第32期

第2~3版专题检测

一、选择题

1~6.BCADAA　　7~12.BAAACD

二、填空题

13.4　　14.$3x-y+1=0$

15.$\left[\frac{2+\ln 2}{2},2\right)$　　16.4

三、解答题

17.**解**:(1)$f'(x)=x^2-ax-2$,因为$f(x)$在$x=2$处取得极值,所以$f'(2)=0$,即$4-2a-2=0$,解得$a=1$,所以$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$,$f'(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$,所以$f(x)$在$(-2,-1)$上单调递增,在$(-1,1)$上单调递减,又$f(-2)=-\frac{2}{3}$,$f(1)=-\frac{13}{6}$,所以$f(x)$在$[-2,1]$上的最小值为$-\frac{13}{6}$.

(2)由(1)知,$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$,因为关于$x$的方程$f(x)+b=0$有唯一解,即$y=-b$与$y=f(x)$的图象只有一个交点.由(1)知,$f(x)$在$(-\infty,-1)$,$(2,+\infty)$上单调递增,在$(-1,2)$上单调递减,又$f(-1)=\frac{7}{6}$,$f(2)=-\frac{10}{3}$,所以$-b<-\frac{10}{3}$或$-b>\frac{7}{6}$,解得$b>\frac{10}{3}$或$b<-\frac{7}{6}$,所以实数$b$的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{7}{6}\right)\cup\left(\frac{10}{3},+\infty\right)$.

18.**解**:(1)因为当$a=0$时,$f(x)=e^x-x^2-1$,$f'(x)=e^x-2x$,所以曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线的斜率为$f'(0)=1$,又$f(0)=0$,所以切线方程为$y=x$.

(2)对任意的实数$x\in(0,+\infty)$,$f(x)\geqslant 0$恒成立,即$2a\leqslant\frac{e^x}{x}-x-\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上恒成立.设$g(x)=\frac{e^x}{x}-x-\frac{1}{x}$ $(x>0)$,$g'(x)=\frac{(x-1)(e^x-x-1)}{x^2}$,令$h(x)=e^x-x-1$,则$h'(x)=e^x-1>h'(0)=0$,所以$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,即有$h(x)>h(0)=0$,所以当$x>1$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增;当$0<x<1$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减,所以$g(x)_{min}=g(1)=e-2$.所以$2a\leqslant e-2$,得$a\leqslant\frac{e-2}{2}$,所以$a$的最大值为$\frac{e-2}{2}$.

19.**解**:(1)$f(x)=\ln x-ex+2$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=\frac{1}{x}-e=\frac{1-ex}{x}$,令$f'(x)>0$,解得$0<x<\frac{1}{e}$;令$f'(x)<0$,解得$x>\frac{1}{e}$.所以$f(x)$的单调递增区间为$\left(0,\frac{1}{e}\right)$,单调递减区间为$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

(2)$g(x)=f(x)-ax^2=\ln x-ex+2-ax^2$,$g'(x)=\frac{1}{x}-e-2ax=\frac{-2ax^2-ex+1}{x}$,因为$g(x)$在定义域上单调且有唯一零点,令$h(x)=-2ax^2-ex+1$,则函数$h(x)$在$(0,+\infty)$上不存在变号零点.①当$a<0$时,则$-\frac{e}{4a}>0$,所以$e^2+8a\leqslant 0$,解得$a\leqslant-\frac{e^2}{8}$,故$a\leqslant-\frac{e^2}{8}$,当$x\to 0$时,$g(x)\to-\infty$,当$x\to+\infty$时,$g(x)\to+\infty$,故$g(x)$在定义域上单调且有唯一零点.②当$a=0$时,由(1)知$g(x)$在定义域上不单调,不符合题意.③当$a>0$时,易知$-\frac{e}{4a}<0$,$e^2+8a>0$,且$h(0)=1$,所以$h(x)$在$(0,+\infty)$上有一个变号零点,不符合题意.

综上,实数a的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{e^2}{8}\right]$.

20.(1)**解**:$f(x)=x-1-a\ln x$,$x>0$,$f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$,且$f(1)=0$.当$a\leqslant 0$时,$f'(x)>0$,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,又$f(1)=0$,所以当$0<x<1$时,$f(x)<0$,不符合题意.当$a>0$时,当$0<x<a$时,$f'(x)<0$,$f(x)$在$(0,a)$上单调递减;当$x>a$时,$f'(x)>0$,$f(x)$在$(a,+\infty)$上单调递增.①若$a<1$,$f(x)$在$(a,1)$上单调递增,所以当$x\in(a,1)$时,$f(x)<f(1)=0$,不符合题意;②若$a>1$,$f(x)$在$(1,a)$上单调递减,所以当$x\in(1,a)$时,$f(x)<f(1)=0$,不符合题意;③若$a=1$,$f(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,所以$f(x)\geqslant f(1)=0$,符合题意.

