第36期

第2~3版专题检测

一、单项选择题

1~8.CDABCAAB

二、多项选择题

9.AB　　10.AD

11.ABD　　12.AC

三、填空题

13.$a_n=-2n+22$　　14.400

15.5　　16.$3\cdot 2^{2022}-3$

四、解答题

17.**解**：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由$a_{n+1}+a_n=4n+2$，得$a_1+nd+a_1+(n-1)d=2dn+(2a_1-d)=4n+2$，即$2d=4$，$2a_1-d=2$，解得$d=2$，$a_1=2$，所以$a_n=2+2(n-1)=2n$.

(2)由(1)得$a_n=2n$，$a_1=2$，因为数列$\{b_n-a_n\}$是公比为3的等比数列，且$b_1=3$，所以$b_n-a_n=(b_1-a_1)\cdot 3^{n-1}=3^{n-1}$，则$b_n=a_n+3^{n-1}=2n+3^{n-1}$，所以$S_n=(2+4+\cdots+2n)+(3^0+3^1+3^2+\cdots+3^{n-1})=\frac{1}{2}n(2+2n)+\frac{1-3^n}{1-3}=n^2+n+\frac{3^n}{2}-\frac{1}{2}$.

18.**解**：(1)因为$S_n+S_{n+1}=3a_{n+1}-2$，所以$S_{n-1}+S_n=3a_n-2(n\geqslant 2)$，两式作差，得$a_n+a_{n+1}=3a_{n+1}-3a_n$，则$a_{n+1}=2a_n(n\geqslant 2)$，当$n=1$时，则$S_1+S_2=3a_2-2$，即$2a_1+a_2=3a_2-2$，又$a_1=1$，则$a_2=2$，所以$\frac{a_2}{a_1}=2$，所以数列$\{a_n\}$是首项为1，公比为2的等比数列，所以$a_n=2^{n-1}$.

(2)由(1)得$a_n=2^{n-1}$，则$a_{n+1}=2^n$，因为$b_n=\log_{a_{n+1}}2=\log_{2^n}2=\frac{1}{n}$，所以$b_nb_{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，设数列$\{b_nb_{n+1}\}$的前$n$项和为$T_n$，所以$T_n=b_1b_2+b_2b_3+\cdots+b_nb_{n+1}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

19.(1)**证明**：由$a_{n+1}a_n=2a_n-a_{n+1}$，得$1=\frac{2}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}$，则$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n}+1\right)$，所以$\frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$，又$\frac{1}{a_1}-1=-\frac{1}{2}\neq 0$，所以$\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$是以$-\frac{1}{2}$为首项，$\frac{1}{2}$为公比的等比数列.

(2)**解**：由(1)可得$\frac{1}{a_n}-1=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\left(\frac{1}{2}\right)^n=-\frac{1}{2^n}$，故$a_n=\frac{2^n}{2^n-1}$，所以$b_n=\frac{a_na_{n+1}}{2^n}=\frac{2^{n+1}}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=2\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)$，所以$S_n=2\left[\left(\frac{1}{2^1-1}-\frac{1}{2^2-1}\right)+\left(\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)\right]=2-\frac{2}{2^{n+1}-1}$，因为$S_n>1.999$，即$2-\frac{2}{2^{n+1}-1}>1.999$，所以$2^{n+1}>2001$，又$2^{10}=1024$，所以$n>9$，所以整数$n$的最小值为10.

20.(1)**解**：选择①，由$a_{n+1}-S_n=2$，得$a_n-S_{n-1}=2(n\geqslant 2)$，两式作差，得$a_{n+1}=2a_n(n\geqslant 2)$，又$a_3=S_2+2=a_1+a_2+2$，$a_2=a_1+2$，所以$a_3=2a_1+4=8$，解得$a_1=2$，$a_2=4$，则$a_2=2a_1$，所以$a_{n+1}=2a_n(n\in\mathbf{N}_+)$，所以数列$\{a_n\}$是以2为首项，2为公比的等比数列，所以$a_n=2^n$.

选择②，因为$a_{m+n}=a_m\cdot a_n$，令$m=1$，得$a_{n+1}=a_n\cdot a_1$，由$a_ma_n\neq 0$，知数列$\{a_n\}$各项不为0，所以数列$\{a_n\}$是以a_1为首项，a_1为公比的等比数列，则$a_n=a_1^n$，由$S_1S_2=3a_2$，得$a_1(a_1+a_2)=3a_2$，又$a_2=a_1^2$，则$a_1(a_1+a_1^2)=3a_1^2$，解得$a_1=2$，所以$a_n=2^n$.

