$a_1+a_2+a_3, a_4+a_5+a_6, a_7+a_8+a_9, a_{10}+a_{11}+a_{12}$也成等比数列,

所以由$a_1+a_2+a_3=3, a_4+a_5+a_6=6$,得$a_7+a_8+a_9=12, a_{10}+a_{11}+a_{12}=24$,

所以$\{a_n\}$的前12项和为3+6+12+24=45.故选C.

7.D

提示:由题意知,1,5,11,21,37,61,95,…的差的数列为4,6,10,16,24,34,…

这个数列的差组成的数列为2,4,6,8,10,12,…是等差数列,

所以前7项分别为1,5,11,21,37,61,95,则该数列的第8项为95+34+12=141.故选D.

8.C

提示:因为等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n, $S_{12}<S_{15}<S_{13}$,所以$a_{13}+a_{14}+a_{15}=3a_{14}>0$,且$a_{14}+a_{15}<0$,所以$a_{14}>0, a_{15}<-a_{14}<0$,即前14项为正数,从第15项开始为负数.

因为$b_n=a_na_{n+1}a_{n+2}$, $b_{12}=a_{12}\cdot a_{13}\cdot a_{14}>0$, $b_{13}=a_{13}\cdot a_{14}\cdot a_{15}<0$, $b_{14}=a_{14}\cdot a_{15}\cdot a_{16}>0$,又$b_{14}+b_{13}=a_{14}\cdot a_{15}\cdot(a_{13}+a_{16})=a_{14}\cdot a_{15}(a_{14}+a_{15})>0$,所以数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$取最大值时$n=14$.故选C.

二、多项选择题

9.AB

提示:等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,且$a_3+\lambda a_9+a_{15}=15$,

所以$1+2d+\lambda(1+8d)+1+14d=15$,整理得$d=\dfrac{13-\lambda}{16+8\lambda}$,

因为$d\in[1,2]$,

所以$\begin{cases}\dfrac{13-\lambda}{16+8\lambda}\geqslant 1,\\ \dfrac{13-\lambda}{16+8\lambda}\leqslant 2,\end{cases}$解得$-\dfrac{19}{17}\leqslant\lambda\leqslant-\dfrac{1}{3}$.所以实数$\lambda$的可能取值为$-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{19}{17}$.故选AB.

10.AD

提示:对于A,因为数列$\{a_n\}$是等比数列,设公比为q,所以$\dfrac{a_{n+1}^2}{a_n^2}=\dfrac{a_1^2q^{2n}}{a_1^2q^{2n-2}}=q^2$,所以数列$\{a_n^2\}$是等比数列,故A正确;

对于B,设数列$\{a_n\}$的公比为q,因为$a_3=2, a_7=32$,所以$q^4=\dfrac{a_7}{a_3}=16$,所以$q^2=4$,所以$a_5=a_3\cdot q^2=8$,故B错误;

对于C,因为数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=3^{n-1}+r$,

所以$a_1=S_1=1+r$, $a_2=S_2-S_1=(3+r)-(1+r)=2$, $a_3=S_3-S_2=(9+r)-(3+r)=6$,

所以$2^2=(1+r)\times 6$,解得$r=-\dfrac{1}{3}$,故C错误;

对于D,若$a_1<a_2<a_3$,则由等比数列的性质得数列$\{a_n\}$是递增数列,故D正确.故选AD.

11.ABD

提示:由$S_5<S_6$,得$a_6=S_6-S_5>0$;又$S_6=S_7>S_8$,得$a_7=S_7-S_6=0$, $a_8=S_8-S_7<0$,所以$d=a_8-a_7<0$,故A,B正确;

由$a_7=a_5+2d=a_3+4d=0$,得$a_5=-2d$, $a_3=-4d$,所以$S_9=\dfrac{9}{2}\cdot(a_1+a_9)=9a_5=-18d$, $S_5=5a_3=-20d$,所以$S_9<S_5$,故C错误;因为$a_3=a_1+2d=-4d$,所以$a_1=-6d>0$,则$S_n=\dfrac{n}{2}(a_1+a_n)=\dfrac{dn^2-13dn}{2}=\dfrac{dn(n-13)}{2}$,因此当$n>13$时,$S_n<0$,故D正确.故选ABD.

12.AC

提示:对于A,设等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1,公差为d,则$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,

$S_{2n}-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}=a_1+nd+a_2+nd+\cdots+a_n+nd=S_n+n^2d$,同理,

$S_{3n}-S_{2n}=a_{2n+1}+a_{2n+2}+\cdots+a_{3n}=S_{2n}-S_n+n^2d$,所以$2(S_{2n}-S_n)=S_n+(S_{3n}-S_{2n})$,

所以$S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}$仍为等差数列,故A正确;

对于B,取数列$\{a_n\}$为-1,1,-1,1,…,其中S_n可能为0,

因此$S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}$不能成等比数列,故B错误;

对于C,设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,则$a_{n+1}-a_n=d$,于是,$\dfrac{a^{a_{n+1}}}{a^{a_n}}=a^{a_{n+1}-a_n}=a^d$,

所以$\{a^{a_n}\}$(a为正常数)为等比数列,故C正确;

对于D,取数列$\{a_n\}$为-1,1,-1,1,…,则$\lg a_n$可能无意义,

所以$\{\lg a_n\}$为等差数列是不正确的,故D错误.故选AC.

三、填空题

13.80

提示:等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=2, q=3$,所以$S_4=\dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}=\dfrac{2\times(1-3^4)}{1-3}=80$.

14.$a_n=2-\dfrac{1}{n}(n\in\mathbf{N}_+)$

提示:因为函数$a_n=2-\dfrac{1}{n}$的定义域为$\mathbf{N}_+$,且$a_n=2-\dfrac{1}{n}$在$\mathbf{N}_+$上单调递增,又$0<2-\dfrac{1}{n}<2$,

所以满足3个条件的数列的通项公式可以是$a_n=2-\dfrac{1}{n}(n\in\mathbf{N}_+)$.

15.0;1011

提示:由$\{a_n\}$是等差数列,得$S_{2022}=\dfrac{2022}{2}(a_1+a_{2022})=1011(a_2+a_{2021})=0$;又$a_1=\sqrt{5}>0$, $a_2+a_{2021}=a_{1011}+a_{1012}=0$,所以$\{a_n\}$是$a_1>0$的递减数列,且$a_{1011}>0, a_{1012}<0$,所以当$S_n$取得最大值时,$n=1011$.

