第16期

第2~3版综合测试(四)参考答案

一、单项选择题

1.C 提示:因为 $a=(0,1,-1)$,$b=(1,1,0)$,所以 $a+\lambda b=(\lambda,1+\lambda,-1)$,因为 $(a+\lambda b)\perp a$,所以 $(a+\lambda b)\cdot a=1+\lambda+1=0$,解得 $\lambda=-2$.故选C.

2.B 提示:抛物线$y=ax^2(a>0)$,可得准线方程$y=-\frac{1}{4a}$,抛物线$y=ax^2(a>0)$上点$M\left(m,\frac{1}{2}\right)$到其准线l的距离为1,可得$\frac{1}{2}+\frac{1}{4a}=1$,解得$a=\frac{1}{2}$.故选B.

3.B 提示:设$P(x,y)$,则$(x-3)^2+(y-4)^2\leqslant 1$,即P在圆$(x-3)^2+(y-4)^2=1$内或圆上,则点P到直线$3x+4y+5=0$的距离最小值为$\frac{|3\times3+4\times4+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}-1=5$.故选B.

4.A 提示:因为向量$a=(1,2,0)$,$b=(0,2,1)$,a,b的夹角为θ,所以$\cos\theta=\frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}=\frac{4}{\sqrt5\times\sqrt5}=\frac45$,所以$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac45\right)^2}=\frac35$.故选A.

5.C 提示:设四点所在的圆的标准方程为$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$,把$A(2,0)$,$B(3,2-\sqrt3)$,$C(1,2+\sqrt3)$代入圆的方程得,$\begin{cases}(2-m)^2+n^2=r^2,\\(3-m)^2+(2-\sqrt3-n)^2=r^2,\\(1-m)^2+(2+\sqrt3-n)^2=r^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=2,\\n=2,\\r^2=4,\end{cases}$得圆的方程为$(x-2)^2+(y-2)^2=4$.再把点$D(4,a)$代入,解得$a=2$,故选C.

6.B 提示:若P在双曲线左支上,因为点M为PF_1的中点,所以OM是$\triangle PF_1F_2$的中位线,则$|PF_2|=2|OM|=10$,

因为$2a=|PF_2|-|PF_1|=10-6=4$,所以$a=2$,则双曲线的渐近线方程为$y=\pm\frac{4}{a}x=\pm2x$;若P在双曲线右支上,因为点M为PF_1的中点,所以OM是$\triangle PF_1F_2$的中位线,则$|PF_2|=2|OM|=10$,$2a=|PF_1|-|PF_2|=6-10=-4$不成立,故选B.

7.C 提示:由题意可得$C(-2,0)$,抛物线$W:y^2=8x$的焦点坐标为$Q(2,0)$,准线方程为$x=-2$,点P是圆$C:(x+2)^2+y^2=r^2(r>0)$与曲线$W:y^2=8x$的一个公共点,要使得$\triangle PCQ$为等腰三角形,而$|PC|\neq|PQ|$,若$|PQ|=|QC|=4$,根据抛物线的定义,可知点P的横坐标为2,则点$P(2,\pm4)$,所以$r=|PC|=4\sqrt2$;若$|PC|=|CQ|=4$,则$r=4$满足条件,所以满足条件的r有2个,故选C.

8.A 提示:直线$x-\sqrt2y-\sqrt2=0$,令$x=0$,得$y=-1$;令$y=0$,得$x=\sqrt2$,因为椭圆C的两个顶点在直线$x-\sqrt2y-\sqrt2=0$上,所以$a=\sqrt2$,$b=1$,所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

设过点$P(x_0,y_0)$的切线方程为$y=kx+m$,联立$\begin{cases}y=kx+m,\\\frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$得$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$,所以$\Delta=(4km)^2-4(2k^2+1)(2m^2-2)=0$,化简得$2k^2+1-m^2=0$,即$m^2=1+2k^2$, ①

解得$x_0=-\frac{2km}{1+2k^2}$,则$y_0=kx_0+m=\frac{m}{2k^2+1}$,所以$P\left(-\frac{2km}{1+2k^2},\frac{m}{2k^2+1}\right)$,把①代入点P的坐标,得$P\left(-\frac{2k}{m},\frac{1}{m}\right)$,又$F_1(-1,0)$,所以$k_1=\frac{\frac1m-0}{-\frac{2k}{m}-(-1)}=\frac{1}{m-2k}$,对$y=kx+m$,令$x=-2$,得$y=m-2k$,所以点M的坐标为$(-2,m-2k)$,又$F_2(1,0)$,则$k_2=\frac{(m-2k)-0}{-2-1}=\frac{2k-m}{3}$,所以$k_1k_2=\frac{1}{m-2k}\cdot\frac{2k-m}{3}=-\frac13$.故选A.

