第 20 期

第 2~3 版同步周测

一、选择题

1~6.ACCBCC

7~12.CCDADB

二、填空题

13.$x^2=4y$　　14.$\sqrt{5}$

15.$\frac{8\sqrt{3}}{5}$　　16.$\frac{7\sqrt{2}}{4}$

三、解答题

17.解:(1)$2a=\sqrt{(6+4)^2+(2\sqrt{2})^2}-\sqrt{(6-4)^2+(2\sqrt{2})^2}=4\sqrt{3}$,所以 $a^2=12$,又 $c=4$,所以 $b^2=4^2-12=4$,所以该双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$.

(2)因为 $MF_1\perp F_1F_2$,所以点 M 的横坐标为 -4,当 $x=-4$ 时,$y^2=\frac{4}{3}$,所以 $|MF_1|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,所以 $S_{\triangle MF_1F_2}=\frac{1}{2}|MF_1||F_1F_2|=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times 8=\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

18.(1)解:因为 $|PF|=y_P+\frac{p}{2}$,

所以 $4=3+\frac{p}{2}$,解得 $p=2$,

所以抛物线 C 的标准方程为 $x^2=4y$.

(2)证明:设切线 AN 的方程为 $y=k(x-a)$,$k\neq 0$,

联立方程组 $\begin{cases}x^2=4y,\\ y=k(x-a),\end{cases}$

消 y 可得 $x^2-4kx+4ka=0$,

由题意可得 $\Delta=16k^2-16ka=0$,即 $a=k$,

所以切点 $N(2a,a^2)$,又 $A(a,0)$,$F(0,1)$,

所以 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AN}=(-a,1)\cdot(a,a^2)=0$.

所以 $\angle FAN=90°$,

所以以 FN 为直径的圆过点 A.

19.解:(1)椭圆 C 的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,短轴的一个端点到焦点的距离为 $\sqrt{b^2+c^2}=a=\sqrt{2}$,

所以 $c=1$,所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=1$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)设直线 l 的方程为 $y=kx+m$,则直线 l 与 y 轴交点的纵坐标为 m,

设点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ x^2+2y^2=2,\end{cases}$ 化简得

$(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-2=0$,

由韦达定理,得 $x_1+x_2=-\frac{4km}{2k^2+1}$,

$\Delta=16k^2m^2-4(2k^2+1)(2m^2-2)>0$,

化简得 $m^2<2k^2+1$.

由线段 AB 的中点在直线 $x=-\frac{1}{2}$ 上,

得 $x_1+x_2=-1$,

故 $-\frac{4km}{2k^2+1}=-1$,即 $4km=2k^2+1$,

所以 $m=\frac{2k^2+1}{4k}=\frac{k}{2}+\frac{1}{4k}\geqslant 2\sqrt{\frac{k}{2}\cdot\frac{1}{4k}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

当且仅当 $\frac{k}{2}=\frac{1}{4k}$,即 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号,此时 $m^2<2k^2+1$,满足 $\Delta>0$,

因此,直线 l 与 y 轴交点纵坐标的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

20.解:(1)由双曲线的定义可知,M 的轨迹 C 是双曲线的右支,设 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,$x\geqslant a$,根据题意,得 $\begin{cases}c=\sqrt{17},\\ 2a=2,\\ c^2=a^2+b^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=4,\\ c=\sqrt{17},\end{cases}$

所以 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{16}=1(x\geqslant 1)$.

(2)设 $T\left(\frac{1}{2},t\right)$,直线 AB 的方程为 $y=k_1\left(x-\frac{1}{2}\right)+t$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,不妨设 $\frac{1}{2}<x_1<x_2$,将直线 AB 的方程代入 C 的方程,化简并整理,得 $(16-k_1^2)x^2+(k_1^2-2k_1t)x-\frac{1}{4}k_1^2+k_1t-t^2-16=0$,由韦达定理,得

$x_1+x_2=\frac{k_1^2-2k_1t}{k_1^2-16}$,$x_1x_2=\frac{-\frac{1}{4}k_1^2+k_1t-t^2-16}{16-k_1^2}$.

又 $A\left(x_1,k_1x_1-\frac{1}{2}k_1+t\right)$,$T\left(\frac{1}{2},t\right)$,所以 $|TA|=\sqrt{1+k_1^2}\left(x_1-\frac{1}{2}\right)$,

同理,可得 $|TB|=\sqrt{1+k_1^2}\left(x_2-\frac{1}{2}\right)$,

所以 $|TA|\cdot|TB|=(1+k_1^2)\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\left(x_2-\frac{1}{2}\right)=\frac{(1+k_1^2)(t^2+12)}{k_1^2-16}$.