16.$\dfrac{21}{11}$

提示:根据题意可得$a_{n+2}=f(a_n)=\dfrac{2}{a_n+1}$,又$a_1=2$,所以$a_3=\dfrac{2}{a_1+1}=\dfrac{2}{3}$, $a_5=\dfrac{2}{a_3+1}=\dfrac{6}{5}$, $a_7=\dfrac{2}{a_5+1}=\dfrac{10}{11}$.由于数列$\{a_n\}$的各项均为正数,所以设$a_{2020}=a_{2022}=m>0$,则$m=\dfrac{2}{m+1}$,解得$m=1$或$m=-2$(舍去),所以$a_{2020}=a_{2022}=1$,由$a_{n+2}=\dfrac{2}{a_n+1}$,得$a_{2022}=a_{2020}=a_{2018}=\cdots=a_2=1$,所以$a_8=1$,所以$a_7+a_8=\dfrac{21}{11}$.

四、解答题

17.**解**:(1)由$2S_n+1=a_{n+1}$,得$2S_{n-1}+1=a_n$,两式相减并整理得$a_{n+1}=3a_n$,

所以数列$\{a_n\}$是以1为首项,3为公比的等比数列,所以$a_n=3^{n-1}$.

(2)由(1)可知数列$\{a_n\}$是以1为首项,3为公比的等比数列,所以$S_n=\dfrac{1-3^n}{1-3}=\dfrac{1}{2}\cdot(3^n-1)$.

18.**解**:(1)因为$a_1=1$, $a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, n为奇数,\\ a_n+2, n为偶数,\end{cases}$

所以$a_2=a_1+1=2$, $a_3=a_2+2=4$, $a_4=a_3+1=5$,所以$b_1=a_2=2$, $b_2=a_4=5$,

因为$b_n-b_{n-1}=a_{2n}-a_{2n-2}=a_{2n}-a_{2n-1}+a_{2n-1}-a_{2n-2}=1+2=3, n\geqslant 2$,

所以数列$\{b_n\}$是以$b_1=2$为首项,以3为公差的等差数列,所以$b_n=2+3(n-1)=3n-1$.

(2)由(1)可得$a_{2n}=3n-1, n\in\mathbf{N}_+$,则$a_{2n-1}=a_{2n-2}+2=3(n-1)-1+2=3n-2, n\geqslant 2$,

当$n=1$时,$a_1=1$也适合上式,所以$a_{2n-1}=3n-2, n\in\mathbf{N}_+$,

所以数列$\{a_n\}$的奇数项和偶数项分别为等差数列,则$\{a_n\}$的前20项和为$a_1+a_2+\cdots+a_{20}=(a_1+a_3+\cdots+a_{19})+(a_2+a_4+\cdots+a_{20})=10+\dfrac{10\times 9}{2}\times 3+10\times 2+\dfrac{10\times 9}{2}\times 3=300$.

19.**解**:(1)由题意,每年的支出费用组成首项为11,公差为2的等差数列,

故前n年的总支出费用为$11n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2+10n$,

所以$f(n)=36n-(n^2+10n)-64=-n^2+26n-64, n\in\mathbf{N}_+$.

所以$f(n)=-(n-13)^2+105$,

所以$n=13$时,$f(n)$取得最大值105,

即前13年的纯利润总和最大,且最大值为105万元.

(2)由(1)知,前n年的年平均纯利润为

$\dfrac{f(n)}{n}=\dfrac{-n^2+26n-64}{n}=-\left(n+\dfrac{64}{n}\right)+26$,

因为$n+\dfrac{64}{n}\geqslant 2\sqrt{n\cdot\dfrac{64}{n}}=16$,当且仅当$n=\dfrac{64}{n}$,即$n=8$时,等号成立,所以$\dfrac{f(n)}{n}\leqslant -16+26=10$,

所以前8年的年平均纯利润最大,且最大值为10万元.

20.(1)**解**:因为$a_1, 3a_2, 9a_3$成等差数列,所以$6a_2=a_1+9a_3$,

因为$\{a_n\}$是首项为1的等比数列,设其公比为q,

则$6q=1+9q^2$,所以$q=\dfrac{1}{3}$,所以$a_n=a_1q^{n-1}=\dfrac{1}{3^{n-1}}$,所以$b_n=\dfrac{na_n}{3}=n\cdot\dfrac{1}{3^n}$.

(2)**证明**:由(1)知$a_n=\dfrac{1}{3^{n-1}}$, $b_n=n\cdot\dfrac{1}{3^n}$,

所以$S_n=\dfrac{1\times\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)}{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3^{n-1}}$,

$T_n=1\times\dfrac{1}{3}+2\times\dfrac{1}{3^2}+\cdots+n\cdot\dfrac{1}{3^n}$,①

所以$\dfrac{1}{3}T_n=1\times\dfrac{1}{3^2}+2\times\dfrac{1}{3^3}+\cdots+(n-1)\cdot\dfrac{1}{3^n}+n\cdot\dfrac{1}{3^{n+1}}$,②

①-②得,$\dfrac{2}{3}T_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}-n\cdot\dfrac{1}{3^{n+1}}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)-n\cdot\dfrac{1}{3^{n+1}}$,所以$T_n=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3^{n-1}}-\dfrac{n}{2}\cdot\dfrac{1}{3^n}$,

所以$T_n-\dfrac{S_n}{2}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3^{n-1}}-\dfrac{n}{2}\cdot\dfrac{1}{3^n}-\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3^{n-1}}\right)=-\dfrac{n}{2}\cdot\dfrac{1}{3^n}<0$,所以$T_n<\dfrac{S_n}{2}$.

21.**解**:(1)由$a_{n+1}^2=S_{n+1}+S_n$,得$a_n^2=S_n+S_{n-1}(n\geqslant 2)$,

两式相减得$a_{n+1}^2-a_n^2=a_{n+1}+a_n(n\geqslant 2)$,

因为$a_n>0$,所以$a_{n+1}-a_n=1(n\geqslant 2)$.

又$a_1=1$, $a_2^2=a_1+a_2+a_1$,解得$a_2=2$,满足$a_{n+1}-a_n=1$,

因此数列$\{a_n\}$是等差数列,首项a_1为1,公差d为1,

所以$a_n=a_1+(n-1)d=n$.

(2)由(1)得,$b_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$,

所以$T_n=b_1+b_2+\cdots b_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{(2n-1)}-\dfrac{1}{(2n+1)}\right]=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{n}{2n+1}$.

