0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立，即 $a\leqslant x^4-\frac{4}{3}x^3$ 在$(0,+\infty)$上恒成立，所以$a\leqslant\left(x^4-\frac{4}{3}x^3\right)_{min}$.令 $h(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3(x>0)$，则 $h'(x)=4x^2(x-1)$，令 $h'(x)>0$，得 $x>1$，令 $h'(x)<0$，得 $0<x<1$，故 $h(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，所以 $h(x)_{min}=h(1)=-\frac{1}{3}$，所以 $a\leqslant-\frac{1}{3}$，即实数 a 的取值范围是$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]$.

21.**解**：(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=x+\frac{2}{x}+\ln x$，$x>0$，所以 $f'(x)=1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}$，所以 $f(1)=3$，$f'(1)=0$，所以曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $y=3$.

(2)因为函数 $f(x)=x+\frac{2a^2}{x}+a\ln x(a\in\mathbf{R})$，所以当 $a\geqslant0$时，由 $x\in[e,+\infty)$，得 $f(x)>0$ 恒成立，故曲线 $y=f(x)$在 x 轴的上方，符合题意.当 $a<0$ 时，$f'(x)=\frac{(x-a)(x+2a)}{x^2}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=-2a$ 或 $x=a$（舍去），所以当 $x\in(0,-2a)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，当 $x\in(-2a,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，当$-2a\leqslant e$，即$-\frac{e}{2}\leqslant a<0$ 时，所以 $f(x)$在$[e,+\infty)$上单调递增，则 $f(x)\geqslant f(e)=\frac{2}{e}\left(a+\frac{e}{4}\right)^2+\frac{7}{8}e>0$，故曲线 $y=f(x)$在 x 轴的上方.当$-2a>e$，即 $a<-\frac{e}{2}$ 时，$f(x)$在$[e,-2a)$上单调递减，在$(-2a,+\infty)$上单调递增，则 $f(x)\geqslant f(-2a)=-3a+a\ln(-2a)$，因为当 $x\in[e,+\infty)$时，曲线 $y=f(x)$在 x 轴的上方，所以$-3a+a\ln(-2a)>0$，解得 $a>-\frac{e^3}{2}$，所以$-\frac{e^3}{2}<a<-\frac{e}{2}$.

综上，实数 a 的取值范围为$\left(-\frac{e^3}{2},+\infty\right)$.

22.**解**：(1)当 $a=-1$ 时，$f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$，则 $f'(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-2}{x^2}(x>0)$，令 $f'(x)>0$，解得 $x>2$，所以 $f(x)$在$(2,+\infty)$上单调递增；令 $f'(x)<0$，解得 $0<x<2$，所以 $f(x)$在$(0,2)$上单调递减.所以当 $a=-1$ 时，$f(x)$的单调递减区间是$(0,2)$，单调递增区间是$(2,+\infty)$.

(2)当 $a=0$ 时，$f(x)=\frac{2}{x}$没有零点，则 $a=0$ 不符合题意；当 $a\neq0$ 时，令 $f(x)=0$，即$\frac{2}{x}-a\ln x=0$，得$\frac{1}{a}=\frac{x\ln x}{2}$.设 $g(x)=\frac{x\ln x}{2}\left(x>\frac{1}{e^2}\right)$，则 $g'(x)=\frac{\ln x+1}{2}$，令 $g'(x)>0$，解得 $x>\frac{1}{e}$，令 $g'(x)<0$，解得$\frac{1}{e^2}<x<\frac{1}{e}$，故 $g(x)$在$\left(\frac{1}{e^2},\frac{1}{e}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$上单调递增，故 $g(x)_{min}=g\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{2e}$，又 $g\left(\frac{1}{e^2}\right)=-\frac{1}{e^2}$，所以$-\frac{1}{2e}<\frac{1}{a}<-\frac{1}{e^2}$，解得$-e^2<a<-2e$，故实数 a 的取值范围是$(-e^2,-2e)$.

第 7 期

第 2~3 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A **提示**：由 $f(x)=a\ln x+x$，得 $f'(x)=\frac{a}{x}+1(x>0)$，因为 $x=1$ 是 $f(x)$的极值点，所以 $f'(1)=0$，即 $a+1=0$，解得 $a=-1$.经检验，符合题意，故选 A.

