第32期

第2~3版专题检测

一、单项选择题

1~8.BCADABAD

二、多项选择题

9.BC　　10.AC

11.ABC　　12.CD

三、填空题

13.4　　14.$x+y-1=0$

15.$\left[\frac{2+\ln 2}{2},2\right)$　　16.4

四、解答题

17.**解**：(1)$f'(x)=x^2-ax-2$,因为$f(x)$在$x=2$处取得极值,所以$f'(2)=0$,即$4-2a-2=0$,解得$a=1$,所以$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$,$f'(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$,所以$f(x)$在$(-2,-1)$上单调递增,在$(-1,1)$上单调递减,又$f(-2)=-\frac{2}{3}$,$f(1)=-\frac{13}{6}$,所以$f(x)$在$[-2,1]$上的最小值为$-\frac{13}{6}$.

(2)由(1)知,$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$,因为关于$x$的方程$f(x)+b=0$有唯一解,即$y=-b$与$y=f(x)$的图象只有一个交点.由(1)知,$f(x)$在$(-\infty,-1)$,$(2,+\infty)$上单调递增,在$(-1,2)$上单调递减,又$f(-1)=\frac{7}{6}$,$f(2)=-\frac{10}{3}$,所以$-b<-\frac{10}{3}$或$-b>\frac{7}{6}$,解得$b>\frac{10}{3}$或$b<-\frac{7}{6}$,所以实数$b$的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{7}{6}\right)\cup\left(\frac{10}{3},+\infty\right)$.

18.**解**：(1)因为当$a=0$时,$f(x)=e^x-x^2-1$,$f'(x)=e^x-2x$,所以曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线的斜率为$f'(0)=1$,又$f(0)=0$,所以切线方程为$y=x$.

(2)对任意的实数$x\in(0,+\infty)$,$f(x)\geqslant 0$恒成立,即$2a\leqslant\frac{e^x}{x}-x-\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上恒成立.设$g(x)=\frac{e^x}{x}-x-\frac{1}{x}$ $(x>0)$,$g'(x)=\frac{(x-1)(e^x-x-1)}{x^2}$,令$h(x)=e^x-x-1$,则$h'(x)=e^x-1>h'(0)=0$,所以$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,即有$h(x)>h(0)=0$,所以当$x>1$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增;当$0<x<1$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减,所以$g(x)_{min}=g(1)=e-2$.所以$2a\leqslant e-2$,得$a\leqslant\frac{e-2}{2}$,所以$a$的最大值为$\frac{e-2}{2}$.

19.**解**：(1)$f(x)=\ln x-ex+2$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=\frac{1}{x}-e=\frac{1-ex}{x}$,令$f'(x)>0$,解得$0<x<\frac{1}{e}$;令$f'(x)<0$,解得$x>\frac{1}{e}$.所以$f(x)$的单调递增区间为$\left(0,\frac{1}{e}\right)$,单调递减区间为$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

(2)$g(x)=f(x)-ax^2=\ln x-ex+2-ax^2$,$g'(x)=\frac{1}{x}-e-2ax=\frac{-2ax^2-ex+1}{x}$,因为$g(x)$在定义域上单调且有唯一零点,令$h(x)=-2ax^2-ex+1$,则函数$h(x)$在$(0,+\infty)$上不存在变号零点.①当$a<0$时,则$-\frac{e}{4a}>0$,所以$e^2+8a\leqslant 0$,解得$a\leqslant-\frac{e^2}{8}$,故$a\leqslant-\frac{e^2}{8}$,当$x\to 0$时,$g(x)\to-\infty$,当$x\to+\infty$时,$g(x)\to+\infty$,故$g(x)$在定义域上单调且有唯一零点.②当$a=0$时,由(1)知$g(x)$在定义域上不单调,不符合题意.③当$a>0$时,易知$-\frac{e}{4a}<0$,$e^2+8a>0$,且$h(0)=1$,所以$h(x)$在$(0,+\infty)$上有一个变号零点,不符合题意.

综上,实数a的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{e^2}{8}\right]$.

20.(1)**解**：$f(x)=x-1-a\ln x$,$x>0$,$f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$,且$f(1)=0$.当$a\leqslant 0$时,$f'(x)>0$,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,又$f(1)=0$,所以当$0<x<1$时,$f(x)<0$,不符合题意.当$a>0$时,当$0<x<a$时,$f'(x)<0$,$f(x)$在$(0,a)$上单调递减;当$x>a$时,$f'(x)>0$,$f(x)$在$(a,+\infty)$上单调递增.①若$a<1$,$f(x)$在$(a,1)$上单调递增,所以当$x\in(a,1)$时,$f(x)<f(1)=0$,不符合题意;②若$a>1$,$f(x)$在$(1,a)$上单调递减,所以当$x\in(1,a)$时,$f(x)<f(1)=0$,不符合题意;③若$a=1$,$f(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,所以$f(x)\geqslant f(1)=0$,符合题意.

