第 24 期

第 2~3 版同步周测

一、单项选择题

1~8.ACCCDBDC

二、多项选择题

9.ABC　　10.CD

11.BD　　12.AD

三、填空题

13.0.2　　14.19

15.$\frac{2}{5}$　　16.0.4

四、解答题

17.**解**:(1)由$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$,$n\geqslant4$,

可得$a_2=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$,

$a_3=C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$,

$a_4=C_n^4=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$,

由$a_3^2=2a_2a_4$,得$\left[\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\right]^2=2\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$,

解得$n=5$.

(2)$(1+\sqrt{3})^5=C_5^0+C_5^1\sqrt{3}+C_5^2(\sqrt{3})^2+C_5^3(\sqrt{3})^3+C_5^4(\sqrt{3})^4+C_5^5(\sqrt{3})^5=a+b\sqrt{3}$,

由于$a,b\in\mathbf{N}_+$,可得$a=C_5^0+3C_5^2+9C_5^4=1+30+45=76$,$b=C_5^1+3C_5^3+9C_5^5=44$,

可得$a^2-3b^2=76^2-3\times44^2=-32$.

18.**解**:(1)从 7 月至 11 月中任选两个月份,所有可能的结果为$\Omega=\{(7,8),(7,9),(7,10),(7,11),(8,9),(8,10),(8,11),(9,10),(9,11),(10,11)\}$,共 10 种情况.

记事件A=“至少有一个月份这两年该国产品牌 SUV 销量相同”,

则$A=\{(7,8),(7,11),(8,9),(8,10),(8,11),(9,11),(10,11)\}$,共 7 种情况,所以$P(A)=\frac{7}{10}$,即至少有一个月份这两年该国产品牌 SUV 销量相同的概率为$\frac{7}{10}$.

(2)$\bar{x}_{2020}=\frac{1}{5}(2.8+3.9+3.5+4.4+5.4)=4$,

$\bar{x}_{2021}=\frac{1}{5}(3.8+3.9+4.5+4.9+5.4)=4.5$,

$s_{2020}^2=\frac{1}{5}[(2.8-4)^2+(3.9-4)^2+(3.5-4)^2+(4.4-4)^2+(5.4-4)^2]=0.764$,

$s_{2021}^2=\frac{1}{5}[(3.8-4.5)^2+(3.9-4.5)^2+(4.5-4.5)^2+(4.9-4.5)^2+(5.4-4.5)^2]=0.364$,

因为$\bar{x}_{2020}=4$,$\bar{x}_{2021}=4.5$,$s_{2020}^2>s_{2021}^2$,

所以 2021 年销售量比较稳定.

19.**解**:(1)设“该校男生支持方案一”为事件A,“该校女生支持方案一”为事件B,则$P(A)=\frac{200}{200+400}=\frac{1}{3}$,$P(B)=\frac{300}{300+100}=\frac{3}{4}$.

(2)由(1)知,$P(A)=\frac{1}{3}$,$P(B)=\frac{3}{4}$,设“这 3 人中恰有 2 人支持方案一”为事件C,则$P(C)=C_2^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{3}{4}\right)+C_2^1\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{3}{4}=\frac{13}{36}$.

(3)$p_0>p_1$.

20.**解**:(1)由已知,得X的所有可能取值为 0,20,100,则$P(X=0)=1-0.8=0.2$,$P(X=20)=0.8\times(1-0.6)=0.32$,$P(X=100)=0.8\times0.6=0.48$,

所以X的分布列为

X	0	20	100
P	0.2	0.32	0.48

(2)由(1)可知小明先回答A类问题累计得分的期望为$E(X)=0\times0.2+20\times0.32+100\times0.48=54.4$.

若小明先回答B类问题,记Y为小明的累计得分,则Y的所有可能取值为 0,80,100,

$P(Y=0)=1-0.6=0.4$,

$P(Y=80)=0.6\times(1-0.8)=0.12$,

$P(Y=100)=0.6\times0.8=0.48$,

则Y的期望为$E(Y)=0\times0.4+80\times0.12+100\times0.48=57.6$.

因为$E(Y)>E(X)$,所以为使累计得分的期望最大,小明应选择先回答B类问题.