综上所述,$a=1$.

(2)**证明**:先证:$\ln x-x+1\leqslant 0(x>0)$,设$g(x)=\ln x-x+1$,则$g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$,当$x\in(0,1)$时,$g'(x)>0$,所以$g(x)$单调递增;当$x\in(1,+\infty)$时,$g'(x)<0$,所以$g(x)$单调递减,所以$x=1$为$g(x)$的极大值点,也是最大值点,所以$g(x)\leqslant g(1)=0$,即$\ln x-x+1\leqslant 0$,所以$\ln x\leqslant x-1$,又$x>0$,所以$\frac{\ln x}{x}\leqslant\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x}$,因为$n\in N_+$,$n\geqslant 2$,令$x=n^2$,得$\frac{\ln n^2}{n^2}<1-\frac{1}{n^2}$,所以$\frac{\ln n}{n^2}\leqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$,

所以$\frac{\ln 2}{2^2}+\frac{\ln 3}{3^2}+\cdots+\frac{\ln n}{n^2}\leqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^2}+1-\frac{1}{3^2}+\cdots+1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\left[n-1-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\right]<\frac{1}{2}\left[(n-1)-\left(\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[n-1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[n-1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{2n^2-n-1}{4(n+1)}$,所以原不等式成立.

21.**解**:(1)当$b=0$时,$f(x)=x^2e^x$,$f'(x)=x(x+2)e^x$.令$f'(x)=0$,解得$x=-2$,或$x=0$.

当$x\in(-\infty,-2)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增;当$x\in(-2,0)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;当$x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.所以函数$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,-2)$,$(0,+\infty)$,单调递减区间为$(-2,0)$.

(2)$f'(x)=(x^2+2x+b)e^x$,因为函数$f(x)$有两个不同的极值点,即$f'(x)$有两个不同的零点,所以方程$f'(x)=0$即$x^2+2x+b=0$有两个不同的实数根,所以判别式$\Delta=4-4b>0$,解得$b<1$.设方程$x^2+2x+b=0$的两根分别为x_1,x_2不妨设$x_1<x_2$,则$x_1+x_2=-2$,$x_1x_2=b$.随着x的变化,$f(x)$和$f'(x)$的变化情况如下表:

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以x_1是函数$f(x)$的极大值点,x_2是函数$f(x)$的极小值点,符合题意.

所以$f(x_1)\cdot f(x_2)=e^{x_1}(x_1^2+b)\cdot e^{x_2}(x_2^2+b)=[x_1^2x_2^2+b(x_1^2+x_2^2)+b^2]e^{x_1+x_2}=[b^2+b(4-2b)+b^2]e^{-2}=4be^{-2}$,因为$f(x_1)\cdot f(x_2)=4e^{-2}$,则$4be^{-2}=4e^{-2}$,得$b=1$,不符合$b<1$,故不存在实数$b$使得$f(x_1)\cdot f(x_2)=4e^{-2}$.

22.(1)**证明**:$f(x)=e^x-\sin x+\cos x-2$,则$f'(x)=e^x-\cos x-\sin x$,$f''(x)=e^x+\sin x-\cos x$,因为$x\in(0,\pi)$,所以$f''(x)>0$,所以$f'(x)$在$(0,\pi)$上单调递增,且$f'(0)=0$,所以$f'(x)>0$,所以$f(x)$在$(0,\pi)$上单调递增,又$f(0)=0$,所以$f(x)>0$.