综上所述,$a=1$.

(2)**证明**：先证:$\ln x-x+1\leqslant 0(x>0)$,设$g(x)=\ln x-x+1$,则$g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$,当$x\in(0,1)$时,$g'(x)>0$,所以$g(x)$单调递增;当$x\in(1,+\infty)$时,$g'(x)<0$,所以$g(x)$单调递减,所以$x=1$为$g(x)$的极大值点,也是最大值点,所以$g(x)\leqslant g(1)=0$,即$\ln x-x+1\leqslant 0$,所以$\ln x\leqslant x-1$,又$x>0$,所以$\frac{\ln x}{x}\leqslant\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x}$,因为$n\in N_+$,$n\geqslant 2$,令$x=n^2$,得$\frac{\ln n^2}{n^2}<1-\frac{1}{n^2}$,所以$\frac{\ln n}{n^2}\leqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$,

所以$\frac{\ln 2}{2^2}+\frac{\ln 3}{3^2}+\cdots+\frac{\ln n}{n^2}\leqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^2}+1-\frac{1}{3^2}+\cdots+1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\left[n-1-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\right]<\frac{1}{2}\left[(n-1)-\left(\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[n-1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[n-1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{2n^2-n-1}{4(n+1)}$,所以原不等式成立.

21.**解**：(1)当$b=0$时,$f(x)=x^2e^x$,$f'(x)=x(x+2)e^x$.令$f'(x)=0$,解得$x=-2$,或$x=0$.

当$x\in(-\infty,-2)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增;当$x\in(-2,0)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;当$x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.所以函数$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,-2)$,$(0,+\infty)$,单调递减区间为$(-2,0)$.

(2)$f'(x)=(x^2+2x+b)e^x$,因为函数$f(x)$有两个不同的极值点,即$f'(x)$有两个不同的零点,所以方程$f'(x)=0$即$x^2+2x+b=0$有两个不同的实数根,所以判别式$\Delta=4-4b>0$,解得$b<1$.设方程$x^2+2x+b=0$的两根分别为x_1,x_2不妨设$x_1<x_2$,则$x_1+x_2=-2$,$x_1x_2=b$.随着x的变化,$f(x)$和$f'(x)$的变化情况如下表:

x	$(-\infty,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以x_1是函数$f(x)$的极大值点,x_2是函数$f(x)$的极小值点,符合题意.

所以$f(x_1)\cdot f(x_2)=e^{x_1}(x_1^2+b)\cdot e^{x_2}(x_2^2+b)=[x_1^2x_2^2+b(x_1^2+x_2^2)+b^2]e^{x_1+x_2}=[b^2+b(4-2b)+b^2]e^{-2}=4be^{-2}$,因为$f(x_1)\cdot f(x_2)=4e^{-2}$,则$4be^{-2}=4e^{-2}$,得$b=1$,不符合$b<1$,故不存在实数$b$使得$f(x_1)\cdot f(x_2)=4e^{-2}$.

22.(1)**解**：当$x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$时,$f(x)<0$,无零点;当$x\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$时,$f'(x)=\cos x-x\sin x$,因为$\tan x>\frac{1}{x}$,所以$f'(x)=\cos x-x\sin x<0$,则$f(x)$在$\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减,又$f(-\pi)=\pi-\frac{3}{2}>0$,$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{3}{2}<0$,所以$f(x)$在$\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$内有一个零点,故$f(x)$在$(-\pi,0)$内有一个零点.

(2)**证明**：由$g(x)\geqslant f(x)$,得$a\leqslant\frac{2\sin x-x\cos x}{x}$,令$h(x)=\frac{2\sin x-x\cos x}{x}$,$x\in(0,\pi)$,$h'(x)=\frac{2x\cos x-2\sin x+x^2\sin x}{x^2}$,令$m(x)=2x\cos x-2\sin x+x^2\sin x$,$m'(x)=x^2\cos x$,当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$m'(x)>0$,$m(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,所以$m(x)>m(0)=0$,$h'(x)>0$,$h(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增.当$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时,$m'(x)=x^2\cos x<0$,所以$m(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递减,又$m\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}-2>0$,$m(\pi)=-2\pi$,故$m(x)$在$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$上存在唯一的零点$x_0$,所以$m(x_0)=0$,即$2x_0\cos x_0-2\sin x_0+x_0^2\sin x_0=0$,所以$2\sin x_0=2x_0\cos x_0+x_0^2\sin x_0$.