2.D **提示**：由图象可知 $f'(x)$有 2 个极小值点 x_1，x_4，故 C 错误；当 $a<x<x_3$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；当 $x_3<x<x_5$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当 $x_5<x<b$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，则 $f(x)$的极小值点为 x_5，故 A 错误；$f(x)$的极大值点为 x_3，故 B 错误；函数 $f(x)$在(a,b)上的极值点为 x_3 和 x_5，共 2 个，故 D 正确.故选 D.

3.A **提示**：令 $f(x)=x\ln x-x-a,x\in(0,+\infty)$，则 $f'(x)=\ln x$，令 $f'(x)=0$，得 $x=1$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，所以 $f(x)_{min}=f(1)=-1-a$，因为对任意的正实数 x，$x\ln x-x-a\geqslant0$ 恒成立，所以 $f(x)_{min}=-1-a\geqslant0$，解得 $a\leqslant-1$.故选 A.

4.B **提示**：$f'(x)=e^x(2-x^2)$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm\sqrt{2}$，由 $f'(x)<0$，得 $x>\sqrt{2}$ 或 $x<-\sqrt{2}$，由 $f'(x)>0$，得$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$，所以 $f(x)$的单调减区间为$(-\infty,-\sqrt{2})$，$(\sqrt{2},+\infty)$，单调增区间为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，故(1)不正确；所以极小值为 $f(-\sqrt{2})$，$f(x)$的极大值为 $f(\sqrt{2})$，故(2)正确；因为 $x<-\sqrt{2}$ 时，$f(x)<0$ 恒成立，在$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$单调递增，在$(\sqrt{2},+\infty)$上单调递减，所以当$x=\sqrt{2}$ 时，$f(x)$取得极大值，也是最大值，又当 $x\to+\infty$时，$f(x)\to-\infty$，所以 $f(x)$无最小值，但有最大值 $f(\sqrt{2})$，故(3)正确；当 $x=0$ 时，$|f(x)|=0$，故(4)不正确.故选 B.

5.D **提示**：$f'(x)=e^x(x+1-2me^x)$，令 $f'(x)=0$，可得 $2m=\frac{x+1}{e^x}$，由题意，可知方程$f'(x)=0$ 有两个实数根，即直线 $y=2m$ 与函数 $y=\frac{x+1}{e^x}$的图象有两个交点（非切点）.令 $g(x)=\frac{x+1}{e^x}$，则 $g'(x)=-\frac{x}{e^x}$，当 $x<0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，当 $x>0$ 时，$g'(x)<0$，此时函数 $g(x)$单调递减，所以 $g(x)$的极大值为 $g(0)=1$，又 $g(-1)=0$，且当 $x>-1$ 时，$g(x)>0$，作出 $g(x)$的大致图象（图略），所以当 $0<2m<1$，即 $0<m<\frac{1}{2}$时，直线 $y=2m$ 与函数 $g(x)=\frac{x+1}{e^x}$的图象有两个交点（非切点），所以实数 m 的取值范围是$\left(0,\frac{1}{2}\right)$.故选 D.

6.B **提示**：因为 $f'(x)=2x-e^{2-x}+\ln x-a+1$，则 $f''(x)=2+e^{2-x}+\frac{1}{x}>0$，所以 $f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，因为 $f(x)$在$(0,+\infty)$上的最小值为 0，所以$\exists x_0\in(0,+\infty)$，使得 $f'(x_0)=0$，则当 $x\in(0,x_0)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，在$(x_0,+\infty)$上单调递增，所以 $f(x)_{min}=f(x_0)=x_0^2+e^{2-x_0}+x_0(\ln x_0-a)=0$，①

由 $f'(x_0)=0$，得 $2x_0-e^{2-x_0}+\ln x_0-a+1=0$，②

由②$\times x_0-$①，得$(x_0+1)(x_0-e^{2-x_0})=0$，因为 $x_0+1>0$，所以 $x_0=e^{2-x_0}$，所以 $\ln x_0=2-x_0$.由①+②，得$(x_0+1)(x_0+1+\ln x_0-a)=0$，又 $x_0+1>0$，所以 $a=x_0+1+\ln x_0=x_0+1+(2-x_0)=3$.故选 B.