(2)**解**:$g(x)=e^x-a\sin x-1$,$g'(x)=e^x-a\cos x$,①当$a\leqslant 0$时,$g(x)\geqslant 0$,因为$g(0)=0$,所以$x=0$是$g(x)$的唯一零点;②当$0<a\leqslant 1$时,令$h(x)=g'(x)$,则$h'(x)=e^x+a\sin x$,$h'(x)>0$,$h(x)$在$[0,\pi]$上单调递增,又$h(0)=1-a\geqslant 0$,所以$h(x)\geqslant h(0)\geqslant 0$,即$g'(x)\geqslant 0$,所以$g(x)$在$[0,\pi]$上单调递增,因为$g(0)=0$,所以$x=0$是$g(x)$的唯一零点;③当$a>1$时,令$h(x)=g'(x)$,$h'(x)=e^x+a\sin x>0$,$h(x)$在$[0,\pi]$上单调递增,又$h(0)=1-a<0$,$h\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$,所以存在唯一的$x_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,使得$h(x_0)=0$,所以当$0<x<x_0$时,$h(x)<0$,即$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减,$x_0<x<\pi$时,$h(x)>0$,即$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增,所以$g(x)_{min}=g(x_0)$,又$g(x_0)<g(0)=0$,$g(\pi)=e^{\pi}-1>0$,所以$g(x)$在$(x_0,\pi)$上有唯一零点,又$x=0$是$g(x)$的一个零点,所以$g(x)$在$[0,\pi]$上有2个零点.

综上,当$a\leqslant 1$时,$g(x)$在$[0,\pi]$上有1个零点;当$a>1$时,$g(x)$在$[0,\pi]$上有2个零点.

第29期

第1版

专题一　三角与向量

1.(1)$\frac{\pi}{3}$.(2)$10\sqrt{3}$.

2.(1)$AD=3$.(2)$\tan B=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

3.(1)$\left[k\pi-\frac{\pi}{8},k\pi+\frac{3\pi}{8}\right]$,$k\in\mathbf{Z}$.

(2)$[1,\sqrt{2}]$.

4.(1)$\frac{\pi}{3}$.(2)$2\sqrt{3}$.

5.选①②③,$\triangle ABC$的面积都为$2\sqrt{3}$或$4\sqrt{3}$.

6.(1)$g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

(2)$\frac{\sqrt{3}}{4}$.

第2版

专题二　数列

1.(1)$a_n=n-7$.　　(2)$n^2-7n+\frac{4^n-1}{3}$.

2.(1)$a_n=2n+1$.　　(2)8.

3.(1)$a_n=n+1$,$n\in N_+$,$b_n=2^n$,$n\in N_+$.

(2)$c_n=n\cdot 2^{n+1}$.

4.**解**:(1)因为$4S_n=(a_n+1)^2$,则当$n=1$时,$4S_1=4a_1=(a_1+1)^2$,解得$a_1=1$.当$n\geqslant 2$时,$4S_{n-1}=(a_{n-1}+1)^2$,两式作差,得$4S_n-4S_{n-1}=(a_n+1)^2-(a_{n-1}+1)^2$,得$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$,又$\{a_n\}$是正项数列,所以$a_n-a_{n-1}=2$,所以$\{a_n\}$是首项为1,公差为2的等差数列,

所以$a_n=1+2(n-1)=2n-1$.

(2)由$b_n=\frac{2}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$,得$T_n=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$,

故要使$T_n\geqslant\frac{M}{\sqrt{a_{n+1}}}$对任意$n\in N_+$都成立,只需$M\leqslant\frac{2n}{\sqrt{2n+1}}$对任意$n\in N_+$都成立即可.又$\frac{2n}{\sqrt{2n+1}}=\frac{2}{\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}}=\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}+1\right)^2-1}}$$(n\in N_+)$,

所以当$\frac{1}{n}=1$,即$n=1$时,$\left(\frac{2n}{\sqrt{2n+1}}\right)_{min}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,所以$M\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$,即$M$的取值范围是$\left(-\infty,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$.

5.**解**:(1)由题意知$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=13,\\6a_2=a_1+a_3+8,\end{cases}$可得$a_2=3$,$a_1+a_3=10$,设递增的等比数列$\{a_n\}$的公比为$q$,得$\frac{3}{q}+3q=10$,解得$q=3$或$q=\frac{1}{3}$(舍去),则$a_n=a_2q^{n-2}=3\cdot 3^{n-2}=3^{n-1}$.

(2)选①$3S_n+b_n=4$,当$n\geqslant 2$时,$3S_{n-1}+b_{n-1}=4$,又$3S_n+b_n=4$,两式相减可得$3b_n+b_n-b_{n-1}=0$,则$b_n=\frac{1}{4}b_{n-1}$,可得$\{b_n\}$为首项为1,公比为$\frac{1}{4}$的等比数列,则$b_n=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

由$c_n=a_nb_n=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$,得$T_n=\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}=4-4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$,由$\{T_n\}$为递增数列,可得$n=1$时,$T_n$取得最小值1.

