5.A

提示:因为$f(x)=\ln x-\frac{1}{8}x^2$,其定义域为$(0,+\infty)$,所以$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{4}x=\frac{4-x^2}{4x}$,由$f'(x)>0$,得$0<x<2$;由$f'(x)<0$,得$x>2$,所以$f(x)=\ln x-\frac{1}{8}x^2$在$(0,2)$上单调递增,在$(2,+\infty)$上单调递减,所以$x=2$时,$f(x)$取到极大值.又$f(2)=\ln 2-\frac{1}{2}>0$,

所以函数$f(x)=\ln x-\frac{1}{8}x^2$的图象上的点$(2,f(2))$在$x$轴上方,可排除B,C,D.故选A.

6.C

提示:因为正项等比数列$\{a_n\}$中,$a_3^2+a_5^2+2a_2a_6=a_3^2+a_5^2+2a_3a_5=(a_3+a_5)^2=8100$,

所以$a_3+a_5=90$,因为$S_4-S_2=a_3+a_4=36$,

所以$\begin{cases}a_3(1+q^2)=90,\\a_3(1+q)=36,\end{cases}$

解得$q=3$,$a_3=9$,所以$a_1=1$,则$S_{2021}=\frac{1-3^{2021}}{1-3}=\frac{3^{2021}-1}{2}$.故选C.

7.D

提示:设$g(x)=f(x)+x$,因为$f'(x)\geqslant 0$,所以$g'(x)=f'(x)+1>0$,

则$g(x)$为$\mathbf{R}$上的增函数,由$f(\ln t)+\ln t-1\leqslant f(1)$,得$f(\ln t)+\ln t\leqslant f(1)+1$,

即$g(\ln t)\leqslant g(1)$,则$\ln t\leqslant 1$,所以$0<t\leqslant e$.

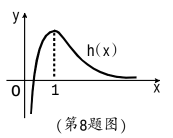
所以满足不等式$f(\ln t)+\ln t-1\leqslant f(1)$的实数$t$的取值范围是$(0,e]$.故选D.

8.A

提示:$f'(x)=\ln x+1-ae^x$,函数恰有一个极值点等价于函数$g(x)=\ln x+1-ae^x$有唯一变号零点,

即$a=\frac{\ln x+1}{e^x}=h(x)$,$h'(x)=\frac{\frac{1}{x}-\ln x-1}{e^x}$,令$m(x)=\frac{1}{x}-\ln x-1$,$m'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}<0$,所以$m(x)$单调递减,又$m(1)=0$,所以$x\in(0,1)$时,$m(x)>0$,$h'(x)>0$,$h(x)$单调递增,$x\in(1,+\infty)$时,$m(x)<0$,$h'(x)<0$,$h(x)$单调递减,

所以函数$h(x)$的图象如下,根据图象可得$a\leqslant 0$,故选A.



(第8题图)

二、多项选择题

9.AD

提示:因为等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,且满足$a_{10}=32a_5$,所以$a_1q^9=32a_1q^4$,解得$q=2$,所以数列$\{a_n\}$的公比为2,故A正确,B错误;

$\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{\frac{a_1(1-2^{10})}{1-2}}{\frac{a_1(1-2^5)}{1-2}}=1+2^5=33$,故C错误,D正确.故选AD.

10.BC

提示:由题意得,函数是“和谐函数”的条件是方程$y'=a$(a是导数值)至少有两个根.

对于A,由$y'=3x^2-3$,当$y'=-3$时,x的取值唯一,只有0,不符合题意;

对于B,由$y'=3-\frac{1}{x^2}=a$($x\neq 0$且$a<3$),即$\frac{1}{x^2}=3-a$,此方程有两不同的实根,符合题意;

对于C,由$y'=\cos x$和三角函数的周期性,知$\cos x=a$ $(-1\leqslant a\leqslant 1)$的解有无穷多个,符合题意;

对于D,由$y'=2x-4+\frac{1}{x}$ $(x>0)$,令$2x-4+\frac{1}{x}=a$,则有$2x^2-(4+a)x+1=0$,当$\Delta=0$时解唯一,不符合题意.故选BC.

11.BCD

提示:由对任意的$n\in\mathbf{N}_+$都有$a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}$,知数列$\{a_n\}$为等差数列,

设$\{a_n\}$的公差为d,则由4是a_1^2与a_5^2的等差中项,得$a_1^2+a_5^2=8$,即$a_1^2+(a_1+4d)^2=8$.①

设$t=S_2=2a_1+d$,则$d=t-2a_1$,代入①式整理得$50a_1^2-56ta_1+16t^2-8=0$.②

因为方程②有实根,所以$\Delta=(-56t)^2-4\times 50\times(16t^2-8)\geqslant 0$,整理得$t^2\leqslant 25$,即$-5\leqslant t\leqslant 5$.故选BCD.

12.BD

提示:$f(x)=x^3-2x^2-4x-7$,其导函数为$f'(x)=3x^2-4x-4$,

令$f'(x)=0$,解得$x=-\frac{2}{3}$,$x=2$,

当x变化时,$f'(x)$,$f(x)$的变化情况下表:

x	$\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}$	$\left(-\frac{2}{3},2\right)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以,当$x=-\frac{2}{3}$时,函数$f(x)$有极大值,极大值为$f\left(-\frac{2}{3}\right)<0$,当$x=2$时,函数$f(x)$有极小值,极小值为$f(2)=-15$,所以函数$f(x)$只有一个零点,故A,C错误,B正确;

设$g(x)=f'(x)$,则$g'(x)=6x-4$,当$x>2$时,$g'(x)>0$,$g(x)$在区间$(2,+\infty)$上单调递增,即$f'(x)$在区间$(2,+\infty)$上单调递增,

设$G(x)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$ $(x>2)$,则$G'(x)=f'(x)-f'(a)$,

令$G'(x)=0$,得$x=a$,根据函数$f'(x)$的单调性,知函数$G(x)$在$x=a$处取得极小值也是最小值$G(a)=0$,故当$a>2$时,对任意的$x>2$,且$x\neq a$,恒有$G(x)>0$,即$f(x)>f(a)+f'(a)\cdot(x-a)$,故D正确.故选BD.

三、填空题

13.$a_n=\begin{cases}5,n=1,\\4n-2,n\geqslant 2\end{cases}$

提示:因为$S_n=2n^2+3$,当$n\geqslant 2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2+3-2(n-1)^2-3=4n-2$,当$n=1$时,$a_1=S_1=5$不适合上式.

故$a_n=\begin{cases}5,n=1,\\4n-2,n\geqslant 2.\end{cases}$

14.$y=2x+1$

提示:$f(x)=2e^x+ax^2\cdot\cos x-1$的导数为$f'(x)=2e^x+2ax\cos x-ax^2\sin x$,

可得曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线的斜率为$f'(0)=2$,且$f(0)=2-1=1$,

所以曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线的方程是$y-1=2(x-0)$,即$y=2x+1$.

15.$\frac{1}{2}$;2

提示:设$\{a_n\}$共有$2m+1$项,由题意知,

$S_奇=a_1+a_3+\cdots+a_{2m+1}=\frac{85}{32}$,$S_偶=a_2+a_4+\cdots+a_{2m}=\frac{21}{16}$,

则$S_奇=a_1+a_2q+\cdots+a_{2m}q=2+q(a_2+a_4+\cdots+a_{2m})=2+\frac{21}{16}q=\frac{85}{32}$,解得$q=\frac{1}{2}$.

所以$T_n=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n=a_1^nq^{1+2+\cdots+n-1}=2^n\times\frac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}=2^{\frac{3n}{2}-\frac{n^2}{2}}$,

当$n=1$或2时,T_n取得最大值,最大值为2.

16.$\left[-\frac{1}{6},+\infty\right)$

提示:由题意知,分式$\frac{f(m+1)-f(n+1)}{m-n}$的几何意义为:表示点$(m+1,f(m+1))$与$(n+1,f(n+1))$连线的斜率,因为实数$m$,$n$在区间$(0,1)$内,故$m+1$和$n+1$在区间$(1,2)$内,

不等式$\frac{f(m+1)-f(n+1)}{m-n}<1$恒成立,所以函数$f(x)$图象上在区间$(1,2)$内任意两点连线的斜率小于1,

故函数$f(x)=\ln(x+1)-ax^2$的导数小于1在$(1,2)$内恒成立,由函数$f(x)=\ln(x+1)-ax^2$满足$x+1>0$,即定义域为$(-1,+\infty)$,即$f'(x)=\frac{1}{x+1}-2ax<1$在$(1,2)$内恒成立,

即$a>\frac{-1}{2(x+1)}$,令$g(x)=\frac{-1}{2(x+1)}$,$x\in(1,2)$,则$g(x)$在$(1,2)$上是单调递增函数,可得$g(x)<g(2)=-\frac{1}{6}$,所以$a\geqslant-\frac{1}{6}$.