设直线 PQ 的方程为 $y=k_2\left(x-\frac{1}{2}\right)+t$,$P(x_3,y_3)$,$Q(x_4,y_4)$,不妨设 $\frac{1}{2}<x_3<x_4$,同理,可得 $|TP|\cdot|TQ|=\frac{(1+k_2^2)(t^2+12)}{k_2^2-16}$,又 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$,即 $\frac{1+k_1^2}{k_1^2-16}=\frac{1+k_2^2}{k_2^2-16}$,所以 $k_1^2=k_2^2$,又 $k_1\neq k_2$,所以 $k_1=-k_2$,即 $k_1+k_2=0$,

所以直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和为 0.

21.解:(1)由题意知,$c=1$,$F_1(-1,0)$,$F_2(1,0)$.

$2a=|TF_1|+|TF_2|=\sqrt{(-1+1)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}+\sqrt{(-1-1)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4$,

所以 $a=2$,所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)若存在点 $P(m,0)$,使得以 PG,PH 为邻边的平行四边形是菱形,

则 P 为线段 GH 的中垂线与 x 轴的交点.

设直线 l_1 的方程为 $y=kx+2$,$G(x_1,y_1)$,$H(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases}y=kx+2,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2+16kx+4=0$,

$\Delta=256k^2-16(3+4k^2)>0$,又 $k>0$,

所以 $k>\frac{1}{2}$.

由韦达定理,得 $x_1+x_2=-\frac{16k}{3+4k^2}$,

设 GH 的中点为 (x_0,y_0),

则 $x_0=-\frac{8k}{3+4k^2}$,$y_0=kx_0+2=\frac{6}{3+4k^2}$,

所以线段 GH 的中垂线方程为

$y=-\frac{1}{k}\left(x+\frac{8k}{3+4k^2}\right)+\frac{6}{3+4k^2}$,

令 $y=0$,可得 $x=\frac{-2k}{3+4k^2}=-\frac{2}{\frac{3}{k}+4k}$,

即 $m=-\frac{2}{\frac{3}{k}+4k}$.

因为 $k>\frac{1}{2}$,所以 $\frac{3}{k}+4k\geqslant 2\sqrt{\frac{3}{k}\cdot 4k}=4\sqrt{3}$,当且仅当 $\frac{3}{k}=4k$,即 $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时取等号,

所以 $m\geqslant-\frac{2}{4\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{6}$,且 $m<0$.

所以 m 的取值范围是 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{6},0\right)$.

22.解:(1)因为 $x=1$ 与抛物线 C 有两个不同的交点,故可设抛物线 C 的方程为 $y^2=2px(p>0)$.令 $x=1$,则 $y=\pm\sqrt{2p}$,由抛物线的对称性,不妨设 P 在 x 轴的上方,Q 在 x 轴的下方,故 $P(1,\sqrt{2p})$,$Q(1,-\sqrt{2p})$.

因为 $OP\perp OQ$,所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=1+\sqrt{2p}\times(-\sqrt{2p})=0$,解得 $p=\frac{1}{2}$,所以抛物线 C 的方程为 $y^2=x$.

因为⊙M 与 $l:x=1$ 相切,所以⊙M 的半径为 1,

所以⊙M 的方程为 $(x-2)^2+y^2=1$.

(2)设 $A_1(y_1^2,y_1)$,$A_2(y_2^2,y_2)$,$A_3(y_3^2,y_3)$.

当 A_1,A_2,A_3 其中某一个为坐标原点时(假设 A_1 为坐标原点时),设直线 A_1A_2 方程为 $kx-y=0$,因为直线 A_1A_2 与⊙M 相切,所以点 $M(2,0)$ 到直线 A_1A_2 的距离为 1,即 $\frac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$,解得 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

联立 $\begin{cases}y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x,\\ y^2=x,\end{cases}$ 得 $x=3$,此时直线 A_2A_3 的方程为 $x=3$,所以直线 A_2A_3 与⊙M 的位置关系为相切.