选择③，由$S_{n+1}=3S_n-2S_{n-1}(n\geqslant 2)$，得$S_{n+1}-S_n=2(S_n-S_{n-1})(n\geqslant 2)$，即$a_{n+1}=2a_n(n\geqslant 2)$，又$a_1=2$，$S_2=6$，所以$a_2=S_2-a_1=4$，则$a_2=2a_1$，所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2(n\in\mathbf{N}_+)$，所以数列$\{a_n\}$是以2为首项，2为公比的等比数列，所以$a_n=2^n$.

(2)**证明**：因为$a_n=2^n$，所以$b_n=\frac{\log_2 a_n}{a_n}=\frac{n}{2^n}$，所以$T_n=\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}$，$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^{n+1}}$，两式作差，得$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}$，所以$T_n=2-\frac{n+2}{2^n}$，所以$T_n<2$，因为$b_n>0$，所以$T_n\geqslant b_1=\frac{1}{2}$，所以$\frac{1}{2}\leqslant T_n<2$.

21.**解**：(1)因为a_3+2是a_2和a_4的等差中项，所以$2(a_3+2)=a_2+a_4$，又$a_2+a_3+a_4=28$，等比数列$\{a_n\}$是递增数列，所以$\begin{cases}2(a_1q^2+2)=a_1q+a_1q^3,\\ a_1q+a_1q^2+a_1q^3=28,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=2,\\ q=2,\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=32,\\ q=\frac{1}{2},\end{cases}$(舍去)，所以$a_n=2^n$.

(2)由(1)可得$a_n=2^n$，所以$b_n=a_n\log_2\frac{1}{a_n}=-n\cdot 2^n$，所以$T_n=-(1\times 2+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\cdot 2^n)$，$2T_n=-(1\times 2^2+2\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+n\cdot 2^{n+1})$，所以$-T_n=-(2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1})$，所以$T_n=2^{n+1}-n\cdot 2^{n+1}-2$，又$T_n+n\cdot 2^{n+1}=510$，即$2^{n+1}-2=510$，解得$n=8$.

22.**解**：(1)因为$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\frac{a_{n+1}^2-1}{3}$，所以$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2=\frac{a_n^2-1}{3}(n\geqslant 2)$，两式作差，得$3a_n^2=a_{n+1}^2-a_n^2$，即$a_{n+1}^2=4a_n^2$，又数列$\{a_n\}$各项都是正数，所以$a_{n+1}=2a_n(n\geqslant 2)$，又$a_1=1$，$a_1^2=\frac{a_2^2-1}{3}$，解得$a_2=2$(舍负)，所以$a_{n+1}=2a_n(n\in\mathbf{N}_+)$，所以$a_n=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}_+)$.

因为数列$\{b_n\}$满足$b_1=1$，$b_n+b_{n+1}=2n+1(n\in\mathbf{N}_+)$，所以$b_{n-1}+b_n=2n-1(n\geqslant 2)$，两式作差，得$b_{n+1}-b_{n-1}=2(n\geqslant 2)$，所以数列$\{b_n\}$的奇数项和偶数项均为公差为2的等差数列，又$b_2=3-b_1=2$，所以数列$\{b_n\}$的奇数项依次为1，3，5，7，…，$2n-1$，…，偶数项依次为2，4，6，…，$2n$，…，所以$b_n=n$.

(2)由(1)得$a_n=2^{n-1}$，$b_n=n$，所以$c_n=\frac{b_n}{a_{2n+1}}=n\cdot\frac{1}{4^n}$，则$T_n=1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4^2}+3\cdot\frac{1}{4^3}+\cdots+n\cdot\frac{1}{4^n}$，$\frac{1}{4}T_n=1\cdot\frac{1}{4^2}+2\cdot\frac{1}{4^3}+\cdots+n\cdot\frac{1}{4^{n+1}}$，两式作差，得$\frac{3}{4}T_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n}-n\cdot\frac{1}{4^{n+1}}=\frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}-n\cdot\frac{1}{4^{n+1}}$，则$T_n=\frac{4}{9}-\frac{3n+4}{9}\cdot\frac{1}{4^n}$，因为不等式$4\times 3^n+9\lambda<3^{n+2}T_n$对一切$n\in\mathbf{N}_+$恒成立，即为$-9\lambda>(3n+4)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$恒成立，设$d_n=(3n+4)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$，则$d_n>0$，$\frac{d_{n+1}}{d_n}-1=\frac{(3n+7)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{(3n+4)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n}-1=\frac{9n+21}{12n+16}-1=\frac{-3n+5}{12n+16}$，