所以实数a的取值范围是$\left[-\frac{1}{6},+\infty\right)$.

四、解答题

17.**解**:若选①:$S_n=ma_{n+1}$ $(m\neq 0)$,则当$n\geqslant 2$时,$S_{n-1}=ma_n$,

两式相减,得$S_n-S_{n-1}=a_n=ma_{n+1}-ma_n$,即$\frac{a_{n+1}}{m+1}=\frac{a_n}{m}$ $(n\geqslant 2)$,

结合$a_1=1$,可知$a_n\neq 0$,所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{m+1}{m}$ $(n\geqslant 2)$.

由$S_n=ma_{n+1}$ $(m\neq 0)$,得$a_1=ma_2$,即$\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{m}\neq\frac{m+1}{m}$,故数列$\{a_n\}$不是等比数列.

若选②:$S_n=ka_n-\frac{1}{2}$,由$a_1=1$,得$1=k-\frac{1}{2}$,即$k=\frac{3}{2}$,于是$S_n=\frac{3}{2}a_n-\frac{1}{2}$,

当$n\geqslant 2$时,$S_{n-1}=\frac{3}{2}a_{n-1}-\frac{1}{2}$,

两式相减得$a_n=\frac{3}{2}a_n-\frac{3}{2}a_{n-1}$,即$a_n=3a_{n-1}$,

又$a_1=1\neq 0$,所以数列$\{a_n\}$是首项为1,公比为3的等比数列,所以$a_n=3^{n-1}$.

若选③:$2a_n-a_1=S_1S_n$,由$a_1=1$,得$S_n=2a_n-1$,

当$n\geqslant 2$时,$S_{n-1}=2a_{n-1}-1$,两式相减得$S_n-S_{n-1}=a_n=2a_n-2a_{n-1}$,即$a_n=2a_{n-1}$,又$a_1=1\neq 0$,

所以数列$\{a_n\}$是首项为1,公比为2的等比数列,所以$a_n=2^{n-1}$.

18.**解**:(1)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,

因为$f'(x)=\frac{a}{x}-x-(a-1)=-\frac{x^2+(a-1)x-a}{x}=-\frac{(x+a)(x-1)}{x}$,

若$a\geqslant 0$,则当$x\in(0,1)$时,$f'(x)>0$,当$x\in(1,+\infty)$时,$f'(x)<0$,

所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减;

若$a<0$,则由$f'(x)=0$,得$x=-a$或$x=1$,

若$a=-1$,$f'(x)\leqslant 0$,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减;

若$1-(-a)>0$,即$-1<a<0$时,$f(x)$在$(0,-a)$,$(1,+\infty)$上单调递减,在$(-a,1)$上单调递增;若$1-(-a)<0$,即$a<-1$时,$f(x)$在$(0,1)$,$(-a,+\infty)$上单调递减,在$(1,-a)$上单调递增.

(2)令$0<x_1<x_2$,则$f(x_1)-f(x_2)>(x_1-x_2)(1-a)$,即$f(x_1)-(1-a)x_1>f(x_2)-(1-a)x_2$,令$h(x)=f(x)-(1-a)x$,则$h(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递减,

所以$h'(x)=f'(x)-(1-a)\leqslant 0$在区间$(0,+\infty)$上恒成立,即$a\leqslant x^2$ $(x>0)$恒成立,

所以$a\leqslant 0$,即a的取值范围为$(-\infty,0]$.

19.**解**:(1)已知数列$\{a_n\}$中,前n项和为$S_n=2n^2-n$,当$n=1$时,$a_1=1$,

当$n\geqslant 2$时,$S_n-S_{n-1}=2n^2-n-2(n-1)^2+(n-1)=4n-3$,

所以$a_n=4n-3$ $(n\geqslant 2)$,$n=1$时也满足上式,所以$a_n=4n-3$ $(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)由$a_n\cdot a_{n+1}=\frac{1}{b_n}$,得$b_n=\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}$,

所以$b_n=\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)$,

所以$T_n=\frac{1}{4}\left[\left(1-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)\right]=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)=\frac{n}{4n+1}$.

$T_n=\frac{n}{4n+1}=\frac{n+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}{4n+1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4(4n+1)}$,因为$T_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{4(4n+1)}$在$n\in\mathbf{N}_+$单调递增,

所以当$n=1$时,T_n达到最小值,所以$T_n\geqslant T_1=\frac{1}{5}$,因为$T_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{4(4n+1)}<\frac{1}{4}$,所以$T_n$的取值范围是$\left[\frac{1}{5},\frac{1}{4}\right)$.

20.**解**:(1)当$0<x<90$时,$y=100x-\left(\frac{1}{2}x^2+40x\right)-200=-\frac{1}{2}x^2+60x-200$;

当$x\geqslant 90$时,$y=100x-\left(100x+8\ln x+\frac{760}{x}-2180\right)-200=1980-8\ln x-\frac{760}{x}$,

故$y=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+60x-200,0<x<90,\\1980-8\ln x-\frac{760}{x},x\geqslant 90.\end{cases}$

(2)当$0<x<90$时,$y=-\frac{1}{2}x^2+60x-200=-\frac{1}{2}(x-60)^2+1600$,

故当$x=60$时,y取得最大值,最大值为1600万元;

当$x\geqslant 90$时,$y=1980-8\ln x-\frac{760}{x}$,则$y'=-\frac{8}{x}+\frac{760}{x^2}=\frac{760-8x}{x^2}$,

当$90\leqslant x<95$时,$y'>0$,当$x>95$时,$y'<0$,所以$y=1980-8\ln x-\frac{760}{x}$在$[90,95)$上单调递增,在$(95,+\infty)$上单调递减,故当$x=95$时,$y$取得最大值,且$y_{max}\approx 1980-8\times 4.55-\frac{760}{95}=1935.6$(万元),因为$1935.6>1600$,所以当年产量为95万箱时,该口罩生产厂家所获得年利润最大.

21.**解**:(1)设数列$\{a_n\}$的公差为d.因为a_2,a_3是函数$f(x)=x^2-a_4x+a_5$的两个不同零点,

所以$a_2+a_3=a_4$,$a_2\cdot a_3=a_5$.所以$a_1+d+a_1+2d=a_1+3d$,$(a_1+d)(a_1+2d)=a_1+4d$,解得$a_1=0$,$d=0$或$d=2$.若$d=0$,则$a_2=a_3$,不合题意,舍去,所以$d=2$.所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-2$.

(2)因为$a_n=2n-2$,所以数列$\{a_n\}$的前51项是从0到100的连续51个偶数.

由条件得$a_r=a_mq$,$a_s=a_mq^2$.因为a_r,a_s,a_t成等差数列,所以$a_t=2a_mq^2-a_mq$.所以$\frac{a_t}{a_m}=\frac{2a_mq^2-a_mq}{a_m}=2q^2-q$.由题意得,$\frac{a_t}{a_m}\leqslant\frac{100}{2}=50$,即$2q^2-q\leqslant 50$.

设$g(q)=2q^2-q-50$,则当$q>\frac{1}{4}$时,$g(q)$单调递增.因为$q\in\mathbf{N}_+$,$g(5)g(6)<0$,所以q的最大值为5.所以$a_t=50a_m-5a_m=45a_m\leqslant 100$,因为$a_m\neq 0$,所以$a_m=2$.所以$a_t=90$.

22.**解**:函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,

$f'(x)=\frac{1}{x}-(k+1)=\frac{1-(k+1)x}{x}$ $(x>0)$.

(1)**证明**:当$k=-\frac{1}{2}$时,$f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x$,令$f'(x)=\frac{1-\frac{1}{2}x}{x}=0$,得$x=2$,且$x\in(0,2)$时,$f'(x)>0$,$x\in(2,+\infty)$时,$f'(x)<0$,所以$f(x)$在$(0,2)$上单调递增,在$(2,+\infty)$上单调递减,故$[f(x)]_{max}=f(2)=\ln 2-1<0$,故当$k=-\frac{1}{2}$时,$f(x)<0$.

