第36期

第2~3版专题检测

一、选择题

1~6.CDABCA　7~12.DADBAC

二、填空题

13.58　14.400

15.5　16.$3\cdot2^{2022}-3$

三、解答题

17.**解**:(1)因为$a_{n+1}+a_n=6n-1$,当$n=1$时,$a_2+a_1=5$,又$a_1=1$,所以$a_2=4$,当$n\geq2$时,$a_n+a_{n-1}=6n-7$,两式作差,得$a_{n+1}-a_{n-1}=6$,所以数列$\{a_n\}$的奇数项是首项为$a_1=1$,公差为6的等差数列,偶数项是首项为$a_2=4$,公差为6的等差数列,故$a_{2n-1}=1+6(n-1)=6n-5$,$a_{2n}=4+6(n-1)=6n-2$,所以$a_{2n}-a_{2n-1}=3$,$a_{2n+1}-a_{2n}=3$,$n\in\mathbf{N}_+$,所以$a_{n+1}-a_n=3$,$n\in\mathbf{N}_+$,所以数列$\{a_n\}$是首项为1,公差为3的等差数列,所以$a_n=1+3(n-1)=3n-2$.

(2)因为数列$\{b_n-a_n\}$是公比为2的等比数列,且$b_1=2$,所以$b_n-a_n=(2-1)\cdot2^{n-1}=2^{n-1}$,由(1)得$a_n=3n-2$,所以$b_n=3n-2+2^{n-1}$,所以$S_n=\frac{n(1+3n-2)}{2}+\frac{1\cdot(1-2^n)}{1-2}=\frac32n^2-\frac12n+2^n-1$

18.**解**:(1)因为$S_n+S_{n+1}=3a_{n+1}-2$,所以$S_{n-1}+S_n=3a_n-2(n\geq2)$,两式作差,得$a_n+a_{n+1}=3a_{n+1}-3a_n$,则$a_{n+1}=2a_n(n\geq2)$,当$n=1$时,则$S_1+S_2=3a_2-2$,即$2a_1+a_2=3a_2-2$,又$a_1=1$,则$a_2=2$,所以$\frac{a_2}{a_1}=2$,所以数列$\{a_n\}$是首项为1,公比为2的等比数列,所以$a_n=2^{n-1}$.

(2)由(1)得$a_n=2^{n-1}$,则$a_{n+1}=2^n$,因为$b_n=\log_{a_{n+1}}2=\log_{2^n}2=\frac1n$,所以$b_nb_{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac1n-\frac1{n+1}$,设数列$\{b_nb_{n+1}\}$的前$n$项和为$T_n$,所以$T_n=b_1b_2+b_2b_3+\cdots+b_nb_{n+1}=\left(1-\frac12\right)+\left(\frac12-\frac13\right)+\cdots+\left(\frac1n-\frac1{n+1}\right)=1-\frac1{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

19.(1)**证明**:由$a_{n+1}a_n=2a_n-a_{n+1}$,得$1=\frac{2}{a_{n+1}}-\frac1{a_n}$,则$\frac1{a_{n+1}}=\frac12\left(\frac1{a_n}+1\right)$,所以$\frac1{a_{n+1}}-1=\frac12\left(\frac1{a_n}-1\right)$,又$\frac1{a_1}-1=-\frac12\neq0$,所以$\left\{\frac1{a_n}-1\right\}$是以$-\frac12$为首项,$\frac12$为公比的等比数列.

(2)**解**:由(1)可得$\frac1{a_n}-1=-\frac12\times\left(\frac12\right)^{n-1}=-\left(\frac12\right)^n=-\frac1{2^n}$,故$a_n=\frac{2^n}{2^n-1}$,所以$b_n=\frac{a_na_{n+1}}{2^n}=\frac{2^{n+1}}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=2\left(\frac1{2^n-1}-\frac1{2^{n+1}-1}\right)$,所以$S_n=2\left[\left(\frac1{2^1-1}-\frac1{2^2-1}\right)+\left(\frac1{2^2-1}-\frac1{2^3-1}\right)+\cdots+\left(\frac1{2^n-1}-\frac1{2^{n+1}-1}\right)\right]=2-\frac2{2^{n+1}-1}$,因为$S_n>1.999$,即$2-\frac2{2^{n+1}-1}>1.999$,所以$2^{n+1}>2001$,又$2^{10}=1024$,所以$n>9$,所以整数$n$的最小值为10.