22.**解**:(1)由$4S_{n+1}=3S_n-9$,可得$4S_n=3S_{n-1}-9(n\geqslant 2)$,两式作差,可得$4a_{n+1}=3a_n$,所以$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{3}{4}$,又$4S_2=3S_1-9$,即$4a_1+4a_2=3a_1-9$,所以$a_2=-\dfrac{27}{16}$,所以$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{3}{4}$,所以数列$\{a_n\}$是以$-\dfrac{9}{4}$为首项,$\dfrac{3}{4}$为公比的等比数列,

所以$a_n=-\dfrac{9}{4}\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}=-3\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

(2)由$3b_n+(n-4)a_n=0$,得$b_n=-\dfrac{n-4}{3}a_n=(n-4)\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$,

$T_n=-3\times\dfrac{3}{4}-2\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2-1\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^3+\cdots+(n-5)\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}+(n-4)\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$,

$\dfrac{3}{4}T_n=-3\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2-2\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^3-1\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^4+\cdots+(n-5)\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+(n-4)\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}$,

两式作差可得,

$\dfrac{1}{4}T_n=-3\times\dfrac{3}{4}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+\left(\dfrac{3}{4}\right)^3+\left(\dfrac{3}{4}\right)^4+\cdots+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n-(n-4)\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}=-\dfrac{9}{4}+\dfrac{\dfrac{9}{16}\left[1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}\right]}{1-\dfrac{3}{4}}-(n-4)\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}$

$=-\dfrac{9}{4}+\dfrac{9}{4}-4\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}-(n-4)\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}=-n\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}$,

则$T_n=-4n\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}$.

据此可得$-4n\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1}\leqslant\lambda(n-4)\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$恒成立,即$\lambda\cdot(n-4)+3n\geqslant 0$恒成立.当$n=4$时,不等式成立;当$n<4$时,$\lambda\leqslant-\dfrac{3n}{n-4}=-3-\dfrac{12}{n-4}$,由于$n=1$时,$\left(-3-\dfrac{12}{n-4}\right)_{\min}=1$,故$\lambda\leqslant 1$;当$n>4$时,$\lambda\geqslant-\dfrac{3n}{n-4}=-3-\dfrac{12}{n-4}$,而$-3-\dfrac{12}{n-4}<-3$,故$\lambda\geqslant-3$.

综上,实数λ的取值范围是$[-3,1]$.

扫码免费下载习题讲解ppt

第1期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.A

提示:由$1=\sqrt{1}, 2=\sqrt{4}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{13},\cdots$,则第$n$项为$\sqrt{3n-2}$,因为$2\sqrt{7}=\sqrt{28}$,所以$3n-2=28$, $n=10$,故选A.

2.C

提示:对于A,若数列为$\{n^2+1\}$,则有$n^2+1=156$,无正整数解,不符合题意;

对于B,若数列为$\{n^2-1\}$,则有$n^2-1=156$,无正整数解,不符合题意;

对于C,若数列为$\{n^2+n\}$,则有$n^2+n=156$,解可得$n=12$或-13(舍去),有正整数解$n=12$,符合题意;

对于D,若数列为$\{n^2+n-1\}$,则有$n^2+n-1=156$,无正整数解,不符合题意.故选C.

3.B

提示:因为数列$\{a_n\}$中,$a_n=\dfrac{n}{\sqrt{16-2n}}$,所以$a_4=\dfrac{4}{\sqrt{16-8}}=\sqrt{2}$,故选B.

4.B

提示:对于①,$\{1,2,3\}$是集合,不是数列,故①错误;

对于②,数列是有序的,故数列1,2,3与数列3,2,1是不同的数列,故②错误;

对于③,数列$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$的第$k-1$项是$\dfrac{1}{k-1}$,故③正确;

对于④,数列的通项公式可以有多个,不一定唯一,故④正确.故选B.

5.D

提示:根据题意,数列0,2,4,8,12,18,24,32,40,50,…,

其通项公式可以为$a_n=\begin{cases}\dfrac{n^2-1}{2}, n为奇数,\\ \dfrac{n^2}{2}, n为偶数,\end{cases}$则$a_{11}=60$, $a_{12}=72$, $a_{13}=84$, $a_{14}=98$,故选D.

6.D

提示:依题意,数列$\{a_n\}$的符号正负间隔出现,故符号为$(-1)^{n+1}$,且每项为$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$,

故该数列的一个通项公式为$(-1)^{n+1}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$,故选D.

7.A

提示:根据题意,$a_n=n(8-n)=8n-n^2$,对于二次函数$y=-x^2+8x$,其图象开口向下,对称轴为$x=4$,即当$x=4$时,$y=-x^2+8x$取得最大值,对于数列$\{a_n\}$, $n=4$时,a_n最大;

且当$1\leqslant n<8$时,$a_n>0$,当$n=8$时,$a_n=0$,当$n>8$时,$a_n<0$,故当$n=7$或$n=8$时,S_n最大.

故$\{a_n\}$有最大项,$\{S_n\}$有最大项.故选A.

8.B

提示:因为a_5是数列$\{a_n\}$的最小项,

所以$\begin{cases}a_5\leqslant a_6,\\ a_5\leqslant a_4,\end{cases}$因为$a_n=n^2-11n+\dfrac{a}{n}$,

所以$\begin{cases}25-55+\dfrac{a}{5}\leqslant 36-66+\dfrac{a}{6},\\ 25-55+\dfrac{a}{5}\leqslant 16-44+\dfrac{a}{4},\end{cases}$

解得$-40\leqslant a\leqslant 0$,

所以实数a的取值范围是$[-40,0]$.

二、多项选择题

9.BD

提示:对于A,$a_n=\begin{cases}0, n为奇数,\\ 2, n为偶数,\end{cases}$该数列的前4项为0,2,0,2,不符合题意;

对于B,$a_n=(-1)^{n-1}+1$,该数列的前4项为2,0,2,0,符合题意;

对于C,$a_n=2\sin\dfrac{n\pi}{2}$,该数列的前4项为2,0,-2,0,不符合题意;

对于D,$a_n=\cos((n-1)\pi)+1$,该数列的前4项为2,0,2,0,符合题意.故选BD.

10.BD

提示:对于A,$a_n=\dfrac{1}{n}$, $a_1=1$, $a_2=\dfrac{1}{2}$,不是递增数列,不符合题意;

对于B,$a_n=n^2+n$, $a_n-a_{n-1}=n^2+n-(n-1)^2-(n-1)=2n>0$,是递增数列,符合题意;

对于C,$a_n=1-2n$, $a_n-a_{n-1}=(1-2n)-[1-2(n-1)]=-2$,不是递增数列,不符合题意;

对于D,$a_n=2^n+1$,函数$y=2^x+1$为递增函数,则$a_n=2^n+1$是递增数列,符合题意.故选BD.

11.BD

提示:根据题意,数列的通项公式为$a_n=n^2-8n+15$,若$a_n=n^2-8n+15=3$,解得$n=2$或$n=6$,即3可以是数列的第2项或第6项,故选BD.

12.CD

提示:因为$a_n=2^n$, $\forall i,j\in\mathbf{N}_+$,所以$a_{i+j}+a_i=2^{i+j}+2^i=2^i\cdot(2^j+1)\notin\{a_n\}$, $a_{i+j}-a_i=2^{i+j}-2^i=2^i(2^j-1)\notin\{a_n\}$, $a_{i+j}a_i=2^{i+j}\cdot 2^i=2^{2i+j}\in\{a_n\}$, $\dfrac{a_{i+j}}{a_i}=a_j\in\{a_n\}$,故选CD.