(2)**解**:因为$f'(x)=\frac{1}{x}-(k+1)=\frac{1-(k+1)x}{x}$ $(x>0)$,

①当$k+1\leqslant 0$,即$k\leqslant-1$时,$f'(x)>0$恒成立,故$f(x)$在$(0,+\infty)$内单调递增,此时$f(x)$至多有一个零点,不符合题意;

②当$k+1>0$,即$k>-1$时,令$f'(x)=0$,得$x=\frac{1}{k+1}$,由$f'(x)>0$,得$0<x<\frac{1}{k+1}$,由$f'(x)<0$,得$x>\frac{1}{k+1}$,故$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{k+1}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{1}{k+1},+\infty\right)$上单调递减,结合$x\to 0$时,$\ln x\to-\infty$,$(k+1)x\to 0$,即此时$f(x)\to-\infty$;$x\to+\infty$时,$\ln x$不如$(k+1)x$增长得快,故$f(x)\to-\infty$,故要使$f(x)$有两个零点,只需$[f(x)]_{max}=f\left(\frac{1}{k+1}\right)=\ln\left(\frac{1}{k+1}\right)-1>0$,即$\ln\left(\frac{1}{k+1}\right)>1=\ln e$,所以$\frac{1}{k+1}>e$,解得$-1<k<\frac{1}{e}-1$,故$f(x)$有两个零点时,$k$的取值范围是$\left(-1,\frac{1}{e}-1\right)$.

扫码免费下载习题讲解ppt

第9期

第2~3版综合测试(一)参考答案

一、单项选择题

1.C

提示:由题意知,数列前五项可化为$\frac{2}{1},\frac{4}{3},\frac{8}{5},\frac{16}{7},\frac{32}{9}$,又2,4,8,16,32可用$2^n$表示;1,3,5,7,9,可用$2n-1$表示,所以数列$\{a_n\}$的一个通项公式是$a_n=\frac{2^n}{2n-1}$,故选C.

2.D

提示:由$f(x)=e^{2x}$,得$f'(x)=2e^{2x}$,$f'(1)=2e^2$,则由导数的概念得$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=f'(1)=2e^2$,故选D.

3.A

提示:由$f(x)=\sin x-\frac{1}{2}x$,得$f'(x)=\cos x-\frac{1}{2}$,由$f'(x)>0$,得$\cos x-\frac{1}{2}>0$,结合$x\in(0,\pi)$,得$0<x<\frac{\pi}{3}$,所以$f(x)$在$(0,\pi)$上的单调递增区间为$\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$,故选A.

4.C

提示:因为$f(x)=(x-1-a)e^x-\frac{1}{2}x^2+ax$,所以$f'(x)=e^x+(x-1-a)e^x-x+a=(e^x-1)(x-a)$.由$f'(x)=0$,得$x=0$或$x=a$.因为$f(x)$在$x=0$处取得极小值,由极小值的定义可知$a<0$,故选C.

5.A

提示:由$S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}$,可得$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$,两式相减,得$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{2^{n+1}-n-2}{2^{n+1}}$,所以$S_n=\frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$,故选A.

6.B

提示:因为$S_n=2a_n+1$,所以当$n=1$时,解得$a_1=-1$;当$n\geqslant 2$时,$S_{n-1}=2a_{n-1}+1$,所以$S_n-S_{n-1}=a_n=2a_n-2a_{n-1}$,故$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2$,所以$\{a_n\}$是以$-1$为首项,2为公比的等比数列,则$a_n=(-1)\times 2^{n-1}=-2^{n-1}$,$S_n=\frac{-(1-2^n)}{1-2}=1-2^n$,则$a_5=-16$,$S_5=1-2^5=-31$,且$S_n-1=-2^n$,故A,C,D正确,B错误.故选B.

7.C

提示:由题意知,方程$mx^2-4e^x=0$,即$m=\frac{4e^x}{x^2}$在$x\in(0,+\infty)$上有实数解,令$g(x)=\frac{4e^x}{x^2}$ $(x>0)$,$g'(x)=\frac{4e^x(x-2)}{x^3}$,则当$x>2$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增,当$0<x<2$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减,所以$x=2$时,函数$g(x)$有唯一的极小值,也是最小值,即$g(2)=e^2$,又$x\to 0$时,$g(x)\to+\infty$,$x\to+\infty$时,$g(x)\to+\infty$,所以$g(x)\geqslant e^2$,即$m\geqslant e^2$,故选C.

8.B

提示:因为$a_n+a_{n+1}=2n+3$,所以$a_{n+1}+a_{n+2}=2n+5$,两式相减,得$a_{n+2}-a_n=2$,所以数列$\{a_n\}$是隔项成等差数列,所以$a_2,a_4,a_6,\cdots,a_{2k}$是首项为$a_2$,公差为2,项数为$k$的等差数列,则$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2k}=ka_2+\frac{k(k-1)}{2}\times 2=ka_2+k^2-k=120$,即$a_2=\frac{120-k^2+k}{k}$.又$a_1+a_2=5<2a_2$,$a_2+a_3=7>2a_2$,所以$\frac{5}{2}<a_2<\frac{7}{2}$,即$\frac{5}{2}<\frac{120-k^2+k}{k}<\frac{7}{2}$,整理,得$2k^2+3k<240<2k^2+5k$,代入检验即可知$k=10$满足,故选B.

二、多项选择题

9.AB

提示:对于A,$\left(x+\frac{1}{x}\right)'=1-\frac{1}{x^2}$,故A正确;对于B,$(3\ln x)'=\frac{3}{x}$,故B正确;对于C,$\left(\frac{x}{e^x}\right)'=\frac{e^x-x\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{1-x}{e^x}$,故C错误;对于D,$(x^2\cos x)'=2x\cos x-x^2\sin x$,故D错误.故选AB.

10.AB

提示:假设a_n最大,则有$\begin{cases}a_n\geqslant a_{n+1},\\a_n\geqslant a_{n-1},\end{cases}$

所以$\begin{cases}(n+1)\left(\frac{7}{8}\right)^n\geqslant(n+2)\left(\frac{7}{8}\right)^{n+1},\\(n+1)\left(\frac{7}{8}\right)^n\geqslant n\left(\frac{7}{8}\right)^{n-1},\end{cases}$

所以$\begin{cases}n+1\geqslant(n+2)\cdot\frac{7}{8},\\(n+1)\cdot\frac{7}{8}\geqslant n,\end{cases}$即$6\leqslant n\leqslant 7$,所以$\{a_n\}$的最大项为第6项和第7项.故选AB.

11.ACD

提示:依题意知,$S_{12}=\frac{a_1+a_{12}}{2}\cdot 12=6(a_6+a_7)>0$,所以$a_6+a_7>0$,而$a_7<0$,则$a_6>-a_7>0$,故B错误;显然有$(a_3+3d)+(a_3+4d)>0$,而$a_3=12$,解得$d>-\frac{24}{7}$,又$a_3+4d<0$,解得$d<-3$,所以$-\frac{24}{7}<d<-3$,故A,C正确;数列$\{a_n\}$是首项为正,公差为负的递减等差数列,前6项都为正,从第7项起的各项都为负,而$S_{12}>0$,$S_{13}=\frac{a_1+a_{13}}{2}\cdot 13=13a_7<0$,于是得$n\geqslant 13$时,$S_n<0$,从而得$S_n<0$时,$n$的最小值为13,故D正确,故选ACD.

12.BC

提示:根据题意可构造函数$f(x)=\frac{\ln x}{x}$,则$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,由于函数$y=\ln x$在$(0,+\infty)$上单调递增,且$\ln e=1$,从而,当$0<x\leqslant e$时,$f'(x)\geqslant 0$,则函数$f(x)=\frac{\ln x}{x}$在$(0,e]$上单调递增;当$x>e$时,$f'(x)<0$,则函数$f(x)=\frac{\ln x}{x}$在$(e,+\infty)$上单调递减,又$0<2<e<3<\pi<4$,所以$f(2)<f(e)$,$f(e)>f(3)>f(\pi)>f(4)$,即$\frac{\ln 2}{2}<\frac{\ln e}{e}$,$\frac{\ln 3}{3}>\frac{\ln 4}{4}$,$\frac{\ln e}{e}>\frac{\ln\pi}{\pi}$,$\frac{\ln e}{e}>\frac{\ln 3}{3}$,故$\frac{\ln 2}{2}<\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$,故A错误;$3\ln 4<4\ln 3$,故B正确;$\frac{\pi}{e}>\ln\pi$,故C正确;$3>e\ln 3$,故D错误.故选BC.

三、填空题

13.2

提示:$f(x)=x\ln x$,则$f'(x)=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$,则$f'(e)=1+\ln e=2$.