20.(1)**解**:选择①,由$a_{n+1}-S_n=2$,得$a_n-S_{n-1}=2(n\geq2)$,两式作差,得$a_{n+1}=2a_n(n\geq2)$,又$a_3=S_2+2=a_1+a_2+2$,$a_2=a_1+2$,所以$a_3=2a_1+4=8$,解得$a_1=2$,$a_2=4$,则$a_2=2a_1$,所以$a_{n+1}=2a_n(n\in\mathbf{N}_+)$,所以数列$\{a_n\}$是以2为首项,2为公比的等比数列,所以$a_n=2^n$.

选择②,因为$a_{m+n}=a_m\cdot a_n$,令$m=1$,得$a_{n+1}=a_n\cdot a_1$,由$a_ma_n\neq0$,知数列$\{a_n\}$各项不为0,所以数列$\{a_n\}$是以a_1为首项,a_1为公比的等比数列,则$a_n=a_1^n$,由$S_1S_2=3a_2$,得$a_1(a_1+a_2)=3a_2$,又$a_2=a_1^2$,则$a_1(a_1+a_1^2)=3a_1^2$,解得$a_1=2$,所以$a_n=2^n$.

选择③,由$S_{n+1}=3S_n-2S_{n-1}(n\geq2)$,得$S_{n+1}-S_n=2(S_n-S_{n-1})(n\geq2)$,即$a_{n+1}=2a_n(n\geq2)$,又$a_1=2$,$S_2=6$,所以$a_2=S_2-a_1=4$,则$a_2=2a_1$,所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2(n\in\mathbf{N}_+)$,所以数列$\{a_n\}$是以2为首项,2为公比的等比数列,所以$a_n=2^n$.

(2)**证明**:因为$a_n=2^n$,所以$b_n=\frac{\log_2a_n}{a_n}=\frac{n}{2^n}$,所以$T_n=\frac1{2^1}+\frac2{2^2}+\frac3{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}$,$\frac12T_n=\frac1{2^2}+\frac2{2^3}+\frac3{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^{n+1}}$,两式作差,得$\frac12T_n=\frac12+\frac1{2^2}+\frac1{2^3}+\cdots+\frac1{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{\frac12\left(1-\frac1{2^n}\right)}{1-\frac12}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}$,所以$T_n=2-\frac{n+2}{2^n}$,所以$T_n<2$,因为$b_n>0$,所以$T_n\geq b_1=\frac12$,所以$\frac12\leq T_n<2$.

21.**解**:(1)因为a_3+2是a_2和a_4的等差中项,所以$2(a_3+2)=a_2+a_4$,又$a_2+a_3+a_4=28$,等比数列$\{a_n\}$是递增数列,所以$\begin{cases}2(a_1q^2+2)=a_1q+a_1q^3,\\a_1q+a_1q^2+a_1q^3=28,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=2,\\q=2,\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=32,\\q=\frac12,\end{cases}$(舍去),所以$a_n=2^n$.

(2)由(1)可得$a_n=2^n$,所以$b_n=a_n\log_2\frac1{a_n}=-n\cdot2^n$,所以$T_n=-(1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\cdot2^n)$,$2T_n=-(1\times2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+n\cdot2^{n+1})$,所以$-T_n=-(2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot2^{n+1})$,所以$T_n=2^{n+1}-n\cdot2^{n+1}-2$,又$T_n+n\cdot2^{n+1}=510$,即$2^{n+1}-2=510$,解得$n=8$.

22.**解**:(1)因为$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\frac{a_{n+1}^2-1}{3}$,所以$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2=\frac{a_n^2-1}{3}(n\geq2)$,两式作差,得$3a_n^2=a_{n+1}^2-a_n^2$,即$a_{n+1}^2=4a_n^2$,又数列$\{a_n\}$各项都是正数,所以$a_{n+1}=2a_n(n\geq2)$,又$a_1=1$,$a_1^2=\frac{a_2^2-1}{3}$,解得$a_2=2$(舍负),所以$a_{n+1}=2a_n(n\in\mathbf{N}_+)$,所以$a_n=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}_+)$.