21. **解**:(1)由频率分布直方图得$(1.25\times0.2+1.75\times0.3+2.25\times0.4+2.75\times0.6+3.25\times0.4+3.75\times0.1)\times0.5=2.5$,所以这 100 名学生双休日两天家务劳动的平均时间为 2.5 小时.

(2)“双休日两天家务劳动的时间不少于 3 小时”的概率为$(0.4+0.1)\times0.5=\frac{1}{4}$,所以从该校所有学生中随机抽取 4 个人,恰好有 1 个人是“双休日两天家务劳动的时间不少于 3 小时”的概率为$P=C_4^1\times\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$.

(3)用分层抽样的方法从这 100 人抽取 8 人,其中“双休日两天家务劳动的时间不少于 3 小时”有$8\times\frac{1}{4}=2$人,则Y的可能取值为 0,1,2,$P(Y=0)=\frac{C_6^2}{C_8^2}=\frac{15}{28}$,

$P(Y=1)=\frac{C_2^1C_6^1}{C_8^2}=\frac{3}{7}$,

$P(Y=2)=\frac{C_2^2}{C_8^2}=\frac{1}{28}$,

所以Y的分布列为

Y	0	1	2
P	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{28}$

所以$E(Y)=0\times\frac{15}{28}+1\times\frac{3}{7}+2\times\frac{1}{28}=\frac{1}{2}$.

22.**解**:(1)设方案一中每组的检验次数为X,则X的取值为 1,6,

$P(X=1)=0.992^5=0.961$.

$P(X=6)=1-P(X=1)=1-0.961=0.039$,

所以X的分布列为

X	1	6
P	0.961	0.039

则$E(X)=1\times0.961+6\times0.039=1.195$.

故方案一的检验总次数的期望为$10E(X)=10\times1.195=11.95$.

设方案二中每组的检验次数为Y,则Y的取值为 1,11,

则$P(Y=1)=0.992^{10}=0.923$,

$P(Y=11)=1-0.992^{10}=0.077$,

则Y的分布列为

Y	1	11
P	0.923	0.077

则$E(Y)=1\times0.923+11\times0.077=1.77$.

故方案二的检验总次数的期望为$5E(Y)=5\times1.77=8.85$.

因为$11.95>8.85$,

则方案二的检测次数更少.

(2)①由已知得$\xi_1=k$,$\xi_2=1$或$\xi_2=k+1$,

则$P(\xi_2=1)=(1-p)^k$,

$P(\xi_2=k+1)=1-(1-p)^k$,

则$E(\xi_2)=(1-p)^k+(1+k)[1-(1-p)^k]=k+1-k(1-p)^k$,

因为$E(\xi_1)=E(\xi_2)$,

所以$k=k+1-k(1-p)^k$,

所以$p=1-\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}(k\geqslant2,k\in\mathbf{N}_+)$,

②令$f(k)=1-\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}(k\geqslant2,k\in\mathbf{N}_+)$,

则$f(2)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$,$f(3)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$,

所以$f(2)-f(3)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}<0$,

当$k\geqslant3$时,

$f(k+1)-f(k)=\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}-\left(\frac{1}{k+1}\right)^{\frac{1}{k+1}}$,

令$g(x)=-\frac{\ln x}{x}(x\geqslant3)$,

则$g'(x)=\frac{\ln x-1}{x^2}$,

当$k\geqslant3$时,$-\frac{1}{k}\ln k<-\frac{1}{k+1}\ln(k+1)$,

所以$\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}<\left(\frac{1}{k+1}\right)^{\frac{1}{k+1}}$,

所以当$k\geqslant3$时,$f(k+1)-f(k)<0$,

所以$f(2)<f(3)>f(4)>f(5)>\cdots$,

所以当$k=3$时,$f(k)$最大,

所以当$k=3$时,p取最大值,且最大值为$p=f(3)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$.

第 21 期

第 2~3 版同步周测

一、单项选择题

1~8.ACCBCCCC

二、多项选择题

9.AD　　10.BC

11.CD　　12.BCD

三、填空题

13.2　　14.$\sqrt{5}$

15.$\frac{8\sqrt{3}}{5}$　　16.$\frac{7\sqrt{2}}{4}$

四、解答题

17.**解**:(1)$2a=\sqrt{(6+4)^2+(2\sqrt{2})^2}-\sqrt{(6-4)^2+(2\sqrt{2})^2}=4\sqrt{3}$,所以$a^2=12$,又$c=4$,所以$b^2=4^2-12=4$,所以该双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$.

