第 24 期

第 2~3 版同步周测

一、选择题

1~6.CBCACA

7~12.CACCBA

二、填空题

13.16π　　14.$\rho=3\sqrt{3}\cos\theta+3\sin\theta$

15.$2\sqrt{7}$　　16.$(x-2)^2+(y-2)^2=2$

三、解答题

17.解:(1)因为 $A\left(\rho_1,\frac{\pi}{3}\right)$在直线 l:$\rho\cos\theta=2$ 上,所以 $\rho_1\cos\frac{\pi}{3}=2$,解得 $\rho_1=4$.

因为点 $B\left(\rho_2,\frac{\pi}{6}\right)$在圆 C:$\rho=4\sin\theta$ 上,所以 $\rho_2=4\sin\frac{\pi}{6}=2$,又圆 C 经过极点,且极点的极坐标 $\rho=0$,极角为任意角,即点$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$也在圆 C 上,因此 $\rho_2=2$ 或 0.

(2)由直线 l 与圆 C 得方程组$\begin{cases}\rho\cos\theta=2,\\ \rho=4\sin\theta,\end{cases}$则 $\sin2\theta=1$.因为$\rho\geqslant0,\theta\in[0,2\pi)$,所以 $2\theta=\frac{\pi}{2}$,所以 $\theta=\frac{\pi}{4}$.所以 $\rho=4\times\sin\frac{\pi}{4}=2\sqrt{2}$.故直线 l 与圆 C 的公共点的极坐标为$\left(2\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$.

18.解:(1)设圆 C_1 上任意一点 P(x,y)经变换后对应的点为 $P'(x',y')$,

则$\begin{cases}x'=3x,\\ y'=\sqrt{5}y,\end{cases}$即$\begin{cases}x=\frac{x'}{3},\\ y=\frac{y'}{\sqrt{5}},\end{cases}$代入圆 C_1:$x^2++y^2=4$,得$\left(\frac{x'}{3}\right)^2+\left(\frac{y'}{\sqrt{5}}\right)^2=4$,

所以曲线 C_2 的直角坐标方程为$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$,将 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$ 代入,可得曲线 C_2 的极坐标方程为 $5\rho^2\cos^2\theta+9\rho^2\sin^2\theta=180$,即 $\rho^2=\frac{180}{5+4\sin^2\theta}$.

(2)设 $M(\rho_1,\alpha)$,因为$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$,

所以 $N\left(\rho_2,\alpha\pm\frac{\pi}{2}\right)$,

由(1)可得$\frac{1}{|OM|^2}=\frac{1}{\rho_1^2}=\frac{5+4\sin^2\alpha}{180}$,

$\frac{1}{|ON|^2}=\frac{1}{\rho_2^2}=\frac{5+4\sin^2\left(\alpha\pm\frac{\pi}{2}\right)}{180}=\frac{5+4\cos^2\alpha}{180}$,

所以$\frac{1}{|OM|^2}+\frac{1}{|ON|^2}=\frac{5+4\sin^2\alpha}{180}+\frac{5+4\cos^2\alpha}{180}=\frac{7}{90}$.

19.解:(1)由极坐标方程为$\rho=2\sqrt{2}\cdot\cos\theta$,得 $\rho^2=2\sqrt{2}\rho\cos\theta$,因为 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$,所以曲线 C 的直角坐标方程是 $x^2+y^2=2\sqrt{2}x$,即$(x-\sqrt{2})^2+y^2=2$,表示圆心为 $C(\sqrt{2},0)$,半径为$\sqrt{2}$的圆.