当$n=1$时，$\frac{d_2}{d_1}-1>0$，则$d_2>d_1$，当$n\geqslant 2$时，$\frac{d_{n+1}}{d_n}-1<0$，则$d_{n+1}<d_n$，所以$n=2$时，d_n取得最大值$\frac{45}{8}$，则$-9\lambda>\frac{45}{8}$，解得$\lambda<-\frac{5}{8}$，所以λ的取值范围是$\left(-\infty,-\frac{5}{8}\right)$.

第33期

第2~3版专题检测

一、单项选择题

1~8.DDBDACAC

二、多项选择题

9.AC　　10.BC

11.AD　　12.ACD

三、填空题

13.4π　　14.5

15.$\frac{\sqrt{21}}{3}-1$　　16.$\frac{1}{5}$

四、解答题

17.**证明**：(1)取BC中点O，连接EO，FO，因为E，F分别是A_1B，B_1C_1的中点，所以$EO\parallel A_1C$，$FO\parallel C_1C$，因为$A_1C\cap C_1C=C$，$EO\cap FO=O$，所以平面$ACC_1A_1\parallel$平面EOF，因为$EF\subset$平面EOF，所以$EF\parallel$平面ACC_1A_1.

(2)因为在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AC\perp BC$，所以$BC\perp$平面ACC_1A_1，由(1)知$EF\parallel$平面ACC_1A_1，所以$BC\perp EF$.连接A_1F，BF，因为$AC=BC=CC_1=2$，所以$A_1F=\sqrt{5}$，$BF=\sqrt{5}$，又E是A_1B中点，所以$EF\perp A_1B$，因为$BC\cap A_1B=B$，所以$EF\perp$平面A_1BC.

18.(1)**证明**：因为N为底面ABCD的中心，则N为AC和BD的中点，因为E为PC的中点，所以$PA\parallel NE$，因为$PA\subset$平面PAD，$NE\not\subset$平面PAD，所以$NE\parallel$平面PAD，又M为AB的中点，所以$NM\parallel AD$，因为$AD\subset$平面PAD，$MN\not\subset$平面PAD，所以$MN\parallel$平面PAD，又MN，$NE\subset$平面NME，且$MN\cap NE=N$，所以平面$NME\parallel$平面PAD.

(2)**解**：取PD的中点G，连AG，EG，则$EG\parallel CD$，$EG=\frac{1}{2}CD$，由$AM\parallel CD$，$AM=\frac{1}{2}CD$，所以$AM\parallel EG$，$AM=EG$，所以四边形AMEG为平行四边形，所以$AG\parallel ME$，则$\angle PAG$为异面直线ME与PA所成的角，又$\triangle PAD$为等边三角形，所以$\angle PAG=\frac{1}{2}\angle PAD=\frac{\pi}{6}$，所以异面直线ME与PA所成的角为$\frac{\pi}{6}$.

19.(1)**证明**：在图①中，连接BD，菱形ABCD中，$A=\frac{\pi}{3}$，所以$\triangle ABD$为等边三角形，因为E为AD的中点，所以$BE\perp AE$，$BE\perp DE$，又$AB=2$，则$AE=DE=1$，$BE=\sqrt{3}$.在图②中，$A_1D=\sqrt{2}$，则$A_1E^2+ED^2=A_1D^2$，所以$A_1E\perp ED$，因为$BC\parallel DE$，则$BC\perp BE$，$BC\perp A_1E$，又$BE\cap A_1E=E$，BE，$A_1E\subset$平面A_1BE，故$BC\perp$平面A_1BE，因为$BC\subset$平面A_1BC，所以平面$A_1BE\perp$平面A_1BC.