三、填空题

13.9

提示:根据数列的前几项,归纳数列的通项公式为$a_n=\dfrac{n-1}{2n}$.令$\dfrac{n-1}{2n}=\dfrac{4}{9}$,解得$n=9$.

14.$\dfrac{1}{2^n+1}$

提示:根据题意,数列$\{a_n\}$的前四项依次为$\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{17}$,有$\dfrac{1}{2^1+1}=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{2^2+1}=\dfrac{1}{5}$, $\dfrac{1}{2^3+1}=\dfrac{1}{9}$, $\dfrac{1}{2^4+1}=\dfrac{1}{17}$,…,则有$a_n=\dfrac{1}{2^n+1}$.

15.9

提示:根据所给的数据,不难发现:在n^2中所分解的最大的数是$2n-1$;根据发现的规律可求5^2分裂中,最大数是5×2-1=9.

16.11,$\dfrac{17}{12}$

提示:根据题意,数列$\{a_n\}$的各项为$\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}$,共11项,且$a_8+a_9=\dfrac{17}{12}$.

四、解答题

17.**解**:(1)因为$a_n=\dfrac{1}{n^2}$,故前5项分别为1, $\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{25}$.

(2)因为$a_n=(-1)^n(n^2-1)$,故前5项分别为0,3,-8,15,-24.

(3)因为$a_n=|2n-7|$,故前5项分别为5,3,1,1,3.

18.**解**:(1)数列$\dfrac{2\times 1-1}{2^2}, \dfrac{2\times 2-1}{2^3}, \dfrac{2\times 3-1}{2^4}, \dfrac{2\times 4-1}{2^5}$,所以数列通项公式为$a_n=\dfrac{2n-1}{2^{n+1}}$.

(2)数列$\dfrac{3\times 1+2}{1+1}, \dfrac{3\times 2+2}{2+1}, \dfrac{3\times 3+2}{3+1}, \dfrac{3\times 4+2}{4+1}$,所以数列通项公式为$a_n=\dfrac{3n+2}{n+1}$.

(3)数列$(-1)^{1+1}\left(2\times 1-1+\dfrac{1}{2}\right), (-1)^{2+1}\left(2\times 2-1+\dfrac{1}{2^2}\right), (-1)^{3+1}\left(2\times 3-1+\dfrac{1}{2^3}\right), (-1)^{4+1}\left(2\times 4-1+\dfrac{1}{2^4}\right)$,所以数列通项公式为$a_n=(-1)^{n+1}\left(2n-1+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

(4)数列$\dfrac{1}{3}(10^2-1)+1, \dfrac{1}{3}(10^3-1)+1, \dfrac{1}{3}(10^4-1)+1, \dfrac{1}{3}(10^5-1)+1$,

所以数列通项公式为$a_n=\dfrac{1}{3}(10^{n+1}-1)+1$.

19.**解**:(1)根据题意,$a_n=n^2-pn+q(n\in\mathbf{N}_+)$,且$a_1=0$, $a_2=-4$,

则有$\begin{cases}1-p+q=0,\\ 4-2p+q=-4,\end{cases}$解得$\begin{cases}p=7,\\ q=6,\end{cases}$则$a_n=n^2-7n+6$,故$a_5=25-35+6=-4$.

(2)由(1)的结论,$a_n=n^2-7n+6$,令$a_n=n^2-7n+6=150$,解得$n=16$或$n=-9$(舍去),故$n=16$,

所以150是该数列的第16项.

20.**解**:(1)由题意知,$a_n=12n+13$, $b_n=n^2$.

(2)令$a_n=b_n$,得$12n+13=n^2$,解得$n=13$或$n=-1$(舍去).

所以这两个数列有序号与项都相同的项,它们是第13项.

21.(1)**解**:根据题意可得$a_{10}=\dfrac{3\times 10-2}{3\times 10+1}=\dfrac{28}{31}$.

(2)**解**:$\dfrac{7}{10}$是该数列中的项.

令$a_n=\dfrac{7}{10}$,即$\dfrac{3n-2}{3n+1}=\dfrac{7}{10}$,解得$n=3$,所以$\dfrac{7}{10}$为数列$\{a_n\}$中的项,是第3项.

(3)**证明**:由题意知,$a_n=\dfrac{3n-2}{3n+1}=1-\dfrac{3}{3n+1}$,因为$n\in\mathbf{N}_+$,所以$3n+1>3$,所以$0<\dfrac{3}{3n+1}<1$,所以$0<1-\dfrac{3}{3n+1}<1$,即$0<a_n<1$.

22.**解**:(1)当$n=1$时,$a_1=S_1=2-30=-28$;

当$n\geqslant 2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2-30n-[2(n-1)^2-30(n-1)]=4n-32$.

当$n=1$时,上式成立.所以$a_n=4n-32(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)$S_n=2n^2-30n=2\left(n-\dfrac{15}{2}\right)^2-\dfrac{225}{2}$.所以当$n=7$或$n=8$时,$S_n$取得最小值.

第2期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.D

提示:设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,由$S_3=9$,得$3a_1+3d=9$,即$a_1+d=3$,

又$a_1=2$,所以$d=1$,故$a_5=2+4=6$.故选D.

2.D

提示:由$\{a_n\}$是等差数列,得$a_4+a_3=a_2+a_5$,又$a_4+2=a_2+a_5$,则$a_3=2$,所以$S_5=\dfrac{5(a_1+a_5)}{2}=5a_3=10$,故选D.

3.A

提示:等差数列$\{a_n\}$的公差为d, $\{a_n\}$为递增数列,由递增数列的性质得$d>0$,故A正确,B错误;但a_1的符号不确定,故C,D均错误.故选A.

4.C

提示:$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是两个等差数列,且$\dfrac{a_k}{b_k}(1\leqslant k\leqslant 5)$是常值,因为$a_1=288$, $a_5=96$,

故$a_3=\dfrac{a_1+a_5}{2}=192$,因为$\dfrac{a_3}{b_3}=\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{288}{192}=\dfrac{3}{2}$,所以$b_3=128$.故选C.

5.C

提示:设从冬至日起,依次为小寒、大寒、立春、雨水、惊蛰、春分、清明、谷雨、立夏、小满、芒种,这十二个节气,其日影长依次成等差数列$\{a_n\}$,公差为d,前n项和为S_n,谷雨日影长为a_9,

由题意知,$a_1+a_4+a_7=33$, $S_9=108$,得$3a_4=33$, $\dfrac{9(a_1+a_9)}{2}=108$,

得$a_4=11$, $a_5=12$,所以$d=12-11=1$,所以$a_9=a_5+4d=12+4=16$.故选C.