(2)设点 P 的直角坐标为(x,y),$M(x_1,y_1)$,因为 $A(1,0)$,所以$\overrightarrow{AP}=(x-1,y)$,$\overrightarrow{AM}=(x_1-1,y_1)$,由$\overrightarrow{AP}=\sqrt{2}\overrightarrow{AM}$,得$\begin{cases}x-1=\sqrt{2}(x_1-1),\\ y=\sqrt{2}y_1,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)+1,\\ y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}y.\end{cases}$

所以 $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)+1,\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)$,因为 M 在 C 上,所以将 M 代入圆 C:$(x-\sqrt{2})^2+y^2=2$,得$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)+1-\sqrt{2}\right]^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^2=2$,化简得点 P 的轨迹方程是$(x-3+\sqrt{2})^2+y^2=4$,表示圆心为 $C_1(3-\sqrt{2},0)$,半径为 2 的圆,将其化为参数方程是$\begin{cases}x=3-\sqrt{2}+2\cos\theta,\\ y=2\sin\theta\end{cases}$($\theta$为参数).

因为$|CC_1|=\left|(3-\sqrt{2})-\sqrt{2}\right|=3-2\sqrt{2}<2-\sqrt{2}$,所以圆 C 与圆 C_1 内含,

所以 C 与 C_1 没有公共点.

20.解:(1)因为⊙C 的圆心为 C(2,1),半径为 1,所以⊙C 的标准方程为$(x-2)^2+(y-1)^2=1$,则⊙C 的一个参数方程为$\begin{cases}x=2+\cos\theta,\\ y=1+\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数).

(2)由题意可知两条切线方程斜率都存在,设切线方程为 $y-1=k(x-4)$,即 $kx-y-4k+1=0$,因为该直线与⊙C 相切,所以圆心 C(2,1)到切线的距离 $d=\frac{|2k-1-4k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$,

解得 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以切线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(x-4)+1$.

因为 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$,所以这两条切线的极坐标方程为$\rho\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(\rho\cos\theta-4)+1$.

21.解:(1)曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=4\cos^2\theta,\\ y=4\sin^2\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数),转化为普通方程为 $x+y-4=0$,所以 C_1 的普通方程为 $x+y=4(0\leqslant x\leqslant4)$.曲线 C_2 的参数方程为$\begin{cases}x=t+\frac{1}{t},\\ y=t-\frac{1}{t}\end{cases}$($t$为参数).

由 $x^2=t^2+\frac{1}{t^2}+2,y^2=t^2+\frac{1}{t^2}-2$,

得 $x^2-y^2=4$,

所以 C_2 的普通方程为 $x^2-y^2=4$.

(2)由$\begin{cases}x+y=4,\\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{5}{2},\\ y=\frac{3}{2},\end{cases}$

即 P 的直角坐标为$\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$.

设所求圆的圆心的直角坐标为$(x_0,0)$,由题意得 $x_0^2=\left(x_0-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$,

解得 $x_0=\frac{17}{10}$,因此,所求圆的极坐标方程为 $\rho=\frac{17}{5}\cos\theta$.

22.解:(1)由 $\rho=4\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=4\cos\theta-4\sin\theta$,得 $\rho^2=4\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta$,

所以 $x^2+y^2=4x-4y$,即$(x-2)^2+(y+2)^2=8$.

所以曲线 C_2 的直角坐标方程为$(x-2)^2+(y+2)^2=8$,表示以(2,-2)为圆心,以 $2\sqrt{2}$ 为半径的圆.

(2)将$\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=-2+t\sin\alpha\end{cases}$($t$ 为参数,$0\leqslant\alpha<\pi$)代入$(x-2)^2+(y+2)^2=8$,

整理得 $t^2-4t\cos\alpha-4=0$.

设 A,B 所对应的参数分别为 t_1,t_2,则 $t_1+t_2=4\cos\alpha,t_1t_2=-4$.

所以$\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}=\frac{|MA|+|MB|}{|MA|\cdot|MB|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{|t_1-t_2|}{4}=\frac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{4}=\frac{\sqrt{16\cos^2\alpha+16}}{4}=\frac{\sqrt{17}}{4}$,解得 $\cos^2\alpha=\frac{1}{16}$,

则 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

第21期

第 2~3 版同步周测

一、选择题

1~6.DBCBCB

7~12.DADDBC

二、填空题

13.$\sqrt{2}$　　14.4

15.2　　16.17

三、解答题

17.证明:若证$\frac{|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}\leqslant\sqrt{2}$,

只需证$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|\leqslant\sqrt{2}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$,

只需证$(|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|)^2\leqslant(\sqrt{2}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|)^2$,

即证 $\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\leqslant2\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{b}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,

因为非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,

即证 $2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\leqslant\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2$,

即证$(|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|)^2\geqslant0$,显然成立,

所以原不等式成立.