14.-51

提示:由$a_n=(-1)^n\cdot(n+1)$,得$S_{99}=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{97}+a_{98}+a_{99}=-2+3-4+5-\cdots-98+99-100=(-2+3)+(-4+5)+\cdots+(-98+99)-100=49-100=-51$.

15.$(-1,1)$

提示:构造函数$g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$,则$g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$,所以$\forall x\in(-2,4)$,$g'(x)<0$,所以$g(x)$在$(-2,4)$上单调递减.$f(2x)>3e^{2x-2}$等价于$\frac{f(2x)}{e^{2x}}>\frac{3}{e^2}$,又$f(2)=3$,所以$g(2x)>g(2)$,则$-2<2x<2$,即$-1<x<1$,所以该不等式的解集是$(-1,1)$.

16.6

提示:设等差数列$\{a_n\}$的公差为d $(d>0)$.因为a_2,a_5,a_9依次成等比数列,所以$a_5^2=a_2\cdot a_9$,即$(a_1+4d)^2=(a_1+d)\cdot(a_1+8d)$,解得$a_1=8d$,所以$a_1+a_2+\cdots+a_k=ka_1+\frac{k(k-1)}{2}d=\frac{k^2+15k}{2}d$,因为$a_1+a_2+\cdots+a_k>\frac{25}{4}a_1$,所以$\frac{k^2+15k}{2}d>50d$,即$k^2+15k-100>0$,解得$k>5$或$k<-20$(舍去),所以使不等式成立的最小正整数$k$的值为6.

四、解答题

17.**解**:(1)设正项等比数列$\{a_n\}$的公比为q $(q>0)$,

因为a_3与a_7的等比中项为16,所以$16^2=a_3a_7$,即$16^2=q^8$,所以$q=2$,所以$a_n=2^{n-1}$ $(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)$b_n=\log_2a_{n+1}=\log_22^n=n$,

所以$S_n=(1+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1})+(1+2+3+\cdots+n)$

$=\frac{1-2^n}{1-2}+\frac{n(n+1)}{2}=2^n-1+\frac{n(n+1)}{2}$.

18.**解**:(1)因为$f(x)=x^2-8\ln x$,所以$f(1)=1$,

所以$f'(x)=2x-\frac{8}{x}$,$k=f'(1)=-6$,

所以所求的切线的方程为$y-1=-6(x-1)$,

即$y=-6x+7$.

(2)$f'(x)=2x-\frac{8}{x}=\frac{2(x^2-4)}{x}$ $(x>0)$,

所以当$x\in(0,2)$时,$f'(x)<0$;

当$x\in(2,+\infty)$时,$f'(x)>0$.

故$f(x)$在$(0,2)$上单调递减,在$(2,+\infty)$上单调递增,所以$[f(x)]_{min}=f(2)=4-8\ln 2$.

19.**解**:(1)设数列$\{a_n\}$的公比为q,因为在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_6=16a_2$,

所以$q^4=\frac{a_6}{a_2}=16$,所以$q=\pm 2$,

当$q=2$时,$a_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$;当$q=-2$时,$a_n=1\cdot(-2)^{n-1}=(-2)^{n-1}$.

(2)当$q=2$时,$S_m=\frac{1\cdot(1-2^m)}{1-2}=2^m-1=255$,解得$m=8$;

当$q=-2$时,$S_m=\frac{1\cdot[1-(-2)^m]}{1+2}=255$,无正整数解,不合题意.

综上,$m=8$.

20.**解**:(1)由题可得,

$f(x)=\left(242-\frac{1}{5}x^2\right)x-(50+2x)=-\frac{1}{5}x^3+240x-50$,

由$\begin{cases}242-\frac{1}{5}x^2>0,\\x\geqslant 0,\end{cases}$得$0\leqslant x<11\sqrt{10}$,所以$f(x)$的定义域为$[0,11\sqrt{10})$.

(2)$f'(x)=-\frac{3}{5}x^2+240$,$x\in[0,11\sqrt{10})$,

当$x\in[0,20)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增;

当$x\in(20,11\sqrt{10})$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减.

所以$f(x)$最大值为$f(20)=-\frac{1}{5}\times 20^3+240\times 20-50=3150$(万元).

所以当$x=20$时,利润$f(x)$最大,最大利润为3150万元.

21.(1)**解**:若选①,因为a_2-1为a_1-1与a_3+1的等比中项,

所以$(a_1-1)(a_3+1)=(a_2-1)^2$,由$\{a_n\}$为等差数列,$S_3=15$,得$3a_2=15$,所以$a_2=5$,

把$a_2=5$代入上式,可得$(4-d)(6+d)=16$,解得$d=2$或$d=-4$(舍去).

所以$a_1=3$,$a_n=3+(n-1)\cdot 2=2n+1$.

若选②,等比数列$\{b_n\}$的公比$q=\frac{1}{2}$,$b_1=a_2$,$b_3=a_3$,

可得$b_3=b_1q^2$,即$a_3=\frac{1}{4}a_2$,即有$a_1+2d=\frac{1}{4}(a_1+d)$,即$3a_1+7d=0$.

又$S_3=15$,所以$3a_1+\frac{1}{2}\times 3\times 2d=15$,即$a_1+d=5$,解得$d=-\frac{15}{4}<1$,不符合题意.

故选①,此时$a_n=2n+1$.

(2)**证明**:因为$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$,

所以$T_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)$,

因为$n\in\mathbf{N}_+$,所以$\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}<\frac{1}{3}$,故$T_n<\frac{1}{6}$.

22.(1)**解**:因为$f(x)=\frac{x}{e^x}+x-\frac{1}{2}x^2$,所以$f'(x)=\frac{e^x-xe^x}{e^{2x}}+1-x=\frac{(1+e^x)(1-x)}{e^x}$,

令$f'(x)=0$,解得$x=1$,

所以当$x\in(-\infty,1)$时,$f'(x)>0$,当$x\in(1,+\infty)$时,$f'(x)<0$,

所以$f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减.

(2)**证明**:要证$g(x)\geqslant f(x)$,即证$-\frac{2}{x-1}-2\geqslant\frac{x}{e^x}+x-\frac{1}{2}x^2$,即证$-\frac{2x}{x-1}-\frac{x}{e^x}-x+\frac{1}{2}x^2\geqslant 0$.

设$F(x)=-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{e^x}-1+\frac{x}{2}$,即证$xF(x)\geqslant 0$.

因为$F'(x)=\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{e^x}+\frac{1}{2}$,所以当$x\in(-\infty,1)$时,$F'(x)>0$恒成立,$F(x)$单调递增,

又当$x=0$时,$F(x)=0$,

所以当$0<x<1$时,$F(x)>0$;当$x<0$时,$F(x)<0$.

所以当$x\in(-\infty,1)$时,$xF(x)\geqslant 0$,

即当$x\in(-\infty,1)$时,$g(x)\geqslant f(x)$.

第10期

第2~3版综合测试(二)参考答案

一、单项选择题

1.C

提示:根据等差中项的性质,可得8,2的等差中项是$\frac{8+2}{2}=5$,故选C.

2.C

提示:$f'(x)=2f'(1)x+1$,令$x=1$,得$f'(1)=2f'(1)+1$,解得$f'(1)=-1$,故选C.

3.D

提示:观察函数$f(x)$的图象得,$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增$(f'(x)>0)$,排除A,C;在$(0,+\infty)$上先单调递增$(f'(x)>0)$,再单调递减$(f'(x)<0)$,后又单调递增$(f'(x)>0)$,排除B,故选D.

4.D

提示:$a_1=5$,$a_2=5+4\times 1=9$,$a_3=5+4\times 2=13$,…,所以$\{a_n\}$是以5为首项,4为公差的等差数列,所以$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d+1=2n^2+3n+1$,故选D.

5.B

提示:设函数$g(x)=e^x\cdot f(x)$,$g'(x)=e^x[f(x)+f'(x)]$,因为$f(x)+f'(x)>0$,所以$g'(x)>0$,函数$g(x)$单调递增.因为$g(-1)=e^{-1}\cdot f(-1)=0$,所以$g(x)=e^x\cdot f(x)>0$的解集是$(-1,+\infty)$.因为$e^x>0$,所以不等式$g(x)=e^x\cdot f(x)>0$等价于不等式$f(x)>0$,所以$f(x)>0$的解集是$(-1,+\infty)$,故选B.

