第40期

第2~3版专题检测

一、选择题

1~6.BDACBC　　7~12.DBCDCA

二、填空题

13.$\frac{1}{6}$　　14.甲

15.0.001　　16.$1-\frac{\pi}{10}$

三、解答题

17. 解:(1) 由表可知抽取比例为$\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$,故 a=4,b=24,c=2.

(2)设"动漫"社团的 4 人分别为:A_1,A_2,A_3,A_4;"话剧" 社团的 2 人分别为:B_1,B_2.则从中任选 2 人的所有基本事件为:(A_1,A_2),(A_1,A_3),(A_1,A_4),(A_2,A_3),(A_2,A_4),(A_3,A_4),(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_3,B_1),(A_3,B_2),(A_4,B_1),(A_4,B_2),(B_1,B_2),共 15 个.

其中 2 人分别来自这两个社团的基本事件为:(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_3,B_1),(A_3,B_2),(A_4,B_1),(A_4,B_2),共 8 个.

所以这 2 人分别来自这两个社团的概率 $P=\frac{8}{15}$.

18.解:(1)根据题意,得 2×2 列联表:

	年龄不低于45岁的人数	年龄低于45岁的人数	合计
赞成的人数	10	27	37
不赞成的人数	10	3	13
合计	20	30	50

所以 K^2 的观测值为

$$k=\frac{50\times(10\times3-27\times10)^2}{20\times30\times37\times13}\approx9.979>6.635,$$

所以在犯错误的概率不超过 0.01 的前提下认为"使用微信交流"的态度与人的年龄有关.

(2) 由分层抽样,可知从年龄在[55,65)内的人中抽取 $6\times\frac{5}{10+5}=2$(人),从年龄在[25,35)内的人中抽取 $6\times\frac{10}{10+5}=4$(人),将年龄在[55,65)内的 2 人分别记为 A,B,将年龄在[25,35)内的 4 人分别记为 a,b,c,d,则从 6 人中任取 2 人的所有可能的情况为(A,B)、(A,a)、(A,b)、(A,c)、(A,d)、(B,a)、(B,b)、(B,c)、(B,d)、(a,b)、(a,c)、(a,d)、(b,c)、(b,d)、(c,d),共 15 种,其中至少有一人年龄在[55,65)岁的有(A,B)、(A,a)、(A,b)、(A,c)、(A,d)、(B,a)、(B,b)、(B,c)、(B,d),共 9 种,记"2 人中至少有一人年龄在[55,65)内"为事件 A,则 $P(A)=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$,所以 2 人中至少有一人年龄在[55,65)内的概率为$\frac{3}{5}$.

19. 解:(1) 基本事件与点集 $S=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N},1\leqslant x\leqslant5,1\leqslant y\leqslant5\}$中的元素一一对应.

因为 S 中点的总数为 25 个,

所以基本事件总数为 25.

事件 A 包含的基本事件共 5 个:

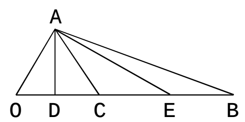
(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1),

所以 $P(A)=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$.

(2)B 与 C 不是互斥事件.

因为事件 B 与 C 可以同时发生,如"甲赢一次,乙赢两次"的事件即符合题意.

20.解:如图,由平面几何知识得,



(第 20 题图)

当 AD⊥OB 时,OD=1;

当 OA⊥AE 时,OE=4,BE=1.

(1)当且仅当点 C 在线段 OD 或 BE 上时,△AOC 为钝角三角形,记"△AOC 为钝角三角形"为事件 M,则 $P(M)=\frac{OD+EB}{OB}=\frac{1+1}{5}=\frac{2}{5}$,即△AOC 为钝角三角形的概率为$\frac{2}{5}$.

(2) 当且仅当点 C 在线段 DE 上时,△AOC 为锐角三角形,记"△AOC 为锐角三角形" 为事件 N,则 $P(N)=\frac{DE}{OB}=\frac{3}{5}$,即△AOC 为锐角三角形的概率为$\frac{3}{5}$.