因为数列$\{b_n\}$满足$b_1=1$,$b_n+b_{n+1}=2n+1(n\in\mathbf{N}_+)$,所以$b_{n-1}+b_n=2n-1(n\geq2)$,两式作差,得$b_{n+1}-b_{n-1}=2(n\geq2)$,所以数列$\{b_n\}$的奇数项和偶数项均为公差为2的等差数列,又$b_2=3-b_1=2$,所以数列$\{b_n\}$的奇数项依次为$1,3,5,7,\cdots,2n-1,\cdots$,偶数项依次为$2,4,6,\cdots,2n,\cdots$,所以$b_n=n$.

(2)由(1)得$a_n=2^{n-1}$,$b_n=n$,所以$c_n=\frac{b_n}{a_{2n+1}}=n\cdot\frac1{4^n}$,则$T_n=1\cdot\frac14+2\cdot\frac1{4^2}+3\cdot\frac1{4^3}+\cdots+n\cdot\frac1{4^n}$,$\frac14T_n=1\cdot\frac1{4^2}+2\cdot\frac1{4^3}+\cdots+n\cdot\frac1{4^{n+1}}$,两式作差,得$\frac34T_n=\frac14+\frac1{4^2}+\cdots+\frac1{4^n}-n\cdot\frac1{4^{n+1}}=\frac{\frac14\left(1-\frac1{4^n}\right)}{1-\frac14}-n\cdot\frac1{4^{n+1}}$,则$T_n=\frac49-\frac{3n+4}{9}\cdot\frac1{4^n}$,因为不等式$4\times3^n+9\lambda<3^{n+2}T_n$对一切$n\in\mathbf{N}_+$恒成立,即为$-9\lambda>(3n+4)\cdot\left(\frac34\right)^n$恒成立,设$d_n=(3n+4)\cdot\left(\frac34\right)^n$,则$d_n>0$,$\frac{d_{n+1}}{d_n}-1=\frac{(3n+7)\cdot\left(\frac34\right)^{n+1}}{(3n+4)\cdot\left(\frac34\right)^n}-1=\frac{9n+21}{12n+16}-1=\frac{-3n+5}{12n+16}$,

当$n=1$时,$\frac{d_2}{d_1}-1>0$,则$d_2>d_1$,当$n\geq2$时,$\frac{d_{n+1}}{d_n}-1<0$,则$d_{n+1}<d_n$,所以$n=2$时,d_n取得最大值$\frac{45}{8}$,则$-9\lambda>\frac{45}{8}$,解得$\lambda<-\frac58$,所以λ的取值范围是$\left(-\infty,-\frac58\right)$.

第33期

第2~3版专题检测

一、选择题

1~6.DDDBDB　7~12.AADBDD

二、填空题

13.$\frac16$　14.7047

15.4:5　16.①②④⑤

三、解答题

17.**证明**:(1)取BC中点O,连接EO,FO,因为E,F分别是A_1B,B_1C_1的中点,所以$EO\parallel A_1C$,$FO\parallel C_1C$,因为$A_1C\cap C_1C=C$,$EO\cap FO=O$,所以平面$ACC_1A_1\parallel$平面EOF,因为$EF\subset$平面EOF,所以$EF\parallel$平面ACC_1A_1.

(2)因为在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中,$AC\perp BC$,所以$BC\perp$平面ACC_1A_1,由(1)知$EF\parallel$平面ACC_1A_1,所以$BC\perp EF$.连接A_1F,BF,因为$AC=BC=CC_1=2$,所以$A_1F=\sqrt5$,$BF=\sqrt5$,又E是A_1B中点,所以$EF\perp A_1B$,因为$BC\cap A_1B=B$,所以$EF\perp$平面A_1BC.

18.(1)**证明**:因为N为底面ABCD的中心,则N为AC和BD的中点,因为E为PC的中点,所以$PA\parallel NE$,因为$PA\subset$平面PAD,$NE\not\subset$平面PAD,所以$NE\parallel$平面PAD,又M为AB的中点,所以$NM\parallel AD$,因为$AD\subset$平面PAD,$MN\not\subset$平面PAD,所以$MN\parallel$平面PAD,又MN,$NE\subset$平面NME,且$MN\cap NE=N$,所以平面$NME\parallel$平面PAD.