6.D

提示:因为$a_n\cdot a_{n-1}=2^n$ $(n\geqslant 2)$,$a_1=2$,所以$a_2a_1=4$,得$a_2=2$.由$a_{2n}\cdot a_{2n-1}=2^{2n}$,$a_{2n-1}\cdot a_{2n-2}=2^{2n-1}$,得$\frac{a_{2n}}{a_{2n-2}}=2$,所以数列$\{a_{2n}\}$是等比数列,首项为2,公比为2,所以$a_{2n}=2^n$.同理,数列$\{a_{2n-1}\}$是等比数列,首项为2,公比为2,所以$a_{2n-1}=2^n$,所以$\frac{a_{2022}}{a_{2023}}=\frac{2^{1011}}{2^{1012}}=\frac{1}{2}$.故选D.

7.C

提示:由题意知,数列$\{x_n\}$满足$x_1=1$,且点(x_n,x_{n+1})都在函数$y=f(x)$的图象上,可得$x_2=f(x_1)=f(1)=3$,$x_3=$

$f(x_2)=f(3)=5, x_4=f(x_3)=f(5)=6, x_5=f(x_4)=f(6)=1$，…，易知数列$\{x_n\}$是周期为 4 的周期数列，则 $x_1+x_2+\cdots+x_{2022}=505\times(1+3+5+6)+1+3=7579$，故选 C.

8.C

提示：因为 $f(x)=e^x-2ax^2+1$，所以 $f'(x)=e^x-4ax$.由题意得，$f'(x)=e^x-4ax=0$ 有 2 个不同的实数根 x_1,x_2，显然 $x_2\neq0$ 且 $x_1\neq0$，即 $a=\frac{e^x}{4x}$有 2 个不同的实数根.令 $g(x)=\frac{e^x}{4x}$，则 $g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{4x^2}$，令 $g'(x)>0$，可得 $x>1$，令 $g'(x)<0$，可得 $0<x<1$ 或 $x<0$，所以 $g(x)$在$(-\infty,0)$，$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，当 $x\in(-\infty,0)$时，$g(x)<0$，当 $x\in(0,+\infty)$时，$x\to0$ 时，$g(x)\to+\infty$，$x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，且在 $x=1$ 时取得极小值为 $g(1)=\frac{e}{4}$，所以要使 $a=\frac{e^x}{4x}$有 2 个不同的实数根，则 $a>\frac{e}{4}$，故选 C.

二、多项选择题

9.BC

提示：因为 $a_n=\begin{cases}3n+1, n \text{ 为奇数},\\ 2-2n, n \text{ 为偶数},\end{cases}$所以 $a_1=4, a_2=-2, a_3=10, a_4=-6, a_5=16, a_6=-10, a_7=22$，所以 A 错误，B 正确；$S_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=4+(-2)+10+(-6)+16=22$，故 C 正确；因为 $a_6=-10$，即 $S_6-S_5=a_6<0$，所以 $S_6<S_5$，故 D 错误.故选 BC.

10.AD

提示：当 $x<-2$ 时，函数 $f(x)$单调递增，当$-2<x<3$ 时，函数 $f(x)$单调递减，所以函数 $f(x)$在 $x=-2$ 处取得极大值，故 A 正确；B 错误；$f(x)$在区间$(-1,1)$上单调递减，故 C 错误；当 $x\in[-1,3]$时，函数 $f(x)$单调递减，此时函数 $f(x)$的最大值是 $f(-1)$，故 D 正确.故选 AD.

11.ACD

提示：因为 $f'(x)=e^x+2\cos x\sin x$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$f'(x)=e^x+2\cos x\sin x>0$，函数 $f(x)$为增函数，故 A 正确，B 错误；$f'(x)=e^x+2\cos x\sin x=e^x+\sin 2x$，当 $x\geqslant0$ 时，$e^x\geqslant1$，$\sin 2x\in[-1,1]$，所以 $f'(x)=e^x+\sin 2x>0$，所以函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，所以 $f(x)\geqslant f(0)=0$，故C 正确；当 $x<0$ 时，不妨取 $x=-\pi$，则 $f(\pi)=e^{-\pi}-\cos^2(-\pi)=\frac{1}{e^{\pi}}-1<0$，故 D 正确，故选 ACD.

12.ABD

提示：对于 A，B，由 $a_{n+1}=\frac{a_n}{2+3a_n}(n\in N_+)$，两边取倒数得 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2+3a_n}{a_n}=\frac{2}{a_n}+3$，即 $\frac{1}{a_{n+1}}+3=2\left(\frac{1}{a_n}+3\right)$，又 $\frac{1}{a_1}+3=4$，所以$\left\{\frac{1}{a_n}+3\right\}$是以 4 为首项，2 为公比的等比数列，所以 $\frac{1}{a_n}+3=4\times2^{n-1}$，即 $a_n=\frac{1}{2^{n+1}-3}$，故 A，B 正确；对于 C，由$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{1}{2^{n+1}-3}$，知$\{a_n\}$为递减数列，故 C 错误；对于 D，因为 $\frac{1}{a_n}=2^{n+1}-3$，所以$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前 n 项和 $T_n=(2^2-3)+(2^3-3)+\cdots+(2^{n+1}-3)=2(2^1+2^2+\cdots2^n)-3n=2\times\frac{2\times(1-2^n)}{1-2}-3n=2^{n+2}-3n-4$，故 D 正确.故选 ABD.

三、填空题

13.15

提示：由等差数列的性质知 $a_6+a_{15}=a_9+a_{12}=a_1+a_{20}$，则 $2(a_1+a_{20})=30$，解得 $a_1+a_{20}=15$.

14.$[1,+\infty)$

提示：$f'(x)=k-\frac{1}{x}\geqslant0$ 在$(1,+\infty)$内恒成立，所以 $k\geqslant\frac{1}{x}$在$(1,+\infty)$内恒成立，当 $x\in(1,+\infty)$时，$\frac{1}{x}<1$，所以 $k\geqslant1$，所以实数 k 的取值范围为$[1,+\infty)$.

15.4039

提示：设每个 30 分钟进去的人数构成数列$\{a_n\}$，则 $a_1=2=2-0, a_2=4-1, a_3=8-2, a_4=16-3, a_5=32-4$，…，$a_n=2^n-(n-1)$.设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，依题意，只需求 $S_{11}=(2-0)+(2^2-1)+(2^3-2)+\cdots+(2^{11}-10)=(2+2^2+2^3+\cdots+2^{11})-(1+2+\cdots+10)=\frac{2(1-2^{11})}{1-2}-\frac{11\times10}{2}=2^{12}-2-55=2^{12}-57=4039$.

16.$\frac{1}{e}$

提示：因为 $m(e^m+2021)=(n+2021)\ln n=t(t>0)$，故 $m>0$，$\ln n>0$，故 $n>1$.令 $f(x)=(x+2021)\ln x(x>1)$，所以$f'(x)=\ln x+1+\frac{2021}{x}$，因为 $x>1$，故$f'(x)>0$，故 $f(x)=(x+2021)\ln x$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 单调递增，故 $n=e^m$，故 $\frac{\ln t}{m(n+2021)}=\frac{\ln t}{m(e^m+2021)}=\frac{\ln t}{t}$.令 $g(t)=\frac{\ln t}{t}$，则由 $g'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}>0$，得 $t\in(0,e)$；由 $g'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}<0$，得 $t\in(e,+\infty)$，故函数 $g(t)=\frac{\ln t}{t}$在$(0,e)$单调递增，在$(e,+\infty)$单调递减，故最大值为 $g(e)=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$.

四、解答题

17.**解**：若选条件①：由 $2S_n+a_n=1$，得 $2S_{n-1}+a_{n-1}=1(n\geqslant2)$，

两式相减得 $2a_n+a_n-a_{n-1}=0$，即 $3a_n=a_{n-1}(n\geqslant2)$.

将 $n=1$ 代入 $2S_n+a_n=1$，得 $2a_1+a_1=1$，则 $a_1=\frac{1}{3}$，

所以数列$\{a_n\}$是以 $\frac{1}{3}$ 为首项，$\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列，则 $a_n=\frac{1}{3^n}$，

所以 $S_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$.

因为 $S_n\leqslant\frac{492}{985}$，所以 $1-\frac{1}{3^n}\leqslant\frac{984}{985}$，即 $3^n\leqslant985$.

又因为 $n\in N_+$，所以 $1\leqslant n\leqslant6$，所以使得 $S_n\leqslant\frac{492}{985}$成立的 n 的最大值为 6.

若选择条件②：由 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{a_n}$，得 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$，所以 $a_3=\frac{1}{3}a_2=\frac{1}{9}a_1$.