当 A_1,A_2,A_3 都不是坐标原点时,即 $y_1\neq y_2\neq y_3$,直线 A_1A_2 的方程为 $x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$,由题意,得 $\frac{|2+y_1y_2|}{\sqrt{1+(y_1+y_2)^2}}=1$,

即 $(y_1^2-1)y_2^2+2y_1y_2+3-y_1^2=0$,同理可得 $(y_1^2-1)y_3^2+2y_1y_3+3-y_1^2=0$,所以 y_2,y_3 是关于 t 的方程 $(y_1^2-1)t^2+2y_1t+3-y_1^2=0$ 的两根,所以 $y_2+y_3=\frac{-2y_1}{y_1^2-1}$,$y_2y_3=\frac{3-y_1^2}{y_1^2-1}$.由两点式,得直线 A_2A_3 的方程为 $x-(y_2+y_3)y+y_2y_3=0$,

设 $M(2,0)$ 到直线 A_2A_3 的距离为 d,则 $d^2=\frac{(2+y_2y_3)^2}{1+(y_2+y_3)^2}=\frac{\left(2+\frac{3-y_1^2}{y_1^2-1}\right)^2}{1+\left(\frac{-2y_1}{y_1^2-1}\right)^2}=1$,所以 $d=1$,所以直线 A_2A_3 与⊙M 的位置关系为相切.

综上,直线 A_2A_3 与⊙M 相切.

第 17 期

第 2~3 版同步周测

一、选择题

1~6.DADDBC

7~12.ADBADB

二、填空题

13.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

14.$3x-2y=0$ 或 $x-y+1=0$

15.6

16.$y^2=12x$

三、解答题

17.解:(1)因为 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(0,4)$,$B(1,-2)$,$C(-3,-4)$,所以 BC 的中点 $M(-1,-3)$,所以中线 AM 所在直线的斜率为 $k=\frac{4+3}{0+1}=7$,所以 BC 边上的中线 AM 所在的直线方程为 $y=7x+4$.

(2)因为直线 AB 的斜率为 $k_{AB}=\frac{-2-4}{1-0}=-6$,所以 AB 边上的高所在的直线方程为 $y+4=\frac{1}{6}(x+3)$,即 $x-6y-21=0$.

18.解:(1)直线 $l:(k-1)x-2y+5-3k=0(k\in R)$ 可化为 $(x-3)k-x-2y+5=0$,

令 $\begin{cases}x-3=0,\\ -x-2y+5=0,\end{cases}$ 得定点 P 的坐标为 $(3,1)$.

(2)易知圆心在 AP 的垂直平分线上,设 AP 垂直平分线上的点为 (x,y),则 $\sqrt{(x-5)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$,化简得 $x-y-4=0$,

又因为圆心在直线 $x-2y+2=0$ 上,

所以由 $\begin{cases}x-2y+2=0,\\ x-y-4=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=10,\\ y=6,\end{cases}$

所以圆 C 的圆心坐标为 $(10,6)$,

半径 $r=\sqrt{(10-3)^2+(6-1)^2}=\sqrt{74}$,

所以圆 C 的方程为 $(x-10)^2+(y-6)^2=74$.

19.解:(1)根据题意,圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 的圆心为 $(3,4)$,半径 $r=2$,

分 2 种情况讨论:

①当直线的斜率不存在时,直线方程为 $x=1$,与圆相切,符合题意;

②当直线的斜率存在时,设切线的方程为 $y=k(x-1)$,

则有 $\frac{|3k-4-k|}{\sqrt{1+k^2}}=2$,解得 $k=\frac{3}{4}$,此时切线的方程为 $y=\frac{3}{4}(x-1)$,即 $3x-4y-3=0$.

综上,所求的切线方程为 $x=1$ 或 $3x-4y-3=0$.

(2)根据题意,设 $P(m,n)$,

则 $|AP|^2+|BP|^2=(m+1)^2+n^2+(m-1)^2+n^2=2(m^2+n^2)+2$,

又由 $OP=\sqrt{m^2+n^2}$(O 为坐标原点),则当 OP 最小时,$|AP|^2+|BP|^2$ 取得最小值,

又由 P 在圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 上,

则 $|OP|_{min}=5-2=3$,

即 m^2+n^2 的最小值为 9,此时 $|AP|^2+|BP|^2$ 取得最小值,且其最小值为 $2\times 9+2=20$,

此时 $m=3\times\frac{3}{5}=\frac{9}{5}$,$n=3\times\frac{4}{5}=\frac{12}{5}$,

即点 P 的坐标为 $\left(\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right)$.