6.D

提示:在等差数列$\{a_n\}$中,因为$a_5+a_6+a_8+a_9=400$,所以$4a_7=400$,

解得$a_7=100$,所以数列$\{a_n\}$的前13项和$S_{13}=\dfrac{13}{2}\cdot(a_1+a_{13})=13a_7=1300$.故选D.

7.B

提示:设等差数列共有$(2n+1)$项,公差为d,由题意得$S_奇=a_1+a_3+\cdots+a_{2n+1}$, $S_偶=a_2+a_4+\cdots+a_{2n}$,

故$S_奇-S_偶=a_1+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{2n+1}-a_{2n})=a_1+d+\cdots+d=a_1+nd=a_{n+1}=319-290=29$.

故中间项$a_{n+1}=29$.故选B.

①

8.C

提示:设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,由$a_1+a_5=-14$,得$a_3=-7$,又$S_7=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=7a_4=-35$,得$a_4=-5$,

故$d=a_4-a_3=2$,$a_1=-11$,即$a_n=-11+2(n-1)=2n-13$,

注意到$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6<0<a_7=1<a_8<\cdots$,

且由$T_6>0$可知$T_i>0(i\geqslant 7,i\in\mathbf{N})$,由$\frac{T_i}{T_{i-1}}=a_i>1(i\geqslant 8,i\in\mathbf{N})$可知数列$\{T_n\}$不存在最大值,

由于$a_1=-11,a_2=-9,a_3=-7,a_4=-5,a_5=-3,a_6=-1,a_7=1$,故数列$\{T_n\}$中的负项只有有限项,$\{T_n\}$最小项为$T_5=-11\times 9\times 7\times 5\times 3$,即$T_n$有最小值.故选C.

二、多项选择题

9.ACD

提示:因为$81=1+(n-1)d$,所以$(n-1)d=80$,所以$d=\frac{80}{n-1}$,因为n和d都为正整数,

所以当$n=41$时,$d=2$,故A正确;当$d=3$时,$n=\frac{83}{3}$,不成立,故B错误;

当$n=21$时,$d=4$,故C正确;当$n=17$时,$d=5$,故D正确.故选ACD.

10.AC

提示:因为S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和,$S_5=0$,$a_6=6$,设公差为d,所以$\begin{cases}S_5=5a_1+\frac{5\times 4}{2}d=0,\\ a_6=a_1+5d=6,\end{cases}$

解得$a_1=-4,d=2$,所以$a_n=-4+(n-1)\times 2=2n-6$,所以$S_n=-4n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2-5n$.故选AC.

11.AD

提示:因为$\{a_n\}$是等差数列,$S_7=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=7a_4=98$,所以$a_4=14$.又$a_2=20$,所以$a_1+a_5=a_2+a_4=34$,故A正确;设等差数列$\{a_n\}$的公差为$d$,由$a_4-a_2=2d=-6$,解得$d=-3$,

所以$a_n=a_2+(n-2)\times(-3)=26-3n$. 所以$a_8=26-3\times 8=2$,$a_9=26-3\times 9=-1$.所以$|a_8|>|a_9|$,故B错误;

由$d=-3$知数列$\{a_n\}$为递减数列,又$a_8=2>0$,$a_9=-1<0$,所以S_8为S_n的最大值,故C错误;

因为$S_{16}=\frac{16(a_1+a_{16})}{2}=8(a_8+a_9)=8>0$,$S_{17}=\frac{17(a_1+a_{17})}{2}=17a_9=-17<0$,所以满足$S_n<0$的$n$的最小值为17,D正确.故选AD.

12.BD

提示:$S_n=n^2+an+1$,当$n=1$时,$a_1=S_1=2+a$.

当$n\geqslant 2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+an+1-[(n-1)^2+a(n-1)+1]=2n-1+a$.当$n=1$时,上式不成立,因此数列$\{a_n\}$不是等差数列.因此A错误,B正确;

若$\{S_n\}$是递增数列,则$S_{n+1}>S_n$,所以$(n+1)^2+a(n+1)+1>n^2+an+1$,对于$n\in\mathbf{N}_+$恒成立.化简得$a>-(2n+1)$,所以$a>-3$.所以若$\{S_n\}$是递增数列,则$a$的取值范围是$(-3,+\infty)$.因此C错误,D正确.故选BD.

三、填空题

13.5

提示:因为等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=4$,$a_4+a_6=12$,设公差为d,所以$4+3d+4+5d=12$,解得$d=\frac{1}{2}$,所以$a_3=4+2\times\frac{1}{2}=5$.

14.0

提示:设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,由$a_5^2+a_6^2=a_7^2+a_8^2$,得$a_8^2-a_5^2+a_7^2-a_6^2=0$,

变形可得$(a_8-a_5)(a_8+a_5)+(a_7-a_6)(a_7+a_6)=0$,

即$3d(a_8+a_5)+d(a_7+a_6)=4d(a_7+a_6)=0$,

因为$d\neq 0$,所以$a_7+a_6=0$,由等差数列的性质,得$a_1+a_{12}=0$,所以$S_{12}=0$.

15.-12

提示:设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,$a_1=-6$,$S_3=-12$,所以$3\times(-6)+\frac{3\times 2}{2}d=-12$,解得$d=2$,

所以$S_n=-6n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2-7n=\left(n-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}$,

所以$n=3$或$n=4$时,S_n取得最小值,最小值为$S_3=S_4=-12$.

16.$\frac{11}{20}$

提示:设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,

由$a_{91}+a_{92}+\cdots+a_{100}=a_1+90d+a_2+90d+\cdots+a_{10}+90d=a_1+a_2+\cdots+a_{10}+900d$,得$100=10+900d$,

解得$d=\frac{1}{10}$,又$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=10a_1+\frac{10\times 9}{2}d=10$,得$a_1=\frac{1}{10}\times\left(10-\frac{9}{2}\right)=\frac{11}{20}$.

四、解答题

17.**解**:(1)因为等差数列$\{a_n\}$的前三项依次为a,4,$3a$,

所以$a+3a=2\times 4$,解得$a=2$.

(2)由(1)得,$a_1=2,a_2=4$,所以公差$d=a_2-a_1=2$,

所以$S_k=ka_1+\frac{k(k-1)}{2}d=2k+\frac{k(k-1)}{2}\times 2=k^2+k$,

因为$S_k=110$,所以$k^2+k=110$,解得$k=10$或$k=-11$(舍去),所以$k=10$.

18.**解**:(1)等差数列$\{a_n\}$中,设首项是a_1,公差为d,由$a_2+a_3=-4$,$a_5=3a_4$,

得$\begin{cases}2a_1+3d=-4,\\ a_1+4d=3(a_1+3d),\end{cases}$解得$d=2,a_1=-5$,所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=-5+2(n-1)=2n-7$.