所以当$x\in\left(\frac{\pi}{2},x_0\right)$时,$m(x)>0$,$x\in(x_0,\pi)$时,$m(x)<0$,故$h(x)$在$(0,x_0)$上单调递增,在$(x_0,\pi)$上单调递减,所以$h(x)_{max}=h(x_0)=\frac{2\sin x_0-x_0\cos x_0}{x_0}=\cos x_0+x_0\sin x_0$,$x_0\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.令$\varphi(x)=\cos x+x\sin x$,$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,$\varphi'(x)=x\cos x<0$,所以$\varphi(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递减,即$h(x_0)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递减,$h(x_0)<h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$,故$a\leqslant h(x)_{max}<\frac{\pi}{2}$,所以$a<\frac{\pi}{2}$.

第29期

第1版

专题一　三角与向量

1.(1)$\frac{\pi}{3}$.(2)$10\sqrt{3}$.

2.(1)$AD=3$.(2)$\tan B=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

3.(1)$\left[k\pi-\frac{\pi}{8},k\pi+\frac{3\pi}{8}\right]$,$k\in\mathbf{Z}$.

(2)$[1,\sqrt{2}]$.

4.(1)$\frac{\pi}{3}$.(2)$2\sqrt{3}$.

5. 选①②③,△ABC的面积都为$2\sqrt{3}$或$4\sqrt{3}$.

6.(1)$g(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,$g(x)$在$(0,\pi)$上的单调递增区间为$\left(0,\frac{\pi}{6}\right]$和$\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right)$.(2)$\frac{5\sqrt{3}}{4}$.

第2版

专题二　数列

1.(1)$a_n=n-7$.　(2)$n^2-7n+\frac{4^n-1}{3}$.

2.(1)$a_n=2n+1$.　(2)8.

3.(1)$a_n=n+1$,$n\in N_+$,$b_n=2^n$,$n\in N_+$.

(2)$c_n=n\cdot 2^{n+1}$.

4.**解**：(1)因为$4S_n=(a_n+1)^2$,则当$n=1$时,$4S_1=4a_1=(a_1+1)^2$,解得$a_1=1$.当$n\geqslant 2$时,$4S_{n-1}=(a_{n-1}+1)^2$,两式作差,得$4S_n-4S_{n-1}=(a_n+1)^2-(a_{n-1}+1)^2$,得$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$,又$\{a_n\}$是正项数列,所以$a_n-a_{n-1}=2$,所以$\{a_n\}$是首项为1,公差为2的等差数列,

所以$a_n=1+2(n-1)=2n-1$.

(2)由$b_n=\frac{2}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$,得$T_n=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$,故要使$T_n\geqslant\frac{M}{\sqrt{a_{n+1}}}$对任意$n\in N_+$都成立,只需$M\leqslant\frac{2n}{\sqrt{2n+1}}$对任意$n\in N_+$都成立即可.又$\frac{2n}{\sqrt{2n+1}}=\frac{2}{\sqrt{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}}=\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}+1\right)^2-1}}$$(n\in N_+)$,

所以当$\frac{1}{n}=1$,即$n=1$时,$\left(\frac{2n}{\sqrt{2n+1}}\right)_{min}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,所以$M\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$,即$M$的取值范围是$\left(-\infty,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$.

5.**解**：(1)由题意知$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=13,\\6a_2=a_1+a_3+8,\end{cases}$可得$a_2=3$,$a_1+a_3=10$,设递增的等比数列$\{a_n\}$的公比为$q$,得$\frac{3}{q}+3q=10$,解得$q=3$或$q=\frac{1}{3}$(舍去),则$a_n=a_2q^{n-2}=3\cdot 3^{n-2}=3^{n-1}$.

(2)选①$3S_n+b_n=4$,当$n\geqslant 2$时,$3S_{n-1}+b_{n-1}=4$,又$3S_n+b_n=4$,两式相减可得$3b_n+b_n-b_{n-1}=0$,则$b_n=\frac{1}{4}b_{n-1}$,可得$\{b_n\}$为首项为1,公比为$\frac{1}{4}$的等比数列,则$b_n=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

由$c_n=a_nb_n=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$,得$T_n=\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}=4-4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$,由$\{T_n\}$为递增数列,可得$n=1$时,$T_n$取得最小值1.