二、多项选择题

9.BD 提示:双曲线C_1中的$a^2=3$,$b^2=2$,$c^2=5$,渐近线的方程为$y=\pm\frac{\sqrt6}{3}x$,实轴长为$2a=2\sqrt3$,焦距为$2c=2\sqrt5$,离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt5}{\sqrt3}=\frac{\sqrt{15}}{3}$;双曲线$C_2$中的$a^2=2$,$b^2=3$,$c^2=5$,渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt6}{3}x$,实轴长为$2a=2\sqrt2$,焦距为$2c=2\sqrt5$,离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt5}{\sqrt2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$,所以它们焦距相等,渐近线相同,故选BD.

10.BCD 提示:由于圆C的方程为$(x-3)^2+y^2=1$,圆心为$(3,0)$,由题意可知$(3,0)$到直线$kx-y-2=0$的距离应小于2,即$\frac{|3k-2|}{\sqrt{k^2+1}}<2$,解得$0<k<\frac{12}{5}$,故选BCD.

11.AC 提示:对于A,因为$AB/\!/CD$,$BC\perp AB$,$CD=BC=\frac12AB=BE$,所以四边形BCDE是正方形,所以$DE\perp AE$,$DE\perp BE$,故翻折后$DE\perp PE$,因为$PE=AE=1$,$EC=\sqrt2$,$PC=\sqrt3$,所以$PE^2+EC^2=PC^2$,故$PE\perp EC$,又$DE\cap EC=E$,$DE,EC\subset$平面BCDE,所以$PE\perp$平面BCDE,又$PE\subset$平面PED,所以平面$PED\perp$平面BCDE,故A正确;对于B,由$PE\perp$平面BCDE,得$PE\perp CD$,又$CD\perp DE$,$PE\cap DE=E$,所以$CD\perp$平面PDE,得$\angle CPD$为PC与平面PED所成角,所以$\tan\angle CPD=\frac{CD}{PD}=\frac{1}{\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2}$,故B错误;对于C,因为$CD\perp$平面PDE,故$CD\perp PD$,所以$\angle PDE$为二面角$P-DC-B$的平面角,因为$PE=DE=1$,$PE\perp DE$,所以$\angle PDE=\frac{\pi}{4}$,故C正确; 对于D,因为$DE/\!/BC$,所以$\angle PCB$或其补角为异面直线PC与DE所成的角,因为$DE\perp PE$,$DE\perp BE$,$PE\cap BE=E$,$PE,BE\subset$平面PBE,所以$DE\perp$平面PBE,所以$DE\perp PB$,又$DE/\!/BC$,所以$BC\perp PB$,所以$\angle PCB<\frac{\pi}{2}$,故D错误.故选AC.

12.AD 提示:设直线l的方程为$x=ty+1$,联立抛物线$C:y^2=4x$,得$y^2-4ty-4=0$,

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则$y_1+y_2=4t$,$y_1y_2=-4$,

对于A,$S_{\triangle OAB}=\frac12\times|OF|\times|y_1-y_2|=2\sqrt{1+t^2}$,所以当$t=0$时,$\triangle OAB$的面积的最小值为2,故A正确;

对于B,当直线l的斜率为1时,$t=1$,解得$\begin{cases}y_1=2+2\sqrt2,\\y_2=2-2\sqrt2,\end{cases}$所以$\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{y_1}{-y_2}=3+2\sqrt2$,故B错误;

对于C,点N到y轴的距离$d=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{t(y_1+y_2)+2}{2}=2t^2+1$,

$|AB|=\sqrt{1+t^2}|y_1-y_2|=4(1+t^2)$,$d\neq\frac12|AB|$,故C错误;

对于D,由$\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{FN}=\overrightarrow{FQ}$,可知$\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{NQ}$,

因为点Q在以AB为直径的圆N上,所以$|FM|=\frac12|AB|=2(1+t^2)$,所以$M(2t^2+3,0)$,又$N(1+2t^2,2t)$,所以$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{FN}=(-2,2t)\cdot(2t^2,2t)=0$,所以$MN\perp NF$,即$MN\perp AB$,所以M在线段AB的中垂线上,则$|AM|=|BM|$,故D正确.故选AD.

三、填空题

13.$\frac13$ 提示:在平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,$BE=\frac13BB_1$,$DF=\frac23DD_1$,所以$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=-\frac13\overrightarrow{BB_1}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac23\overrightarrow{DD_1}=-\frac13\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac23\overrightarrow{AA_1}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac13\overrightarrow{AA_1}$.由$\overrightarrow{EF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}+z\overrightarrow{AA_1}$,所以$x=-1$,$y=1$,$z=\frac13$,$x+y+z=-1+1+\frac13=\frac13$.