选②$b_n=b_{n-1}+2(n\geqslant 2)$,可得$\{b_n\}$为首项为1,公差为2的等差数列,则$b_n=1+2\cdot(n-1)=2n-1$,$c_n=a_nb_n=(2n-1)\cdot 3^{n-1}$,则$T_n=1\times 3^0+3\times 3^1+5\times 3^2+\cdots+(2n-1)\times 3^{n-1}$,

$3T_n=1\times 3+3\times 3^2+5\times 3^3+\cdots+(2n-1)\times 3^n$,两式相减可得$-2T_n=1+2(3^1+3^2+\cdots+3^{n-1})-(2n-1)\cdot 3^n=1+2\cdot\frac{3(1-3^{n-1})}{1-3}-(2n-1)\cdot 3^n$,化简得,$T_n=1+(n-1)\cdot 3^n$,由$\{T_n\}$为递增数列,可得$n=1$时,$T_n$取得最小值1.

选③$5b_n=-b_{n-1}(n\geqslant 2)$,得$\{b_n\}$为首项为1,公比为$-\frac{1}{5}$的等比数列,则$b_n=\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$.由$c_n=a_nb_n=\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}$,得$T_n=\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^n}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}=\frac{5}{8}-\frac{5}{8}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^n$,$T_1=1$,$T_2=\frac{2}{5}$,当$n$为奇数时,$\frac{5}{8}<T_n\leqslant 1$;当$n$为偶数时,$T_n\geqslant\frac{2}{5}$,可得$n=2$时,$T_n$取得最小值$\frac{2}{5}$.

第3版

专题三　概率与统计

1.(1)$a=0.025$,专项心理等级为有隐患的人数为120.(2)$\frac{14}{15}$.

(3)由频率分布直方图可得$45\times 0.02+55\times 0.04+65\times 0.14+75\times 0.2+85\times 0.35+95\times 0.25=80.7$,估计市民心理健康问卷的平均得分为80.7,所以市民心理健康指数的平均值为$0.807>0.8$,所以只需发放心理指导材料,不需要举办心理健康大讲堂.

2.(1)列联表略,有97.5%的把握认为这200位参与调查者是否准备购买华为手机与性别有关.(2)$\frac{3}{5}$.

3.(1)$\hat{y}=6.6x-138.6$.

(2)(ⅰ)线性回归方程对应的相关系数$R^2\approx 0.9398$,因为$0.9398<0.9522$,所以非线性回归方程$\hat{y}=0.06e^{0.2303x}$比线性回归方程$\hat{y}=6.6x-138.6$的拟合效果更好.

(ⅱ)190.

第4版

专题四　立体几何

1.(1)证明略.(2)$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.(1)证明略.(2)$PA=4\sqrt{3}$.

3.(1)证明略.(2)$\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

4.(1)$\frac{\sqrt{3}}{3}$.(2)证明略.(3)$\frac{\sqrt{6}}{6}$.

5.(1)**证明**:取EC的中点N,连接MN,BN.因为MN为$\triangle EDC$的中位线,所以$MN/\!/CD$,且$MN=\frac{1}{2}CD$.

由已知$AB/\!/CD$,且$AB=\frac{1}{2}CD$,得$MN/\!/AB$,且$MN=AB$.故四边形$ABNM$为平行四边形.所以$BN/\!/AM$.

又$BN\subset$平面BEC,$AM\not\subset$平面BEC,所以$AM/\!/$平面BEC.

(2)**解**:在正方形$ADEF$中,$ED\perp AD$,又因为平面$ADEF\perp$平面$ABCD$,且平面$ADEF\cap$平面$ABCD=AD$,

所以$ED\perp$平面$ABCD$.

所以$ED\perp BC$.

在直角梯形$ABCD$中,$AB=AD=1$,$CD=2$,可得$BC=\sqrt{2}$.

故在$\triangle BCD$中,$BD=BC=\sqrt{2}$,$CD=2$,

所以$BD^2+BC^2=CD^2$.

所以$BD\perp BC$.

又$ED\cap BD=D$,

所以$BC\perp$平面BDE.

而$BE\subset$平面BDE,

所以$BC\perp BE$.

故$S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}BE\cdot BC=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BD\cdot BC=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$.

又$V_{E-BCD}=V_{D-BCE}$,设点D到平面BEC的距离为h,则$\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot DE=\frac{1}{3}S_{\triangle BCE}\cdot h$,可得$h=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

第 30 期

第 1~2 版

专题五　解析几何

1.(1)$y^2=4x$.(2)$\frac{4\sqrt{3}}{5}$.