21.解:(1)因为$\bar{x}=\frac{1}{5}\times(9+9.5+10+10.5+11)=10$,$\bar{y}=\frac{1}{5}\times(11+10+8+6+5)=8$,所以$\hat{b}=\frac{392-5\times10\times8}{502.5-5\times10^2}=-3.2$,$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=8-(-3.2)\times10=40$,所以y关于x的线性回归方程为$\hat{y}=-3.2x+40$.

(2)当x=8时,$\hat{y}=-3.2\times8+40=14.4$,则$|\hat{y}-y|=|14.4-14|=0.4<0.5$,故可以认为所得到的线性回归方程是理想的.

(3)设销售利润为W,所以$W=(x-2.5)(-3.2x+40)=-3.2x^2+48x-100=-3.2(x-7.5)^2+80$,当x=7.5时,W取得最大值,所以该配件的销售单价应定为7.5元时,才能获得最大利润.

22.解:(1)由频率分布直方图,得(0.04+0.12+0.15+a+0.05)×2=1,解得a=0.14.

(2)依题意,得100名学生中参加实践活动的时间在[6,10)内的人数为100×(0.15+0.14)×2=58.

(3)由频率分布直方图,可知参加实践活动的时间在[2,4)内的频率为0.04×2=0.08,在[4,6)内的频率为0.12×2=0.24,在[6,8)内的频率为0.15×2=0.30,所以中位数落在区间[6,8)内,中位数为$6+\frac{0.5-(0.08+0.24)}{0.15}=7.2$(小时),即这100名学生参加实践活动时间的中位数为7.2小时.这100名学生参加实践活动时间的平均数为0.04×2×3+0.12×2×5+0.15×2×7+0.14×2×9+0.05×2×11=7.16(小时).

第37期

第2~3版专题检测

一、选择题

1~6.DDCDBA　　7~12.BDBCBD

二、填空题

13.<　　14.$2\sqrt{3}$

15.(-3,0)

16.$\left[-\frac{7}{2},-2\right)\cup\left(\frac{2}{3},\frac{7}{4}\right]$

三、解答题

17.解:(1)因为x>0,y>0,2x+3y=10,所以$xy=\frac{1}{6}\cdot2x\cdot3y\leqslant\frac{1}{6}\left(\frac{2x+3y}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{10}{2}\right)^2=\frac{25}{6}$,当且仅当2x=3y,即$x=\frac{5}{2}$,$y=\frac{5}{3}$时,等号成立,所以xy的最大值为$\frac{25}{6}$.

(2)因为x+y=2,x>y>0,所以(x+3y)+(x-y)=2(x+y)=4,且x-y>0,所以$\frac{4}{x+3y}+\frac{1}{x-y}=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{x+3y}+\frac{1}{x-y}\right)\cdot[(x+3y)+(x-y)]=\frac{1}{4}\left(5+\frac{4(x-y)}{x+3y}+\frac{x+3y}{x-y}\right)\geqslant\frac{1}{4}\times(5+2\sqrt{4})=\frac{9}{4}$,当且仅当$\frac{4(x-y)}{x+3y}=\frac{x+3y}{x-y}$,即$x=\frac{5}{3}$,$y=\frac{1}{3}$时,等号成立,所以$\frac{4}{x+3y}+\frac{1}{x-y}$的最小值为$\frac{9}{4}$.

18.解:(1)由题意,得方程$x^2-(2a+1)x+2a=0$的两根分别为$x_1=1,x_2=2$,所以2a+1=3,2a=2,解得a=1.

(2)方程$x^2-(2a+1)x+2a=0$的两根分别为$x_1=1,x_2=2a$.当2a>1,即$a>\frac{1}{2}$时,由f(x)<0,解得1<x<2a;当2a=1,即$a=\frac{1}{2}$时,不等式f(x)<0的解集为∅;当2a<1,即$a<\frac{1}{2}$时,由f(x)<0,解得2a<x<1.

综上,当$a>\frac{1}{2}$时,不等式的解集为$\{x\mid1<x<2a\}$;当$a=\frac{1}{2}$时,不等式的解集为∅;当$a<\frac{1}{2}$时,不等式的解集为$\{x\mid2a<x<1\}$.