选②$b_n=b_{n-1}+2(n\geqslant 2)$,可得$\{b_n\}$为首项为1,公差为2的等差数列,则$b_n=1+2\cdot(n-1)=2n-1$,$c_n=a_nb_n=(2n-1)\cdot 3^{n-1}$,则$T_n=1\times 3^0+3\times 3^1+5\times 3^2+\cdots+(2n-1)\times 3^{n-1}$,$3T_n=1\times 3+3\times 3^2+5\times 3^3+\cdots+(2n-1)\times 3^n$,两式相减可得$-2T_n=1+2(3^1+3^2+\cdots+3^{n-1})-(2n-1)\cdot 3^n=1+2\cdot\frac{3(1-3^{n-1})}{1-3}-(2n-1)\cdot 3^n$,化简得,$T_n=1+(n-1)\cdot 3^n$,由$\{T_n\}$为递增数列,可得$n=1$时,$T_n$取得最小值1.

选③$5b_n=-b_{n-1}(n\geqslant 2)$,得$\{b_n\}$为首项为1,公比为$-\frac{1}{5}$的等比数列,则$b_n=\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$.由$c_n=a_nb_n=\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}$,得$T_n=\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^n}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}=\frac{5}{8}-\frac{5}{8}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^n$,$T_1=1$,$T_2=\frac{2}{5}$,当$n$为奇数时,$\frac{5}{8}<T_n\leqslant 1$;当$n$为偶数时,$T_n\geqslant\frac{2}{5}$,可得$n=2$时,$T_n$取得最小值$\frac{2}{5}$.

第3版

专题三　概率与统计

1.(1)列联表略,有97.5%的把握认为这200位参与调查者是否准备购买该品牌手机与性别有关.(2)$\frac{3}{5}$.

2.(1)$\hat{y}=6.6x-138.6$.

(2)(ⅰ)线性回归方程对应的相关系数$R^2\approx 0.9398$,因为$0.9398<0.9522$,所以非线性回归方程$\hat{y}=0.06e^{0.2303x}$比线性回归方程$\hat{y}=6.6x-138.6$的拟合效果更好.

(ⅱ)190.

3.(1)$a=0.025$,专项心理等级为有隐患的人数为120.(2)$\frac{14}{15}$.

(3)由频率分布直方图可得$45\times 0.02+55\times 0.04+65\times 0.14+75\times 0.2+85\times 0.35+95\times 0.25=80.7$,估计市民心理健康问卷的平均得分为80.7,所以市民心理健康指数的平均值为$0.807>0.8$,所以只需发放心理指导材料,不需要举办心理健康大讲堂.

4.**解**：(1)因为ξ服从正态分布$N(270,5^2)$,所以$P(260<x\leqslant 265)=\frac{P(260<x\leqslant 280)-P(265<x\leqslant 275)}{2}\approx\frac{0.9544-0.6826}{2}=0.1359$,所以质量指标在$(260,265]$内的排球约为$1000\times 0.1359\approx 136$个.

(2)(ⅰ)中国队前三场赢两场,第四场必赢,$f(p)=C_3^2p^3(1-p)$,因此$f'(p)=3[3p^2\cdot(1-p)-p^3]=3p^2(3-4p)$.令$f'(p)=0$,得$p=\frac{3}{4}$,当$p\in\left(0,\frac{3}{4}\right)$时,$f'(p)>0$,$f(p)$在$\left(0,\frac{3}{4}\right)$上为增函数;当$p\in\left(\frac{3}{4},1\right)$时,$f'(p)<0$,$f(p)$在$\left(\frac{3}{4},1\right)$上为减函数.所以$f(p)$的最大值点$p_0=\frac{3}{4}$.

(ⅱ)X的可能取值为3,2,1,0,

$P(X=3)=\left(\frac{3}{4}\right)^3+C_3^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^3\times\frac{1}{4}=\frac{189}{256}$,

$P(X=2)=C_4^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{81}{512}$,

$P(X=1)=C_4^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{27}{512}$,

$P(X=0)=\left(\frac{1}{4}\right)^3+C_3^1\times\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{13}{256}$.

所以X的分布列为:

X	0	1	2	3
P	$\frac{13}{256}$	$\frac{27}{512}$	$\frac{81}{512}$	$\frac{189}{256}$

第4版

专题四　立体几何

1.(1)证明略.(2)$\frac{4}{5}$.

2.(1)证明略.(2)$\frac{\sqrt{2}}{10}$.

3.(1)证明略.(2)$PA=4\sqrt{3}$.

4.(1)证明略.(2)$\frac{\sqrt{3}}{4}$.