18.解:(1)因为 z 在复平面内对应的点在第四象限,

所以$\begin{cases}m^2+2m>0,\\ m^2-m-6<0,\end{cases}$

解得 $0<m<3$.

所以实数 m 的取值范围是(0,3).

(2)因为 z 为纯虚数,

所以$\begin{cases}m^2+2m=0,\\ m^2-m-6\neq0,\end{cases}$

解得 m=0,

所以 $z=-6i$,则$8+\bar{z}=8+6i$,

所以$|8+\bar{z}|=|8+6i|=\sqrt{8^2+6^2}=10$.

19.解:(1)当 $a=1,b=2,c=3,d=4$ 时,

$|z_1|=|1+2i|=\sqrt{5}$,$|z_2|=|3+4i|=5$,

$|z_1\cdot z_2|=|(1+2i)(3+4i)|=|-5+10i|=5\sqrt{5}$.

(2)由(1)猜测,$|z_1|\cdot|z_2|=|z_1\cdot z_2|$.

证明如下:因为 $z_1=a+bi$ $(a,b\in\mathbf{R})$,$z_2=c+di(c,d\in\mathbf{R})$,

所以$|z_1|=\sqrt{a^2+b^2}$,$|z_2|=\sqrt{c^2+d^2}$,

$|z_1|\cdot|z_2|=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$

$=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$;

$z_1\cdot z_2=(a+bi)(c+di)$

$=(ac-bd)+(ad+bc)i$,

所以$|z_1\cdot z_2|=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}$

$=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$.

所以$|z_1|\cdot|z_2|=|z_1\cdot z_2|$.

20.解:(1)由程序框图知,函数 $f(x)=\begin{cases}e^x,x<0,\\ 0,x=0,\\ x+\frac{1}{x},x>0.\end{cases}$输入 x=-1 时,输出 $y=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

(2)若 $x\geqslant\frac{1}{2}$,则$f(x)=x+\frac{1}{x}\geqslant2$,当且仅当 x=1 时,等号成立.

所以 $x\geqslant\frac{1}{2}$时,函数 $y=f(x)$的取值范围是$[2,+\infty)$.

21.(1)**解**:$\overrightarrow{MA}=(1-a,-3-2a)$,

$\overrightarrow{MB}=(3-a,-1-2a)$,

当$|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}|$时,得

$(1-a)^2+(-3-2a)^2=(3-a)^2+(-1-2a)^2$,

解得 $a=0$.

(2)**证明**:$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(1-a)(3-a)+(-3-2a)(-1-2a)=5a^2+4a+6=5\left(a+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{26}{5}>0$,

所以∠AMB 恒为锐角或 0 角,

当∠AMB=0 时,

有$\overrightarrow{MA}$与$\overrightarrow{MB}$同向,

即$(-3-2a)(3-a)=(1-a)(-1-2a)$,

得 $a=-4$,

这与题设 $a\neq-4$ 相矛盾,

故∠$AMB\neq0$,即∠AMB 恒为锐角.

22.解:(1)$S_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$,

可得 $n=1$ 时,$a_1=S_1=1$;

$n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}(n-1)^2-\frac{1}{2}(n-1)=n$,对 $n=1$ 也成立,

所以 $a_n=n,n\in\mathbf{N}_+$.

(2)$b_n=a_n\cdot2^{a_n}=n\cdot2^n$,

可得前 n 项和

$T_n=1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\cdot2^n$,

$2T_n=1\times2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+n\cdot2^{n+1}$,

相减可得$-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot2^{n+1}=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n\cdot2^{n+1}$,

所以 $T_n=2+(n-1)\cdot2^{n+1}$.