(2)**解**：连接EC交BD于点O，因为$ED\parallel BC$，则$\frac{EO}{OC}=\frac{ED}{BC}=\frac{1}{2}$，又$A_1E\parallel$平面BPD，且$A_1E\subset$平面$A_1EC$，平面$A_1EC\cap$平面$BPD=OP$，所以$OP\parallel A_1E$，则$\frac{OP}{A_1E}=\frac{OC}{CE}=\frac{2}{3}$，故点P到平面$A_1BE$的距离h为点C到平面$A_1BE$距离的$\frac{1}{3}$，由(1)知$BC\perp$平面$A_1BE$，所以$h=\frac{1}{3}BC=\frac{2}{3}$，所以$V_{A_1-BPE}=V_{P-A_1BE}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle A_1BE}\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}\times\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}$.

20.(1)**证明**：连接A_1E，B_1E，因为$A_1A=A_1C=AC$，所以$\triangle AA_1C$是等边三角形，又E是AC的中点，所以$A_1E\perp AC$，又平面$AA_1C_1C\perp$平面ABC，平面$ABC\cap$平面$A_1ACC_1=AC$，所以$A_1E\perp$平面ABC，故$A_1E\perp BC$，又$A_1B_1\parallel AB$，$\angle ABC=90^\circ$，即$AB\perp BC$，所以$A_1B_1\perp BC$，又$A_1B_1\cap A_1E=A_1$，所以$BC\perp$平面A_1B_1E，因为$EF\subset$平面A_1B_1E，所以$EF\perp BC$.

(2)**解**：过点E作$EH\perp AC$，交AB于H，以点E为坐标原点，$\overrightarrow{EH}$，$\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{EA_1}$分别为x轴，y轴，z轴正方向建立空间直角坐标系Exyz.由$AA_1=2\sqrt{3}$，$\angle ABC=90^\circ$，$\angle BAC=30^\circ$，所以$BC=\sqrt{3}$，$AB=3$，$EH=1$，$AE=EC=\sqrt{3}$，则$A(0,-\sqrt{3},0)$，$B\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$A_1(0,0,3)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，由$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$，可得点$B_1$的坐标为$\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2},3\right)$，则$F\left(\frac{3}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4},3\right)$，所以$\overrightarrow{EF}=\left(\frac{3}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4},3\right)$，$\overrightarrow{A_1B}=\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},-3\right)$，$\overrightarrow{BC}=\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，设平面$A_1BC$的法向量为$m=(x,y,z)$，则$\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\\ m\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-3z=0,\\ -\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=0,\end{cases}$令$z=1$，则$x=1$，$y=\sqrt{3}$，所以平面$A_1BC$的一个法向量为$m=(1,\sqrt{3},1)$，设直线EF与平面$A_1BC$所成角为$\theta$，则$\sin\theta=|\cos\langle m,\overrightarrow{EF}\rangle|=\frac{|m\cdot\overrightarrow{EF}|}{|m||\overrightarrow{EF}|}=\frac{4}{5}$，所以直线EF与平面$A_1BC$所成角的正弦值为$\frac{4}{5}$.

21.(1)**证明**：因为平面$PAB\perp$平面ABCD，平面$PAB\cap$平面$ABCD=AB$，且$\angle ABC=90^\circ$，即$BC\perp AB$，$BC\subset$平面ABCD，所以$BC\perp$平面PAB，又$PA\subset$平面PAB，所以$BC\perp PA$.取CD的中点M，连接AM，PM，因为$\angle ABC=\angle BCD=90^\circ$，所以$AB\parallel CD$，即$AB\parallel CM$，又$AB=BC=CM=1$，所以四边形ABCM为正方形，故$AM\perp CD$，又$PC=PD$，所以$PM\perp CD$，又AM，$PM\subset$平面PAM，$AM\cap PM=M$，所以$CD\perp$平面PAM，又$PA\subset$平面PAM，所以$CD\perp PA$，又BC，$CD\subset$平面ABCD，$BC\cap CD=C$，所以$PA\perp$平面ABCD.

(2)**解**：以点A为坐标原点，分别以AB，AM，AP所在直线为x轴，y轴，z轴，建立空间直角坐标系Axyz，所以$P(0,0,1)$，$C(1,1,0)$，$D(-1,1,0)$，则$\overrightarrow{AP}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{AD}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{CD}=(-2,0,0)$，$\overrightarrow{PC}=(1,1,-1)$，设平面PAD的法向量为$m=(x,y,z)$，所以$\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{AP}=0,\\ m\cdot\overrightarrow{AD}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}z=0,\\ -x+y=0,\end{cases}$令$x=1$，则$y=1$，故平面PAD的一个法向量为$m=(1,1,0)$.设平面PCD的法向量为$n=(a,b,c)$，则$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-2a=0,\\ a+b-c=0,\end{cases}$令$b=1$，则$c=1$，故平面PCD的一个法向向量为$n=(0,1,1)$，所以$|\cos\langle m,n\rangle|=\frac{|m\cdot n|}{|m||n|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$，故二面角C-PD-A的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