19.解:(1)因为$f(x)=|3x-1|+|3x+2|=\begin{cases}-6x-1,x<-\frac{2}{3},\\3,-\frac{2}{3}\leqslant x<\frac{1}{3},\\6x+1,x>\frac{1}{3},\end{cases}$所以f(x)≥5转化为$\begin{cases}x<-\frac{2}{3},\\-6x-1\geqslant5,\end{cases}$或$\begin{cases}x>\frac{1}{3},\\6x+1\geqslant5,\end{cases}$解得x≤-1或$x\geqslant\frac{2}{3}$.

所以原不等式的解集为$(-\infty,1]\cup\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$.

(2)因为|3x-1|+|3x+2|≥|3x-1-3x-2|=3,所以f(x)≥3.因为$f(x)+t^2-4t=0$有实数解,所以$f(x)=-t^2+4t$有实数解,所以$-t^2+4t\geqslant3$,即$t^2-4t+3\leqslant0$,解得1≤t≤3,所以实数t的取值范围为[1,3].

20.解:(1)因为矩形ABCD的周长为40cm,AB=xcm,所以AD=(20-x)cm,设DP=acm,则PC=(x-a)cm,因为△ADP≌△CEP,所以AP=PC=(x-a)cm.在Rt△ADP中,$AD^2+DP^2=AP^2$,即$(20-x)^2+a^2=(x-a)^2$,得$a=20-\frac{200}{x}$,因为$DP>\frac{1}{3}AB$,所以$20-\frac{200}{x}>\frac{1}{3}x$,即$x^2-60x+600<0$,解得$30-10\sqrt{3}<x<30+10\sqrt{3}$.

又AB>AD,所以x>20-x>0,解得10<x<20,所以$30-10\sqrt{3}<x<20$,所以x的取值范围是$(30-10\sqrt{3},20)$.

(2)$S=\frac{1}{2}AD\cdot DP=\frac{1}{2}(20-x)\left(20-\frac{200}{x}\right)=300-10\left(x+\frac{200}{x}\right)$,10<x<20.因为x>0,所以$x+\frac{200}{x}\geqslant20\sqrt{2}$,当且仅当$x=\frac{200}{x}$,即$x=10\sqrt{2}$时,$\left(x+\frac{200}{x}\right)_{\min}=20\sqrt{2}$,$S_{\max}=300-200\sqrt{2}$.

所以当$x=10\sqrt{2}$时,S取得最大值$300-200\sqrt{2}\,cm^2$.

21.解:(1)$f(x)=|3x-1|+2|x-3|=\begin{cases}5x-7,x\geqslant3,\\x+5,\frac{1}{3}<x<3,\\-5x+7,x\leqslant\frac{1}{3},\end{cases}$当x≥3时,函数f(x)单调递增,且f(x)≥8;当$\frac{1}{3}<x<3$时,函数f(x)单调递增,且$8>f(x)>\frac{16}{3}$;当$x\leqslant\frac{1}{3}$时,函数f(x)单调递减,且$f(x)\geqslant\frac{16}{3}$.综上,$f(x)\geqslant\frac{16}{3}$,因为关于x的方程|3x-1|+2|x-3|=a有两个不同的实数根,即y=f(x)与y=a的图象有两个交点,所以实数a的取值范围为$\left(\frac{16}{3},+\infty\right)$.

(2)因为f(3)=8,设点M(3,8),坐标原点是O(0,0),所以直线OM的斜率为$k=\frac{8}{3}$,所以当直线y=bx的斜率b<-5或$b\geqslant\frac{8}{3}$时,该直线与函数f(x)的图象相交,因为不等式f(x)≤bx的解集非空,所以实数b的取值范围为$(-\infty,-5)\cup\left[\frac{8}{3},+\infty\right)$.