(2)因为$MF_1\perp F_1F_2$,所以点M的横坐标为-4,当$x=-4$时,$y^2=\frac{4}{3}$,所以$|MF_1|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,所以$S_{\triangle MF_1F_2}=\frac{1}{2}|MF_1||F_1F_2|=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times8=\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

18.(1)**解**:因为$|PF|=y_P+\frac{p}{2}$,

所以$4=3+\frac{p}{2}$,解得$p=2$,

所以抛物线C的标准方程为$x^2=4y$.

(2)**证明**:设切线AN的方程为$y=k(x-a)$,$k\neq0$,

联立方程组$\begin{cases}x^2=4y,\\y=k(x-a),\end{cases}$

消y可得$x^2-4kx+4ka=0$,

由题意可得$\Delta=16k^2-16ka=0$,即$a=k$,

所以切点$N(2a,a^2)$,又$A(a,0)$,$F(0,1)$,

所以$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AN}=(-a,1)\cdot(a,a^2)=0$.

所以$\angle FAN=90°$,

所以以FN为直径的圆过点A.

19.**解**:(1)椭圆C的离心率为$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,短轴的一个端点到焦点的距离为$\sqrt{b^2+c^2}=a=\sqrt{2}$,

所以$c=1$,所以$b=\sqrt{a^2-c^2}=1$,

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)设直线l的方程为$y=kx+m$,则直线l与y轴交点的纵坐标为m,

设点$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

由$\begin{cases}y=kx+m,\\x^2+2y^2=2,\end{cases}$化简得

$(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-2=0$,

由韦达定理,得$x_1+x_2=-\frac{4km}{2k^2+1}$,

$\Delta=16k^2m^2-4(2k^2+1)(2m^2-2)>0$,

化简得$m^2<2k^2+1$.

由线段AB的中点在直线$x=-\frac{1}{2}$上,

得$x_1+x_2=-1$,

故$-\frac{4km}{2k^2+1}=-1$,即$4km=2k^2+1$,

所以$m=\frac{2k^2+1}{4k}=\frac{k}{2}+\frac{1}{4k}\geqslant2\sqrt{\frac{k}{2}\cdot\frac{1}{4k}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

当且仅当$\frac{k}{2}=\frac{1}{4k}$,即$k=\frac{\sqrt{2}}{2}$时取等号,此时$m^2<2k^2+1$,满足$\Delta>0$,

因此,直线l与y轴交点纵坐标的最小值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

20.(1)**解**:由$(x+1)^2+y^2=8$,知$C_2(-1,0)$,半径$R=2\sqrt{2}$.因为$\triangle C_2AB$的周长为$4+4\sqrt{2}$,所以$|AB|=4$.又曲线C_1,C_2关于x轴对称,则$AB\perp x$轴,而$C_2(-1,0)$到AB的距离$d=\sqrt{R^2-2^2}=2$,故弦AB的一个端点坐标为$(1,2)$,

将$(1,2)$代入$y^2=2px(p>0)$,得$p=2$,故曲线C_1的方程为$y^2=4x$.

(2)**证明**:由(1)知$F(1,0)$,由于直线l不与x轴重合,可设$l:x=my+1$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,由$\begin{cases}x=my+1,\\y^2=4x,\end{cases}$消去$x$整理得$y^2-4my-4=0$,因此$y_1+y_2=4m$,$y_1y_2=-4$,

由于$k_1+k_2=\frac{y_1}{x_1+1}+\frac{y_2}{x_2+1}$

$=\frac{y_1}{my_1+2}+\frac{y_2}{my_2+2}$

$=\frac{2my_1y_2+2(y_1+y_2)}{(my_1+2)(my_2+2)}$

$=\frac{-8m+8m}{(my_1+2)(my_2+2)}=0$,

故k_1+k_2为定值 0.

21.**解**:(1)由题意知,$c=1$,$F_1(-1,0)$,$F_2(1,0)$.