(3)$T_n\leqslant2+\lambda\cdot2^{a_{2n+1}}(n\in\mathbf{N}_+)$恒成立,

即为 $2+(n-1)\cdot2^{n+1}\leqslant2+\lambda\cdot2^{2n+1}$,

即 $\lambda\geqslant\frac{n-1}{2^n}$恒成立.

设 $c_n=\frac{n-1}{2^n}$,

$c_{n+1}-c_n=\frac{n}{2^{n+1}}-\frac{n-1}{2^n}=\frac{2-n}{2^{n+1}}$,

当 $n\leqslant2$ 时,$c_{n+1}-c_n\geqslant0$,

当 $n\geqslant3$ 时,$c_{n+1}-c_n<0$,

可得 $c_1<c_2=c_3>c_4>c_5>\cdots$,

则 c_n 的最大值为$\frac{1}{4}$,可得 $\lambda\geqslant\frac{1}{4}$.

所以 λ 的取值范围是$\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$.

⑥

第 22 期

第2~3版同步周测

一、选择题

1~6.BCCCCB

7~12.DDBBBC

二、填空题

13.23　　14.36

15.35　　16.99.5%

三、解答题

17.**解:**(1)由题意,可得甲机床、乙机床生产的产品总数均为 200 件,因为甲机床生产的一级品的频数为 150,所以甲机床生产的产品中一级品的频率为 $\frac{150}{200}=\frac{3}{4}$. 因为乙机床生产的一级品的频数为 120,所以乙机床生产的产品中一级品的频率为 $\frac{120}{200}=\frac{3}{5}$.

(2)根据 2×2 列联表,可得 K^2 的观测值为 $k=\frac{400\times(150\times80-50\times120)^2}{270\times130\times200\times200}\approx10.256>6.635$,

所以有 99% 的把握认为甲机床的产品质量与乙机床的产品质量有差异.

18.**解:**(1)由已知,$\sum\limits_{i=1}^{20}y_i=1200$,

所以 20 个样区野生动物数量的平均数为 $\bar{y}=\frac{1}{20}\sum\limits_{i=1}^{20}y_i=60$,

所以该地区这种野生动物数量的估计值为 $60\times200=12000$.

(2)因为 $\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2=80$, $\sum\limits_{i=1}^{20}(y_i-\bar{y})^2=9000$, $\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=800$,

所以 $r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{20}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{800}{\sqrt{80\times9000}}=\frac{800}{600\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\approx0.94$.

(3)更合理的抽样方法是分层抽样,根据植物覆盖面积的大小对地块分层,再对 200 个地块进行分层抽样.

理由如下:由(2)知各样区的这种野生动物数量与植物覆盖面积有很强的正相关.由于各地块间植物覆盖面积差异很大,从而各地块间这种野生动物数量差异也很大,采用分层抽样的方法较好地保持了样本结构与总体结构的一致性,提高了样本的代表性,从而可以获得该地区这种野生动物数量更准确的估计.

19.**解:**(1)由题中数据,可得 $\bar{x}=\frac{1}{10}\times(9.8+10.3+10.0+10.2+9.9+9.8+10.0+10.1+10.2+9.7)=10$,

$\bar{y}=\frac{1}{10}\times(10.1+10.4+10.1+10.0+10.1+10.3+10.6+10.5+10.4+10.5)=10.3$.

$s_1^2=\frac{1}{10}\times[(9.8-10)^2+(10.3-10)^2+(10-10)^2+(10.2-10)^2+(9.9-10)^2+(9.8-10)^2+(10-10)^2+(10.1-10)^2+(10.2-10)^2+(9.7-10)^2]=0.036$,

$s_2^2=\frac{1}{10}\times[(10.1-10.3)^2+(10.4-10.3)^2+(10.1-10.3)^2+(10.0-10.3)^2+(10.1-10.3)^2+(10.3-10.3)^2+(10.6-10.3)^2+(10.5-10.3)^2+(10.4-10.3)^2+(10.5-10.3)^2]=0.04$.