22.(1)解:由题意知$f'(x)=\ln x+1-\frac{1}{x}$,所以$f'(x)$在(0,+∞)上单调递增,且$f'(1)=0$,

所以当 $0<x<1$ 时,$f'(x)<0$;

当 $x\geqslant1$ 时,$f'(x)\geqslant0$.

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为(0,1),单调递增区间为[1,+∞).

(2)证明:因为 $h(x)=m(x-1)\ln x+x-\ln x-\frac{3}{e}$,所以 $h'(x)=m\left(1+\ln x-\frac{1}{x}\right)+1-\frac{1}{x}$,又 $m>0$,所以 $h'(x)$在(0,+∞)上单调递增,且 $h'(1)=0$,所以当 $0<x<1$ 时,$h'(x)<0$;当 $x\geqslant1$ 时,$h'(x)\geqslant0$.

所以 $h(x)$的最小值为 $h(1)=1-\frac{3}{e}<0$.

因此当 $x=\frac{1}{e}$时,$h\left(\frac{1}{e}\right)=m\left(\frac{1}{e}-1\right)\cdot(-1)+\frac{1}{e}-(-1)-\frac{3}{e}=\frac{m(e-1)+e-2}{e}>0$,

可知 $h(x)$在$\left(\frac{1}{e},1\right)$上存在一个零点 x_1;

当 $x=e$ 时,$h(e)=m(e-1)+e-1-\frac{3}{e}>0$,

可知 $h(x)$在(1,e)上也存在一个零点 x_2.因此 $x_2-x_1<e-\frac{1}{e}$,即 $x_1+e>x_2+\frac{1}{e}$.

10

第38期

第2~3版专题检测

一、选择题

1~6.DCDABB　　7~12.DCCDDA

二、填空题

13.$\frac{5}{2}$　　14.$\sqrt{2}$

15.$(0,\sqrt{6})$　　16.90

三、解答题

17.**解**：(1)由题意，得圆$C:x^2+y^2-mx-4y-20=0$的圆心为$C\left(\frac{m}{2},2\right)$在直线$x-y+1=0$上，则$\frac{m}{2}-2+1=0$，解得$m=2$，所以圆$C:x^2+y^2-2x-4y-20=0$，所以圆$C$的标准方程为$(x-1)^2+(y-2)^2=25$.

(2)设圆心C到直线l距离为d，由(1)得$C(1,2)$，$r=5$，则$2\sqrt{r^2-d^2}=8$，解得$d=3$.①当直线l斜率不存在时，直线l的方程为$x=4$，满足题意；②当直线l斜率存在时，设直线l的方程为$y+4=k(x-4)$，则$d=\frac{|-3k-6|}{\sqrt{k^2+1}}=3$，解得$k=-\frac{3}{4}$，所以直线$l$的方程为$3x+4y+4=0$.

综上，直线l的方程为$x=4$或$3x+4y+4=0$.

18.**解**：(1)因为曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=1+3\cos\alpha,\\y=2+3\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$为参数)，所以曲线$C$的普通方程为$(x-1)^2+(y-2)^2=9$，根据$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta,\\x^2+y^2=\rho^2,\end{cases}$所以曲线$C$的极坐标方程为$\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta-4=0$.

(2)由题意，联立$\begin{cases}\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta-4=0,\\\theta=\frac{3\pi}{4},\end{cases}$得$\rho^2-\sqrt{2}\rho-4=0$，设点$A$，$B$对应的极径分别为$\rho_1,\rho_2$，则$\rho_1+\rho_2=\sqrt{2}$，$\rho_1\rho_2=-4$，所以$|AB|=|\rho_1-\rho_2|=\sqrt{(\rho_1+\rho_2)^2-4\rho_1\rho_2}=3\sqrt{2}$.

19.**解**：(1)设椭圆的半焦距为$c(c>0)$.因为圆$M:x^2+y^2+4x+3=0$的圆心为$M(-2,0)$，所以椭圆的左焦点为$F_1(-2,0)$，所以$c=2$. 因为$\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以$a=\sqrt{5}$，又$a^2=b^2+c^2$，所以$b=1$，所以椭圆$C$的标准方程为$\frac{x^2}{5}+y^2=1$.