14.$-\sqrt2$ 提示:设$B(x_B,y_B)$,$C(x_C,y_C)$,因为B,C在抛物线$y^2=4x$上,所以$x_B=\frac{y_B^2}{4}$,$x_C=\frac{y_C^2}{4}$,由斜率的坐标公式,得$k_{BC}=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=\frac{y_B-y_C}{\frac{y_B^2}{4}-\frac{y_C^2}{4}}=\frac{4}{y_B+y_C}$,因为M为$\triangle ABC$的重心,所以$y_A+y_B+y_C=3y_M$,所以$y_B+y_C=3\times0-2\sqrt2=-2\sqrt2$,所以$k_{BC}=\frac{4}{y_B+y_C}=\frac{4}{-2\sqrt2}=-\sqrt2$.

15.$\frac13$ 提示:以D为原点,DA,DC,DD_1所在直线分别为x,y,z轴,建立空间直角坐标系,由于$AB=2$,$BC=AA_1=1$,所以$A_1(1,0,1)$,$B(1,2,0)$,$C_1(0,2,1)$,$D_1(0,0,1)$,

所以$\overrightarrow{A_1C_1}=(-1,2,0)$,$\overrightarrow{BC_1}=(-1,0,1)$,$\overrightarrow{D_1C_1}=(0,2,0)$.

设平面A_1BC_1的法向量为$n=(x,y,z)$,则有$\begin{cases}\overrightarrow{A_1C_1}\cdot n=0,\\\overrightarrow{BC_1}\cdot n=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-x+2y=0,\\-x+z=0,\end{cases}$令$x=2$,得$y=1$,$z=2$,则$n=(2,1,2)$.设$D_1C_1$与平面$A_1BC_1$所成角为θ,则$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{D_1C_1},n\rangle|=\frac{|\overrightarrow{D_1C_1}\cdot n|}{|\overrightarrow{D_1C_1}|\cdot|n|}=\frac{2}{2\times3}=\frac13$,即$D_1C_1$与平面$A_1BC_1$所成角的正弦值为$\frac13$.

16.$\left(\frac{\sqrt2}{2},\sqrt3-1\right]$ 提示:设$|PF_1|=n$,$|PF_2|=m$,因为$x_1>0$,$y_1>0$,则$m<n$,因为点P,Q在椭圆C上,$|PQ|=2|OF_2|$,所以四边形PF_1QF_2为矩形,且$|QF_1|=|PF_2|$,由$\frac{|QF_1|}{|PF_1|}\geqslant\frac{\sqrt3}{3}$,可得$\frac{\sqrt3}{3}\leqslant\frac{m}{n}<1$,由题意可得,$m+n=2a$,$m^2+n^2=4c^2$,①

所以$mn=2(a^2-c^2)$,②

由①②可得$\frac{4c^2}{2(a^2-c^2)}=\frac{m^2+n^2}{mn}=\frac{m}{n}+\frac{n}{m}$,令$t=\frac{m}{n}+\frac{n}{m}$,令$v=\frac{m}{n}\in\left[\frac{\sqrt3}{3},1\right)$,所以$t=v+\frac1v\in\left(2,\frac{4\sqrt3}{3}\right]$,则$2<\frac{4c^2}{2(a^2-c^2)}\leqslant\frac{4\sqrt3}{3}$,即$a^2-c^2<c^2\leqslant\frac{2\sqrt3}{3}(a^2-c^2)$,即$1-e^2<e^2\leqslant\frac{2\sqrt3}{3}(1-e^2)$,即$\frac12<e^2\leqslant4-2\sqrt3$,解得$\frac{\sqrt2}{2}<e\leqslant\sqrt3-1$,所以椭圆C的离心率的取值范围为$\left(\frac{\sqrt2}{2},\sqrt3-1\right]$.

四、解答题

17.(1)证明:直线l的方程可化为$y-1=m(x-1)$,所以直线l恒过定点$P(1,1)$.圆心坐标$C(0,1)$,因为$|PC|=1<\sqrt5$,所以点P在圆C内,所以直线l与圆C总有两个不同的交点.

(2)解:要使弦长AB最短,则直线l与PC垂直,因为$k_{PC}=0$,所以直线AB的斜率不存在,

又直线AB过点$P(1,1)$,则直线AB的方程为$x=1$.