7.A **提示**：不等式 $e^{2ax}+\ln x\geqslant(2a+1)x$ 可化为 $e^{2ax}-2ax\geqslant x-\ln x=e^{\ln x}-\ln x$，令 $f(x)=e^x-x(x>0)$，则 $f'(x)=e^x-1$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，所以原不等式可化为 $f(2ax)\geqslant f(\ln x)$，所以 $2ax\geqslant\ln x$，即 $a\geqslant\frac{\ln x}{2x}$.令 $g(x)=\frac{\ln x}{2x}$，则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{2x^2}$，由 $g'(x)>0$，得 $0<x<e$，由 $g'(x)<0$，得 $x>e$，所以 $g(x)$在$(0,e)$上单调递增，在$(e,+\infty)$单调递减，所以 $g(x)$的最大值是 $g(e)=\frac{1}{2e}$，所以正实数 a 的取值范围是$\left[\frac{1}{2e},+\infty\right)$.故选 A.

8.A **提示**：易知 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，当 $x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)=2(x-\sin x)$，$f''(x)=2(1-\cos x)>0$，所以 $f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，且 $f'(0)=0$，所以 $f'(x)>f'(0)=0$，所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，又存在 $x\in[0,\pi]$，使 $f(x\sin x)\leqslant f(m-\cos x)$成立，则 $x\sin x\leqslant m-\cos x$，即在$[0,\pi]$上，$m\geqslant(\cos x+x\sin x)_{min}$.令 $g(x)=\cos x+x\sin x,x\in[0,\pi]$则 $g'(x)=x\cos x$，所以当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增；当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，又 $g(0)=1$，$g(\pi)=-1$，所以 $g(x)_{min}=-1$，则 $m\geqslant-1$，即实数 m 的最小值为-1.故选 A.

二、多项选择题

9.BC **提示**：因为 $f(x)$的定义域为$[-2\pi,2\pi)$，所以 $f(x)$是非奇非偶函数，又 $f'(x)=1+x\sin x$，当 $x\in[0,\pi)$时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$在$[0,\pi)$上单调递增，显然 $f'(0)\neq0$，令 $f'(x)=0$，得 $\sin x=-\frac{1}{x}$，分别作出 $y=\sin x$，$y=-\frac{1}{x}$在区间$[-2\pi,2\pi)$上的图象（图略），由图可知，这两个函数的图象在区间$[-2\pi,2\pi)$上共有 4 个交点，且两图象在这些交点上都不相切，故 $f(x)$在区间$[-2\pi,2\pi)$上的极值点的个数为 4，且 $f(x)$只有 2 个极大值点.故选 BC.

10.BC **提示**：$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，所以 $f(x)$在 $x=1$ 处取得极大值，也是最大值，1 是 $f(x)$的极值点，故 A 错误，B 正确；$f(x)_{max}=f(1)=\frac{1}{e}$，又 $x<0$ 时，$f(x)<0$；$x>0$ 时，$f(x)>0$，所以当 $0<a<\frac{1}{e}$时，方程 $f(x)=a$ 有两异根，故 C 正确；当 $a>\frac{1}{e}$时，方程 $f(x)=a$ 没有实数根，故 D 错误.故选 BC.

11.ABC **提示**：$f'(x)=3-3x^2$，令 $f'(x)>0$，解得$-1<x<1$；令 $f'(x)<0$，解得 $x<-1$ 或 $x>1$，所以 $f(x)$在$(-\infty,-1)$上是减函数，在$(-1,1)$上是增函数，在$(1,+\infty)$上是减函数，故函数在 $x=-1$ 处取到极小值-2，因为函数 $f(x)$在(a^2-12,a)的端点处的函数值取不到，所以此极小值必是区间(a^2-12,a)上的最小值.所以 $a^2-12<-1<a$，解得$-1<a<\sqrt{11}$，又 $f(2)=f(-1)=-2$，所以 $a\leqslant2$.综上，$a\in(-1,2]$.故选 ABC.

12.AD **提示**：$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=-\frac{(x-1)(x-3)}{4x^2}$，当 $x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$，当 $x\in(1,2]$时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,2]$上单调递增，故 $f(x)_{min}=f(1)=\frac{1}{2}$.因为函数 $g(x)=-x^2-2ax+4$，该函数开口向下，所以 $g(x)$在$[1,2]$上的最小值在端点处取得，所以要使对$\forall x_1\in(0,2]$，$\exists x_2\in[1,2]$，使得 $f(x_1)\geqslant g(x_2)$成立，只需 $f(x)_{min}\geqslant g(x)_{min}$，即$\frac{1}{2}\geqslant g(1)$，或$\frac{1}{2}\geqslant g(2)$，所以$\frac{1}{2}\geqslant3-2a$，或$\frac{1}{2}\geqslant-4a$，解得 $a\geqslant-\frac{1}{8}$，由选项知，a 的取值可以是 0 和$-\frac{1}{8}$.故选 AD.