(2)由(1)可知椭圆C的左、右焦点分别为$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，易知直线l的斜率不为0，设直线l的方程为$x=my-2$，联立$\begin{cases}x=my-2,\\\frac{x^2}{5}+y^2=1,\end{cases}$得$(m^2+5)y^2-4my-1=0$，则$y_1+y_2=\frac{4m}{m^2+5}$，$y_1y_2=-\frac{1}{m^2+5}$，$\triangle ABF_2$的面积$S=\frac{1}{2}\cdot|F_1F_2|\cdot|y_2-y_1|=2|y_2-y_1|=2\sqrt{(y_2+y_1)^2-4y_1y_2}=2\sqrt{\frac{16m^2}{(m^2+5)^2}+\frac{4}{m^2+5}}=\frac{4\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}}{m^2+5}$.

令$t=\sqrt{m^2+1}$，则$t\in[1,+\infty)$，所以$S=\frac{4\sqrt{5}t}{t^2+4}=\frac{4\sqrt{5}}{t+\frac{4}{t}}\leqslant\sqrt{5}$，当且仅当$t=\frac{4}{t}$，即$t=2$，$m=\pm\sqrt{3}$时，$S$取得最大值$\sqrt{5}$，所以$\triangle ABF_2$的面积的最大值为$\sqrt{5}$.

20.**解**：(1)因为直线l的参数方程为$\begin{cases}x=-1-t,\\y=-\sqrt{3}t\end{cases}$($t$为参数)，所以直线$l$的普通方程为$y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$，因为曲线$C$的极坐标方程为$\rho^2(1+3\sin^2\theta)=4$，根据$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta,\\x^2+y^2=\rho^2,\end{cases}$所以曲线$C$的直角坐标方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)将直线l的普通方程$y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$化为参数方程为$\begin{cases}x=-1+\frac{1}{2}m,\\y=\frac{\sqrt{3}}{2}m\end{cases}$($m$为参数)，代入曲线$C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$，得$13m^2-4m-12=0$，所以$m_1+m_2=\frac{4}{13}$，$m_1m_2=-\frac{12}{13}$，

所以$\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{1}{|m_1|}+\frac{1}{|m_2|}=\frac{\sqrt{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2}}{|m_1m_2|}=\frac{2\sqrt{10}}{3}$.

21.**解**：(1)易知直线l_1斜率存在，设直线l_1的方程为$y+1=k(x-1)$，与抛物线$y^2=x$联立，得$ky^2-y-k-1=0$.因为直线l_1与抛物线相切，所以$\Delta=1+4k(k+1)=0$，解得$k=-\frac{1}{2}$，则直线l_1的方程为$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

(2)设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

设直线l_1的方程为$y-y_1=k_1(x-x_1)$，联立$\begin{cases}y-y_1=k_1(x-x_1),\\y^2=x,\end{cases}$得$k_1y^2-y+y_1-k_1x_1=0$，所以$\Delta=1-4k_1(y_1-k_1x_1)=4k_1^2x_1-4k_1y_1+1=0$，又$y_1^2=x_1$，所以$\Delta=4k_1^2y_1^2-4k_1y_1+1=(2k_1y_1-1)^2=0$，得$k_1=\frac{1}{2y_1}$，则直线$l_1$的方程为$y_1y=\frac{x+x_1}{2}$，同理，直线$l_2$的方程为$y_2y=\frac{x+x_2}{2}$，则$M\left(0,\frac{y_1}{2}\right)$，$N\left(0,\frac{y_2}{2}\right)$.设点$P(x_0,y_0)$，则$\begin{cases}y_1y_0=\frac{x_0+x_1}{2},\\y_2y_0=\frac{x_0+x_2}{2},\end{cases}$所以直线$AB$方程为$y_0y=\frac{x_0+x}{2}$，联立$\begin{cases}yy_0=\frac{x_0+x}{2},\\y^2=x,\end{cases}$得$y^2-2y_0y+x_0=0$，则$y_1+y_2=2y_0$，$y_1y_2=x_0$. 则$|MN|=\frac{1}{2}|y_1-y_2|$，$|AB|=\sqrt{4y_0^2+1}|y_1-y_2|$，因为点$P(x_0,y_0)$在圆$(x+2)^2+y^2=1$，所以$y_0\in[-1,1]$，所以$\frac{|MN|}{|AB|}=\frac{1}{2\sqrt{4y_0^2+1}}\in\left[\frac{\sqrt{5}}{10},\frac{1}{2}\right]$，即$\frac{|MN|}{|AB|}$的取值范围为$\left[\frac{\sqrt{5}}{10},\frac{1}{2}\right]$.