2.(1)$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.(2)$\frac{4\sqrt{10}}{9}$.

3.(1)$P(4,3)$.(2)$(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$.(3)证明略.

4.(1)$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.(2)证明略.定值为 4.

5.(1)$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)存在实数 λ,使得 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=\lambda\overrightarrow{OP}^2$ 成立,且 $\lambda=3$.

6.(1) 抛物线 C 的标准方程为 $x^2=4y$,其准线方程为 $y=-1$.

(2)$S_1\cdot S_2$ 的最小值为 27,此时点 A 的坐标为$(2\sqrt{2},2)$.

7.(1)**解**:由题意知,$\begin{cases}2a=4,\\ \frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3},\end{cases}$ 所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)**证明**:由题意,得 $A_1(-2,0)$,$A_2(2,0)$,设点 $M(x_0,y_0)$,则 $k_{MA_1}\cdot k_{MA_2}=\frac{y_0}{x_0+2}\cdot\frac{y_0}{x_0-2}=\frac{y_0^2}{x_0^2-4}$,又 $M(x_0,y_0)$在椭圆 C 上,则 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$,即 $\frac{y_0^2}{3}=1-\frac{x_0^2}{4}=\frac{4-x_0^2}{4}$,

所以 $k_{MA_1}\cdot k_{MA_2}=\frac{\frac{3}{4}(4-x_0^2)}{x_0^2-4}=-\frac{3}{4}$(定值).

(3)**解**:当 l_1,l_2 中有一条直线斜率不存在时,易求得 $S_{AMBN}=\frac{1}{2}\times4\times3=6$;当 l_1,l_2 的斜率都存在时,设直线 $l_1:x=my+1$,直线 $l_2:x=-\frac{1}{m}y+1$,由 $\begin{cases}x=my+1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$,显然 $\Delta>0$,所以 $y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}$,$y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$,则 $|AB|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{12(1+m^2)}{3m^2+4}$. 把上式中的 m 换成 $-\frac{1}{m}$ 得 $|MN|=\frac{12(1+m^2)}{3+4m^2}$,则 $S_{AMBN}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|MN|=\frac{1}{2}\cdot\frac{12(1+m^2)}{3m^2+4}\cdot\frac{12(1+m^2)}{3+4m^2}=\frac{72(1+m^2)^2}{(3m^2+4)(3+4m^2)}$,令 $1+m^2=t$,则 $t>1$,且 $3+4m^2=4t-1$,$3m^2+4=3t+1$,所以 $S_{AMBN}=\frac{72t^2}{12t^2+t-1}=\frac{72}{-\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{49}{4}}$ $(t>1)$,所以 $\frac{288}{49}\leqslant S_{AMBN}<6$.综上,四边形 $AMBN$ 面积的取值范围是$\left[\frac{288}{49},6\right)$.

第 3 版

专题六　函数与导数

1.(1)当 $a\geqslant0$ 时,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增;当 $a<0$ 时,$f(x)$在$\left(0,-\frac{1}{a}\right)$上单调递增,在$\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增.

(2)$(-\infty,-e)$.

2.(1)函数 $h(x)$在$(0,\pi)$上单调递减.(2)1 个.

3.(1)$(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$.(2)证明略.

4.(1)$\left(\frac{e}{2},+\infty\right)$.(2)证明略.

5.(1)当$a\leqslant0$时,$f(x)$在$\left(0,\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2},+\infty\right)$上单调递减;当$0<a<\frac{1}{4}$时,$f(x)$在$\left(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2},\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$上单调递增,在$\left(0,\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right)$,$\left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2},+\infty\right)$上单调递减;当 $a\geqslant\frac{1}{4}$时,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.

(2)5.

6.**解**:(1)函数 $f(x)=(a-2)\ln x$ 的导数为 $f'(x)=\frac{a-2}{x}$,所以曲线 $y=f(x)$在 $x=b$ 处的切线的斜率为$\frac{a-2}{b}=-1$,①

$g(x)=-x^2+ax$ 的导数 $g'(x)=-2x+a$,所以曲线 $y=g(x)$在 $x=b$ 处的切线的斜率为 $a-2b=-1$,②

由①②,解得 $a=1$,$b=1$.