三、填空题

13.0 **提示**：依题意，$f'(x)=x(\cos x-6)$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$，经检验，符合题意，所以函数 $f(x)$的极值点为 0.

14.$-e^2$ **提示**：$f'(x)=e^x+a$，因为 $f(x)=e^x+ax$ 在 $x=2$ 处取极值，所以 $f'(2)=e^2+a=0$，解得 $a=-e^2$，经检验，符合题意.

15.$-\frac{27}{16}$ **提示**：由 $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin2x$，得 $f'(x)=\cos x+\cos2x=2\cos^2x+\cos x-1$，令 $f'(x)=0$，即$(2\cos x-1)(\cos x+1)=0$，解得 $\cos x=-1$ 或 $\cos x=\frac{1}{2}$，因为 $x\in[-2\pi,-\pi]\cup[\pi,2\pi]$，所以 $x=-\pi,x=\pi,x=-\frac{5\pi}{3},x=\frac{5\pi}{3}$，因为 $f(\pm\pi)=0$，$f\left(-\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$，$f(\pm2\pi)=0$，所以 $f(x)$在区间$[-2\pi,-\pi]\cup[\pi,2\pi]$上的最小值与最大值之积为$\left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)\times\frac{3\sqrt{3}}{4}=-\frac{27}{16}$.

16.3 **提示**：$f'(x)=1+\frac{1}{x}$，因为 $f'(x)>\frac{k}{\ln(x+1)+1}$对任意 $x>0$ 恒成立，所以 $k<\frac{(x+1)[\ln(x+1)+1]}{x}$在$(0,+\infty)$上恒成立.令 $x+1=t$，则 $t\in(1+\infty)$，即 $k<\frac{t\ln t+t}{t-1}$对任意 $t>1$ 恒成立.令 $F(t)=\frac{t\ln t+t}{t-1}(t>1)$，$F'(t)=\frac{-\ln t+t-2}{(t-1)^2}$，令 $g(t)=-\ln t+t-2$，则 $g'(t)=\frac{t-1}{t}>0$，$g(t)$单调递增，又 $g(3)=1-\ln3<0$，$g(4)=2-\ln4>0$，$\exists t_0\in(3,4)$，使 $F'(x)=0$，即$-\ln t_0+t_0-2=0$，则 $\ln t_0=t_0-2$，当 $x\in(1,t_0)$，$g(t)<0$，则 $F'(t)<0$，$F(t)$单调递减，当 $t\in(t_0,+\infty)$，$g(t)>0$，则 $F'(t)>0$，$F(t)$单调递增，所以 $F(t)_{min}=F(t_0)=\frac{t_0\ln t_0+t_0}{t_0-1}$，又 $\ln t_0=t_0-2$，所以 $F(t_0)=t_0$，则 $k<t_0\in(3,4)$，所以整数 k 的最大值为 3.

四、解答题

17.**解**：(1)由题意知 $f'(x)=x^2+2(a+1)x-(a^2+3a-3)$，且 $f'(1)=0$，即 $1+2(a+1)-(a^2+3a-3)=0$，解得 $a=-3$ 或 $a=2$.当 $a=-3$ 时，$f'(x)=x^2-4x+3$，$x=1$ 是 $f(x)$的极大值点，符合题意；当 $a=2$ 时，$f'(x)=x^2+6x-7$，此时 $x=1$ 是 $f(x)$的极小值点，所以 $a=-3$.

(2)由(1)知 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x,x\in[0,4]$，$f'(x)=x^2-4x+3$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$ 或 $x=3$，易知 $f(x)$在$[0,1]$和$[3,4]$单调递增，在$[1,3]$单调递减，又 $f(0)=0$，$f(1)=\frac{4}{3}$，$f(3)=0$，$f(4)=\frac{4}{3}$，所以 $f(x)_{min}=0$，$f(x)_{max}=\frac{4}{3}$.

18.(1)**解**：因为 $f(x)=a\ln x+\frac{2}{\sqrt{x}}(x>1)$，所以 $f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}=\frac{a\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}}$.要使 $f(x)$在区间$(1,+\infty)$上不单调，则 $f'(x)=0$ 在$(1,+\infty)$上有解，即 $a=\frac{1}{\sqrt{x}}$在$(1,+\infty)$上有解，所以 $0<a<1$，所以实数 a 的取值范围是$(0,1)$.