$2a=|TF_1|+|TF_2|=\sqrt{(-1+1)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}+\sqrt{(-1-1)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4$,

所以$a=2$,所以$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$,

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)若存在点$P(m,0)$,使得以PG,PH为邻边的平行四边形是菱形,

则P为线段GH的中垂线与x轴的交点.

设直线l_1的方程为$y=kx+2$,$G(x_1,y_1)$,$H(x_2,y_2)$,

由$\begin{cases}y=kx+2,\\\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$得$(3+4k^2)x^2+16kx+4=0$,

$\Delta=256k^2-16(3+4k^2)>0$,又$k>0$,

所以$k>\frac{1}{2}$.

由韦达定理,得$x_1+x_2=-\frac{16k}{3+4k^2}$,

设GH的中点为(x_0,y_0),

则$x_0=-\frac{8k}{3+4k^2}$,$y_0=kx_0+2=\frac{6}{3+4k^2}$,

所以线段GH的中垂线方程为

$y=-\frac{1}{k}\left(x+\frac{8k}{3+4k^2}\right)+\frac{6}{3+4k^2}$,

令$y=0$,可得$x=\frac{-2k}{3+4k^2}=-\frac{2}{\frac{3}{k}+4k}$,

即$m=-\frac{2}{\frac{3}{k}+4k}$.

因为$k>\frac{1}{2}$,所以$\frac{3}{k}+4k\geqslant2\sqrt{\frac{3}{k}\cdot4k}=4\sqrt{3}$,当且仅当$\frac{3}{k}=4k$,即$k=\frac{\sqrt{3}}{2}$时取等号,

所以$m\geqslant-\frac{2}{4\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{6}$,且$m<0$.

所以m的取值范围是$\left[-\frac{\sqrt{3}}{6},0\right)$.

22.(1)**解**:因为$x=1$与抛物线C有两个不同的交点,故可设抛物线C的方程为$y^2=2px(p>0)$.令$x=1$,则$y=\pm\sqrt{2p}$,由抛物线的对称性,不妨设P在x轴的上方,Q在x轴的下方,故$P(1,\sqrt{2p})$,$Q(1,-\sqrt{2p})$.

因为$OP\perp OQ$,所以$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=1+\sqrt{2p}\times(-\sqrt{2p})=0$,解得$p=\frac{1}{2}$,所以抛物线$C$的方程为$y^2=x$.

因为$\odot M$与$l:x=1$相切,所以$\odot M$的半径为 1,

所以$\odot M$的方程为$(x-2)^2+y^2=1$.

(2)**解**:设$A_1(y_1^2,y_1)$,$A_2(y_2^2,y_2)$,$A_3(y_3^2,y_3)$.当A_1,A_2,A_3其中某一个为坐标原点时(假设A_1为坐标原点时),设直线A_1A_2方程为$kx-y=0$,因为直线A_1A_2与$\odot M$相切,所以点$M(2,0)$到直线A_1A_2的距离为 1,即$\frac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$,解得$k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

联立$\begin{cases}y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x,\\y^2=x,\end{cases}$得$x=3$,此时直线$A_2A_3$的方程为$x=3$,所以直线$A_2A_3$与$\odot M$的位置关系为相切.

当A_1,A_2,A_3都不是坐标原点时,即$y_1\neq y_2\neq y_3$,直线A_1A_2的方程为$x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$,由题意,得$\frac{|2+y_1y_2|}{\sqrt{1+(y_1+y_2)^2}}=1$,即$(y_1^2-1)y_2^2+2y_1y_2+3-y_1^2=0$,同理可得$(y_1^2-1)y_3^2+2y_1y_3+3-y_1^2=0$,所以$y_2,y_3$是关于$t$的方程$(y_1^2-1)t^2+2y_1t+3-y_1^2=0$的两根,所以$y_2+y_3=\frac{-2y_1}{y_1^2-1}$,$y_2y_3=\frac{3-y_1^2}{y_1^2-1}$.由两点式,得直线$A_2A_3$的方程为$x-(y_2+y_3)y+y_2y_3=0$,

设$M(2,0)$到直线A_2A_3的距离为d,则$d^2=\frac{(2+y_2y_3)^2}{1+(y_2+y_3)^2}=\frac{\left(2+\frac{3-y_1^2}{y_1^2-1}\right)^2}{1+\left(\frac{-2y_1}{y_1^2-1}\right)^2}=1$,

所以$d=1$,所以直线A_2A_3与$\odot M$的位置关系为相切.