(2)**解**:取PD的中点G,连AG,EG,则$EG\parallel CD$,$EG=\frac12CD$,由$AM\parallel CD$,$AM=\frac12CD$,所以$AM\parallel EG$,$AM=EG$,所以四边形AMEG为平行四边形,所以$AG\parallel ME$,则$\angle PAG$为异面直线ME与PA所成的角,又$\triangle PAD$为等边三角形,所以$\angle PAG=\frac12\angle PAD=\frac{\pi}{6}$,所以异面直线ME与PA所成的角为$\frac{\pi}{6}$.

19.(1)**证明**:在图①中,连接BD,菱形ABCD中,$A=\frac{\pi}{3}$,所以$\triangle ABD$为等边三角形,因为E为AD的中点,所以$BE\perp AE$,$BE\perp DE$,又$AB=2$,则$AE=DE=1$,$BE=\sqrt3$.在图②中,$A_1D=\sqrt2$,则$A_1E^2+ED^2=A_1D^2$,所以$A_1E\perp ED$,因为$BC\parallel DE$,则$BC\perp BE$,$BC\perp A_1E$,又$BE\cap A_1E=E$,BE,$A_1E\subset$平面A_1BE,故$BC\perp$平面A_1BE,因为$BC\subset$平面A_1BC,所以平面$A_1BE\perp$平面A_1BC.

(2)**解**:连接EC交BD于点O,因为$ED\parallel BC$,则$\frac{EO}{OC}=\frac{ED}{BC}=\frac12$,又$A_1E\parallel$平面BPD,且$A_1E\subset$平面$A_1EC$,平面$A_1EC\cap$平面$BPD=OP$,所以$OP\parallel A_1E$,则$\frac{OP}{A_1E}=\frac{OC}{CE}=\frac23$,故点P到平面$A_1BE$的距离h为点C到平面$A_1BE$距离的$\frac13$,由(1)知$BC\perp$平面$A_1BE$,所以$h=\frac13BC=\frac23$,所以$V_{A_1-BPE}=V_{P-A_1BE}=\frac13\cdot S_{\triangle A_1BE}\cdot h=\frac13\times\frac12\times1\times\sqrt3\times\frac23=\frac{\sqrt3}{9}$.

20.(1)**证明**:因为$MA\perp$平面$ABCD$,$PD\parallel MA$,所以$PD\perp$平面$ABCD$.

又因为$BC\subset$平面$ABCD$,所以$PD\perp BC$.因为四边形$ABCD$为正方形,所以$BC\perp DC$.又因为$PD\cap DC=D$,所以$BC\perp$平面PDC.

在$\triangle PBC$中,因为G,F分别为PB,PC的中点,所以$GF\parallel BC$.所以$GF\perp$平面PDC.

又因为$GF\subset$平面EFG,

所以平面$EFG\perp$平面PDC.

(2)**解**:因为$PD\perp$平面$ABCD$,四边形$ABCD$为正方形,不妨设$MA=1$,则$PD=AD=2$,所以$V_{P-ABCD}=\frac13S_{ABCD}\cdot PD=\frac13\times4\times2=\frac83$.

因为$MA\perp$平面$ABCD$,$AB\subset$平面$ABCD$,所以$MA\perp AB$.又因为四边形$ABCD$为正方形,所以$AD\perp AB$.又因为$AD\cap MA=A$,所以$AB\perp$平面$MADP$.

因为$MA\parallel PD$,所以$S_{\triangle AMP}=\frac12AM\cdot AD=1$,所以$V_{P-MAB}=V_{B-PAM}=\frac13S_{\triangle PAM}\cdot AB=\frac13\times1\times2=\frac23$,所以$V_{P-MAB}:V_{P-ABCD}=1:4$.

21.(1)**证明**:由题设知,平面$CMD\perp$平面$ABCD$,交线为CD.

因为$BC\perp CD$,$BC\subset$平面$ABCD$,

所以$BC\perp$平面CMD,故$BC\perp DM$.

因为M为$\overset{\frown}{CD}$上异于C,D的点,且DC为直径,所以$DM\perp CM$.

又$BC\cap CM=C$,所以$DM\perp$平面BMC.

而$DM\subset$平面AMD,

所以平面$AMD\perp$平面BMC.

(2)**解**:当P为AM的中点时,$MC\parallel$平面PBD.

证明如下:如图,连接AC交BD于O.