22.(1)**证明**：因为$BC\perp DC$，$BC=DC=\sqrt{2}$，$AB=2\sqrt{2}$，所以$BD=\sqrt{BC^2+DC^2}=2$，$AD=\sqrt{BC^2+(AB-DC)^2}=2$，在$\triangle ABD$中，$AD^2+BD^2=AB^2$，所以$\triangle ABD$是直角三角形，且$BD\perp AD$，因为四边形BDMN为矩形，所以$BD\perp DM$，又$DM\cap AD=D$，DM，$AD\subset$平面ADM，所以$BD\perp$平面ADM，又$BD\subset$平面ABCD，所以平面$ADM\perp$平面ABCD.

(2)**解**：线段MN上存在点H，使得二面角H-AD-M的余弦值为$\frac{3\sqrt{13}}{13}$，点H为靠近点M的三等分点.

证明如下：以点D为坐标原点，分别以DA，DB所在直线为x轴，y轴，建立空间直角坐标系Dxyz，则$D(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$M(1,0,1)$，所以$\overrightarrow{DB}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{DA}=(2,0,0)$，设$\overrightarrow{MH}=\lambda\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{DB}=(0,2\lambda,0)$，其中$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，得$H(1,2\lambda,1)$，故$\overrightarrow{DH}=(1,2\lambda,1)$，设平面ADH的法向量为$n=(x,y,z)$，则$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{DA}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{DH}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2x=0,\\ x+2\lambda y+z=0,\end{cases}$令$y=1$，则$z=-2\lambda$，故平面ADH的一个法向量为$n=(0,1,-2\lambda)$.由(1)知$BD\perp$平面ADM，所以平面ADM的一个法向量为$m=(0,1,0)$，因为二面角H-AD-M的余弦值为$\frac{3\sqrt{3}}{13}$，所以$|\cos\langle m,n\rangle|=\frac{|m\cdot n|}{|m||n|}=\frac{1}{\sqrt{1+4\lambda^2}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$，解得$\lambda=\frac{1}{3}$(舍负)，故线段MN上存在点H，使得二面角H-AD-M的余弦值为$\frac{3\sqrt{3}}{13}$，点H为靠近点M的三等分点.

9

第34期

第2~3版专题检测

一、单项选择题

1~8.DCCDDDBD

二、多项选择题

9.BCD　　10.BC

11.BD　　12.ACD

三、填空题

13.$\frac{1}{2}$　　14.$-\frac{7}{25}$

15.3　　16.$\left(\frac{41}{6},\frac{15}{2}\right]$

四、解答题

17. 解：(1) 因为$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，所以$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，则$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{7}{5}$，又$\cos2\alpha=\frac{7}{25}$，即$(\cos\alpha+\sin\alpha)\cdot\left(-\frac{7}{5}\right)=\frac{7}{25}$，所以$\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{1}{5}$.

(2)由(1)可得$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{7}{5}$，$\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{1}{5}$，所以$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}$，

所以$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=\frac{1}{7}$.

18.解：(1)$f(x)=\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin^2x+1=\sin x\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)-\sin^2x+1=-\frac{1}{2}\sin^2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x+1=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sin2x+1=\frac{1}{4}\cos2x+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin2x+\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\cdot\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{3}{4}$.

令$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$，得$x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},k\in Z$，所以函数$f(x)$的对称轴为$x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in Z$.

(2)由(1)知$f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{3}{4}$，因为$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$，所以$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$，所以$\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，所以$f(x)\in\left[\frac{3-\sqrt{3}}{4},\frac{5}{4}\right]$，故函数$f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$上的最大值为$\frac{5}{4}$，最小值为$\frac{3-\sqrt{3}}{4}$.

19.解：(1)函数$f(x)=4\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}=2\sin x\cos x+2\sqrt{3}\cos^2x-\sqrt{3}=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.所以函数$f(x)$的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. 令$\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in Z)$，解得$\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}+k\pi(k\in Z)$，所以函数$f(x)$的单调递减区间为$\left[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi\right](k\in Z)$.