5.(1)证明略.

(2)存在,点M为靠近点B的三等分点.

第 30 期

第 1~2 版

专题五　解析几何

1.(1)$y^2=4x$.(2)$\frac{4\sqrt{3}}{5}$.

2.(1)$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.(2)$\frac{4\sqrt{10}}{9}$.

3.(1)$P(4,3)$.(2)$(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$.(3)证明略.

4.(1)$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.(2)证明略.定值为 4.

5.(1)$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)存在实数 λ,使得$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=\lambda\overrightarrow{OP}^2$成立,且 $\lambda=3$.

6.(1) 抛物线 C 的标准方程为 $x^2=4y$,其准线方程为 $y=-1$.

(2)$S_1\cdot S_2$ 的最小值为 27,此时点 A 的坐标为$(2\sqrt{2},2)$.

7.**解:**(1)因为 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{3}{4}$,所以 $a=2b$,因为点$\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$在椭圆上,所以$\frac{2}{4b^2}+\frac{6}{4b^2}=1$,解得 $b=\sqrt{2}$,$a=2\sqrt{2}$,

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$.

(2)①设 $P(x_0,y_0)$,过点 P 与圆相切的切线 $l:y-y_0=k(x-x_0)$,即 $kx-y+y_0-kx_0=0$,圆心 O(0,0)到切线 l 的距离 $d=\frac{|y_0-kx_0|}{\sqrt{k^2+1}}=r=\frac{2\sqrt{10}}{5}$,整理得$\left(x_0^2-\frac{8}{5}\right)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-\frac{8}{5}=0$,

又 $\frac{x_0^2}{8}+\frac{y_0^2}{2}=1$,所以 $k_1\cdot k_2=\frac{y_0^2-\frac{8}{5}}{x_0^2-\frac{8}{5}}=\frac{2\left(1-\frac{x_0^2}{8}\right)-\frac{8}{5}}{x_0^2-\frac{8}{5}}=-\frac{1}{4}$.

②因为 $S_{\triangle POB}=S_{\triangle QOA}$,所以$|PB|=|AQ|$,所以 $x_B-x_P=x_Q-x_A$,所以 $x_A+x_B=x_P+x_Q$,设切线 $l_1:y=kx+m$,联立$\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$可得$(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-8=0$,所以 $x_P+x_Q=\frac{-8km}{4k^2+1}$,令 $y=0$,可得 $x_B=-\frac{m}{k}$,设 $A(x_A,kx_A+m)$,因为 $OA\perp l_1$,所以 $k_{OA}=\frac{kx_A+m}{x_A}=-\frac{1}{k}$,所以 $x_A=\frac{-km}{k^2+1}$,所以$\frac{-8km}{4k^2+1}=-\frac{m}{k}+\frac{-km}{k^2+1}$,整理可得 $8k^2(k^2+1)=(4k^2+1)\cdot(2k^2+1)$,解得 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,

因为圆心 O(0,0)到 $l_1:y=kx+m$ 的距离为$\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$,即$\frac{|m|}{\sqrt{\frac{1}{2}+1}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$,解得 $m=\pm\frac{2\sqrt{15}}{5}$.

因为 $x_B=-\frac{m}{k}>0$,所以当 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$时,$m=-\frac{2\sqrt{15}}{5}$;当 $k=-\frac{\sqrt{2}}{2}$时,$m=\frac{2\sqrt{15}}{5}$.所以 l_1 的方程为 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{2\sqrt{15}}{5}$或 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{2\sqrt{15}}{5}$.

第 3~4 版

专题六　函数与导数

1.(1)当 $a\geqslant0$ 时,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增;当 $a<0$ 时,$f(x)$在$\left(0,-\frac{1}{a}\right)$上单调递增,在$\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增.

(2)$(-\infty,-e)$.

2.(1)函数 $h(x)$在$(0,\pi)$上单调递减.(2)1 个.

3.(1)$[0,1]$.

(2)$\left[-1,\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\frac{\pi}{2}-1}\right]$.

4.(1)**解:**因为$f(x)=\frac{x}{e^x}+x-\frac{1}{2}x^2$,

所以$f'(x)=\frac{e^x-xe^x}{e^{2x}}+1-x=\frac{(1+e^x)(1-x)}{e^x}$,

令$f'(x)=0$,解得 $x=1$,

所以当 $x\in(-\infty,1)$时,$f'(x)>0$,

当 $x\in(1,+\infty)$时,$f'(x)<0$,

所以 $f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递增,

在$(1,+\infty)$上单调递减.