22.**解**：(1)由题意，得$\frac{1}{a}=\frac{y_M}{\sqrt{2}}$，$\frac{2}{a^2}+\frac{y_M^2}{b^2}=1$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$a^2=b^2+c^2$，联立以上等式，解得$a=2$，$b=1$，$c=\sqrt{3}$，$y_M=\frac{\sqrt{2}}{2}$.所以椭圆$C$的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)设直线l的方程为$x=m(y-1)+2$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，联立$\begin{cases}x=m(y-1)+2,\\\frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$化简得$(m^2+4)y^2+(4m-2m^2)y+m^2-4m=0$，所以$y_1+y_2=\frac{2m^2-4m}{m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{m^2-4m}{m^2+4}$，因为$A(2,0)$，则直线$AM$的方程为$y=\frac{y_1}{x_1-2}\cdot(x-2)$，所以$P\left(x_2,\frac{y_1(x_2-2)}{x_1-2}\right)$，$Q\left(x_2,\frac{y_1(x_2-2)+y_2(x_1-2)}{2(x_1-2)}\right)$.

所以$k_{AQ}=\frac{y_1(x_2-2)+y_2(x_1-2)}{2(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{my_1(y_2-1)+my_2(y_1-1)}{2m^2(y_1-1)(y_2-1)}=\frac{2y_1y_2-(y_1+y_2)}{2m(y_1y_2-y_1-y_2+1)}=-\frac{1}{2}$.所以直线$AQ$的方程为$y=-\frac{1}{2}(x-2)$，则$Q\left(x_2,-\frac{1}{2}(x_2-2)\right)$，$-2\leqslant x_2<2$.所以$|AQ|=\sqrt{(x_2-2)^2+\frac{1}{4}(x_2-2)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}|x_2-2|\leqslant\frac{\sqrt{5}}{2}|-2-2|=2\sqrt{5}$，当且仅当$x_2=-2$时，$|AQ|$取得最大值$2\sqrt{5}$.

第39期

第2~3版专题检测

一、选择题

1~6.BBDDBD　　7~12.CABCDD

二、填空题

13.±2　　14.$\frac{1}{3}$

15.$\frac{1}{4}$　　16.4

三、解答题

17.**解**：(1)因为椭圆C的长轴长为$4\sqrt{2}$，所以$2a=4\sqrt{2}$，得$a=2\sqrt{2}$.又椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$(2,-\sqrt{2})$，所以$\frac{4}{8}+\frac{2}{b^2}=1$，解得$b^2=4$.所以椭圆$C$的标准方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)当直线l的斜率不存在时，直线l的方程为$x=1$，此时线段AB中点为$(1,0)$，不符合题意.

所以设直线l的方程为$y-1=k(x-1)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.联立$\begin{cases}y-1=k(x-1),\\\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$得$(1+2k^2)x^2-4k(k-1)x+2(k-1)^2-8=0$，则$\Delta>0$，$x_1+x_2=\frac{4k(k-1)}{1+2k^2}$，因为$P(1,1)$为线段$AB$中点，所以$\frac{4k(k-1)}{1+2k^2}=2$，解得$k=-\frac{1}{2}$，所以直线$l$的方程为$x+2y-3=0$.

18.(1)**解**：由题意，得动点P到点$T\left(0,\frac{3}{2}\right)$的距离与它到直线$l:y=-\frac{3}{2}$的距离相等.由抛物线的定义，知动点$P$的轨迹$C$的方程为$x^2=6y$.