(2)关于x的方程$f(x)=m+2\sin2x$在区间$\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$上恰有两个不等的实根，等价于$m=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-2\sin2x=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，即$\frac{m}{2}=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$在$\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$上恰有两个不等的实根，即$y=\frac{m}{2}$与$y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$在$\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$上有两个交点，因为$x\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$，所以$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$，结合图象，可知$\frac{m}{2}\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right]$，得$m\in(-2,-1]$.

所以实数m的取值范围为$(-2,-1]$.

20.解：(1)因为$f(x)$的图象中相邻的两个对称中心的距离为$\frac{\pi}{2}$，故函数$f(x)$的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，所以$\omega=2$.

选择条件①：函数$f(x)$的图象关于直线$x=-\frac{\pi}{12}$对称，所以$f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=\pm2$，所以$-\frac{\pi}{6}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$，解得$\varphi=k\pi+\frac{2\pi}{3}$，因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=-\frac{\pi}{3}$，所以$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$；

选择条件②：函数$f(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$对称，即$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$，故$2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=k\pi(k\in Z)$，得$\varphi=k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in Z)$，因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=-\frac{\pi}{3}$，所以$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$；

选择条件③：对任意实数x，$f(x)\leqslant f\left(\frac{5\pi}{12}\right)$恒成立，故$f(x)_{max}=f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=2$，所以$2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$，得$\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in Z)$，因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=-\frac{\pi}{3}$，所以$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

(2)将函数$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，得到$g(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的图象，因为$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$，所以$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，所以$\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，$g(x)\in[-1,2]$，由题意，得$m\geqslant g(x)_{min}$，即$m\geqslant-1$，所以实数$m$的取值范围是$[-1,+\infty)$.

21.解：(1)由水深与时刻间的对应关系，得$f(t)$的最小正周期$T=12$，所以$\omega=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$，由表可知$A=\frac{6.5-2.5}{2}=2$，$b=\frac{6.5+2.5}{2}=4.5$.所以$f(t)=2\sin\left(\frac{\pi}{6}t+\varphi\right)+4.5$.当$t=0$时，$f(0)=4.5$，即$2\sin\varphi=0$，因为$-\pi<\varphi<\pi$，所以$\varphi=0$.所以该函数解析式为$f(t)=2\sin\frac{\pi}{6}t+4.5(0\leqslant t\leqslant24)$.

(2)由题意，得$f(t)\geqslant6.2$，即$2\sin\frac{\pi}{6}t+4.5\geqslant6.2$，得$\sin\frac{\pi}{6}t\geqslant\frac{1.7}{2}\approx\frac{\sqrt{3}}{2}$.所以$\frac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant\frac{\pi}{6}t\leqslant\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$，解得$2+12k\leqslant t\leqslant4+12k,k\in Z$. 当$k=0$时，$t\in[2,4]$；当$k=1$时，$t\in[14,16]$.所以该船在2:00或14:00时能进入港口，在港口能停留2小时.

22.解：(1)函数$f(x)=4\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin x+(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)+1=\left[2+2\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]\sin x+\sin^2x-\cos^2x+1=2\sin x-2\sin^2x+2\sin^2x=2\sin x$，因为函数$y=f(\omega x)=2\sin\omega x$在区间$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$上是增函数，所以$\begin{cases}\omega>0,\\-\frac{\pi}{2}\leqslant-\frac{\pi}{3}\omega,\\\frac{\pi}{2}\geqslant\frac{\pi}{2}\omega,\end{cases}$解得$0<\omega\leqslant1$，所以$\omega$的取值范围是$(0,1]$.

(2)$g(x)=\frac{1}{2}\left[f(2x)-af(x)+af\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-a\right]-1=\frac{1}{2}\left[2\sin2x-2a\sin x+2a\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-a\right]-1=\sin2x-a\sin x+a\cos x-\frac{1}{2}a-1=2\sin x\cos x-a(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2}a-1$，令$\sin x-\cos x=t$，则$2\sin x\cos x=1-t^2$，$t=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，因为$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，所以$-1\leqslant\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant1$，则$g(x)$转化为$g(t)=1-t^2-at-\frac{1}{2}a-1=-t^2-at-\frac{1}{2}a$，对称轴为$t=-\frac{a}{2}$.因为$g(x)$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值为2，即$g(t)$在$[-\sqrt{2},1]$上的最大值为2，所以当$-\frac{a}{2}\geqslant1$，即$a\leqslant-2$时，则$g(t)_{max}=g(1)=-1-a-\frac{1}{2}a=2$，解得$a=-2$；当$-\sqrt{2}<-\frac{a}{2}<1$，即$-2<a<2\sqrt{2}$时，则$g(t)_{max}=g\left(-\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}-\frac{1}{2}a=2$，解得$a=-2$(舍)，或$a=4$(舍)；当$-\frac{a}{2}\leqslant-\sqrt{2}$，即$a\geqslant2\sqrt{2}$时，则$g(t)_{max}=g(-\sqrt{2})=-2+\sqrt{2}a-\frac{1}{2}a=2$，解得$a=\frac{16\sqrt{2}+8}{7}$.