20.(1)解:因为⊙$C:x^2+y^2+Dx+Ey-12=0$ 关于直线 $x+2y-4=0$ 对称,所以圆心 $C\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ 在直线 $x+2y-4=0$ 上,

即 $-\frac{D}{2}-E-4=0$,又因为圆心 C 在 y 轴上,

所以 $-\frac{D}{2}=0$,所以 $D=0$,$E=-4$,所以 $x^2+y^2-4y-12=0$.

故⊙C 的标准方程为 $x^2+(y-2)^2=16$.

(2)证明:设点 M 的坐标为 $(a,10)$,因为 $\angle MAC=\angle MBC=90°$,所以 M,A,C,B 四点共圆,其圆心为线段 MC 的中点 $C'\left(\frac{a}{2},6\right)$,

$|MC|=\sqrt{a^2+64}$.

设四边形 MACB 的外接圆为⊙C′,所以⊙C′的方程为 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+(y-6)^2=16+\frac{a^2}{4}$,

即 $x^2+y^2-ax-12y+20=0$,因为 AB 是⊙C 和⊙C′的公共弦,

所以联立 $\begin{cases}x^2+y^2-4y-12=0,\\ x^2+y^2-ax-12y+20=0,\end{cases}$

两式相减得 $ax+8y-32=0$,

所以直线 AB 的方程为 $ax+8y-32=0$,

当 $x=0$ 时,$y=4$,

所以直线 AB 恒过定点 $(0,4)$.

21.解:(1)因为圆 E 的半径为 $BE=OB-OE=50-t$,所以 $CD=50-t=30$,得 $t=20$.

令 $y=-ax^2+50=50-t$,得 $OD=\sqrt{\frac{t}{a}}$.

圆 $E:x^2+(y-20)^2=30^2$,令 $y=0$,

得 $x=\pm 10\sqrt{5}$,则 $AO=10\sqrt{5}$,又 $AD=24\sqrt{5}$,所以 $OD=AD-OA=24\sqrt{5}-10\sqrt{5}=14\sqrt{5}$,

所以 $\sqrt{\frac{t}{a}}=14\sqrt{5}$,

又 $t=20$,得 $a=\frac{1}{49}$.

(2)由(1)知 $DF=OF+OD=50-t+\sqrt{\frac{t}{a}}$,

由题意得 $50-t+\sqrt{\frac{t}{a}}\leqslant 75$ 在 $t\in(0,25]$ 上恒成立,所以 $\sqrt{\frac{1}{a}}\leqslant\sqrt{t}+\frac{25}{\sqrt{t}}$ 在 $t\in(0,25]$ 上恒成立.

因为 $\sqrt{t}+\frac{25}{\sqrt{t}}\geqslant 2\sqrt{25}=10$,当且仅当 $\sqrt{t}=\frac{25}{\sqrt{t}}$,即 $t=25$ 时,$\left(\sqrt{t}+\frac{25}{\sqrt{t}}\right)_{min}=10$,

所以 $\sqrt{\frac{1}{a}}\leqslant 10$,解得 $a\geqslant\frac{1}{100}$,

故 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{100},+\infty\right)$.

22.解:(1)设点 $A\left(\frac{y_0^2}{4},y_0\right)$,

则 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\cdot 2y_0\cdot\frac{y_0^2}{4}=2$,

解得 $y_0=2$,所以 $A(1,2)$,

故 $r^2=1^2+2^2=5$.

所以圆 O 的方程是 $x^2+y^2=5$.

(2)由 $\begin{cases}y=k(x-1),\\ x^2+y^2=5,\end{cases}$

得 $(1+k^2)x^2-2k^2x+k^2-5=0$,且 $k<0$.

设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

则 $x_1+x_2=\frac{2k^2}{1+k^2}$,$x_1x_2=\frac{k^2-5}{1+k^2}$,

所以 $\frac{k_1k_2}{k}=\frac{y_1y_2}{k(x_1-3)(x_2-3)}$

$=\frac{k^2(x_1-1)(x_2-1)}{k(x_1-3)(x_2-3)}$

$=k\cdot\frac{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}{x_1x_2-3(x_1+x_2)+9}$

$=k\cdot\frac{\frac{k^2-5}{1+k^2}-\frac{2k^2}{1+k^2}+1}{\frac{k^2-5}{1+k^2}-3\left(\frac{2k^2}{1+k^2}\right)+9}$

$=k\cdot\frac{k^2-5-2k^2+1+k^2}{k^2-5-6k^2+9(1+k^2)}=\frac{-k}{1+k^2}$,

又 $k<0$,

所以 $\frac{-k}{1+k^2}=\frac{1}{-\frac{1}{k}-k}\leqslant\frac{1}{2}$,

当且仅当 $k=-1$ 时,等号成立,

所以 $\frac{k_1k_2}{k}$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$,

此时直线 l 的方程为 $y=-x+1$.