(2)由(1)知,$a_1=-5$,$d=2$,所以等差数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=-5n+\frac{2n(n-1)}{2}=n^2-6n$.

19.**解**:因为$20=3\times 6+2$,故卡车至少运送7趟,因为路线重复越少则行驶距离最少,所以最佳方案是从最远处开始往回返,第一趟走了$2\times(500+50\times 20)=3000$(米),第二趟走了$3000-150\times 2=2700$(米),第三趟走了$2700-150\times 2=2400$(米),…,每次走的路程组成首项为3000,公差为-300的等差数列,各项的和为$3000\times 7+7\times 6\times(-300)\div 2=14700$(米).所以卡车送完这批水泥杆,并最终返回库房,至少运送7趟,最少行驶14700米.

20.**解**:(1)数列$\{a_n\}$是递增的等差数列,且$a_1=1$,$a_3a_5=91$,设公差为d,则$d>0$,

且$(1+2d)(1+4d)=91$,即$(4d+15)(d-3)=0$,解得$d=3$,$d=-\frac{15}{4}$(舍去),

所以$a_n=1+3(n-1)=3n-2$.

(2)因为$a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+5}=123$,

所以$3(a_m+a_{m+5})=123$,所以$a_m+a_{m+5}=41$,

所以$2a_1+(2m+3)d=41$,所以$2+3(2m+3)=41$,解得$m=5$.

21.**解**:若选①,$a_5=6$,$a_1+S_3=50$,设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,

则$\begin{cases}a_5=a_1+4d=6,\\ a_1+S_3=4a_1+3d=50,\end{cases}$解得$a_1=14,d=-2$.

所以前n项和为$S_n=14n-n(n-1)=-n^2+15n=-\left(n-\frac{15}{2}\right)^2+\frac{225}{4}$,所以$n=7$或$n=8$时,$S_n$取得最大值.

若选②,$S_{12}>S_9$,$a_2+a_{21}<0$,由$S_{12}-S_9=a_{10}+a_{11}+a_{12}=3a_{11}>0$,解得$a_{11}>0$.

由$a_2+a_{21}=a_{11}+a_{12}<0$,所以$a_{12}<0$,所以等差数列$\{a_n\}$的公差$d=a_{12}-a_{11}<0$,

所以当$n\leqslant 11$时,$a_n>0$;当$n\geqslant 12$时,$a_n<0$.所以$n=11$时,S_n取得最大值.

若选③,$S_9>0$,$S_{10}<0$,由$S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5>0$,得$a_5>0$.

由$S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=5(a_5+a_6)<0$,得$a_5+a_6<0$,所以$a_6<0$.

所以等差数列$\{a_n\}$的公差$d=a_6-a_5<0$,

所以当$n\leqslant 5$时,$a_n>0$;当$n\geqslant 6$时,$a_n<0$,所以$n=5$时,S_n取得最大值.

22.**解**:(1)设数列$\{a_n\}$的公差为d,则$d\neq 0$,由$a_3=S_5$,$a_2a_4=S_4$,

根据等差数列的性质,$a_3=S_5=5a_3$,故$a_3=0$,

由$a_2a_4=S_4$,得$(a_3-d)(a_3+d)=(a_3-2d)+(a_3-d)+a_3+(a_3+d)$,

整理得$-d^2=-2d$,解得$d=2$或$d=0$(舍去),故$a_n=a_3+(n-3)d=2n-6$.

(2)因为$a_n=2n-6$,所以$a_1=-4$,$S_n=-4n+\frac{n(n-1)}{2}\times 2=n^2-5n$,

由$S_n>a_n$,得$n^2-5n>2n-6$,整理可得$n^2-7n+6>0$,当$n>6$或$n<1$时,$S_n>a_n$成立,故n的最小值为7.

第3期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.D

提示:设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,因为$a_3=3$,$S_3=9$,所以当$q=1$时,$a_1=3$;

当$q\neq 1$时,$\begin{cases}a_1q^2=3,\\ \frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=9,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=3,\\ q=1\end{cases}$(舍去)或$\begin{cases}a_1=12,\\ q=-\frac{1}{2},\end{cases}$所以首项$a_1$的值为3或12.故选D.

2.A

提示:因为$a_2+a_4=30$,$a_2a_4=144$,所以a_2,a_4是方程$x^2-30x+144=0$的两个实数根$(a_2>a_4)$,

所以$a_2=24$,$a_4=6$,所以$q^2=\frac{a_4}{a^2}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$,解得$q=\frac{1}{2}$或$q=-\frac{1}{2}$(舍去),故选A.

3.A

提示:因为S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和,$S_2=4$,$S_4=6$,由等比数列的性质,可知S_2,S_4-S_2,S_6-S_4成等比数列,所以4,2,S_6-6成等比数列,所以$2^2=4(S_6-6)$,解得$S_6=7$.故选A.

4.C

提示:由题意知,设湖泊中原来蓝藻数量为a,则$a(1+6.25\%)^{30}=6a$,所以经过60天后该湖泊的蓝藻数量为$y=a(1+6.25\%)^{60}=a[(1+6.25\%)^{30}]^2=36a$.

所以经过60天后该湖泊的蓝藻数大约为原来的36倍.故选C.

5.C

提示:设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,$3a_1+2a_2=4$,$9S_3=8S_6$,

所以当$q=1$时,$\begin{cases}3a_1+2a_1=4,\\ 9\times 3a_1=8\times 6a_1,\end{cases}$无解;

当$q\neq 1$时,$\begin{cases}3a_1+2a_1q=4,\\ 9\times\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=8\times\frac{a_1(1-q^6)}{1-q},\end{cases}$

解得$a_1=1$,$q=\frac{1}{2}$,所以$S_5=\frac{1\times\left(1-\frac{1}{2^5}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{31}{16}$.故选C.

6.C

提示:根据题意,设牛、马、羊、小牛、小马、小羊的主人需要赔偿的粟的数量分别为a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,则该数列是以$\frac{1}{2}$为公比的等比数列,且前六项和为5.设前四项的和为m,则后两项的和为$n=5-m$. 所以$S_6=\frac{a_1\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right]}{1-\frac{1}{2}}=5$,$S_4=\frac{a_1\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]}{1-\frac{1}{2}}=m$,

所以$\frac{S_6}{S_4}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^4}=\frac{63}{60}=\frac{5}{m}$,解得$m=\frac{100}{21}$.

故$n=5-m=5-\frac{100}{21}=\frac{5}{21}$,故选C.

7.D

提示:由韦达定理,得$a+b=p<0$,$ab=q>0$,所以$a<0$,$b<0$.

由题意$a,b,2$这三个数可适当排序后成等比数列,且$ab>0$,则2一定在中间,所以$ab=2^2=4$,即$q=4$.