综上，实数a的值为-2或$\frac{16\sqrt{2}+8}{7}$.

第35期

第2~3版专题检测

一、单项选择题

1~8.BBBBBDDC

二、多项选择题

9.AC　　10.BC

11.ABC　　12.BC

三、填空题

13.$\frac{1}{3}$　　14.$\frac{\sqrt{3}}{3}$

15.$3\sqrt{3}$　　16.$3\sqrt{2}$

四、解答题

17.解：(1)$f(x)=m\cdot n=\cos\omega x\sin\omega x+\sqrt{3}\cos(\omega x+\pi)\cos\omega x=\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$，由题意，得$f(x)$的最小正周期$T=2\times\frac{\pi}{2}=\pi=\frac{2\pi}{2\omega}$，所以$\omega=1$，所以$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$g(x)=\sin\left[\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$，令$x-\frac{\pi}{6}\in\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$，$k\in Z$，则$x\in\left[2k\pi-\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{2\pi}{3}\right]$，$k\in Z$，故函数$g(x)$的单调递增区间为$\left[2k\pi-\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{2\pi}{3}\right]$，$k\in Z$.

(2)$f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{4}$，所以$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$，因为$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则$\alpha-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$，所以$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{13}}{4}$，所以$\cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{13}-3}{8}$.

18.解：(1)因为$a\cos C-c\cos(B+C)=-\frac{b}{3\cos(A+B)}$，所以$a\cos C+c\cos A=\frac{b}{3\cos C}$，由正弦定理，可得$\sin A\cos C+\sin C\cos A=\frac{\sin B}{3\cos C}$，所以$\sin(A+C)=\sin B=\frac{\sin B}{3\cos C}$，又$\sin B\neq0$，所以$\cos C=\frac{1}{3}$，所以$\sin C=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=2\sqrt{2}$.

(2)由$c=3$，$\sin C=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，结合正弦定理，得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$，则$a=\frac{9\sqrt{2}}{4}\sin A$，$b=\frac{9\sqrt{2}}{4}\sin B$，又$\sin A\sin B=\frac{16}{27}$，所以$ab=\frac{162}{16}\sin A\sin B=6$，所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times6\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{2}$.

19. 解：(1) 因为$AB=25\sqrt{6}$，$\angle DBA=15°$，$\angle DAB=45°$，所以$\angle ADB=120°$，在$\triangle ABD$中，由正弦定理，可得$\frac{BD}{\sin\angle DAB}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，即$\frac{BD}{\sin45°}=\frac{25\sqrt{6}}{\sin120°}$，所以$BD=50$海里.

(2) 在$\triangle BCD$中，$\angle CBD=60°$，$BC=80$，$BD=50$，由余弦定理，可得$CD^2=BC^2+BD^2-2BC\cdot BD\cos\angle CBD=6400+2500-2\times80\times50\times\frac{1}{2}=4900$，解得$CD=70$海里，所以该救援船到达D点需要的时间为$\frac{70}{35}=2$小时.

20.解：(1)因为$c\sin B=b\sin\frac{A+B}{2}$，$A+B=\pi-C$，所以$c\sin B=b\sin\frac{\pi-C}{2}=b\cdot\cos\frac{C}{2}$，在$\triangle ABC$中，由正弦定理，得$\sin C\sin B=\sin B\cos\frac{C}{2}$，又$0<B<\pi$，$\sin B\neq0$，所以$\sin C=\cos\frac{C}{2}$，即$2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=\cos\frac{C}{2}$，又$0<C<\pi$，所以$0<\frac{C}{2}<\frac{\pi}{2}$，所以$\cos\frac{C}{2}\neq0$，所以$\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$，因为$0<\frac{C}{2}<\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{C}{2}=\frac{\pi}{6}$，则$C=\frac{\pi}{3}$.