(2) $\bar{y}-\bar{x}=10.3-10=0.3$, $\frac{s_1^2+s_2^2}{100}=\frac{0.036+0.04}{10}=0.0076$,

因为 $\left(\frac{\bar{y}-\bar{x}}{2}\right)^2=0.0225>0.0076$,

所以 $\bar{y}-\bar{x}>2\sqrt{\frac{s_1^2+s_2^2}{10}}$,

所以新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高.

20.**解:**(1)由题意,得 $\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$, $\bar{y}=\frac{5.6+6.5+7.4+8.2+9.1}{5}=7.36$,

$\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i=119.1$, $\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2=55$,

所以 $\hat{b}=\frac{119.1-5\times3\times7.36}{55-5\times3^2}=0.87$,

故 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=7.36-0.87\times3=4.75$,

所以 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=0.87x+4.75$.

(2)月平均收入超过 1 万元,即年收入超过 12 万元,

当 $x=8$ 时,$\hat{y}=0.87\times8+4.75=11.71<12$,

当 $x=9$ 时,$\hat{y}=0.87\times9+4.75=12.58>12$,

因为年份代号为 9 是 2024 年,所以预测从 2024 年开始村民甲养殖生态黑猪的月平均收入将超过 1 万元.

21.**解:**(1)由频率分布直方图得,

$10\times(0.035+0.020+0.014+0.004+0.002)=0.75$,

$a=(1-0.75)\div10=0.025$.

设总共调查了 N 个人,则不满意的为 $N\times(0.002+0.004)\times10=120$,

解得 $N=2000$ 人,

所以基本满意人数为

$N\times(0.014+0.02)\times10=680$ 人.

(2) 在等级为不满意的 120 个市民中按年龄分层抽取 6 人,则老年人抽取 $6\times\frac{1}{3}=2$ 人,中年人抽取 $6\times\frac{2}{3}=4$ 人,从中选取 2 人担任治理监察员,基本事件总数 $n=C_6^2=15$,至少有一位老年监察员包含的基本事件个数 $m=C_2^2+C_2^1C_4^1=9$,所以至少有一位老年监察员的概率 $P=\frac{m}{n}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$.

(3)所选样本满意程度的平均分为

$45\times0.02+55\times0.04+65\times0.14+75\times0.2+85\times0.35+95\times0.25=80.7$.

所以市民满意指数为 0.807,

又 $0.75<0.807<0.85$,

所以该市在本次对该项工作的验收中的达标情况为:达标级,没有获得优质奖.

22.**解:**(1)由题意知脐橙在[350,400),[400,450)的比例为 3:2,故应分别在质量为[350,400),[400,450)的脐橙中各抽取 3 个和 2 个.记抽取质量在[350,400)的为 A,B,C,质量在[400,450)的为 D,E,则从这 5 个脐橙中随机抽取 2 个的方法共有以下 10 种:$AB,AC,AD,AE,BC,BD,BE,CD,CE,DE$,其中 2 个脐橙质量都不小于 400 克的方法只有 DE 这 1 种.

故 2 个脐橙质量都不小于 400 克的概率为 $\frac{1}{10}$.

(2)方案乙更好,理由如下:

由频率分布直方图知[200,250),[250,300),[300,350),[350,400),[400,450),[450,500]的频率分别为 0.05,0.16,0.24,0.3,0.2,0.05.

若用甲方案,由于各质量区间脐橙数量分别为 500,1600,2400,3000,2000,500,

故总收益为 $(225\times0.05+275\times0.16+325\times0.24+375\times0.3+425\times0.2+475\times0.05)\times10000\div1000\times10=35450$ 元;

若用乙方案,脐橙低于 350 克的有 $(0.05+0.16+0.24)\times10000=4500$ 个,

不低于 350 克的有 5500 个,则总收益为 $4500\times2+5500\times5=36500$ 元.

所以乙方案收益更高,选择方案乙.