综上,直线A_2A_3与$\odot M$相切.

第22期

第 2~3 版同步周测

一、单项选择题

1~8.DDCBACDC

二、多项选择题

9.BD　　10.BC

11.CD　　12.AD

三、填空题

13.$\sqrt{19}$　　14.$-1+\mathrm{i}$

15.圆　　16.$-\frac{4}{3}$

四、解答题

17.**解**:因为 $x,y\in\mathbf{R}$,根据复数相等的充要条件,由方程①得$\begin{cases}2x+1=y,\\1=3-y,\end{cases}$

所以$\begin{cases}x=\frac{1}{2},\\y=2.\end{cases}$

代入方程②得$(1+2a)-b\mathrm{i}=9-8\mathrm{i}$.

因为 $a,b\in\mathbf{R}$,

所以$\begin{cases}1+2a=9,\\-b=-8,\end{cases}$

所以 $a=4,b=8$.

18.**解**:(1)由 z 是实数,得

$\begin{cases}m^2-2m-2>0,\\m^2+3m+2=0,\end{cases}$

解得 $m=-2$,或 $m=-1$.

即 $m=-2$,或 $m=-1$ 时,z 是实数.

(2)由 z 是纯虚数,得

$\begin{cases}m^2-2m-2=1,\\m^2+3m+2\neq0,\end{cases}$

解得 $m=3$.

即 $m=3$ 时,z 是纯虚数.

(3)由 z 对应的点位于复平面的第一象限,得$\begin{cases}m^2-2m-2>1,\\m^2+3m+2>0,\end{cases}$

解得 $m>3$,或 $m<-2$.

即 $m>3$,或 $m<-2$ 时,z 对应的点位于复平面的第一象限.

19.**解**:(1)因为

$|z_1|=\left|\sin\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{6}\right|$

$=\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{3}+\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right)^2}$

$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

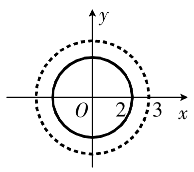
$=\frac{\sqrt{6}}{2}$,

$|z_2|=|2+3\mathrm{i}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$,

且$|z_1|=\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{\frac{3}{2}}<\sqrt{13}=|z_2|$,

所以$|z_1|<|z_2|$.

(2)如图,z 在复平面内表示的图形是以原点 O 为圆心,半径分别为 2 个单位长度和 3 个单位长度的两个圆所夹的圆环,但不包括大圆圆周.



(第 19 题图)

20.**解**:(1)因为$\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{OA}$,

所以$\overrightarrow{AO}$所表示的复数为$-3-2\mathrm{i}$.

因为$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}$,

所以$\overrightarrow{BC}$所表示的复数为$-3-2\mathrm{i}$.

(2)因为$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$,

所以$\overrightarrow{CA}$所表示的复数为$(3+2\mathrm{i})-(-2+4\mathrm{i})=5-2\mathrm{i}$.

(3)因为$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$,

所以$\overrightarrow{OB}$表示的复数为$(3+2\mathrm{i})+(-2+4\mathrm{i})=1+6\mathrm{i}$,即点 B 对应的复数为 $1+6\mathrm{i}$.

21.**解**:(1)$z_1=\mathrm{i}(1-\mathrm{i})^3=\mathrm{i}(-2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})=2-2\mathrm{i}$.

所以$|z_1|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$.

(2)因为$|z|=1$,

所以设 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta(\theta\in\mathbf{R})$,

则$|z-z_1|=|\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta-2+2\mathrm{i}|$

$=\sqrt{(\cos\theta-2)^2+(\sin\theta+2)^2}$

$=\sqrt{9+4\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$.

当 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=1$ 时,$|z-z_1|^2$ 取得最大值,最大值为 $9+4\sqrt{2}$,

所以$|z-z_1|$的最大值为 $2\sqrt{2}+1$.