18.(1)证明:取AB中点E,连接CE,OE,在$\triangle ABB_1$中,E为AB中点,O为AB_1中点,所以EO为$\triangle ABB_1$的中位线,故$EO/\!/BB_1$且$EO=\frac12BB_1$,因为D为CC_1中点,所以$CD=\frac12CC_1=\frac12BB_1$且$CD/\!/BB_1$,所以$EO/\!/CD$且$EO=CD$,所以四边形EODC为平行四边形,所以$OD/\!/EC$,又$EC\subset$平面ABC,$OD\not\subset$平面ABC,所以$OD/\!/$平面ABC.

(2)解:取BC中点F,以F为原点,FB所在直线为x轴,FA所在直线为z轴,建立空间直角坐标系,设$AB=2$,则$AA_1=4$,$B(1,0,0)$,$A(0,0,\sqrt3)$,$A_1(0,4,\sqrt3)$,$D(-1,2,0)$,所以$\overrightarrow{BA}=(-1,0,\sqrt3)$,$\overrightarrow{BD}=(-2,2,0)$,$\overrightarrow{BA_1}=(-1,4,\sqrt3)$,

设平面A_1BD的法向量为$n=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{BD}=-2x+2y=0,\\n\cdot\overrightarrow{BA_1}=-x+4y+\sqrt3z=0,\end{cases}$取$n=(1,1,-\sqrt3)$,设直线AB与平面$A_1BD$所成角为θ,则$\sin\theta=|\cos\langle n,\overrightarrow{BA}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{BA}\cdot n|}{|\overrightarrow{BA}||n|}=\frac{|-1-3|}{\sqrt{1+3}\times\sqrt{1+1+3}}=\frac{2\sqrt5}{5}$,即直线AB与平面$A_1BD$所成角的正弦值为$\frac{2\sqrt5}{5}$.

19.解:(1)由题意可得,渐近线的方程为$bx\pm ay=0$,设$M(x,y)$,则$\frac{|bx+ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{|bx-ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac34$,又$\frac{c}{a}=2$,即$c^2=4a^2$,所以$b^2=3a^2$,所以$a^2=1$,$b^2=3$,所以双曲线C的方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

(2)由(1)知,$F(2,0)$,设直线l的方程为$y=k(x-2)$,联立$x^2-\frac{y^2}{3}=1$,得$(3-k^2)x^2+4k^2x-4k^2-3=0$,

所以$\Delta=16k^4+4(4k^2+3)(3-k^2)=36(k^2+1)>0$,

设$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,则$x_1+x_2=\frac{4k^2}{k^2-3}$,$x_1x_2=\frac{4k^2+3}{k^2-3}$,

所以$|PQ|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\left|\frac{6(k^2+1)}{k^2-3}\right|$,$y_1+y_2=k(x_1+x_2-4)=\frac{12k}{k^2-3}$,所以PQ的中点坐标为$\left(\frac{2k^2}{k^2-3},\frac{6k}{k^2-3}\right)$,所以线段PQ的垂直平分线的方程为$y=-\frac1k\cdot\left(x-\frac{2k^2}{k^2-3}\right)+\frac{6k}{k^2-3}$,整理得$y=-\frac1kx+\frac{8k}{k^2-3}$,所以$B\left(\frac{8k^2}{k^2-3},0\right)$,则$|BF|=\left|\frac{8k^2}{k^2-3}-2\right|=\left|\frac{6(k^2+1)}{k^2-3}\right|$,所以$\frac{|PQ|}{|BF|}=1$.

20.解:取AC的中点O,连接A_1O,A_1C,OE,则$OE/\!/AB$,又$BA\perp AC$,所以$OE\perp AC$,

由题意知$\triangle A_1AC$为等边三角形,又点O为AC的中点,所以$A_1O\perp AC$.

因为平面$ACC_1A_1\perp$平面ABC,平面$ACC_1A_1\cap$平面$ABC=AC$,$A_1O\subset$平面ACC_1A_1,所以$A_1O\perp$平面ABC,又$OE\subset$平面ABC,所以$A_1O\perp OE$,所以OA_1,OE,OC两两垂直,分别以OE,OC,OA_1所在直线为x,y,z轴,建立空间直角坐标系,则$A_1(0,0,\sqrt3)$,$A(0,-1,0)$,$B(1,-1,0)$,$B_1(1,0,\sqrt3)$,$E\left(\frac12,0,0\right)$,$F\left(1,-\frac12,\frac{\sqrt3}{2}\right)$,$C_1(0,2,\sqrt3)$,所以$\overrightarrow{A_1B}=(1,-1,-\sqrt3)$,$\overrightarrow{EF}=\left(\frac12,-\frac12,\frac{\sqrt3}{2}\right)$,$\overrightarrow{AE}=\left(\frac12,1,0\right)$,$\overrightarrow{AF}=\left(1,\frac12,\frac{\sqrt3}{2}\right)$,$\overrightarrow{AC_1}=(0,3,\sqrt3)$.