因为 $18a_3=1-a_1$，所以 $3a_1=1$，即 $a_1=\frac{1}{3}$，

所以数列$\{a_n\}$是以 $\frac{1}{3}$ 为首项，$\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列，则 $a_n=\frac{1}{3^n}$，

所以 $S_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$.

因为 $S_n\leqslant\frac{492}{985}$，所以 $1-\frac{1}{3^n}\leqslant\frac{984}{985}$，即 $3^n\leqslant985$.又因为 $n\in N_+$，所以 $1\leqslant n\leqslant6$，

所以使得 $S_n\leqslant\frac{492}{985}$成立的 n 的最大值为 6.

18.**解**：(1)由题可知，$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$，所以切线斜率为 $f'(1)=1$，因为 $f(1)=-1$，所以切点为$(1,-1)$，所以函数 $f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $y-(-1)=x-1$，即 $y=x-2$.

(2)函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，且 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

令 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=0$，得 $x=e$，

由 $f'(x)>0$，可得 $0<x<e$；由 $f'(x)<0$，可得 $x>e$，

所以 $f(x)$在$(0,e)$上单调递增，在$(e,+\infty)$上单调递减，

所以 $x=e$ 时，$f(x)$取得极大值 $f(e)=\frac{1}{e}-1$，无极小值点，也无极小值.

19.**证明**：(1)因为 $a_{n+1}=\frac{2a_n-1}{a_n}$，所以 $a_{n+1}-1=\frac{a_n-1}{a_n}$，因为 $a_1=2$，所以 $a_n-1\neq0$，所以 $\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{a_n}{a_n-1}=1+\frac{1}{a_n-1}$，所以 $\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_n-1}=1$，又因为 $\frac{1}{a_1-1}=1$，所以$\left\{\frac{1}{a_n-1}\right\}$是以 1 为首项，公差为 1 的等差数列.

(2)由(1)得，$\frac{1}{a_n-1}=1+n-1=n$，所以 $a_n=\frac{n+1}{n}$，

所以 $a_1a_2\cdots a_n=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}=n+1$，所以 $b_n=\frac{1}{n+1}$，

所以 $b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}<1$，即 $b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2<1$.

20.(1)**解**：当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2a_1-2$，解得 $a_1=2$.

当 $n\geqslant2$ 时，$S_{n-1}=2a_{n-1}-2$，从而 $S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$，化简得 $a_n=2a_{n-1}(n\geqslant2)$，所以数列$\{a_n\}$是首项为 2，公比为 2 的等比数列，则 $a_n=2\times2^{n-1}$，即 $a_n=2^n(n\in N_+)$.

(2)**证明**：$b_n=\log_2a_n=\log_22^n=n$，$a_n\cdot b_n=n\cdot2^n$，所以 $T_n=1\times2^1+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n$，

从而 $2T_n=1\times2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+(n-1)\times2^n+n\times2^{n+1}$，

两式相减，得$-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot2^{n+1}$，

即$-T_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n\cdot2^{n+1}=2^{n+1}-2-n\cdot2^{n+1}=(1-n)\cdot2^{n+1}-2$，

所以 $T_n=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$，而 $S_n=2a_n-2=2^{n+1}-2$，

所以 $\frac{S_n+T_n}{a_nb_n}=\frac{n\cdot2^{n+1}-2^{n+1}+2+2^{n+1}-2}{n\cdot2^n}=\frac{n\cdot2^{n+1}}{n\cdot2^n}=2$ 为定值.

21.**解**：(1)由题意，得 $y=\left(4+\frac{200}{P}\right)P-x-(100+2P)=2P+100-x$.

因为 $P=30-\frac{200}{x+10}$，将其代入上式并化简，

得 $y=160-\frac{400}{x+10}-x(0\leqslant x\leqslant a)$.

(2)由(1)得 $y=170-\left(\frac{400}{x+10}+x+10\right)\leqslant170-40=130$，

当且仅当 $\frac{400}{x+10}=x+10$，即 $x=10$ 时，上式取等号.

①当 $a\geqslant10$ 时，促销费用需投入 10 万元，厂家的利润最大；

②当 $0<a<10$ 时，易得 $y'=\frac{400}{(x+10)^2}-1=\frac{400-(x+10)^2}{(x+10)^2}$，

因为 $0\leqslant x\leqslant a, 0<a<10$，

所以$(x+10)^2\leqslant400$，所以 $y'>0$，

所以函数 y 在$[0,a]$上单调递增，所以当 $x=a$ 时，函数 $y=160-\frac{400}{x+10}-x$ 有最大值.

即促销费用投入 a 万元时，厂家的利润最大.

综上，当 $a\geqslant10$ 时，促销费用投入 10 万元，厂家的利润最大；当 $0<a<10$ 时，促销费用投入 a 万元，厂家的利润最大.

22.**解**：(1)由题意得 $f'(x)=e^x(x^2+m-2)$.

当 $m\geqslant2$ 时，$f'(x)\geqslant0$ 恒成立，$f(x)$在 **R** 上单调递增；

当 $m<2$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $x>\sqrt{2-m}$，或 $x<-\sqrt{2-m}$；由$f'(x)<0$，得$-\sqrt{2-m}<x<\sqrt{2-m}$，

所以 $f(x)$的单调递增区间是$(-\infty,-\sqrt{2-m})$和$(\sqrt{2-m},+\infty)$，$f(x)$的单调递减区间是$(-\sqrt{2-m},\sqrt{2-m})$.

(2)$x\in(0,+\infty)$，不等式 $f(x)\geqslant e^x\ln x$ 恒成立，

等价于 $x\in(0,+\infty)$，$m\geqslant\ln x-x^2+2x$ 恒成立，

等价于 $x\in(0,+\infty)$，$m\geqslant(\ln x-x^2+2x)_{max}$，

令 $g(x)=\ln x-x^2+2x$，$g'(x)=\frac{1-2x^2+2x}{x}$，令 $g'(x)=0$，

解得 $x=\frac{1+\sqrt3}{2}$或 $x=\frac{1-\sqrt3}{2}$(舍去)，

当 $x\in\left(0,\frac{1+\sqrt3}{2}\right)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

当 $x\in\left(\frac{1+\sqrt3}{2},+\infty\right)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，

所以 $x=\frac{1+\sqrt3}{2}$时，$g(x)$取得最大值，

$[g(x)]_{max}=g\left(\frac{1+\sqrt3}{2}\right)=\ln\frac{1+\sqrt3}{2}-\left(\frac{1+\sqrt3}{2}\right)^2+2\times\frac{1+\sqrt3}{2}=\ln\frac{1+\sqrt3}{2}+\frac{\sqrt3}{2}$，

所以 $m\geqslant\ln\frac{1+\sqrt3}{2}+\frac{\sqrt3}{2}$，

即 m 的取值范围是$\left[\ln\frac{1+\sqrt3}{2}+\frac{\sqrt3}{2},+\infty\right)$.

第 11 期

第 2~3 版综合测试(三)参考答案

一、单项选择题

1.C

提示：由$\{a_n\}$是等差数列，得S_3, S_6-S_3, S_9-S_6构成等差数列，

则$2(S_6-S_3)=S_3+S_9-S_6$，即$2\times(60-10)=10+S_9-60$，解得$S_9=150$.故选C.

2.C

提示：因为$s=at^2+1$，所以$s'=2at$，因为汽车在$t=1$时的瞬时速度为4，

所以$2a=4$，解得$a=2$.故选C.

3.C

提示：因为$S_3=15, a_3=5$，所以$\begin{cases}a_1+a_1q+a_1q^2=15,\\ a_1q^2=5,\end{cases}$解得 $q=1$或$-\frac{1}{2}$.故选C.

4.B

提示：$f'(x)=2020+\ln x+1=2021+\ln x$，由$f'(x_0)=2021+\ln x_0=2021$，得$x_0=1$，故选B.

5.D

提示：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，因为$\frac{S_9}{S_6}=\frac{3}{2}$，所以$\frac{(1+q^3+q^6)S_3}{(1+q^3)S_3}=\frac{3}{2}$，化简得，$2q^6-q^3-1=0$，解得$q^3=-\frac{1}{2}$或$q^3=1$(不符合题意，舍去)，因为$a_1-a_4=3$，即$a_1(1-q^3)=3$，所以$a_1=2$，所以$a_n=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{3}}$，因为$a_m=\frac{1}{2}$，所以$2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{m-1}{3}}=\frac{1}{2}$，解得$m=7$.故选D.