第 23 期

第2~3版同步周测

一、选择题

1~6.ACCCDB

7~12.BBADCB

二、填空题

13.0.2　　14.19

15.$\frac{2}{5}$　　16.0.4

三、解答题

17.**解:**(1)由 $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$, $n\geqslant4$,

可得 $a_2=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$,

$a_3=C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$,

$a_4=C_n^4=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$,

由 $a_3^2=2a_2a_4$,得 $\left[\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\right]^2=2\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$,

解得 $n=5$.

(2) $(1+\sqrt{3})^5=C_5^0+C_5^1\sqrt{3}+C_5^2(\sqrt{3})^2+C_5^3(\sqrt{3})^3+C_5^4(\sqrt{3})^4+C_5^5(\sqrt{3})^5=a+b\sqrt{3}$,

由于 $a,b\in\mathbf{N}_+$,可得 $a=C_5^0+3C_5^2+9C_5^4=1+30+45=76$, $b=C_5^1+3C_5^3+9C_5^5=44$,

可得 $a^2-3b^2=76^2-3\times44^2=-32$.

18.**解:**(1)从 7 月至 11 月中任选两个月份,所有可能的结果为 Ω={(7,8),(7,9),(7,10),(7,11),(8,9),(8,10),(8,11),(9,10),(9,11),(10,11)},共 10 种情况.

记事件 A="至少有一个月份这两年该国产品牌 SUV 销量相同",

则 A={(7,8),(7,11),(8,9),(8,10),(8,11),(9,11),(10,11)},共 7 种情况,所以 $P(A)=\frac{7}{10}$,即至少有一个月份这两年该国产品牌 SUV 销量相同的概率为 $\frac{7}{10}$.

(2) $\bar{x}_{2020}=\frac{1}{5}(2.8+3.9+3.5+4.4+5.4)=4$,

$\bar{x}_{2021}=\frac{1}{5}(3.8+3.9+4.5+4.9+5.4)=4.5$,

$s_{2020}^2=\frac{1}{5}[(2.8-4)^2+(3.9-4)^2+(3.5-4)^2+(4.4-4)^2+(5.4-4)^2]=0.764$,

$s_{2021}^2=\frac{1}{5}[(3.8-4.5)^2+(3.9-4.5)^2+(4.5-4.5)^2+(4.9-4.5)^2+(5.4-4.5)^2]=0.364$,

因为 $\bar{x}_{2020}=4$, $\bar{x}_{2021}=4.5$, $s_{2020}^2>s_{2021}^2$,

所以 2021 年销售量比较稳定.

19.**解:**(1)设"该校男生支持方案一"为事件 A,"该校女生支持方案一"为事件 B,则 $P(A)=\frac{200}{200+400}=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{300}{300+100}=\frac{3}{4}$.

(2)由(1)知,$P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{3}{4}$,设"这 3 人中恰有 2 人支持方案一"为事件 C,则 $P(C)=C_2^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{3}{4}\right)+C_2^1\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{3}{4}=\frac{13}{36}$.

(3) $p_0>p_1$.

20.**解:**(1)由已知,得 X 的所有可能取值为 0,20,100,则 $P(X=0)=1-0.8=0.2$, $P(X=20)=0.8\times(1-0.6)=0.32$, $P(X=100)=0.8\times0.6=0.48$,

所以 X 的分布列为

X	0	20	100
P	0.2	0.32	0.48

(2)由(1)可知小明先回答 A 类问题累计得分的期望为 $E(X)=0\times0.2+20\times0.32+100\times0.48=54.4$.

若小明先回答 B 类问题,记 Y 为小明的累计得分,则 Y 的所有可能取值为 0,80,100,

$P(Y=0)=1-0.6=0.4$,

$P(Y=80)=0.6\times(1-0.8)=0.12$,

$P(Y=100)=0.6\times0.8=0.48$,

则 Y 的期望为 $E(Y)=0\times0.4+80\times0.12+100\times0.48=57.6$.

因为 $E(Y)>E(X)$,所以为使累计得分的期望最大,小明应选择先回答 B 类问题.