(2)方程 $f(x)=g(x)$在区间$\left[\frac{1}{e},e^2\right]$上有解,即 $a(\ln x-x)=2\ln x-x^2$ 在区间$\left[\frac{1}{e},e^2\right]$上有解,设 $h(x)=\ln x-x$,则 $h'(x)=\frac{1}{x}-1$,当$\frac{1}{e}\leqslant x<1$ 时,$h'(x)>0$,$h(x)$单调递增;当 $1<x\leqslant e^2$ 时,$h'(x)<0$,$h(x)$单调递减.

所以 $h(x)_{max}=h(1)=-1<0$,所以 $h(x)<0$,所以 $a=\frac{2\ln x-x^2}{\ln x-x}$,所以 $y=a$ 与 $y=\frac{2\ln x-x^2}{\ln x-x}$在$\left[\frac{1}{e},e^2\right]$上有交点.

令$F(x)=\frac{2\ln x-x^2}{\ln x-x}$,$x\in\left[\frac{1}{e},e^2\right]$,则$F'(x)=\frac{(x-1)(x-2\ln x+2)}{(\ln x-x)^2}$,令$m(x)=x-2\ln x+2$,$x\in\left[\frac{1}{e},e^2\right]$,则$m'(x)=1-\frac{2}{x}$,可得$m(x)$在$(2,e^2)$上单调递增,在$\left(\frac{1}{e},2\right)$上单调递减,则$m(x)_{min}=m(2)=2(2-\ln2)>0$,即$x+2-2\ln x>0$恒成立,令$F'(x)=0$,得$x=1$,所以$F(x)$在$\left[\frac{1}{e},1\right)$上单调递减,在$(1,e^2]$上单调递增,所以$F(x)_{min}=F(1)=1$,因为$y=F(x)$与$y=a$有交点,$F\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{2e^2+1}{e^2+e}$,$F(e^2)=e^2+2$,$F\left(\frac{1}{e}\right)<F(e^2)$,所以$1\leqslant a\leqslant e^2+2$,即a的取值范围为$[1,e^2+2]$.

第 4 版

专题七　选修 4 系列

1.(1)$\left(1,\frac{7}{3}\right)$.(2)$[0,1]$.

2.(1) 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=3\cos\alpha,\\ y=\sqrt{3}\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数),直线 l 的直角坐标方程为 $x-y+4=0$.

(2)$2\sqrt{2}-\sqrt{6}$.

3.(1)$[9,+\infty)$.

(2)$4a+b$ 取得最小值 13,此时 $a=2$,$b=5$.

4.(1) 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$,曲线 C_2 的直角方程为 $x+y-4=0$.

(2)当 $\alpha=\frac{3\pi}{8}$ 时,$\frac{|OB|}{|OA|}$的最大值为$\frac{1+\sqrt{2}}{4}$.

5.(1)$(-\infty,0]$.(2)8.

6.**解**:(1)由$\begin{cases}x=\frac{1}{2}t,\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t-1\end{cases}$(t 为参数)消去参数 t,得曲线 C_1 的普通方程为 $\sqrt{3}x-y-1=0$.由 $\rho=-4\sin\theta$,得 $\rho^2=-4\rho\sin\theta$,又 $x=\rho\cos\theta$,$y=\rho\sin\theta$,可得 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+y^2+4y=0$.

(2)设 $A\left(\frac{1}{2}t_1,\frac{\sqrt{3}}{2}t_1-1\right)$,$B\left(\frac{1}{2}t_2,\frac{\sqrt{3}}{2}t_2-1\right)$,把$\begin{cases}x=\frac{1}{2}t,\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}t-1\end{cases}$代入 $x^2+y^2+4y=0$ 中,得 $t^2+\sqrt{3}t-3=0$.

所以 $t_1+t_2=-\sqrt{3}$,$t_1t_2=-3$.

所以 $\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{|t_1t_2|}=\frac{\sqrt{(-\sqrt{3})^2-4\times(-3)}}{3}=\frac{\sqrt{15}}{3}$.

第31期

第2~3版专题检测

一、选择题

1~6.DCDAAB　7~12.ADBCBC

二、填空题

13.$\frac{7}{2}$　14.$y=x$

15.$\left[\frac{1}{2},1\right)$　16.$(-\infty,0]$

三、解答题

17.**解**:(1)$f(f(-3))=f(1)=1$.

(2)当$x<0$时,由$\left(\frac{1}{2}\right)^x-7=2$,解得$x=\log_{\frac{1}{2}}9$;当$x\geqslant0$时,由$\sqrt{x}=2$,解得$x=4$,所以$x=\log_{\frac{1}{2}}9$或4.