(2)**证明:**要证 $g(x)\geqslant f(x)$,

即证$-\frac{2}{x-1}-2\geqslant\frac{x}{e^x}+x-\frac{1}{2}x^2$,

即证$-\frac{2x}{x-1}-\frac{x}{e^x}-x+\frac{1}{2}x^2\geqslant0$.

设 $F(x)=-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{e^x}-1+\frac{x}{2}$,

即证 $xF(x)\geqslant0$.

因为 $F'(x)=\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{e^x}+\frac{1}{2}$,

所以当 $x\in(-\infty,1)$ 时,$F'(x)>0$ 恒成立,$F(x)$单调递增,

又当 $x=0$ 时,$F(x)=0$,

所以当 $0<x<1$ 时,$F(x)>0$;

当 $x<0$ 时,$F(x)<0$.

所以当 $x\in(-\infty,1)$时,$xF(x)\geqslant0$,

即当 $x\in(-\infty,1)$时,$g(x)\geqslant f(x)$.

5.(1)$\left(\frac{e}{2},+\infty\right)$.

(2)证明略.

6.(1)当$a\leqslant0$时,$f(x)$在$\left(0,\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2},+\infty\right)$上单调递减;当$0<a<\frac{1}{4}$时,$f(x)$在$\left(\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2},\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$上单调递增,在$\left(0,\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right)$,$\left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2},+\infty\right)$上单调递减;当 $a\geqslant\frac{1}{4}$时,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.

(2)5.

7.**解:**(1)函数 $f(x)=(a-2)\ln x$ 的导数为 $f'(x)=\frac{a-2}{x}$,所以曲线 $y=f(x)$在 $x=b$ 处的切线的斜率为$\frac{a-2}{b}=-1$,①

$g(x)=-x^2+ax$ 的导数 $g'(x)=-2x+a$,所以曲线 $y=g(x)$在 $x=b$ 处的切线的斜率为 $a-2b=-1$,②

由①②,解得 $a=1,b=1$.

(2)方程 $f(x)=g(x)$在区间$\left[\frac{1}{e},e^2\right]$上有解,即 $a(\ln x-x)=2\ln x-x^2$ 在区间$\left[\frac{1}{e},e^2\right]$上有解,设 $h(x)=\ln x-x$,则 $h'(x)=\frac{1}{x}-1$,

当$\frac{1}{e}\leqslant x<1$ 时,$h'(x)>0$,$h(x)$单调递增;当 $1<x\leqslant e^2$ 时,$h'(x)<0$,$h(x)$单调递减.

所以 $h(x)_{max}=h(1)=-1<0$,所以 $h(x)<0$,所以 $a=\frac{2\ln x-x^2}{\ln x-x}$,所以 $y=a$ 与 $y=\frac{2\ln x-x^2}{\ln x-x}$在$\left[\frac{1}{e},e^2\right]$上有交点.

令$F(x)=\frac{2\ln x-x^2}{\ln x-x}$,$x\in\left[\frac{1}{e},e^2\right]$,则$F'(x)=\frac{(x-1)(x-2\ln x+2)}{(\ln x-x)^2}$,令$m(x)=x-2\ln x+2$,$x\in\left[\frac{1}{e},e^2\right]$,则$m'(x)=1-\frac{2}{x}$,可得$m(x)$在$(2,e^2)$上单调递增,在$\left(\frac{1}{e},2\right)$上单调递减,则$m(x)_{min}=m(2)=2(2-\ln2)>0$,即$x+2-2\ln x>0$恒成立,令$F'(x)=0$,得$x=1$,所以$F(x)$在$\left[\frac{1}{e},1\right)$上单调递减,在$(1,e^2]$上单调递增,所以$F(x)_{min}=F(1)=1$,因为$y=F(x)$与$y=a$有交点,$F\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{2e^2+1}{e^2+e}$,$F(e^2)=e^2+2$,$F\left(\frac{1}{e}\right)<F(e^2)$,所以$1\leqslant a\leqslant e^2+2$,即a的取值范围为$[1,e^2+2]$.

第31期

第2~3版专题检测

一、单项选择题

1~8.CCDBABCC

二、多项选择题

9.AD　　10.ACD

11.BC　　12.BD

三、填空题

13.2　　14.$y=x$

15.$\left[\frac{1}{2},1\right)$　　16.$(-\infty,0]$

四、解答题

17.**解:**(1)$f(3)=6$,$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}$,$f(f(0))=f(2)=4$.