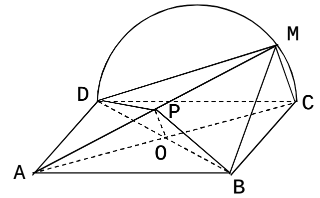
因为$ABCD$为矩形,所以O为AC中点.

连接OP,因为P为AM中点,

所以$MC\parallel OP$.

又$MC\not\subset$平面PBD,$OP\subset$平面PBD,

所以$MC\parallel$平面PBD.



(第21题图)

22.(1)**证明**:因为侧棱$DD_1\perp$底面ABCD,$AB\subset$底面ABCD,

所以$DD_1\perp AB$.在梯形ABCD中,

因为$AD=2$,$BC=DC=1$,$AD\perp DC$,

所以$AB=BD=\sqrt2$,

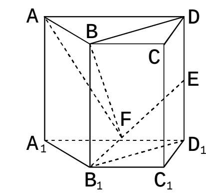
所以$AB^2+BD^2=AD^2$,所以$BD\perp AB$.

又$BD\cap DD_1=D$,

所以$AB\perp$平面BDD_1B_1,

又$B_1E\subset$平面BDD_1B_1,

所以$B_1E\perp AB$.



(第22题图)

(2)**解**:如图,连接BF,由(1)知,直线AF在平面BDD_1B_1内的射影为直线BF,

所以$\angle AFB$是直线AF与平面BDD_1B_1所成的角.

在矩形BDD_1B_1中,$B_1E=\sqrt3$,

在$Rt\triangle B_1D_1E$中,$\cos\angle B_1ED_1=\frac{\sqrt3}{3}$.

故在$\triangle BB_1F$中,$BF=\sqrt{BB_1^2+\left(\frac{B_1E}{3}\right)^2-2BB_1\cdot\frac{B_1E}{3}\cdot\cos\angle BB_1E}=\sqrt{4+\frac13-2\times2\times\frac{\sqrt3}{3}\times\frac{\sqrt3}{3}}=\sqrt3$.

所以在$Rt\triangle ABF$中,

$AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt5$,

所以直线AF与平面BDD_1B_1所成角的正弦值为$\sin\angle AFB=\frac{AB}{AF}=\frac{\sqrt2}{\sqrt5}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

第34期

第2~3版专题检测

一、选择题

1~6.CCCDAD　　7~12.DCBDBC

二、填空题

13.-2　　14.$-\frac{7}{25}$

15.3　　16.$\left(\frac{41}{6},\frac{15}{2}\right]$

三、解答题

17.解:(1)因为$\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$,所以$\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=-\frac{4}{5}$.

(2)因为α,β为锐角,所以$\alpha+\beta\in(0,\pi)$,又$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,因为$\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$,且$\alpha$为锐角,所以$\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

所以$\sin(2\alpha+\beta)=\sin[\alpha+(\alpha+\beta)]=\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)+\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)=\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

18.解:(1)$f(x)=\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin^2x+1=\sin x\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)-\sin^2x+1=-\frac{1}{2}\sin^2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x+1=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sin2x+1=\frac{1}{4}\cos2x+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin2x+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\cdot\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{3}{4}$.

令$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$,得$x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},k\in Z$,所以函数$f(x)$的对称轴为$x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$,$k\in Z$.

(2)由(1)知$f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{3}{4}$,因为$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$,所以$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$,所以$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$,所以$f(x)\in\left[\frac{3-\sqrt{3}}{4},\frac{5}{4}\right]$,故函数$f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$上的最大值为$\frac{5}{4}$,最小值为$\frac{3-\sqrt{3}}{4}$.

19.解:(1)函数$f(x)=4\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}=2\sin x\cos x+2\sqrt{3}\cos^2x-\sqrt{3}=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.所以函数$f(x)$的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. 令$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in Z)$,解得$\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}+k\pi(k\in Z)$,所以函数$f(x)$的单调递减区间为$\left[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi\right](k\in Z)$.

(2)关于x的方程$f(x)=m+2\sin2x$在区间$\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$上恰有两个不等的实根,等价于$m=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-2\sin2x=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,即$\frac{m}{2}=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$在$\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$上恰有两个不等的实根,即$y=\frac{m}{2}$与$y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$在$\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$上有两个交点,因为$x\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$,所以$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$,结合图象,可知$\frac{m}{2}\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right]$,得$m\in(-2,-1]$.