(3)当$x<0$时,由$\left(\frac{1}{2}\right)^x-7<1$,解得$-3<x<0$;当$x\geqslant0$时,由$\sqrt{x}<1$,解得$0\leqslant x<1$.综上,不等式$f(x)<1$的解集为$(-3,1)$.

18.**解**:(1)由题意可得 $a^2-2a-2=1$,解得$a=3$,或$a=-1$,又$a>0$且$a\neq1$,所以$a=3$,所以$g(x)=\log_3(x+1)+\log_3(3-x)$,所以$\begin{cases}x+1>0,\\ 3-x>0,\end{cases}$解得$-1<x<3$,即$g(x)$的定义域为$(-1,3)$,因为$g(x)=\log_3(x+1)+\log_3(3-x)=\log_3(-x^2+2x+3)$,令$u(x)=-x^2+2x+3(-1<x<3)$,则由对称轴为$x=1$可知,$u(x)$在$(-1,1)$上单调递增,在$(1,3)$上单调递减. 又因为$y=\log_3u$在$(0,+\infty)$单调递增,故$g(x)$的单调递增区间为$(-1,1)$,单调递减区间为$(1,3)$.

(2)因为不等式$g(x)-m+3\leqslant0$的解集非空,所以$m-3\geqslant g(x)_{min}$,$x\in\left[\frac{1}{3},2\right]$,由(1)知,当$x\in\left[\frac{1}{3},2\right]$时,函数$g(x)$的单调递增区间为$\left[\frac{1}{3},1\right]$,单调递减区间为$[1,2]$,且$g\left(\frac{1}{3}\right)=\log_3\frac{32}{9}$,$g(2)=1$,所以$g(x)_{min}=1$,所以$m-3\geqslant1$,解得$m\geqslant4$,所以实数m的取值范围为$[4,+\infty)$.

19.**解**:(1)函数$f(x)=ax^2+2\ln(1-x)$的定义域为$(-\infty,1)$,$f'(x)=2ax-\frac{2}{1-x}$,因为$f(x)$在$x=-1$处有极值,所以$f'(-1)=-2a-1=0$,解得$a=-\frac{1}{2}$,此时,$f'(x)=-x-\frac{2}{1-x}=\frac{x^2-x-2}{1-x}=\frac{(x-2)(x+1)}{1-x}$,因为$x<1$,令$f'(x)<0$,得$-1<x<1$,所以$f(x)$的单调递减区间为$(-1,1)$.

(2)因为$f(x)$在$[-3,-2]$上是增函数,所以$f'(x)\geqslant0$且不恒为0对$\forall x\in[-3,-2]$恒成立,所以$2ax-\frac{2}{1-x}\geqslant0$,即$a\leqslant\frac{1}{(1-x)x}$,因为$g(x)=(1-x)x=-x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$在$[-3,-2]$上单调递增,所以$g(x)_{max}=g(-2)=-6$,所以$\frac{1}{(1-x)x}$的最小值为$-\frac{1}{6}$,所以$a\leqslant-\frac{1}{6}$,即a的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{1}{6}\right]$.

20.**解**:(1)当$a=0$时,$f(x)=x\ln x+x$,$f'(x)=\ln x+2$,所以切线的斜率为$f'(1)=2$,又$f(1)=1$,所以切线的方程为$y-1=2(x-1)$,即$2x-y-1=0$.

(2)当$0<x<1$时,$f(x)>0$恒成立,即$a>\frac{x\ln x+x}{x-1}$在$(0,1)$上恒成立.令$g(x)=\frac{x\ln x+x}{x-1}$,则$g'(x)=\frac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$,令$h(x)=x-\ln x-2$,则$h'(x)=1-\frac{1}{x}$,由$h'(x)=0$,可得$x=1$,当$0<x<1$时,$h'(x)<0$,$h(x)$单调递减,因为$h(1)=-1<0$,$h\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{1}{e^2}-\ln\frac{1}{e^2}-2=\frac{1}{e^2}>0$,所以$h(x)$在$(0,1)$存在唯一零点$x_0$,且$h(x_0)=x_0-\ln x_0-2=0$,即$\ln x_0=x_0-2$,所以当$0<x<x_0$时,$h(x)>0$,即$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增;当$x_0<x<1$时,$h(x)<0$,即$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减,所以$g(x)_{max}=g(x_0)=\frac{x_0\ln x_0+x_0}{x_0-1}=\frac{x_0(x_0-2)+x_0}{x_0-1}=x_0$,所以$a>x_0$,因为$x_0\in(0,1)$,所以正整数a的最小值为1.