⑤

第 18 期

第 2~3 版同步周测

一、选择题

1~6.BCBCBA

7~12.AADACA

二、填空题

13.$(\pm2,0)$　　14.$\frac{\sqrt{5}}{3}$

15.8　　16.$\frac{3}{4}$

三、解答题

17.**解:**(1)根据题意,要求椭圆的焦点在 x 轴上,焦距为 4,则 $c=2$,又由椭圆过点 $(0,2)$,则 $b=2$,则 $a^2=b^2+c^2=8$,故所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)设椭圆的方程为 $mx^2+ny^2=1$,若椭圆过点 $M\left(1,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 和 $N(\sqrt{2},1)$,

则有 $\begin{cases}m+\frac{3n}{2}=1,\\2m+n=1,\end{cases}$ 解得 $n=\frac{1}{2}$,$m=\frac{1}{4}$,所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

18.**解:**(1)根据题意,椭圆 $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$ 中,$a=2\sqrt{5}$,$b=4$,则 $c=\sqrt{20-16}=2$,则 $A(0,4)$,$F(2,0)$.易知直线 BC 斜率存在,设为 k,再设 $B(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$,BC 的中点 $D(x_0,y_0)$,则有 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{20}+\frac{y_1^2}{16}=1,\\\frac{x_2^2}{20}+\frac{y_2^2}{16}=1,\end{cases}$ 两式相减,得 $\frac{x_0}{5}+\frac{y_0k}{4}=0$,①

又由 $F(2,0)$ 为△ABC 的重心,得 $\frac{x_1+x_2+0}{3}=\frac{2x_0}{3}=2$,$\frac{y_1+y_2+4}{3}=\frac{2y_0+4}{3}=0$,解得 $x_0=3$,$y_0=-2$,代入①得 $k=\frac{6}{5}$,则直线 BC 的方程为 $6x-5y-28=0$.

(2)根据题意,由(1)的结论,$\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1-4)$,$\overrightarrow{AC}=(x_2,y_2-4)$,因为 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$,

所以 $x_1x_2+y_1y_2-4(y_1+y_2)+16=0$,②

易知直线 BC 斜率存在,设 BC 的方程为 $y=kx+b$,代入 $4x^2+5y^2=80$,可得 $(4+5k^2)x^2+10bkx+5b^2-80=0$.

所以 $x_1+x_2=\frac{-10bk}{4+5k^2}$,$x_1\cdot x_2=\frac{5b^2-80}{4+5k^2}$,

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2b=\frac{8b}{4+5k^2}$,

$y_1\cdot y_2=k^2x_1x_2+bk(x_1+x_2)+b^2=\frac{4b^2-80k^2}{4+5k^2}$,

代入②得 $b=-\frac{4}{9}$,或 $b=4$(舍去).

所以直线 BC 过定点 $E\left(0,-\frac{4}{9}\right)$,设 $D(x,y)$,则 $\frac{y+\frac{4}{9}}{x}\cdot\frac{y-4}{x}=-1$,即 $9x^2+9y^2-32y-16=0$,所以所求点 D 的轨迹方程是 $x^2+\left(y-\frac{16}{9}\right)^2=\left(\frac{20}{9}\right)^2(y\neq4)$.

19.**解:**(1)若△POF_2 是等边三角形,则 $|OP|=|OF_2|=c$,所以 $P\left(\frac{c}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)$,代入椭圆 C 的方程可得 $\frac{c^2}{4a^2}+\frac{3c^2}{4b^2}=1$,又 $b^2=a^2-c^2$,所以 $c^4+4a^4-8a^2c^2=0$.

又离心率 $e=\frac{c}{a}$,所以 $e^4-8e^2+4=0$,解得 $e^2=4\pm2\sqrt{3}$,又 $e\in(0,1)$,所以 $e=\sqrt{3}-1$.