所以实数m的取值范围为$(-2,-1]$.

20.解:(1)因为$f(x)$的图象中相邻的两个对称中心的距离为$\frac{\pi}{2}$,故函数$f(x)$的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,所以$\omega=2$.

选择条件①:函数$f(x)$的图象关于直线$x=-\frac{\pi}{12}$对称,所以$f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=\pm2$,所以$-\frac{\pi}{6}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$,解得$\varphi=k\pi+\frac{2\pi}{3}$,因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=-\frac{\pi}{3}$,所以$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$;

选择条件②:函数$f(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$对称,即$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$,故$2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=k\pi(k\in Z)$,得$\varphi=k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in Z)$,因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=-\frac{\pi}{3}$,所以$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$;

选择条件③:对任意实数x,$f(x)\leqslant f\left(\frac{5\pi}{12}\right)$恒成立,故$f(x)_{max}=f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=2$,所以$2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$,得$\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in Z)$,因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=-\frac{\pi}{3}$,所以$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

(2)将函数$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位,得到$g(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象,因为$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$,所以$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$,所以$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$,$g(x)\in[-1,2]$,由题意,得$m\geqslant g(x)_{min}$,即$m\geqslant-1$,所以实数$m$的取值范围是$[-1,+\infty)$.

21.解:(1)由水深与时刻间的对应关系,得$f(t)$的最小正周期$T=12$,所以$\omega=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$,由表可知$A=\frac{6.5-2.5}{2}=2$,$b=\frac{6.5+2.5}{2}=4.5$.所以$f(t)=2\sin\left(\frac{\pi}{6}t+\varphi\right)+4.5$.当$t=0$时,$f(0)=4.5$,即$2\sin\varphi=0$,因为$-\pi<\varphi<\pi$,所以$\varphi=0$.所以该函数解析式为$f(t)=2\sin\frac{\pi}{6}t+4.5(0\leqslant t\leqslant24)$.

(2)由题意,得$f(t)\geqslant6.2$,即$2\sin\frac{\pi}{6}t+4.5\geqslant6.2$,得$\sin\frac{\pi}{6}t\geqslant\frac{1.7}{2}\approx\frac{\sqrt{3}}{2}$.所以$\frac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant\frac{\pi}{6}t\leqslant\frac{2\pi}{3}+2k\pi$,$k\in Z$,解得$2+12k\leqslant t\leqslant4+12k$,$k\in Z$. 当$k=0$时,$t\in[2,4]$;当$k=1$时,$t\in[14,16]$.所以该船在2:00或14:00时能进入港口,在港口能停留2小时.

22.解:(1)函数$f(x)=4\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin x+(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)+1=\left[2+2\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]\sin x+\sin^2x-\cos^2x+1=2\sin x-2\sin^2x+2\sin^2x=2\sin x$,因为函数$y=f(\omega x)=2\sin\omega x$在区间$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$上是增函数,所以$\begin{cases}\omega>0,\\-\frac{\pi}{2}\leqslant-\frac{\pi}{3}\omega,\\\frac{\pi}{2}\geqslant\frac{\pi}{2}\omega,\end{cases}$解得$0<\omega\leqslant1$,所以$\omega$的取值范围是$(0,1]$.

(2)$g(x)=\frac{1}{2}\left[f(2x)-af(x)+af\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-a\right]-1=\frac{1}{2}\left[2\sin2x-2a\sin x+2a\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-a\right]-1=\sin2x-a\sin x+a\cos x-\frac{1}{2}a-1=2\sin x\cos x-a(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2}a-1$,令$\sin x-\cos x=t$,则$2\sin x\cos x=1-t^2$,$t=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$,因为$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,所以$-1\leqslant\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以$-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant1$,则$g(x)$转化为$g(t)=1-t^2-at-\frac{1}{2}a-1=-t^2-at-\frac{1}{2}a$,对称轴为$t=-\frac{a}{2}$.因为$g(x)$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值为2,即$g(t)$在$[-\sqrt{2},1]$上的最大值为2,所以当$-\frac{a}{2}\geqslant1$,即$a\leqslant-2$时,则$g(t)_{max}=g(1)=-1-a-\frac{1}{2}a=2$,解得$a=-2$;当$-\sqrt{2}<-\frac{a}{2}<1$,即$-2<a<2\sqrt{2}$时,则$g(t)_{max}=g\left(-\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}-\frac{1}{2}a=2$,解得$a=-2$(舍),或$a=4$(舍);当$-\frac{a}{2}\leqslant-\sqrt{2}$,即$a\geqslant2\sqrt{2}$时,则$g(t)_{max}=g(-\sqrt{2})=-2+\sqrt{2}a-\frac{1}{2}a=2$,解得$a=\frac{16\sqrt{2}+8}{7}$.