(2)由函数$f(x)=\begin{cases}x+2(x\leqslant1),\\ x^2(1<x<2),\\ 2x(x\geqslant2),\end{cases}$

$f(a)\leqslant5$,可得$\begin{cases}a\leqslant1,\\ a+2\leqslant5,\end{cases}$或$\begin{cases}1<a<2,\\ a^2\leqslant5,\end{cases}$或$\begin{cases}a\geqslant2,\\ 2a\leqslant5,\end{cases}$解得$a\leqslant1$ 或$1<a<2$ 或$2\leqslant a\leqslant\frac{5}{2}$,所以实数a的取值范围是$\left(-\infty,\frac{5}{2}\right]$.

18.**解:**(1)由题意可得 $a^2-2a-2=1$,解得$a=3$,或$a=-1$,又$a>0$且$a\neq1$,所以$a=3$,所以$g(x)=\log_3(x+1)+\log_3(3-x)$,所以$\begin{cases}x+1>0,\\ 3-x>0,\end{cases}$解得$-1<x<3$,即$g(x)$的定义域为$(-1,3)$,因为$g(x)=\log_3(x+1)+\log_3(3-x)=\log_3(-x^2+2x+3)$,令$u(x)=-x^2+2x+3(-1<x<3)$,则由对称轴为$x=1$可知,$u(x)$在$(-1,1)$上单调递增,在$(1,3)$上单调递减.又因为$y=\log_3u$在$(0,+\infty)$单调递增,故$g(x)$的单调递增区间为$(-1,1)$,单调递减区间为$(1,3)$.

(2)因为不等式$g(x)-m+3\leqslant0$的解集非空,所以$m-3\geqslant g(x)_{min}$,$x\in\left[\frac{1}{3},2\right]$,由(1)知,当$x\in\left[\frac{1}{3},2\right]$时,函数$g(x)$的单调递增区间为$\left[\frac{1}{3},1\right]$,单调递减区间为$[1,2]$,且$g\left(\frac{1}{3}\right)=\log_3\frac{32}{9}$,$g(2)=1$,所以$g(x)_{min}=1$,所以$m-3\geqslant1$,解得$m\geqslant4$,所以实数m的取值范围为$[4,+\infty)$.

19.**解:**(1)函数$f(x)=ax^2+2\ln(1-x)$的定义域为$(-\infty,1)$,$f'(x)=2ax-\frac{2}{1-x}$,因为$f(x)$在$x=-1$处有极值,所以$f'(-1)=-2a-1=0$,解得$a=-\frac{1}{2}$,此时,$f'(x)=-x-\frac{2}{1-x}=\frac{x^2-x-2}{1-x}=\frac{(x-2)(x+1)}{1-x}$,因为$x<1$,令$f'(x)<0$,得$-1<x<1$,所以$f(x)$的单调递减区间为$(-1,1)$.

(2)因为$f(x)$在$[-3,-2]$上是增函数,所以$f'(x)\geqslant0$且不恒为0对$\forall x\in[-3,-2]$恒成立,所以$2ax-\frac{2}{1-x}\geqslant0$,即$a\leqslant\frac{1}{(1-x)x}$,因为$g(x)=(1-x)x=-x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$在$[-3,-2]$上单调递增,所以$g(x)_{max}=g(-2)=-6$,所以$\frac{1}{(1-x)x}$的最小值为$-\frac{1}{6}$,所以$a\leqslant-\frac{1}{6}$,即a的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{1}{6}\right]$.

20.**解:**(1)当$a=0$时,$f(x)=x\ln x+x$,$f'(x)=\ln x+2$,所以切线的斜率为$f'(1)=2$,又$f(1)=1$,所以切线的方程为$y-1=2(x-1)$,即$2x-y-1=0$.

(2)当$0<x<1$时,$f(x)>0$恒成立,即$a>\frac{x\ln x+x}{x-1}$在$(0,1)$上恒成立.令$g(x)=\frac{x\ln x+x}{x-1}$,则$g'(x)=\frac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$,令$h(x)=x-\ln x-2$,则$h'(x)=1-\frac{1}{x}$,由$h'(x)=0$,可得$x=1$,当$0<x<1$时,$h'(x)<0$,$h(x)$单调递减,因为$h(1)=-1<0$,$h\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{1}{e^2}-\ln\frac{1}{e^2}-2=\frac{1}{e^2}>0$,所以$h(x)$在$(0,1)$存在唯一零点$x_0$,且$h(x_0)=x_0-\ln x_0-2=0$,即$\ln x_0=x_0-2$,所以当$0<x<x_0$时,$h(x)>0$,即$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增;当$x_0<x<1$时,$h(x)<0$,即$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减,所以$g(x)_{max}=g(x_0)=\frac{x_0\ln x_0+x_0}{x_0-1}=\frac{x_0(x_0-2)+x_0}{x_0-1}=x_0$,所以$a>x_0$,因为$x_0\in(0,1)$,所以正整数a的最小值为1.