(1)设异面直线A_1B和EF所成角为θ,则$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{EF}|}{|\overrightarrow{A_1B}|\cdot|\overrightarrow{EF}|}=\frac{\frac12}{\sqrt5\times\frac{\sqrt5}{2}}=\frac15$.所以异面直线$A_1B$与EF所成角的余弦值为$\frac15$.

(2)设平面AEF的法向量为$n=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AE}=0\\n\cdot\overrightarrow{AF}=0\end{cases}$,即$\begin{cases}\frac12x+y=0,\\x+\frac12y+\frac{\sqrt3}{2}z=0,\end{cases}$

令$y=1$,得$x=-2$,$z=\sqrt3$,所以$n=(-2,1,\sqrt3)$,所以点C_1到平面AEF的距离$d=\frac{|\overrightarrow{AC_1}\cdot n|}{|n|}=\frac{6}{2\sqrt2}=\frac{3\sqrt2}{2}$.

21.(1)证明:因为$PC=2$,点E为PC的中点,所以$PE=EC=1$,因为$AC=EA=1$,所以$\triangle AEC$是等边三角形,所以$\angle ECA=60^\circ$,所以$PA^2=AC^2+PC^2-2AC\cdot PC\cdot\cos60^\circ=1+4-2\times1\times2\times\frac12=3$,所以$PA=\sqrt3$,因为$PC^2=PA^2+AC^2$,所以$PA\perp AC$,因为$PB=PC$,$AB=AC$,$PA=PA$,所以$\triangle PAB\cong\triangle PAC$,所以$\angle PAB=90^\circ$,所以$PA\perp AB$,因为$AB\cap AC=A$,$AB,AC\subset$平面ABC,所以$PA\perp$平面ABC,因为$PA\subset$平面PAB,所以平面$PAB\perp$平面ABC.

(2)解:由(1)知,$PA\perp$平面ABC,以A为坐标原点,过点A且垂直于BC的直线为x轴,过点A且与BC平行的直线为y轴,AP所在直线为z轴,建立空间直角坐标系,

则$A(0,0,0)$,$B\left(\frac{\sqrt3}{2},-\frac12,0\right)$,$C\left(\frac{\sqrt3}{2},\frac12,0\right)$,$P(0,0,\sqrt3)$,$E\left(\frac{\sqrt3}{4},\frac14,\frac{\sqrt3}{2}\right)$,

所以$\overrightarrow{AP}=(0,0,\sqrt3)$,$\overrightarrow{AB}=\left(\frac{\sqrt3}{2},-\frac12,0\right)$,$\overrightarrow{AE}=\left(\frac{\sqrt3}{4},\frac14,\frac{\sqrt3}{2}\right)$,设平面PAB的法向量为$n=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{\sqrt3}{2}x-\frac12y=0,\\n\cdot\overrightarrow{AP}=\sqrt3z=0,\end{cases}$取$x=1$,得$n=(1,\sqrt3,0)$.

设平面ABE的法向量为$m=(a,b,c)$,

则$\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{\sqrt3}{2}a-\frac12b=0,\\m\cdot\overrightarrow{AE}=\frac{\sqrt3}{4}a+\frac14b+\frac{\sqrt3}{2}c=0,\end{cases}$取$a=1$,得$m=(1,\sqrt3,-1)$,所以$|\cos\langle m,n\rangle|=\frac{|m\cdot n|}{|m|\cdot|n|}=\frac{2\sqrt5}{5}$.所以平面PAB与平面ABE夹角的余弦值为$\frac{2\sqrt5}{5}$.

22.(1)解:由题意可得,椭圆的离心率$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt6}{3}$,又$c=\sqrt2$,所以$a=\sqrt3$,则$b^2=a^2-c^2=1$,故椭圆C的方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

(2)证明:先证明必要性,若M,N,F三点共线时,设直线MN的方程为$x=my+\sqrt2$,则圆心$O(0,0)$到直线MN的距离为$d=\frac{\sqrt2}{\sqrt{m^2+1}}=1$,解得$m^2=1$,由$\begin{cases}x=my+\sqrt2,\\\frac{x^2}{3}+y^2=1,\end{cases}$可得$(m^2+3)y^2+2\sqrt2my-1=0$,即$4y^2+2\sqrt2my-1=0$,设$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则$y_1+y_2=-\frac{\sqrt2}{2}m$,$y_1y_2=-\frac14$,所以$|MN|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt2\times\sqrt{\frac32}=\sqrt3$,所以必要性成立;