综上,实数a的值为-2或$\frac{16\sqrt{2}+8}{7}$.

第35期

第2~3版专题检测

一、选择题

1~6.BBDBBB　　7~12.BADCDD

二、填空题

13.-1　　14.$\frac{\sqrt{3}}{3}$

15.$3\sqrt{3}$　　16.$3\sqrt{2}$

三、解答题

17.解:(1)$f(x)=m\cdot n=\cos\omega x\sin\omega x+\sqrt{3}\cos(\omega x+\pi)\cos\omega x=\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$,由题意,得$f(x)$的最小正周期$T=2\times\frac{\pi}{2}=\pi=\frac{2\pi}{2\omega}$,所以$\omega=1$,所以$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以$g(x)=\sin\left[\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$,令$x-\frac{\pi}{6}\in\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$,$k\in Z$,则$x\in\left[2k\pi-\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{2\pi}{3}\right]$,$k\in Z$,故函数$g(x)$的单调递增区间为$\left[2k\pi-\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{2\pi}{3}\right]$,$k\in Z$.

(2)$f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$,所以$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$,因为$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,则$\alpha-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$,所以$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{13}}{4}$,所以$\cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{13}-3}{8}$.

18.解:(1)因为$\sin A\cos B=\cos2C-\cos A\sin B$,所以$\cos2C=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin(A+B)=\sin C$,所以$1-2\sin^2C=\sin C$,即$2\sin^2C+\sin C-1=0$,解得$\sin C=\frac{1}{2}$或$\sin C=-1$,因为$C\in(0,\pi)$,所以$\sin C=\frac{1}{2}$,所以$C=\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$.

(2)因为$c=2$,$a^2+b^2=16$,所以当$C=\frac{\pi}{6}$时,由余弦定理,得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,所以$4=16-2ab\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$,解得$ab=4\sqrt{3}$,所以$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\sqrt{3}$. 当$C=\frac{5\pi}{6}$时,由余弦定理,得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,所以$4=16-2ab\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,解得$ab=-4\sqrt{3}$,不符合题意,舍去.

综上,$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$.

19.解:(1)因为$AB=25\sqrt{6}$,$\angle DBA=15°$,$\angle DAB=45°$,所以$\angle ADB=120°$,在$\triangle ABD$中,由正弦定理,可得$\frac{BD}{\sin\angle DAB}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$,即$\frac{BD}{\sin45°}=\frac{25\sqrt{6}}{\sin120°}$,所以$BD=50$海里.

(2)在$\triangle BCD$中,$\angle CBD=60°$,$BC=80$,$BD=50$,由余弦定理,可得$CD^2=BC^2+BD^2-2BC\cdot BD\cos\angle CBD=6400+2500-2\times80\times50\times\frac{1}{2}=4900$,解得$CD=70$海里,所以该救援船到达D点需要的时间为$\frac{70}{35}=2$小时.

20.解:(1)因为$c\sin B=b\sin\frac{A+B}{2}$,$A+B=\pi-C$,所以$c\sin B=b\sin\frac{\pi-C}{2}=b\cdot\cos\frac{C}{2}$,在$\triangle ABC$中,由正弦定理,得$\sin C\sin B=\sin B\cos\frac{C}{2}$,又$0<B<\pi$,$\sin B\neq0$,所以$\sin C=\cos\frac{C}{2}$,即$2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=\cos\frac{C}{2}$,又$0<C<\pi$,所以$0<\frac{C}{2}<\frac{\pi}{2}$,所以$\cos\frac{C}{2}\neq0$,所以$\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$,因为$0<\frac{C}{2}<\frac{\pi}{2}$,所以$\frac{C}{2}=\frac{\pi}{6}$,则$C=\frac{\pi}{3}$.