21.(1)**解**:$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=\frac{8x^2+(8-a)x-a}{x}=\frac{(8x-a)(x+1)}{x}$,当$a\leqslant0$时,$f'(x)>0$,$f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$,无单调递减区间;当$a>0$时,令$f'(x)>0$,得$x>\frac{a}{8}$;令$f'(x)<0$,得$0<x<\frac{a}{8}$,所以$f(x)$的单调递减区间为$\left(0,\frac{a}{8}\right)$,单调递增区间为$\left(\frac{a}{8},+\infty\right)$.

综上,当$a\leqslant0$时,$f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$,无单调递减区间;当$a>0$时,$f(x)$的单调递减区间为$\left(0,\frac{a}{8}\right)$,单调递增区间为$\left(\frac{a}{8},+\infty\right)$.

(2)**证明**:当$a=2$时,原不等式等价于$e^x-\ln x-2>0$.令$\varphi(x)=e^x-\ln x-2$,则$\varphi'(x)=e^x-\frac{1}{x}$,易知$\varphi'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,且$\varphi'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$,$\varphi'(1)=e-1>0$,所以$\varphi'(x)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上存在唯一零点$x_0$,且$\varphi'(x_0)=0$,所以$\varphi(x)$在$(0,x_0)$上单调递减,在$(x_0,+\infty)$上单调递增.要证$\varphi(x)>0$,即证$\varphi(x)_{min}=\varphi(x_0)>0$,由$\varphi'(x_0)=e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$,得$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$,$x_0=\frac{1}{e^{x_0}}$,则$\varphi(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-2=\frac{1}{x_0}+x_0-2$,因为$x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,所以$\varphi(x_0)=\frac{1}{x_0}+x_0-2>2\sqrt{\frac{1}{x_0}\cdot x_0}-2=0$,所以$\varphi(x)>0$,即$f(x)>4x^2-2e^x+6x+4$.

22.**解**:(1)当$a=-1$时,$f(x)=-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x-\frac{5}{3}$,$f'(x)=-(x-1)(x+3)$,$x\in[-4,2]$,令$f'(x)>0$,解得$-3<x<1$,令$f'(x)<0$,解得$-4\leqslant x<-3$或$1<x\leqslant2$,所以函数$f(x)$在$(-3,1)$上单调递增,在$[-4,-3)$和$(1,2]$上单调递减,又$f(-4)=-\frac{25}{3}$,$f(-3)=-\frac{32}{3}$,$f(1)=0$,$f(2)=-\frac{7}{3}$,所以函数$f(x)$在区间$[-4,2]$上的最大值为0,最小值为$-\frac{32}{3}$.

(2)存在实数m,使得不等式$f(x)<0$的解集为$(m,+\infty)$,等价于函数$f(x)$只有一个零点,因为$f'(x)=-x^2+2ax+3a^2=-(x-3a)(x+a)$,①当$a<0$时,令$f'(x)>0$,解得$3a<x<-a$,令$f'(x)<0$,解得$x<3a$或$x>-a$,所以函数$f(x)$在$(3a,-a)$上单调递增,在$(-\infty,3a)$,$(-a,+\infty)$上单调递减,又$f(0)=-\frac{5}{3}<0$,故只需$f(-a)<0$,即$-\frac{1}{3}(-a)^3+a\cdot(-a)^2+3a^2\cdot(-a)-\frac{5}{3}<0$,解得$a>-1$,所以$-1<a<0$.

②当$a=0$时,$f(x)=-\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}$,所以$f(x)$只有一个零点,符合题意.

③当$a>0$时,令$f'(x)>0$,解得$-a<x<3a$,令$f'(x)<0$,解得$x<-a$或$x>3a$,所以$f(x)$在$(-a,3a)$上单调递增,在$(-\infty,-a)$,$(3a,+\infty)$上单调递减,又$f(0)=-\frac{5}{3}<0$,故只需$f(3a)<0$,即$-\frac{1}{3}(3a)^3+a\cdot(3a)^2+3a^2\cdot3a-\frac{5}{3}<0$,解得$a<\frac{\sqrt[3]{5}}{3}$,所以$0<a<\frac{\sqrt[3]{5}}{3}$.

综上,实数a的取值范围为$\left(-1,\frac{\sqrt[3]{5}}{3}\right)$.