下面证明充分性,当$|MN|=\sqrt3$时,设直线MN的方程为$x=ty+m$,此时圆心$O(0,0)$到直线MN的距离$d=\frac{|m|}{\sqrt{t^2+1}}=1$,则$m^2-t^2=1$,由$\begin{cases}x=ty+m,\\\frac{x^2}{3}+y^2=1,\end{cases}$可得$(t^2+3)y^2+2tmy+m^2-3=0$,设$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则$y_1+y_2=\frac{-2tm}{t^2+3}$,$y_1y_2=\frac{m^2-3}{t^2+3}$,所以$|MN|=\sqrt{1+t^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{\sqrt{12(t^2-m^2+3)}}{t^2+3}=\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{\sqrt{24}}{t^2+3}=\sqrt3$,所以$t^2=1$,$m^2=2$,因为直线MN与曲线$x^2+y^2=b^2(x>0)$相切,所以$m>0$,则$m=\sqrt2$,

则直线MN的方程为$x=ty+\sqrt2$,恒过焦点$F(\sqrt2,0)$,故M,N,F三点共线,所以充分性得证.

综上所述,M,N,F三点共线的充要条件是$|MN|=\sqrt3$.

扫码免费下载习题讲解ppt

第13期

第2~3版综合测试(一)参考答案

一、单项选择题

1.A 提示:因为抛物线的标准方程为$x^2=y$,焦点在y轴上,所以$2p=1$,即$p=\frac12$,所以$\frac p2=\frac14$,所以准线方程是$y=-\frac14$,故选A.

2.D 提示:因为$s\cdot n=-3\times6+(-1)\times2+2\times10=0$,则$s\perp n$,从而知$l/\!/\alpha$或$l\subset\alpha$,故选D.

3.B 提示:因为直线$4x+3y-7=0$,$4x+my+3=0$平行,所以有$\frac44=\frac m3\neq\frac{3}{-7}$,解得$m=3$,因此两平行线间的距离为$\frac{|-7-3|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$,故选B.

4.A 提示:抛物线的焦点为$F(5,0)$,准线为$x=-5$.因为抛物线的焦点与双曲线的一个焦点重合,且抛物线的准线被双曲线截得的线段长为$\frac92$,所以$\begin{cases}a^2+b^2=25,\\\frac{2b^2}{a}=\frac92,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=4,\\b=3,\end{cases}$所以双曲线的渐近线方程为$y=\pm\frac34x$,故选A.

5.A 提示:因为空间四个点A,B,C,D在同一个平面内,所以$\overrightarrow{AB}=(1,-1-x,1)$,$\overrightarrow{BC}=(2,4,-4)$,$\overrightarrow{CD}=(1,-2,1)$,且$\overrightarrow{CD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{BC}$,所以$(1,-2,1)=(a,-a-ax,a)+(2b,4b,-4b)=(a+2b,4b-a-ax,a-4b)$,所以$\begin{cases}a+2b=1,\\4b-a-ax=-2,\\a-4b=1,\end{cases}$解得$a=1$,$b=0$,$x=1$,故选A.

6.B 提示:因为$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{NF_1}=0$,所以$MD\perp NF_1$.又D是$NF_1$中点,所以$|MF_1|=|MN|$.因为$\overrightarrow{MF_1}/\!/\overrightarrow{DF_2}$,所以$F_2$是MN中点,则$|MF_2|=|NF_2|$,因此$MN\perp x$轴.设$|MF_2|=m$,则$|MF_1|=2m$,由椭圆的定义,有$|MF_1|+|MF_2|=3m=2a$,$m=\frac{2a}{3}$.在$\triangle MF_1F_2$中,由勾股定理得$\left(\frac{4a}{3}\right)^2-\left(\frac{2a}{3}\right)^2=(2c)^2$,变形可得$e=\frac ca=\frac{\sqrt3}{3}$,故选B.

7.C 提示:设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$,由AB的中点坐标为$(1,2)$,得$x_1+x_2=2$,$y_1+y_2=4$,因为$k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$,又A,B两点在双曲线$x^2-\frac{y^2}{2}=1$上,所以$x_1^2-\frac{y_1^2}{2}=1$,$x_2^2-\frac{y_2^2}{2}=1$,两式相减,得$x_1^2-x_2^2=\frac{y_1^2}{2}-\frac{y_2^2}{2}$,所以$\frac{2(x_1+x_2)}{y_1+y_2}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$,所以$k_{AB}=1$,故选C.