(2)因为$\cos B=\frac{\sqrt{21}}{7}$,所以$\sin B=\frac{2\sqrt{7}}{7}$,可得$\sin\angle BAC=\sin(B+C)=\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)=\sin B\cos\frac{\pi}{3}+\cos B\sin\frac{\pi}{3}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$.在$\triangle ABC$中,由正弦定理,得$\frac{a}{\sin\angle BAC}=\frac{b}{\sin B}$,所以$a=10$,在$\triangle ADC$中,由余弦定理,得$AD^2=DC^2+AC^2-2DC\cdot AC\cos C$,即$DC^2-8DC+15=0$,解得$DC=3$或$DC=5$. 当$DC=3$时,$BD=7$,$\frac{BD}{DC}=\frac{7}{3}$;当$DC=5$时,$BD=5$,$\frac{BD}{DC}=1$,所以$\frac{BD}{DC}$的值为$\frac{7}{3}$或1.

21.解:(1)$\triangle ABC$中,$AB=3\sqrt{3}$,$AC=4\sqrt{3}$,$\cos B=\frac{\sqrt{13}}{13}$,由余弦定理,得$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B$,即$48=27+BC^2-2\times3\sqrt{3}\times BC\times\frac{\sqrt{13}}{13}$,解得$BC=\sqrt{39}$(舍负),故$\cos\angle BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{1}{2}$,由$\angle BAC\in(0,\pi)$,得$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$,所以$\angle CAD=\angle BAC=\frac{\pi}{3}$,

又$S_{\triangle ACD}=24\sqrt{3}$,即$\frac{1}{2}AD\cdot AC\sin\angle CAD=\frac{1}{2}AD\times4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=24\sqrt{3}$,所以$AD=8\sqrt{3}$.

(2)在$\triangle AED$中,$E=\frac{\pi}{3}$,$AD=8\sqrt{3}$,由正弦定理,得$\frac{AE}{\sin\angle ADE}=\frac{DE}{\sin\angle DAE}=\frac{AD}{\sin E}=\frac{8\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=16$,所以$AE=16\sin\angle ADE$,$DE=16\sin\angle DAE=16\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\angle ADE\right)$,所以$2AE+DE=32\sin\angle ADE+16\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\angle ADE\right)=40\sin\angle ADE+8\sqrt{3}\cos\angle ADE=16\sqrt{7}\sin(\angle ADE+\theta)$,其中$\sin\theta=\frac{\sqrt{21}}{14}$,$\cos\theta=\frac{5\sqrt{7}}{14}$,当$\angle ADE+\theta=\frac{\pi}{2}$时,$2AE+DE$取得最大值$16\sqrt{7}$,此时$\cos\angle ADE=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\frac{\sqrt{21}}{14}$.

22.解:(1)选①,$\sqrt{3}\,\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2S_{\triangle ABC}$,所以$\sqrt{3}ac\cos B=2\times\frac{1}{2}ac\sin B$,所以$\sin B=\sqrt{3}\cos B$,则$\tan B=\sqrt{3}$,因为$B\in(0,\pi)$,所以$B=\frac{\pi}{3}$;

选②,$(2a-c)\cos B=b\cos C$,由正弦定理,得$2\sin A\cos B-\sin C\cos B=\sin B\cos C$,所以$2\sin A\cos B=\sin A$,因为$A\in(0,\pi)$,所以$\sin A>0$,所以$\cos B=\frac{1}{2}$,又$B\in(0,\pi)$,所以$B=\frac{\pi}{3}$;

选③,$b\sin A=a\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)$,由正弦定理,得$\sin B\sin A=\sin A\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)$,则$\sin B=\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B$,所以$\tan B=\sqrt{3}$,又$B\in(0,\pi)$,所以$B=\frac{\pi}{3}$.

(2)因为$a+c=\sqrt{3}b$,所以$\sin A+\sin C=\sqrt{3}\sin B$,由(1)知,$B=\frac{\pi}{3}$,则$A+C=\frac{2\pi}{3}$,所以$\sin A+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=\frac{3}{2}$,化简得,$\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,因为$0<A<\frac{2\pi}{3}$,所以$A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$,则$A=\frac{\pi}{6}$或$\frac{\pi}{2}$,所以当$A=\frac{\pi}{6}$时,$C=\frac{\pi}{2}$;当$A=\frac{\pi}{2}$时,$C=\frac{\pi}{6}$.综上,$\triangle ABC$为直角三角形.