(2)因为 $|PF_1|+|PF_2|=2a$,两边平方得 $|PF_1|^2+|PF_2|^2+2|PF_1|\cdot|PF_2|=4a^2$,

因为 $PF_1\perp PF_2$,所以 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2=4c^2$,所以 $|PF_1|\cdot|PF_2|=2(a^2-c^2)=2b^2$,

所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=b^2=32$,

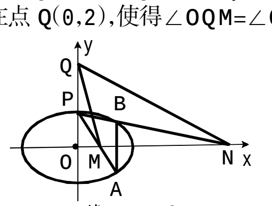
所以 $b=4\sqrt{2}$.

由基本不等式,得 $(|PF_1|+|PF_2|)^2\geqslant4|PF_1|\cdot|PF_2|$,即 $a^2\geqslant|PF_1|\cdot|PF_2|=64$,所以 $a\geqslant8$,即 a 的取值范围为 $[8,+\infty)$.

20.**解:**(1)设椭圆的焦距为 2c,由题意可得,$b=1$,$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$a^2=b^2+c^2$,解得 $a=2$.

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)设 $B(m,n)$,$M(x_M,0)$,$N(x_N,0)$,直线 BP 的方程为 $y-1=\frac{n-1}{m}x$,令 $y=0$,可得 $x_N=\frac{m}{1-n}$,所以 $N\left(\frac{m}{1-n},0\right)$.由点 A,B 关于 x 轴对称,所以 $A(m,-n)$.同理,$M\left(\frac{m}{1+n},0\right)$.假设在 y 轴的正半轴上存在点 $Q(0,t)(t>0)$,使得 $\angle OQM=\angle ONQ$.由 $\tan\angle OQM=\tan\angle ONQ$,可得 $\frac{|x_M|}{|t|}=\frac{|t|}{|x_N|}$,即 $t^2=|x_Mx_N|$,所以 $t^2=\frac{m^2}{1-n^2}$,又点 B 在椭圆 C 上,所以 $\frac{m^2}{4}+n^2=1$,所以 $t^2=4$,又 $t>0$,解得 $t=2$.经过验证:$t=2$ 时,$\angle OQM=\angle ONQ$.所以在 y 轴的正半轴上存在点 $Q(0,2)$,使得 $\angle OQM=\angle ONQ$.



(第 20 题图)

21.(1)**解:**椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

则 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,得 $a=\sqrt{2}c$,$b=c$,所以椭圆 C 的方程为 $x^2+2y^2=2c^2$,

由 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}y+1,\\x^2+2y^2=2c^2,\end{cases}$ 得 $5y^2+2\sqrt{2}y+2-4c^2=0$,设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=-\frac{2\sqrt{2}}{5}$,$y_1y_2=\frac{2-4c^2}{5}$.由 $OM\perp ON$,得 $x_1x_2+y_1y_2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y_1+1\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y_2+1\right)+y_1y_2=\frac{3}{2}y_1y_2+\frac{\sqrt{2}}{2}(y_1+y_2)+1=\frac{3}{2}\cdot\frac{2-4c^2}{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{5}+1=0$,

解得 $c=1$,则 $a=\sqrt{2}$,$b=1$,所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)**证明:**$N(x_2,y_2)$,关于 x 轴的对称点为 $Q(x_2,-y_2)$,

由 $\begin{cases}x=my+1,\\x^2+2y^2=2,\end{cases}$ 得 $(2+m^2)y^2+2my-1=0$,

又 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=-\frac{2m}{2+m^2}$,$y_1y_2=-\frac{1}{2+m^2}$,则 $k_{PM}=\frac{y_1}{x_1-2}$,$k_{QM}=\frac{y_2+y_1}{x_1-x_2}$,

$k_{PM}-k_{MQ}=\frac{x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2-x_1y_1+2y_2+2y_1}{(x_1-2)(x_1-x_2)}$

$=\frac{-y_1(my_2+1)-(my_1+1)y_2+2y_1+2y_2}{(x_1-2)(x_1-x_2)}$

$=\frac{y_1+y_2-2my_1y_2}{(x_1-2)(x_1-x_2)}$

$=\frac{-\frac{2m}{2+m^2}+\frac{2m}{2+m^2}}{(x_1-2)(x_1-x_2)}=0$,

即 $k_{PM}=k_{MQ}$,则 P,M,Q 三点共线.