8.D 提示:以底面中心O为原点,OB所在的直线为x轴,过O平行于AC的直线为y轴,OP所在直线为z轴,建立空间直角坐标系,则$A\left(-\frac{\sqrt3}{3},-1,0\right)$,$B\left(\frac{2\sqrt3}{3},0,0\right)$,$C\left(-\frac{\sqrt3}{3},1,0\right)$,设$P(0,0,h)$,$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{OC}+\frac13\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OC}+\frac13\overrightarrow{CO}+\frac13\overrightarrow{OP}=\frac23\overrightarrow{OC}+\frac13\overrightarrow{OP}=\left(-\frac{2\sqrt3}{9},\frac23,\frac h3\right)$,$\overrightarrow{PB}=\left(\frac{2\sqrt3}{3},0,-h\right)$,$\overrightarrow{AM}=\left(\frac{\sqrt3}{9},\frac53,\frac h3\right)$,所以$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{AM}=\frac29-\frac{h^2}{3}$.因为$\overrightarrow{PB}\perp\overrightarrow{AM}$,所以$\frac29-\frac{h^2}{3}=0$,得$h=\frac{\sqrt6}{3}$,设外接球的半径为r,则$r^2=\left(\frac{\sqrt6}{3}-r\right)^2+\left(\frac{2\sqrt3}{3}\right)^2$,解得$r=\frac{\sqrt6}{2}$,所以三棱锥P-ABC的外接球的表面积为$4\pi r^2=4\pi\times\left(\frac{\sqrt6}{2}\right)^2=6\pi$,故选D.

二、多项选择题

9.BCD 提示:对于A,$\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{D_1C_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{D_1C_1}=\overrightarrow{DA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{DB_1}\neq\overrightarrow{AC_1}$,故A错误;

对于B,$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC_1}$,故B正确;

对于C,$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{C_1C}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AC_1}$,故C正确;

对于D,$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{AC_1}$,故D正确.故选BCD.

10.AC 提示:对于A,双曲线$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$焦点在x轴上,$c=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$,焦点为$(\pm\sqrt{34},0)$;椭圆$\frac{x^2}{35}+y^2=1$焦点在x轴上,$c=\sqrt{35-1}=\sqrt{34}$,焦点为$(\pm\sqrt{34},0)$,故A正确;

对于B,根据双曲线的定义,若$||PA|-|PB||=k<|AB|$,动点P的轨迹为双曲线,故B错误;

对于C,方程$2x^2-5x+2=0$的两根为$x_1=\frac12$或$x_2=2$,因此$\frac12$可以作为椭圆的离心率,2可以作为双曲线的离心率,故C正确;

对于D,根据抛物线的定义可得$\frac p2=1$,即$p=2$,所以$y^2=4x$,故D错误.故选AC.

11.ABD 提示:在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,以点A为坐标原点,分别以AB,AD,AA_1所在直线为x轴、y轴、z轴,建立空间直角坐标系,设正方体棱长为2,则$A(0,0,0)$,$A_1(0,0,2)$,$B(2,0,0)$,$B_1(2,0,2)$,$C(2,2,0)$,$D(0,2,0)$,$D_1(0,2,2)$.

对于A,$\overrightarrow{A_1C}=(2,2,-2)$,$\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{A_1A}=\overrightarrow{AB_1}=(2,0,2)$,因此$\overrightarrow{A_1C}\cdot(\overrightarrow{A_1B_1}-\overrightarrow{A_1A})=\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{AB_1}=4-4=0$,故A正确;

对于B,又$\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{B_1C}=\overrightarrow{B_1A}+\overrightarrow{B_1C}=(-2,0,-2)+(0,2,-2)=(-2,2,-4)$,$\overrightarrow{CD}=(-2,0,0)$,所以$(\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{B_1C})^2=4+4+16=24$,$6\overrightarrow{CD}^2=24$,故B正确.

对于C,因为$\overrightarrow{A_1B}=(2,0,-2)$,$\overrightarrow{AD_1}=(0,2,2)$,所以$\cos\langle\overrightarrow{A_1B},\overrightarrow{AD_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{AD_1}}{|\overrightarrow{A_1B}||\overrightarrow{AD_1}|}=\frac{-4}{\sqrt{4+4}\times\sqrt{4+4}}=-\frac12$,因此向量$\overrightarrow{A_1B}$与向量$\overrightarrow{AD_1}$的夹角是120°,故C错误;

对于D,因为E,F分别是BC,A_1C的中点,所以$E(2,1,0)$,$F(1,1,1)$,则$\overrightarrow{EF}=(-1,0,1)$,又$\overrightarrow{DD_1}=(0,0,2)$,所以$\cos\langle\overrightarrow{EF},\overrightarrow{DD_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DD_1}}{|\overrightarrow{EF}||\overrightarrow{DD_1}|}=\frac{2}{\sqrt{1+1}\times2}=\frac{\sqrt2}{2}$.所以异面直线EF与$DD_1$所成的角为45°,即D正确.故选ABD.