因为$a,b,2$这三个数可适当排序后成等差数列,且$a+b<0$,则2一定不在a,b的中间,假设$a<b$,则$2b=2+a$,即$\begin{cases}ab=4,\\ 2b=2+a,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-4,\\ b=-1,\end{cases}$

所以$p=a+b=-4-1=-5$,

所以$p+q=-5+4=-1$,故选D.

8.A

提示:因为$\log_9a_2+\log_9a_6+\log_9a_{10}=\frac{3}{2}$,所以$a_2\cdot a_6\cdot a_{10}=9^{\frac{3}{2}}=27$,又因为数列$\{a_n\}$为等比数列,所以$a_2\cdot a_{10}=a_6^2$,所以$a_2\cdot a_6\cdot a_{10}=a_6^3=27$,所以$a_6=3$,

$a_3a_9+a_6a_4+a_6a_8=a_6^2+a_6(a_4+a_8)=9+3(a_4+a_8)\geqslant 9+3\cdot 2\sqrt{a_4a_8}=9+6\times 3=27$,

当且仅当$a_4=a_8=3$时,等号成立,故$a_3a_9+a_6a_4+a_6a_8$的最小值为27,故选A.

二、多项选择题

9.AC

提示:对于A,$a_3+a_7=\frac{a_5}{q^2}+a_5q^2=\frac{1}{q^2}+q^2\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{q^2}\times q^2}=2$,当且仅当$q=\pm 1$时,等号成立,A正确;

对于B,$a_4+a_6=\frac{a_5}{q}+a_5q$,当$q<0$时,$a_4+a_6\geqslant 2$不成立,B错误;

对于C,$a_5=1$,则$a_7-2a_6+1=q^2-2q+1=(q-1)^2\geqslant 0$,C正确;

对于D,$a_5=1$,则$a_3-2a_4-1=\frac{1}{q^2}-\frac{2}{q}-1=\left(\frac{1}{q}-1\right)^2-2$,则$a_3-2a_4-1\geqslant 0$不一定成立,D错误.故选AC.

10.BD

提示:正项等比数列$\{a_n\}$中,$a_3=1$,$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_5}=\frac{21}{4}$,所以$a_1a_5=a_3^2=1$,

所以$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_5}=\frac{a_1+a_5}{a_1a_5}=a_1+a_5=\frac{17}{4}$,解得$\begin{cases}a_1=4,\\ a_5=\frac{1}{4},\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=\frac{1}{4},\\ a_5=4,\end{cases}$A错误,C错误,D正确;

当$a_1=4$,$a_5=\frac{1}{4}$时,$q=\frac{1}{2}$,$S_5=\frac{4\left(1-\frac{1}{32}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{31}{4}$;当$a_1=\frac{1}{4}$,$a_5=4$时,$q=2$,$S_5=\frac{\frac{1}{4}(1-32)}{1-2}=\frac{31}{4}$,故B正确. 故选BD.

11.ACD

提示:设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q(q>0)$,由$a_1=\frac{1}{2}$,$S_3=\frac{7}{8}$,得$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}q+\frac{1}{2}q^2=\frac{7}{8}$,即$4q^2+4q-3=0$,解得$q=\frac{1}{2}$或$q=-\frac{3}{2}$(舍去),所以$a_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$,因为$n\in\mathbf{N}_+$,所以$a_n\leqslant\frac{1}{2}$,故A正确,B错误;对于C,$S_n=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n<1$,故C正确;对于D,左边$=2\lg\left(\frac{1}{2}\right)^n=\lg\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\lg\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}+\lg\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=\lg a_{n-2}+\lg a_{n+2}=$右边,故D正确.故选ACD.

12.ACD

提示:设等比数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的公比分别为p,q.

对于A,$\frac{a_{n+1}b_{n+1}}{a_nb_n}=pq$,所以数列$\{a_nb_n\}$是公比为$pq$的等比数列,故A正确;

对于B,数列$\{a_n+b_n\}$不一定是等比数列,例如取数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$分别为$a_n=2^n$,$b_n=-2^n$,故B错误;

对于C,因为$\lg\left|\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right|-\lg\left|\frac{b_n}{a_n}\right|=\lg\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lg\left|\frac{q}{p}\right|$为一常数,所以数列$\left\{\lg\left|\frac{b_n}{a_n}\right|\right\}$是等差数列,故C正确;

对于D,$\lg(a_{n+1}^2b_{n+1}^2)-\lg(a_n^2b_n^2)=\lg\left(\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2\left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)^2\right)=\lg(p^2q^2)$为一常数,所以数列$\{\lg(a_n^2b_n^2)\}$是等差数列,故D正确.故选ACD.

三、填空题

13.8

提示:在等比数列$\{a_n\}$中,$a_2=1$,$a_5=2$,

所以$\begin{cases}a_2=a_1q=1,\\ a_5=a_1q^4=2,\end{cases}$

所以$q^3=2$,所以$a_{11}=a_5q^6=2\times 2^2=8$.

14.4

提示:设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,则$S_6-S_3=a_4+a_5+a_6=q^3(a_1+a_2+a_3)=q^3S_3$,所以$S_6=S_3+q^3S_3$;又$S_6=5S_3$,所以$5S_3=S_3+q^3S_3$,即$q^3+1=5$,解得$q^3=4$,所以$\frac{a_9}{a_6}=\frac{a_6\cdot q^3}{a_6}=q^3=4$.

15.$-\sqrt{2}$,2^n-1

提示:等比数列$\{a_n\}$中,$a_2=\sqrt{2}$,$a_5=-4$,则$\begin{cases}a_1q=\sqrt{2},\\ a_1q^4=-4,\end{cases}$解得$q=-\sqrt{2}$,$a_1=-1$,所以$a_n=-1\times(-\sqrt{2})^{n-1}$,所以$a_n^2=2^{n-1}$,所以数列$\{a_n^2\}$的前$n$项和为$S_n=\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$.

16.1,>

提示:当$n=1$时,有$a_1=S_1=2-a$;当$n=2$时,有$S_2=a_1+a_2=4-a$,解得$a_2=2$;当$n=3$时,$S_3=a_1+a_2+a_3=8-a$,解得$a_3=4$,由$\{a_n\}$是等比数列,得$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}$,则$a_1=2-a=1$,解得$a=1$.

根据等比数列的性质可得$a_{2019}\cdot a_{2021}=a_{2020}^2$,又$a_n>0(n\in\mathbf{N}_+)$,所以$\frac{1}{a_{2019}}+\frac{1}{a_{2021}}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{a_{2019}\cdot a_{2021}}}=\frac{2}{a_{2020}}$,因为$q=\frac{a_2}{a_1}=2$,所以$a_{2019}\neq a_{2021}$,故$\frac{1}{a_{2019}}+\frac{1}{a_{2021}}>\frac{2}{a_{2020}}$.