6.C

提示：$f'(x)=a+\frac{1}{x}=\frac{ax+1}{x}(x>0)$，

①当$a\geqslant0$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$在区间$(1,2)$上单调递增，不合题意；

②当$a<0$时，函数$f(x)$有极值点$x=-\frac{1}{a}$，

若函数$f(x)$在区间$(1,2)$上不单调，必有$1<-\frac{1}{a}<2$，解得$-1<a<-\frac{1}{2}$.故选C.

7.B

提示：由题意可知，a_n-2既是5的倍数，又是7的倍数，所以是35的倍数，

即$a_n-2=35(n-1)$，所以$a_n=35n-33$，

当$n=59$时，$a_{59}=35\times59-33=2032<2035$；

当$n=60$时，$a_{60}=35\times60-33=2067>2035$.

故$n=1,2,3,\cdots,59$，数列$\{a_n\}$共有59项，因此数列中间项为第30项，且$a_{30}=35\times30-33=1017$.故中间项的值为1017.故选B.

8.A

提示：不等式$f(x)>0$对任意的$x\in(0,+\infty)$恒成立等价于$a<\frac{e^x}{x}+x^2-2x$对任意的$x\in(0,+\infty)$恒成立.

令$g(x)=\frac{e^x}{x}+x^2-2x(x>0)$，则$g'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}+2x-2=\frac{(x-1)(e^x+2x^2)}{x^2}(x>0)$，

所以当$x>1$时，$g'(x)>0$，当$0<x<1$时$g'(x)<0$，所以$g(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，所以$[g(x)]_{min}=g(1)=e-1$，所以$a<e-1$.故选A.

二、多项选择题

9.ACD

提示：由题意可得 $\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\frac{\frac{(2n-1)(a_1+a_{2n-1})}{2}}{\frac{(2n-1)(b_1+b_{2n-1})}{2}}=\frac{(2n-1)a_n}{(2n-1)b_n}=\frac{a_n}{b_n}$，

则$\frac{a_n}{b_n}=\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\frac{3(2n-1)+39}{(2n-1)+3}=\frac{3n+18}{n+1}=3+\frac{15}{n+1}$，由$\frac{a_n}{b_n}$为整数，可知$n+1$为15的正约数，则$n+1$的可能取值有3，5，15，因此，正整数$n$的可能取值有2，4，14.故选ACD.

10.ABD

提示：在等比数列中，$a_{n+1}-a_n=a_n(q-1)$，

当$a_1>0, 0<q<1$时，显然有$a_n(q-1)<0$，故数列$\{a_n\}$为递减数列，故A正确；

当$a_1<0, 0<q<1$，显然有$a_n(q-1)>0$，故$\{a_n\}$为递增数列，故B正确；

若等比数列$\{a_n\}$的公比$q=1$，则$S_4+S_6=10a_1$，$2S_5=10a_1$，所以$S_4+S_6=2S_5$，故C不正确；

设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q(q\neq0)$，若$b_n=\frac{1}{a_n}$，则$\{b_n\}$是等比数列，公比为$\frac{1}{q}$，故D正确.

故选ABD.

11.AC

提示：$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，$f'(1)=1$，$f(1)=0$，所以$f(x)$的图象在点$(1,0)$处的切线方程为$y-0=f'(1)(x-1)$，即$y=1\cdot(x-1)=x-1$，故A正确；在$(0,e)$上，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，在$(e,+\infty)$上，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，$x=e$是$f(x)$的极大值点，故B，D错误，$f(x)$的极大值为$f(e)=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$，故C正确.故选AC.

12.ABD

提示：因为$0<a<b<1$，e为自然对数的底数，

对于A，设 $f(x)=xe^x$，$0<x<1$，则$f'(x)=(x+1)e^x>0$，$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，故$f(a)<f(b)$，即 $ae^a<be^b$，故A正确；

对于B，设 $h(x)=\frac{e^x}{x}(0<x<1)$，则$h'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}<0$在$(0,1)$上恒成立，故函数$h(x)$在$(0,1)$上单调递减，故$h(a)>h(b)$，即$\frac{e^a}{a}>\frac{e^b}{b}$，故 $be^a>ae^b$，故B正确；

对于C，设 $t(x)=x\ln x(0<x<1)$，则 $t'(x)=\ln x+1$，当 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$时，$t'(x)<0$，当$x\in\left(\frac{1}{e},1\right)$时，$t'(x)>0$，故 $t(x)$在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{e},1\right)$上单调递增，$t(a)$与$t(b)$的大小关系不确定，故C错误；

对于D，设$g(x)=\frac{\ln x}{x}(0<x<1)$，则$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}>0$，函数$g(x)$在$(0,1)$上单调递增，故$g(a)<g(b)$，即$\frac{\ln a}{a}<\frac{\ln b}{b}$，化为$b\ln a<a\ln b$，即$\ln a^b<\ln b^a$，即$a^b<b^a$，故D正确.故选ABD.

三、填空题

13.-4

提示：记$f(x)=(ax+3)e^x$，所以$f'(x)=(ax+3+a)e^x$.由题意得，$f'(0)=3+a=-1$，解得$a=-4$.

14.$a_n=2^{n-1}$；6

提示：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，则$a_1q=2$，$S_2-3a_1=a_2+a_1-3a_1=0$，

解得$a_1=1, q=2$，故$a_n=1\times2^{n-1}=2^{n-1}$，$S_n=\frac{1\cdot(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$，$S_n+a_n=2^n-1+2^{n-1}>48$，即$3\cdot2^{n-1}>49$，故$n$的最小值为6.

15.308

提示：由$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}(n\geqslant2)$，得$a_3=a_1+a_2$，$a_4=a_2+a_3=a_1+2a_2$，

同理得$a_5=2a_1+3a_2$，$a_6=3a_1+5a_2$，$a_7=5a_1+8a_2$，$a_8=8a_1+13a_2$，$a_9=13a_1+21a_2$，$a_{10}=21a_1+34a_2$，

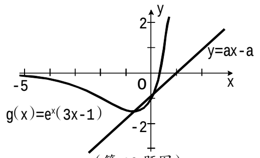
所以$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9+a_{10}=55a_1+88a_2=11a_7=308$.

16.$\left[\frac{2}{e},1\right)$

提示：设$g(x)=e^x(3x-1)$，$y=ax-a$，

由题意知，函数$y=g(x)$在直线$y=ax-a$下方的图象中只有一个点的横坐标为整数，

$g'(x)=e^x(3x+2)$，当$x<-\frac{2}{3}$时，$g'(x)<0$，当$x>-\frac{2}{3}$时，$g'(x)>0$.所以$y=g(x)$的最小值为$g\left(-\frac{2}{3}\right)=-3e^{-\frac{2}{3}}$.又$g(0)=-1$，$g(1)=2e>0$，直线$y=ax-a$恒过定点$(1,0)$且斜率为$a$，在同一平面直角坐标系中画出$g(x)$的图象与直线$y=ax-a$，如图所示，因为$a<1$，所以$-a>g(0)=-1$，所以$g(-1)=-4e^{-1}\geqslant-a-a$，解得$a\geqslant\frac{2}{e}$.综上，$\frac{2}{e}\leqslant a<1$.



(第 16 题图)

四、解答题

17.**解**：若选①，

(1)设数列$\{a_n\}$公差为d，则$\begin{cases}a_8=a_1+7d=4,\\ S_{11}=11a_1+55d=-22,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=-17,\\ d=3,\end{cases}$所以$a_n=a_1+(n-1)d=3n-20$.

令$3n-20=2022$，得$n=\frac{2042}{3}\notin N$，所以2022不是数列$\{a_n\}$中的项.

(2)令$a_n=3n-20>0$，解得$n>\frac{20}{3}$.所以当$n\leqslant6$时，$a_n<0$.

故当$n=6$时，S_n取到最小值，最小值为$S_6=6a_1+15d=-57$.

若选②，

(1)设数列$\{a_n\}$公差为d，则$\begin{cases}a_8=a_1+7d=4,\\ S_6-S_5=a_6=a_1+5d=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=-10,\\ d=2,\end{cases}$所以$a_n=2n-12$.

令$2n-12=2022$，解得$n=1017$，所以2022是数列$\{a_n\}$的第1017项.

(2)令$2n-12>0$，得$n>6$，所以当$n\leqslant6$时，$a_n\leqslant0$.

故当$n=6$或$n=5$时，S_n取到最小值，最小值为$S_5=S_6=-30$.