(2)**证明**：设直线l的方程为$y=kx+\frac{3}{2}$，联立$\begin{cases}y=kx+\frac{3}{2},\\x^2=6y,\end{cases}$得$x^2-6kx-9=0$.设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=6k$，$x_1x_2=-9$，所以$y_1+y_2=6k^2+3$，$y_1y_2=\frac{9}{4}$，所以$\frac{1}{|AT|}+\frac{1}{|BT|}=\frac{1}{y_1+\frac{3}{2}}+\frac{1}{y_2+\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$，所以$\frac{1}{|AT|}+\frac{1}{|BT|}$为定值.

19.**解**：(1)由题意得$2b=2\sqrt{3}$，即$b=\sqrt{3}$，由$\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{BF_2}=0$，得$AB$的中点为$F_2$，则$\triangle ABF_1$的周长为$|AF_1|+|AF_2|+(|BF_1|+|BF_2|)=4a=8$，即$a=2$，则椭圆$C$的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)显然直线l的斜率存在且不为0，设直线l的方程为$y=kx+t$，联立$\begin{cases}y=kx+t,\\3x^2+4y^2=12,\end{cases}$得$(3+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-12=0$，由$\Delta=64k^2t^2-4(3+4k^2)\cdot(4t^2-12)=0$，得$t^2=4k^2+3$，则$x_M=-\frac{8kt}{2(3+4k^2)}=-\frac{4k}{t}$，由$OP\perp l$，得直线$OP$的方程为$y=-\frac{1}{k}x$，联立$\begin{cases}y=-\frac{1}{k}x,\\y=kx+t,\end{cases}$得$x_P=-\frac{kt}{k^2+1}$，所以$|MP|=\frac{|k|}{|t|\sqrt{1+k^2}}$，又$|OP|=\frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}$，所以$S_{\triangle OMP}=\frac{1}{2}\cdot|MP|\cdot|OP|=\frac{1}{2}\cdot\frac{|k|}{|t|\sqrt{1+k^2}}\cdot\frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{|k|+\frac{1}{|k|}}\leqslant\frac{1}{4}$，当且仅当$k=\pm1$时，等号成立.所以$\triangle OMP$的面积的最大值为$\frac{1}{4}$.

20.**解**：(1)由题意，知当点P在短轴端点时，$\triangle PF_1F_2$的面积最大，且为正三角形，所以$\frac{1}{2}\cdot2c\cdot b=bc=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{3}c$，联立$\begin{cases}bc=\sqrt{3},\\b=\sqrt{3}c,\\a^2=b^2+c^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\b=\sqrt{3},\\c=1,\end{cases}$所以椭圆$C$的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)由(1)得$F_2(1,0)$，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线AB的方程为$x=my+1$，联立$\begin{cases}x=my+1,\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$得$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，$\Delta=144(m^2+1)>0$，$y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$，又$\overrightarrow{F_1M}=\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B}$，所以四边形$AMBF_1$是平行四边形，设平行四边形$AMBF_1$的面积为$S$，则$S=2S_{\triangle ABF_1}=2\cdot\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_1-y_2|=\frac{24\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$. 设$t=\sqrt{m^2+1}$，则$m^2=t^2-1(t\geqslant1)$，所以$S=\frac{24t}{3t^2+1}=\frac{24}{3t+\frac{1}{t}}$，因为$t\geqslant1$，对勾函数$y=3t+\frac{1}{t}$在$[1,+\infty)$上单调递增，所以$3t+\frac{1}{t}\geqslant4$，所以$S\in(0,6]$. 所以四边形$AMBF_1$面积的取值范围为$(0,6]$.

21.**解**：(1)由题意，知$a-c=1$，$a+c=3$，解得$a=2$，$c=1$，则$b^2=a^2-c^2=3$，故椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)设点P，Q的坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2). ①当直线PQ斜率不存在时，$k_1=-k_2$，又$k_1k_2=-\frac{1}{4}$，所以直线AP，AQ的方程分别为$y=\frac{1}{2}(x+2)$，$y=-\frac{1}{2}(x+2)$，与椭圆方程分别联立，得$P\left(1,\frac{3}{2}\right)$，$Q\left(1,-\frac{3}{2}\right)$，故直线$PQ$的方程为$x=1$.