21.(1)**解:**$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=\frac{8x^2+(8-a)x-a}{x}=\frac{(8x-a)(x+1)}{x}$,当$a\leqslant0$时,$f'(x)>0$,$f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$,无单调递减区间;当$a>0$时,令$f'(x)>0$,得$x>\frac{a}{8}$;令$f'(x)<0$,得$0<x<\frac{a}{8}$,所以$f(x)$的单调递减区间为$\left(0,\frac{a}{8}\right)$,单调递增区间为$\left(\frac{a}{8},+\infty\right)$.

综上,当$a\leqslant0$时,$f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$,无单调递减区间;当$a>0$时,$f(x)$的单调递减区间为$\left(0,\frac{a}{8}\right)$,单调递增区间为$\left(\frac{a}{8},+\infty\right)$.

(2)**证明:**当$a=2$时,原不等式等价于$e^x-\ln x-2>0$.令$\varphi(x)=e^x-\ln x-2$,则$\varphi'(x)=e^x-\frac{1}{x}$,易知$\varphi'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,且$\varphi'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$,$\varphi'(1)=e-1>0$,所以$\varphi'(x)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上存在唯一零点$x_0$,且$\varphi'(x_0)=0$,所以$\varphi(x)$在$(0,x_0)$上单调递减,在$(x_0,+\infty)$上单调递增.要证$\varphi(x)>0$,即证$\varphi(x)_{min}=\varphi(x_0)>0$,由$\varphi'(x_0)=e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0$,得$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$,$x_0=\frac{1}{e^{x_0}}$,则$\varphi(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0-2=\frac{1}{x_0}+x_0-2$,因为$x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,所以$\varphi(x_0)=\frac{1}{x_0}+x_0-2>2\sqrt{\frac{1}{x_0}\cdot x_0}-2=0$,所以$\varphi(x)>0$,即$f(x)>4x^2-2e^x+6x+4$.

22.**解:**(1)当$a=-1$时,$f(x)=-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x-\frac{5}{3}$,$f'(x)=-(x-1)(x+3)$,$x\in[-4,2]$,令$f'(x)>0$,解得$-3<x<1$,令$f'(x)<0$,解得$-4\leqslant x<-3$或$1<x\leqslant2$,所以函数$f(x)$在$(-3,1)$上单调递增,在$[-4,-3)$和$(1,2]$上单调递减,又$f(-4)=-\frac{25}{3}$,$f(-3)=-\frac{32}{3}$,$f(1)=0$,$f(2)=-\frac{7}{3}$,所以函数$f(x)$在区间$[-4,2]$上的最大值为0,最小值为$-\frac{32}{3}$.

(2)存在实数m,使得不等式$f(x)<0$的解集为$(m,+\infty)$,等价于函数$f(x)$只有一个零点,因为$f'(x)=-x^2+2ax+3a^2=-(x-3a)(x+a)$,①当$a<0$时,令$f'(x)>0$,解得$3a<x<-a$,令$f'(x)<0$,解得$x<3a$或$x>-a$,所以函数$f(x)$在$(3a,-a)$上单调递增,在$(-\infty,3a)$,$(-a,+\infty)$上单调递减,又$f(0)=-\frac{5}{3}<0$,故只需$f(-a)<0$,即$-\frac{1}{3}(-a)^3+a\cdot(-a)^2+3a^2\cdot(-a)-\frac{5}{3}<0$,解得$a>-1$,所以$-1<a<0$.

②当$a=0$时,$f(x)=-\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}$,所以$f(x)$只有一个零点,符合题意.

③当$a>0$时,令$f'(x)>0$,解得$-a<x<3a$,令$f'(x)<0$,解得$x<-a$或$x>3a$,所以$f(x)$在$(-a,3a)$上单调递增,在$(-\infty,-a)$,$(3a,+\infty)$上单调递减,又$f(0)=-\frac{5}{3}<0$,故只需$f(3a)<0$,即$-\frac{1}{3}(3a)^3+a\cdot(3a)^2+3a^2\cdot3a-\frac{5}{3}<0$,解得$a<\frac{\sqrt[3]{5}}{3}$,所以$0<a<\frac{\sqrt[3]{5}}{3}$.

综上,实数a的取值范围为$\left(-1,\frac{\sqrt[3]{5}}{3}\right)$.