22.**解:**(1)由题意,得 $\begin{cases}2c=4\sqrt{2},\\\frac{6}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1,\\a^2=b^2+c^2,\end{cases}$

解得 $a=2\sqrt{3}$,$b=2$,$c=2\sqrt{2}$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)①当过点 P 且与圆 $O:x^2+y^2=3$ 相切的切线斜率不存在时,由对称性,不妨设切线方程为 $x=\sqrt{3}$,则 $P(\sqrt{3},0)$,将 $x=\sqrt{3}$ 代入 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$,得 $y=\pm\sqrt{3}$,可取 $E(\sqrt{3},\sqrt{3})$,$F(\sqrt{3},-\sqrt{3})$,

所以 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=-3$.

②当过点 P 且与圆 $O:x^2+y^2=3$ 相切的切线斜率存在时,设切线方程为 $y=kx+m$,设点 $E(x_1,y_1)$,$F(x_2,y_2)$,$P(x_0,y_0)$,

联立 $\begin{cases}y=kx+m,\\x^2+y^2=3,\end{cases}$ 得 $(1+k^2)x^2+2kmx+m^2-3=0$,因为直线与圆相切,所以 $\Delta=4k^2m^2-4(1+k^2)(m^2-3)=0$,即 $m^2=3(1+k^2)$,则 $x_0=-\frac{km}{k^2+1}$.联立 $\begin{cases}y=kx+m,\\\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 得 $(1+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-12=0$,则 $\Delta=36k^2m^2-4(1+3k^2)\cdot(3m^2-12)=9k^2+1>0$,$x_1+x_2=-\frac{6km}{1+3k^2}$,$x_1x_2=\frac{3m^2-12}{1+3k^2}$,

所以 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=(x_1-x_0,y_1-y_0)\cdot(x_2-x_0,y_2-y_0)=(x_1-x_0)(x_2-x_0)+(y_1-y_0)(y_2-y_0)=(k^2+1)(x_1-x_0)(x_2-x_0)=(1+k^2)[x_1x_2-x_0(x_1+x_2)+x_0^2]=(k^2+1)\left[\frac{3m^2-12}{1+3k^2}-\frac{6km}{1+3k^2}\cdot\frac{km}{k^2+1}+\left(\frac{km}{k^2+1}\right)^2\right]=\frac{-9k^2-3}{1+3k^2}=-3$.

综上,$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$ 为定值-3.

第 19 期

第 2~3 版同步周测

一、选择题

1~6.DDCBCA

7~12.ACBAAC

二、填空题

13.4　　14.$\frac{1}{4}$

15.$(-3,0)$　　16.$\sqrt{2}$

三、解答题

17.**解:**由题意知,这两条直线不能是 x 轴和 y 轴,因为它们都只和抛物线有 1 个交点.

设一条直线方程为 $y=kx$,

则另一条直线方程为 $y=-\frac{x}{k}$,

分别联立方程组 $\begin{cases}y=kx,\\y^2=6x,\end{cases}$ $\begin{cases}y=-\frac{x}{k},\\y^2=6x,\end{cases}$

解得两个交点分别为 $\left(\frac{6}{k^2},\frac{6}{k}\right)$,$(6k^2,-6k)$,

它们的中点为 $\left(\frac{3}{k^2}+3k^2,\frac{3}{k}-3k\right)$,

由 $x=\frac{3}{k^2}+3k^2$,$y=\frac{3}{k}-3k$,消去 k,得 $y^2=3x-18$,所以线段 AB 中点的轨迹方程为 $y^2=3x-18$.

18.**解:**(1)抛物线 $y^2=4x$ 的焦点坐标为 $(1,0)$,直线的斜率为-1,

则该直线方程为 $y=-(x-1)$,

即 $x+y-1=0$.

(2)设点 A,B 的坐标分别为 (x_1,y_1),(x_2,y_2),由 $\begin{cases}y^2=4x,\\y=-x+1,\end{cases}$ 消去 y 可得 $x^2-6x+1=0$,

根据韦达定理,得 $x_1+x_2=6$,$x_1x_2=1$,所以 $|AB|=\sqrt{1+(-1)^2}\times\sqrt{6^2-4}=8$,

点 O 到直线 AB 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\times8\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$.

19.**解:**(1)过 $A(a,0)$,$B(0,-b)$ 的直线方程为 $y=\frac{b}{a}x-b$,即 $bx-ay-ab=0$,因为原点到直线 AB 的距离是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $d=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{ab}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,又离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,所以 $b=1$,又 $a^2+b^2=c^2$,所以 $a=\sqrt{3}$,$c=2$,故双曲线的方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$.