22.**解**:(1)因为 z_1,z_2,z_3 成等比数列,

所以 $z_2^2=z_1\cdot z_3$,

即$(a+b\mathrm{i})^2=b+a\mathrm{i}$,

所以$\begin{cases}a^2-b^2=b,\\2ab=a.\end{cases}$

因为 $a>0$,

所以 $a=\frac{\sqrt{3}}{2},b=\frac{1}{2}$.

(2)因为 $z_1=1,z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$,

所以公比 $q=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$,

所以 $z_n=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{n-1}$.

因为 $z_1+z_2+\cdots+z_n=1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}=0$,

所以 $q^n=1$,

所以$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n$

$=(-\mathrm{i})^n\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^n$.

因为$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^3=1,(-\mathrm{i})^4=1$,

所以 n 既是 3 的倍数,又是 4 的倍数.

所以 n 的最小值为 12.

(3)因为 $n=12$,

所以 $z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot\cdots\cdot z_n$

$=1\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\cdot\cdots\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{11}$

$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{1+2+\cdots+11}$

$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{66}$

$=\left[\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\cdot(-\mathrm{i})\right]^{66}$

$=(-\mathrm{i})^{66}$

$=\mathrm{i}^2$

$=-1$.

第 23 期

第2~3版同步周测

一、单项选择题

1~8.DBCCDBBC

二、多项选择题

9.CD　　10.ACD

11.BC　　12.AC

三、填空题

13.03　　14.36

15.35　　16.99.5%

四、解答题

17.**解**:(1)由题意,可得甲机床、乙机床生产的产品总数均为 200 件,因为甲机床生产的一级品的频数为 150,所以甲机床生产的产品中一级品的频率为$\frac{150}{200}=\frac{3}{4}$. 因为乙机床生产的一级品的频数为 120,所以乙机床生产的产品中一级品的频率为$\frac{120}{200}=\frac{3}{5}$.

(2)根据 2×2 列联表,可得 K^2 的观测值为 $k=\frac{400\times(150\times80-50\times120)^2}{270\times130\times200\times200}\approx10.256>6.635$, 所以有 99%的把握认为甲机床的产品质量与乙机床的产品质量有差异.

18.**解**:(1)由已知,$\sum_{i=1}^{20}y_i=1200$,所以 20 个样区野生动物数量的平均数为 $\bar{y}=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}y_i=60$,所以该地区这种野生动物数量的估计值为 $60\times200=12000$.

(2)因为 $\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2=80$, $\sum_{i=1}^{20}(y_i-\bar{y})^2=9000$, $\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=800$,

所以 $r=\frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{20}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{800}{\sqrt{80\times9000}}=\frac{800}{600\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\approx0.94$.

(3)更合理的抽样方法是分层抽样,根据植物覆盖面积的大小对地块分层,再对 200 个地块进行分层抽样.

理由如下:由(2)知各样区的这种野生动物数量与植物覆盖面积有很强的正相关.由于各地块间植物覆盖面积差异很大,从而各地块间这种野生动物数量差异也很大,采用分层抽样的方法较好地保持了样本结构与总体结构的一致性,提高了样本的代表性,从而可以获得该地区这种野生动物数量更准确的估计.

19.**解**:(1)由题中数据,可得$\bar{x}=\frac{1}{10}\times(9.8+10.3+10.0+10.2+9.9+9.8+10.0+10.1+10.2+9.7)=10$,

$\bar{y}=\frac{1}{10}\times(10.1+10.4+10.1+10.0+10.1+10.3+10.6+10.5+10.4+10.5)=10.3$.

$s_1^2=\frac{1}{10}\times[(9.8-10)^2+(10.3-10)^2+(10-10)^2+(10.2-10)^2+(9.9-10)^2+(9.8-10)^2+(10-10)^2+(10.1-10)^2+(10.2-10)^2+(9.7-10)^2]=0.036$,

$s_2^2=\frac{1}{10}\times[(10.1-10.3)^2+(10.4-10.3)^2+(10.1-10.3)^2+(10.0-10.3)^2+(10.1-10.3)^2+(10.3-10.3)^2+(10.6-10.3)^2+(10.5-10.3)^2+(10.4-10.3)^2+(10.5-10.3)^2]=0.04$.