(2)**证明**：当 $a=1$ 时，要证 $f(x)<\frac{x^2}{2}-x+3$，即证 $g(x)=\ln x+\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{x^2}{2}+x-3<0$.则 $g'(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}}-(x-1)=\frac{(\sqrt{x}-1)(1-x^2-x\sqrt{x})}{x\sqrt{x}}$，因为 $x>1$，所以$\sqrt{x}-1>0$，$1-x^2-x\sqrt{x}<0$，所以 $g'(x)<0$，则 $g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，所以 $g(x)<g(1)=-\frac{1}{2}<0$.故 $f(x)<\frac{x^2}{2}-x+3$.

19.(1)**解**：当 $m=0$ 时，$f(x)=e^x-ex$，$f'(x)=e^x-e$，又 $f'(x)$是增函数，且 $f'(1)=0$，所以当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，当 $x<1$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，所以当 $x=1$ 时，$f(x)$取得极小值 $f(1)=0$，无极大值.

(2)**证明**：$f'(x)=e^x-2mx+m-e$，令 $g(x)=f'(x)=e^x-2mx+m-e$，则 $g'(x)=e^x-2m$，当 $m<0$ 时，则 $g'(x)>0$，故 $g(x)=f'(x)$在$(0,1)$上单调递增，又 $g(0)=f'(0)=1+m-e<0$，$g(1)=f'(1)=-m>0$，所以存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $g(x_0)=f'(x_0)=0$，且当 $x\in(0,x_0)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$是减函数，当 $x\in(x_0,1)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$是增函数，又因为 $f(0)=1$，$f(1)=0$，所以 $f(x)$在$(0,1)$上存在唯一零点.

20.**解**：(1)在 Rt$\triangle OAB$ 中，$AB=x$，$OB=2\sqrt{3}$，所以 $OA=\sqrt{12-x^2}$，设圆柱底面半径为 r，则$\sqrt{12-x^2}=2\pi r$，所以 $4\pi^2r^2=12-x^2$，所以 $V(x)=\pi r^2x=\frac{12x-x^3}{4\pi}$，定义域为$(0,2\sqrt{3})$.

(2)由(1)知 $V'(x)=\frac{12-3x^2}{4\pi}$，令 $V'(x)=0$，得 $x=2$，又 $0<x<2\sqrt{3}$，所以当 $x\in(0,2)$时，$V'(x)>0$，$V(x)$单调递增，当 $x\in(2,2\sqrt{3})$时，$V'(x)<0$，$V(x)$单调递减，所以 $V(x)_{max}=V(2)=\frac{4}{\pi}$，所以最大体积是$\frac{4}{\pi}$m³.

21.**解**：(1)由题知$f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$，$f'(x)=\frac{2a-1-x}{x+1}$.当 $2a-1\leqslant-1$，即 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递减；当 $2a-1>-1$，即 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，得$-1<x<2a-1$，令 $f'(x)<0$，得 $x>2a-1$，则 $f(x)$在$(-1,2a-1)$上单调递增，在$(2a-1,+\infty)$上单调递减.

综上，当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递减；当 $a>0$ 时，$f(x)$在$(-1,2a-1)$上单调递增，在$(2a-1,+\infty)$上单调递减.

(2)由 $f(x)+g(x)\geqslant0$，得 $2a\ln(x+1)-x-1+e^x-2ax\geqslant0$，即 $e^x-2ax\geqslant x+1-2a\ln(x+1)=e^{\ln(x+1)}-2a\ln(x+1)$，所以条件等价于 $g(x)\geqslant g(\ln(x+1))$在$[0,+\infty)$上恒成立.令 $h(x)=x-\ln(x+1),x\in[0,+\infty)$，则 $h'(x)=\frac{x}{x+1}\geqslant0$，所以 $h(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，所以 $h(x)\geqslant h(0)=0$，所以 $x\geqslant\ln(x+1)$，所以只需 $g(x)=e^x-2ax$ 在$[0,+\infty)$上单调递增，即 $g'(x)\geqslant0$ 在$[0,+\infty)$上恒成立.因为 $g'(x)=e^x-2a$，所以 $g'(x)\geqslant0$，即 $a\leqslant\frac{e^x}{2}$在$[0,+\infty)$上恒成立.因为函数 $y=\frac{e^x}{2}$在$[0,+\infty)$上单调递增，所以 $a\leqslant\left(\frac{e^x}{2}\right)_{min}=\frac{1}{2}$，故实数 a 的取值范围是$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.