21.**解:**(1)由频率分布直方图得 $(1.25\times0.2+1.75\times0.3+2.25\times0.4+2.75\times0.6+3.25\times0.4+3.75\times0.1)\times0.5=2.5$,所以这 100 名学生双休日两天家务劳动的平均时间为 2.5 小时.

(2)"双休日两天家务劳动的时间不少于 3 小时"的概率为 $(0.4+0.1)\times0.5=\frac{1}{4}$,所以从该校所有学生中随机抽取 4 个人,恰好有 1 个人是"双休日两天家务劳动的时间不少于 3 小时"的概率为 $P=C_4^1\times\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$.

(3)用分层抽样的方法从这 100 人抽取 8 人,其中"双休日两天家务劳动的时间不少于 3 小时"有 $8\times\frac{1}{4}=2$ 人,则 Y 的可能取值为 0,1,2,$P(Y=0)=\frac{C_6^2}{C_8^2}=\frac{15}{28}$,

$P(Y=1)=\frac{C_2^1C_6^1}{C_8^2}=\frac{3}{7}$,

$P(Y=2)=\frac{C_2^2}{C_8^2}=\frac{1}{28}$,

所以 Y 的分布列为

Y	0	1	2
P	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{28}$

所以 $E(Y)=0\times\frac{15}{28}+1\times\frac{3}{7}+2\times\frac{1}{28}=\frac{1}{2}$.

22.**解:**(1)设方案一中每组的检验次数为 X,则 X 的取值为 1,6,

$P(X=1)=0.992^5=0.961$.

$P(X=6)=1-P(X=1)=1-0.961=0.039$,

所以 X 的分布列为

X	1	6
P	0.961	0.039

则 $E(X)=1\times0.961+6\times0.039=1.195$.

故方案一的检验总次数的期望为 $10E(X)=10\times1.195=11.95$.

设方案二中每组的检验次数为 Y,则 Y 的取值为 1,11,

则 $P(Y=1)=0.992^{10}=0.923$,

$P(Y=11)=1-0.992^{10}=0.077$,

则 Y 的分布列为

Y	1	11
P	0.923	0.077

则 $E(Y)=1\times0.923+11\times0.077=1.77$.

故方案二的检验总次数的期望为 $5E(Y)=5\times1.77=8.85$.

因为 $11.95>8.85$,

则方案二的检测次数更少.

(2)①由已知得 $\xi_1=k$, $\xi_2=1$ 或 $\xi_2=k+1$,

则 $P(\xi_2=1)=(1-p)^k$,

$P(\xi_2=k+1)=1-(1-p)^k$,

则 $E(\xi_2)=(1-p)^k+(1+k)[1-(1-p)^k]=k+1-k(1-p)^k$,

因为 $E(\xi_1)=E(\xi_2)$,

所以 $k=k+1-k(1-p)^k$,

所以 $p=1-\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}(k\geqslant2,k\in\mathbf{N}_+)$,

②令 $f(k)=1-\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}(k\geqslant2,k\in\mathbf{N}_+)$,

则 $f(2)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $f(3)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$,

所以 $f(2)-f(3)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}<0$,

当 $k\geqslant3$ 时,

$f(k+1)-f(k)=\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}-\left(\frac{1}{k+1}\right)^{\frac{1}{k+1}}$,

令 $g(x)=-\frac{\ln x}{x}(x\geqslant3)$,

则 $g'(x)=\frac{\ln x-1}{x^2}$,

当 $k\geqslant3$ 时,$-\frac{1}{k}\ln k<-\frac{1}{k+1}\ln(k+1)$,

所以 $\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}<\left(\frac{1}{k+1}\right)^{\frac{1}{k+1}}$,

所以当 $k\geqslant3$ 时,$f(k+1)-f(k)<0$,

所以 $f(2)<f(3)>f(4)>f(5)>\cdots$,

所以当 $k=3$ 时,$f(k)$最大,

所以当 $k=3$ 时,p 取最大值,且最大值为 $p=f(3)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$.