②当直线PQ的斜率存在时，设直线PQ的方程为$y=kx+m$，联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\y=kx+m,\end{cases}$得$(4k^2+3)x^2+8kmx+(4m^2-12)=0$，由$\Delta=48(4k^2-m^2+3)>0$，得$4k^2+3>m^2$，由韦达定理，得$x_1+x_2=-\frac{8km}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-12}{4k^2+3}$，所以$k_1k_2=\frac{y_1y_2}{(x_1+2)(x_2+2)}=-\frac{1}{4}$，即$4y_1y_2+(x_1+2)(x_2+2)=0$，化简得$(4k^2+1)x_1x_2+(4km+2)(x_1+x_2)+4m^2+4=0$，所以$(4k^2+1)\cdot\frac{4m^2-12}{4k^2+3}-(4km+2)\cdot\frac{8km}{4k^2+3}+4m^2+4=0$，化简得$m^2-km-2k^2=0$，解得$m=2k$，或$m=-k$.当$m=2k$时，直线$PQ$的方程为$y=kx+2k$，即$y=k(x+2)$，过定点$(-2,0)$不符合题意；当$m=-k$时，直线$PQ$的方程为$y=kx-k$，即$y=k(x-1)$，过定点$(1,0)$，

综上，直线PQ过定点$(1,0)$.

22.**解**：(1)由题意，得$F_1(-1,0)$，因为直线l的斜率为1，所以直线l的方程为$y=x+1$，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立$\begin{cases}y=x+1,\\\frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$得$3x^2+4x=0$，所以$x_1+x_2=-\frac{4}{3}$，$y_1+y_2=\frac{2}{3}$，所以$M\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$，所以直线$OM$的斜率为$-\frac{1}{2}$.

(2)假设存在直线l，使得$|AM|^2=|CM||DM|$成立，由题意，直线l不与x轴重合，设直线l的方程为$x=my-1$，联立$\begin{cases}x=my-1,\\\frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$得$(m^2+2)y^2-2my-1=0$.设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$y_1+y_2=\frac{2m}{m^2+2}$，$y_1y_2=-\frac{1}{m^2+2}$，所以$|AB|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{2\sqrt{2}(m^2+1)}{m^2+2}$. 又$x_1+x_2=m(y_1+y_2)-2=\frac{-4}{m^2+2}$，所以弦$AB$的中点$M$的坐标为$\left(\frac{-2}{m^2+2},\frac{m}{m^2+2}\right)$，故$CD$的方程为$y=-\frac{m}{2}x$. 联立$\begin{cases}y=-\frac{m}{2}x,\\\frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$得$x^2=\frac{4}{m^2+2}$，由对称性，设$C(x_0,y_0)$，$D(-x_0,-y_0)$，则$x_0^2=\frac{4}{m^2+2}$，所以$|CD|=\sqrt{1+\frac{m^2}{4}}\cdot|2x_0|=2\sqrt{\frac{m^2+4}{m^2+2}}$. 因为$|AM|^2=|CM||DM|=(|OC|-|OM|)(|OD|+|OM|)$，且$|OC|=|OD|$，所以$|AM|^2=|OC|^2-|OM|^2$，故$\frac{|AB|^2}{4}=\frac{|CD|^2}{4}-|OM|^2$，即$|AB|^2=|CD|^2-4|OM|^2$，将$|AB|$，$|CD|$，$|OM|$代入上式，得$\frac{8(m^2+1)^2}{(m^2+2)^2}=\frac{4(m^2+4)}{m^2+2}-4\left[\frac{4}{(m^2+2)^2}+\frac{m^2}{(m^2+2)^2}\right]$，解得$m=\pm\sqrt{2}$.所以直线$l$的方程为$x=\pm\sqrt{2}y-1$，即$x\pm\sqrt{2}y+1=0$.