(2)因为$\cos B=\frac{\sqrt{21}}{7}$，所以$\sin B=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，可得$\sin\angle BAC=\sin(B+C)=\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)=\sin B\cos\frac{\pi}{3}+\cos B\sin\frac{\pi}{3}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$.在$\triangle ABC$中，由正弦定理，得$\frac{a}{\sin\angle BAC}=\frac{b}{\sin B}$，所以$a=10$，在$\triangle ADC$中，由余弦定理，得$AD^2=DC^2+AC^2-2DC\cdot AC\cos C$，即$DC^2-8DC+15=0$，解得$DC=3$或$DC=5$. 当$DC=3$时，$BD=7$，$\frac{BD}{DC}=\frac{7}{3}$；当$DC=5$时，$BD=5$，$\frac{BD}{DC}=1$，所以$\frac{BD}{DC}$的值为$\frac{7}{3}$或1.

21. 解：(1)$\triangle ABC$中，$AB=3\sqrt{3}$，$AC=4\sqrt{3}$，$\cos B=\frac{\sqrt{13}}{13}$，由余弦定理，得$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B$，即$48=27+BC^2-2\times3\sqrt{3}\times BC\times\frac{\sqrt{13}}{13}$，解得$BC=\sqrt{39}$(舍负)，故$\cos\angle BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{1}{2}$，由$\angle BAC\in(0,\pi)$，得$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，所以$\angle CAD=\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，又$S_{\triangle ACD}=24\sqrt{3}$，即$\frac{1}{2}AD\cdot AC\sin\angle CAD=\frac{1}{2}AD\times4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=24\sqrt{3}$，所以$AD=8\sqrt{3}$.

(2) 在$\triangle AED$中，$E=\frac{\pi}{3}$，$AD=8\sqrt{3}$，由正弦定理，得$\frac{AE}{\sin\angle ADE}=\frac{DE}{\sin\angle DAE}=\frac{AD}{\sin E}=\frac{8\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=16$，所以$AE=16\sin\angle ADE$，$DE=16\sin\angle DAE=16\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\angle ADE\right)$，所以$2AE+DE=32\sin\angle ADE+16\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\angle ADE\right)=40\sin\angle ADE+8\sqrt{3}\cos\angle ADE=16\sqrt{7}\sin(\angle ADE+\theta)$，其中$\sin\theta=\frac{\sqrt{21}}{14}$，$\cos\theta=\frac{5\sqrt{7}}{14}$，当$\angle ADE+\theta=\frac{\pi}{2}$时，$2AE+DE$取得最大值$16\sqrt{7}$，此时$\cos\angle ADE=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\frac{\sqrt{21}}{14}$.

22.解：(1)选①，$\sqrt{3}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2S_{\triangle ABC}$，所以$\sqrt{3}ac\cos B=2\times\frac{1}{2}ac\sin B$，所以$\sin B=\sqrt{3}\cos B$，则$\tan B=\sqrt{3}$，因为$B\in(0,\pi)$，所以$B=\frac{\pi}{3}$；

选②，$(2a-c)\cos B=b\cos C$，由正弦定理，得$2\sin A\cos B-\sin C\cos B=\sin B\cos C$，所以$2\sin A\cos B=\sin A$，因为$A\in(0,\pi)$，所以$\sin A>0$，所以$\cos B=\frac{1}{2}$，又$B\in(0,\pi)$，所以$B=\frac{\pi}{3}$；

选③，$b\sin A=a\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)$，由正弦定理，得$\sin B\sin A=\sin A\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)$，则$\sin B=\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B$，所以$\tan B=\sqrt{3}$，又$B\in(0,\pi)$，所以$B=\frac{\pi}{3}$.

(2) 因为$a+c=\sqrt{3}b$，所以$\sin A+\sin C=\sqrt{3}\sin B$，由(1)知，$B=\frac{\pi}{3}$，则$A+C=\frac{2\pi}{3}$，所以$\sin A+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=\frac{3}{2}$，化简得，$\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为$0<A<\frac{2\pi}{3}$，所以$A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$，则$A=\frac{\pi}{6}$或$\frac{\pi}{2}$，所以当$A=\frac{\pi}{6}$时，$C=\frac{\pi}{2}$；当$A=\frac{\pi}{2}$时，$C=\frac{\pi}{6}$.综上，$\triangle ABC$为直角三角形.