四、解答题

17.**解**:(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,因为在各项都是正数的等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_9=4a_7$,

所以$\begin{cases}q>0,\\ q^8=4q^6,\end{cases}$解得$q=2$,所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^{n-1}$.

(2)记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和,因为$S_m=31$,所以$S_m=\frac{1\times(1-2^m)}{1-2}=31$,解得$m=5$.

18.**解**:(1)根据题意,设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,

则有$\begin{cases}a_3=a_1q^2=9,\\ a_2+a_4=a_1q+a_1q^3=30,\\ q>1,\end{cases}$解得$a_1=1,q=3$,故数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3^{n-1}$.

(2)由(1)得$a_{2n}=3^{2n-1}$,则$b_n=\log_3a_{2n}=2n-1$,故$S_n=1+3+5+\cdots+2n-1=\frac{(1+2n-1)n}{2}=n^2$.

19.**证明**:(1)由$a_{n+1}=k(S_n+1)$,可得$S_{n+1}-S_n=k(S_n+1)$,

则$S_{n+1}=(k+1)S_n+k$,$S_{n+1}+1=(k+1)(S_n+1)$,由$S_1=a_1=k>0$,则$S_1+1\neq 0$,即$\frac{S_{n+1}+1}{S_n+1}=k+1\neq 0$.因此$\{S_n+1\}$是以$k+1$为首项,以$k+1$为公比的等比数列.

(2)由$S_1+1=a_1+1=k+1$,得$S_n+1=(k+1)^n$,则$S_n=(k+1)^n-1$,

因此当$n\geqslant 2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=(k+1)^{n-1}k$,当$n=1$时,$a_1=k$满足$a_n=(k+1)^{n-1}k$,

因此$a_n=(k+1)^{n-1}k$,所以$\frac{(k+1)^2}{k}a_n-1=\frac{(k+1)^2}{k}\cdot(k+1)^{n-1}k-1=(k+1)^{n+1}-1=S_{n+1}$.

20.**解**:(1)按方案一闯过各关所得积分构成常数数列,故$A_n=40n$;

按方案二闯过各关所得积分构成首项为5,公差为5的等差数列,故$B_n=5n+\frac{n(n-1)}{2}\times 5=\frac{5n^2+5n}{2}$;

按方案三闯过各关所得积分构成首项为$\frac{1}{2}$,公比为2的等比数列,故$C_n=\frac{\frac{1}{2}(1-2^n)}{1-2}=\frac{1}{2}(2^n-1)$.

(2)令$A_n>B_n$,即$40n>\frac{5n^2+5n}{2}$,解得$0<n<15$,而当$n=15$时,$A_n=B_n$,

又因为$n\leqslant 15$且$n\in\mathbf{N}_+$,故$A_n\geqslant B_n$恒成立,故方案二不予考虑.

令$A_n>C_n$,即$40n>\frac{1}{2}(2^n-1)$,解得$0<n<10$,所以当$0<n<10$时,$A_n>C_n$;当$10\leqslant n\leqslant 15$,$A_n<C_n$,故当能闯过的关数小于10时,应选择方案一;当能闯过的关数大于等于10时,应选择方案三.

小明应该选择方案三.

21.**解**:若选①.

$S_n=ma_{n+1}(m\neq 0)$,则当$n\geqslant 2$时,$S_{n-1}=ma_n$,

两式相减,得$S_n-S_{n-1}=a_n=ma_{n+1}-ma_n$,即$\frac{a_{n+1}}{m+1}=\frac{a_n}{m}(n\geqslant 2)$,

结合$a_1=1$,可知$a_n\neq 0$,所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{m+1}{m}(n\geqslant 2)$.

由$S_n=ma_{n+1}(m\neq 0)$,得$a_1=ma_2$,即$\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{m}\neq\frac{m+1}{m}$,故数列$\{a_n\}$不是等比数列.

若选②.

$S_n=ka_n-\frac{1}{2}$,由$a_1=1$,得$1=k-\frac{1}{2}$,即$k=\frac{3}{2}$,于是$S_n=\frac{3}{2}a_n-\frac{1}{2}$,

当$n\geqslant 2$时,$S_{n-1}=\frac{3}{2}a_{n-1}-\frac{1}{2}$,

两式相减得$S_n-S_{n-1}=a_n=\frac{3}{2}a_n-\frac{3}{2}a_{n-1}$,

即$a_n=3a_{n-1}$,又$a_1=1\neq 0$,所以数列$\{a_n\}$是首项为1,公比为3的等比数列,所以$a_n=3^{n-1}$.

若选③.

$2a_n-a_1=S_1S_n$,由$a_1=1$,得$S_n=2a_n-1$,

当$n\geqslant 2$时,$S_{n-1}=2a_{n-1}-1$,两式相减得$S_n-S_{n-1}=a_n=2a_n-2a_{n-1}$,即$a_n=2a_{n-1}$,又$a_1=1\neq 0$,

所以数列$\{a_n\}$是首项为1,公比为2的等比数列,所以$a_n=2^{n-1}$.

22.**解**:(1)设数列$\{a_n\}$的公比为q,由题意可得$a_3=a_1q^2>0$,因为a_1,a_5的等比中项为16,所以$a_3=16$,

因为$a_3-a_2=8$,所以$a_2=8$,所以$q=2$,所以$a_n=a_3\cdot q^{n-3}=2^{n+1}$.

(2)因为$b_n=\log_22^n=n$,

所以$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

因为$\frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

所以$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}=2\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\times\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<2$,

所以存在满足要求的正整数k,且k的最小值为2.

第4期

第2~3版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.A

提示:令$3n-1=29$,解得$n=10$,所以$\sqrt{29}$是这个数列的第10项,故选A.

2.C

提示:由$\{a_n\}$是等差数列,得$S_{2021}=\frac{2021}{2}(a_1+a_{2021})=\frac{2021}{2}(a_{1002}+a_{1020})=\frac{2021}{2}\times 2=2021$.

故选C.

3.A

提示:由$4a_2=a_1+4a_3$,得$4q=1+4q^2$,解得$q=\frac{1}{2}$.故选A.

4.C

提示:由题意得,$a_3a_{15}=2$,则$a_2a_{16}=2$,$a_9=\sqrt{2}$,故$\frac{a_2a_{16}}{a_9}=\sqrt{2}$.故选C.

5.D

提示:若$\{a_n\}$是递增数列,则$\begin{cases}3-a>0,\\ a>1,\\ a_7>a_6,\end{cases}$

即$\begin{cases}a<3,\\ a>1,\\ a^2>6(3-a)-2,\end{cases}$解得$2<a<3$,

所以实数a的取值范围是$(2,3)$.故选D.

6.C

提示:因为等比数列$\{a_n\}$中,$a_1+a_2+a_3=3$,$a_4+a_5+a_6=6$,由等比数列的性质,得