(2)$\bar{y}-\bar{x}=10.3-10=0.3$,

$\frac{s_1^2+s_2^2}{10}=\frac{0.036+0.04}{10}=0.0076$,

因为$\left(\frac{\bar{y}-\bar{x}}{2}\right)^2=0.0225>0.0076$,

所以$\bar{y}-\bar{x}>2\sqrt{\frac{s_1^2+s_2^2}{10}}$,

所以新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高.

20.**解**:(1)根据题意,$\bar{x}=6,\bar{y}=8.3$,

则 $7\bar{x}\bar{y}=348.6$, $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{7}x_iy_i-7\bar{x}\ \bar{y}}{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{359.6-348.6}{7}=\frac{11}{7}\approx1.571$,

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}\approx8.3-1.571\times6=-1.126$,

所以回归方程为$\hat{y}=1.571x-1.126$.

(2)将 $x=8.0$ 代入方程得

$\hat{y}=1.571\times8.0-1.126=11.442$,

所以小明家的“超级大棚”当年的利润大约为 11.442 万元.

(3)无丝豆亩平均利润的平均数为 $m=\frac{1.5+1.7+2.1+2.2+2.5}{5}=2$,

方差 $s_1^2=\frac{1}{5}[(1.5-2)^2+(1.7-2)^2+(2.1-2)^2+(2.2-2)^2+(2.5-2)^2]=0.128$.

彩椒亩平均利润的平均数为

$n=\frac{1.8+1.9+1.9+2.2+2.2}{5}=2$,

方差 $s_2^2=\frac{1}{5}[(1.8-2)^2+(1.9-2)^2+(1.9-2)^2+(2.2-2)^2+(2.2-2)^2]=0.028$.

因为 $m=n,s_1^2>s_2^2$,所以种植彩椒比较好.

21.**解**:(1)由频率分布直方图得,

$10\times(0.035+0.020+0.014+0.004+0.002)=0.75$,

$a=(1-0.75)\div10=0.025$.

设总共调查了 N 个人,则不满意的为

$N\times(0.002+0.004)\times10=120$,

解得 $N=2000$ 人,

所以基本满意人数为

$N\times(0.014+0.02)\times10=680$ 人.

(2)在等级为不满意的 120 个市民中按年龄分层抽取 6 人,则老年人抽取 $6\times\frac{1}{3}=2$ 人,中年人抽取 $6\times\frac{2}{3}=4$ 人,从中选取 2 人担任治理监察员,基本事件总数 $n=C_6^2=15$,至少有一位老年监察员包含的基本事件个数 $m=C_2^2+C_2^1C_4^1=9$,所以至少有一位老年监察员的概率 $P=\frac{m}{n}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$.

(3)所选样本满意程度的平均分为

$45\times0.02+55\times0.04+65\times0.14+75\times0.2+85\times0.35+95\times0.25=80.7$.

所以市民满意指数为 0.807,

又 $0.75<0.807<0.85$,

所以该市在本次对该项工作的验收中的达标情况为:达标级,没有获得优质奖.

22.**解**:(1)由题意知脐橙在[350,400),[400,450)的比例为 3:2,故应分别在质量为[350,400),[400,450)的脐橙中各抽取 3 个和 2 个. 记抽取质量在[350,400)的为 A,B,C,质量在[400,450)的为 D,E,则从这 5 个脐橙中随机抽取 2 个的方法共有以下 10 种:$AB,AC,AD,AE,BC,BD,BE,CD,CE,DE$,其中 2 个脐橙质量都不小于 400 克的方法只有 DE 这 1 种.故 2 个脐橙质量都不小于 400 克的概率为$\frac{1}{10}$.

(2)方案乙更好,理由如下:

由频率分布直方图知[200,250),[250,300),[300,350),[350,400),[400,450),[450,500]的频率分别为0.05,0.16,0.24,0.3,0.2,0.05.

若用甲方案,由于各质量区间脐橙数量分别为 500,1600,2400,3000,2000,500,故总收益为$(225\times0.05+275\times0.16+325\times0.24+375\times0.3+425\times0.2+475\times0.05)\times10000\div1000\times10=35450$ 元;

若用乙方案,脐橙低于 350 克的有$(0.05+0.16+0.24)\times10000=4500$ 个,不低于 350 克的有 5500 个,则总收益为 $4500\times2+5500\times5=36500$ 元.

所以乙方案收益更高,选择方案乙.