18.(1)**解**：由题设知，$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，

令$f'(x)=0$，得$x=1$.

当$0<x<1$时，$f'(x)>0$，故$f(x)$在$(0,1)$上单调递增；

当$x>1$时，$f'(x)<0$，故$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减.

所以当$x=1$时，$f(x)$取得极大值，极大值为$f(1)=0$.

(2)**证明**：令$g(x)=x\ln x-x+1$，所以$g'(x)=\ln x$，

又$x>1$时，$g'(x)>0$，所以$g(x)$在$(1,+\infty)$上是增函数，

所以$x>1$时，$g(x)>g(1)=0$，即$x>1$时，$x\ln x-x+1>0$，

即$x>1$时，$\frac{x-1}{\ln x}<x$.

19.(1)**解**：设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q(q>1)$，由$a_4=32$，得$a_3+a_5=\frac{32}{q}+32q=80$.

解得$q=2$或$q=\frac{1}{2}$(舍去)，所以$a_n=a_4\cdot2^{n-4}=2^{n+1}$.

(2)**证明**：由$b_n=\log_2a_n=n+1$，得$c_1=b_1=2$，

当$n\geqslant2$时，$c_1\cdot c_2\cdots c_n=n+1$，①

$c_1\cdot c_2\cdots c_{n-1}=n$，②

由①②得$c_n=\frac{n+1}{n}(n\geqslant2)$，

当$n=1$时，$c_1=\frac{2}{1}=2$满足上式，故$c_n=\frac{n+1}{n}$，所以$\frac{1}{b_n}+\frac{1}{c_n}=\frac{1}{n+1}+\frac{n}{n+1}=1$.

20.**解**：(1)当$a=-1$时，$f(x)=-x+\ln x+1(x>0)$，

则$f'(x)=-1+\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x}$，所以当$x\in(0,1)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，所以函数$f(x)$的最大值为$f(1)=0$.

(2)不等式$ax+\ln x+1\leqslant e^x$恒成立，等价于$a\leqslant\frac{e^x-\ln x-1}{x}$在$(0,+\infty)$恒成立，

令$g(x)=\frac{e^x-\ln x-1}{x}$，$x>0$，则$g'(x)=\frac{(x-1)e^x+\ln x}{x^2}$，

令$h(x)=(x-1)e^x+\ln x$，$x>0$，$h'(x)=xe^x+\frac{1}{x}>0$，

所以$y=h(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，而$h(1)=0$，

所以$x\in(0,1)$时，$h(x)<0$，即$g'(x)<0$，$y=g(x)$单调递减；$x\in(1,+\infty)$时，$h(x)>0$，即$g'(x)>0$，$y=g(x)$单调递增.所以在$x=1$处$y=g(x)$取得最小值$g(1)=e-1$.

所以$a\leqslant e-1$，即实数a的取值范围是$(-\infty,e-1]$.

21.(1)**证明**：因为$a_{n+1}=-\frac{3}{4}S_n(n\in\mathbf{N}_+)$，所以$S_{n+1}-S_n=-\frac{3}{4}S_n$，即$S_{n+1}=\frac{1}{4}S_n$，即$\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{1}{4}$，

又$S_1=a_1=\frac{1}{4}$，所以数列$\{S_n\}$是以$\frac{1}{4}$为首项，$\frac{1}{4}$为公比的等比数列.

(2)**解**：由(1)可得$S_n=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^n$，

因为数列$\{b_n\}$是首项为1，公差为3的等差数列，所以$b_n=1+3(n-1)=3n-2$，

所以$c_n=b_nS_n=(3n-2)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$，

所以$T_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n=\frac{1}{4}+4\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+7\times\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots+(3n-2)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$，

$\frac{1}{4}T_n=\left(\frac{1}{4}\right)^2+4\times\left(\frac{1}{4}\right)^3+7\times\left(\frac{1}{4}\right)^4+\cdots+(3n-5)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n+(3n-2)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$，

两式相减可得$\frac{3}{4}T_n=\frac{1}{4}+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^n-(3n-2)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}=\frac{\frac{3}{4}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}-(3n-2)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}=\frac{1}{2}-(3n+2)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$，所以$T_n=\frac{2}{3}-\left(n+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

(3)**解**：因为$c_{n+1}-c_n=(3n+1)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-(3n-2)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n=9(1-n)\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$，

所以当$n=1$时，$c_2=c_1=\frac{1}{4}$，

当$n\geqslant2$时，$c_{n+1}<c_n$，所以$c_1=c_2>c_3>c_4>\cdots>c_n$，所以当$n=1$或2时，$c_n$取得最大值$\frac{1}{4}$，

又$c_n\leqslant\frac{1}{4}m^2+m-1$对一切正整数$n$恒成立，所以$\frac{1}{4}m^2+m-1\geqslant\frac{1}{4}$，即$m^2+4m-5\geqslant0$，

解得$m\leqslant-5$或$m\geqslant1$，故实数m的取值范围是$(-\infty,-5]\cup[1,+\infty)$.

22.(1)**解**：当$a=1$时，$f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-x^2-x$，$g(x)=f(x)+x^2=\frac{1}{2}e^{2x}-x$，$g'(x)=e^{2x}-1$，

令$g'(x)>0$，可得$x>0$，令$g'(x)<0$，可得$x<0$，

所以$g(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$，单调递减区间为$(-\infty,0)$.

(2)**证明**：函数$f(x)=\frac{1}{2}ae^{2x}-x^2-ax$的定义域为**R**，$f'(x)=ae^{2x}-2x-a$，

令$h(x)=f'(x)=ae^{2x}-2x-a$，因为函数$f(x)$有两个极值点$x_1,x_2(x_1<x_2)$，

所以x_1,x_2是函数$h(x)$的两个零点，$h(x_1)=h(x_2)=0$，

$h'(x)=2ae^{2x}-2$，令$h'(x)>0$，可得$x>\frac{1}{2}\ln\frac{1}{a}$，令$h'(x)<0$，可得$x<\frac{1}{2}\ln\frac{1}{a}$，所以$h(x)$在$\left(-\infty,\frac{1}{2}\ln\frac{1}{a}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增，所以$x_1<\frac{1}{2}\ln\frac{1}{a}$，$x_2>\frac{1}{2}\ln\frac{1}{a}$.

由$0<a<\frac{4}{e^4-1}$，可得$\frac{1}{2}\ln\frac{1}{a}>\frac{1}{2}\ln\frac{e^4-1}{4}>0$，

因为$h(0)=0$，所以$x_1=0$，所以要证$x_2-x_1>2$，即证$x_2>2$，只需证$h(2)<0$，

因为$0<a<\frac{4}{e^4-1}$，所以$h(2)=ae^4-4-a=a(e^4-1)-4<\frac{4}{e^4-1}(e^4-1)-4=4-4=0$，

所以$x_2-x_1>2$，得证.

第 12 期

第 2~3 版综合测试(四)参考答案

一、单项选择题

1.B

提示：根据题意，设最大内角为$x°$，则中间的内角大小为$\frac{x+30}{2}$，

则有$x+\frac{x+30}{2}+30=180$，解得$x=90$，故选B.

2.A

提示：设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q(q>0)$，由$a_1a_3=\frac{9}{4}$，得$a_2^2=\frac{9}{4}$，

又$a_2+a_4=15$，得$a_2+a_2q^2=15$，即$a_2(1+q^2)=15$，由于$1+q^2>0$，所以$a_2>0$，

则$a_2=\frac{3}{2}$，所以$\frac{3}{2}(1+q^2)=15$，即$1+q^2=10$，解得$q=3$或$q=-3$(舍去)，

所以$a_1+a_3+a_5=\frac{a_2}{q}+a_2q+a_2q^3=\frac{\frac{3}{2}}{3}+\frac{3}{2}\times3+\frac{3}{2}\times3^3=\frac{91}{2}$.故选A.

3.D

提示：$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$，所以所求切线的斜率为$f'(1)=1$，

设函数$f(x)=\ln(x^2+1)$的图象在点$(1,f(1))$处的切线的倾斜角为θ，

则$\tan\theta=1$，所以$\theta=\frac{\pi}{4}$，故选D.

4.B

提示：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由$S_7=S_{16}$，得$7a_1+21d=16a_1+120d$，即$a_1+11d=0$，又$a_1=22$，所以$d=-2$，所以$S_n=22n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-2)=-n^2+23n$，又$n\in\mathbf{N}_+$，且$S_{11}=S_{12}=132$，所以当$n=11$或$n=12$时，$S_n$有最大值且最大值为132.故选B.