(2)把 $y=kx+5$ 代入 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 中消去 y,整理得 $(1-3k^2)x^2-30kx-78=0$.①

设 $C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\frac{30k}{1-3k^2}$,

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+10=\frac{10}{1-3k^2}$,所以 C,D 两点的中点 E 的坐标是 $\left(\frac{15k}{1-3k^2},\frac{5}{1-3k^2}\right)$,又 $B(0,-1)$,

所以直线 BE 的斜率是 $k_{BE}=\frac{\frac{5}{1-3k^2}+1}{\frac{15k}{1-3k^2}}=\frac{2-k^2}{5k}$,

因为 C,D 在以 B 为圆心的圆上,所以 $BE\perp CD$,即 $\frac{2-k^2}{5k}\cdot k=-1$,解得 $k=\pm\sqrt{7}$,

又①式中 $\Delta=(-30k)^2-4\times(-78)\cdot(1-3k^2)=312-36k^2$,当 $k=\pm\sqrt{7}$ 时,$\Delta=60>0$,符合题意,

所以 k 的值为 $\pm\sqrt{7}$.

20.**解:**(1)由题意,得 $p=2$,

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.

(2)由(1)知,抛物线 $C:y^2=4x$,$F(1,0)$,

设点 Q 的坐标为 (m,n),

则 $\overrightarrow{QF}=(1-m,-n)$,

$\overrightarrow{PQ}=9\overrightarrow{QF}=(9-9m,-9n)$.

所以 P 点的坐标为 $(10m-9,10n)$,将点 P 代入 $y^2=4x$ 得 $100n^2=40m-36$,则 $m=\frac{100n^2+36}{40}=\frac{25n^2+9}{10}$,

所以直线 OQ 的斜率 $k=\frac{n}{m}=\frac{10n}{25n^2+9}=\frac{10}{25n+\frac{9}{n}}\leqslant\frac{1}{3}$,当且仅当 $n=\frac{3}{5}$ 时,等号成立,k 取得最大值.

所以直线 OQ 斜率的最大值为 $\frac{1}{3}$.

21.**解:**(1)因为 $(-2,0)$ 是双曲线的一个焦点,所以双曲线的焦点在 x 轴上.

设双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$,焦距为 $2c$,

则 $\begin{cases}c=2,\\\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3},\\c^2=a^2+b^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\sqrt{3},\\b=1,\end{cases}$

所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$.

(2)设 $P(x,y)$,则 $Q(-x,-y)$,

所以 $\overrightarrow{NP}=(x-1,y-1)$,$\overrightarrow{MQ}=(-x,-y-1)$,

所以 $\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{MQ}=-x^2+x+1-y^2=-x^2+x+1-\left(\frac{x^2}{3}-1\right)=-\frac{4}{3}x^2+x+2=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{35}{16}$,

因为 $x\leqslant-\sqrt{3}$ 或 $x\geqslant\sqrt{3}$,所以当 $x=\sqrt{3}$ 时,$\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{MQ}$ 取得最大值 $\sqrt{3}-2$.所以 $\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{MQ}$ 的取值范围是 $(-\infty,\sqrt{3}-2]$.

22.(1)**解:**由抛物线的定义,得 $|MF|=\frac{p}{2}-(-2)=\frac{5}{2}$,所以 $p=1$,所以抛物线的方程为 $y^2=-2x$.

(2)**证明:**由(1)可知,点 M 的坐标为 $(-2,2)$.

设直线 l 的方程为 $x=ky+b$.

因为点 M 不在直线 l 上,

所以 $b+2+2k\neq0$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,将直线 l 与抛物线联立得 $\begin{cases}x=ky+b,\\y^2=-2x,\end{cases}$ 化简得 $y^2+2ky+2b=0$,

所以 $y_1+y_2=-2k$,$y_1y_2=2b$,①

又 $k_1+k_2=\frac{y_1-2}{x_1+2}+\frac{y_2-2}{x_2+2}=-2$,

即 $(y_1-2)(ky_2+b+2)+(y_2-2)(ky_1+b+2)=-2(ky_1+b+2)(ky_2+b+2)$,化简得 $(2k+2k^2)y_1y_2+(b+2+2k+2kb)\cdot(y_1+y_2)+2b^2+4b=0$,

将①代入得,$kb-2k-2k^2+b^2+2b=0$,即 $(b-k)(b+2+2k)=0$,得 $b=k$.

当 $b=k$ 时,直线 l 的方程为 $x=k(y+1)$,此时直线 l 恒过点 $(0,-1)$.