12.AC 提示:过点M向准线l作垂线,垂足为N,$F(1,0)$,设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

对于A,连接FC,FD,因为$|AF|=|AC|$,所以$\angle AFC=\angle ACF$,又因为$\angle OFC=\angle ACF$,所以$\angle OFC=\angle AFC$,所以FC平分$\angle OFA$,同理可知FD平分$\angle OFB$,所以$\angle CFD=90^\circ$,故A正确;

对于B,假设$\triangle CMD$为等腰直角三角形,所以$\angle CFD=\angle CMD=90^\circ$,所以C,D,F,M四点共圆且圆的半径为$\frac12|CD|=|MN|$,又因为$|AF|=3|BF|$,所以$|AB|=|AF|+|BF|=|AC|+|BD|=2|MN|=4|BF|$,所以$|MN|=2|BF|$,所以$|CD|=2|MN|=4|BF|$,所以$|CD|=|AB|$,显然不成立,故B错误;

对于C,设直线AB的方程为$x=my+1$,由$\begin{cases}y^2=4x,\\x=my+1,\end{cases}$得$y^2-4my-4=0$,所以$\begin{cases}y_1+y_2=4m,\\y_1y_2=-4,\end{cases}$又因为$|AF|=3|BF|$,所以$y_1=-3y_2$,所以$\begin{cases}-2y_2=4m,\\-3y_2^2=-4,\end{cases}$所以$m^2=\frac13$,所以$\frac1m=\pm\sqrt3$,所以直线AB的斜率为$\pm\sqrt3$,故C正确;

对于D,取$m=\frac{\sqrt3}{3}$,由上可知$\begin{cases}y_1+y_2=\frac{4\sqrt3}{3},\\y_1y_2=-4,\end{cases}$所以$|y_1-y_2|=\sqrt{\left(\frac{4\sqrt3}{3}\right)^2+16}=\frac{8\sqrt3}{3}$,所以$S_{\triangle AOB}=\frac12\cdot|OF|\cdot|y_1-y_2|=\frac12\times1\times\frac{8\sqrt3}{3}=\frac{4\sqrt3}{3}$,故D错误.故选AC.

三、填空题

13.3 提示:因为$|AB|=\sqrt{(x-1)^2+(5-x)^2+1^2}=\sqrt{2x^2-12x+27}=\sqrt{2(x-3)^2+9}$,所以当$x=3$时,$|AB|_{\min}=3$.

14.①③ 提示:对于①,由$2x^2-9xy+8y^2=0$,得$9xy=2x^2+8y^2\geqslant0$,所以x,y同号或同时为零,故不经过第二、四象限,故①正确;对于②,由$2x^2-9xy+8y^2=0$,以$-y$换y,得到$2x^2+9xy+8y^2=0$,故不关于x轴对称,故②错误;对于③,由$2x^2-9xy+8y^2=0$,以$-y$换y,以$-x$换x,得到$2x^2-9xy+8y^2=0$,故关于原点对称,故③正确;对于④,由$2x^2-9xy+8y^2=0$,以x,y互换得到$2y^2-9xy+8x^2=0$,故不关于直线$y=x$对称,故④错误.综上所述,填①③.

15.$4x-3y+2=0$ 提示:联立$\begin{cases}3x-4y+5=0,\\y=x+1,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$所以直线$3x-4y+5=0$与直线$y=x+1$的交点为$(1,2)$,在直线$3x-4y+5=0$上取点$\left(0,\frac54\right)$,设点$\left(0,\frac54\right)$关于直线$y=x+1$的对称点为$(a,b)$,则$\begin{cases}\frac{b-\frac54}{a-0}=-1,\\\frac{b+\frac54}{2}=\frac a2+1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\frac14,\\b=1,\end{cases}$所以点$\left(0,\frac54\right)$关于直线$y=x+1$的对称点为$\left(\frac14,1\right)$,由两点式可得与直线$3x-4y+5=0$关于$y=x+1$对称的直线的方程为$\frac{y-2}{1-2}=\frac{x-1}{\frac14-1}$,即$4x-3y+2=0$.

16.$\frac{\sqrt3}{3}$ 提示:依题意$|PF_1|+|PF_2|=2a$,$|F_1F_2|=2c$,$a^2=b^2+c^2$,当$\angle F_1PF_2$取最大值时,即$\cos\angle F_1PF_2$最小,即$\cos\angle F_1PF_2$的最小值为$\frac13$,而$\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{(|PF_1|+|PF_2|)^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|-4c^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{4a^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|-4c^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{2b^2}{|PF_1|\cdot|PF_2|}-1$,而$|PF_1|\cdot|PF_2|\leqslant\frac{(|PF_1|+|PF_2|)^2}{4}=a^2$,当且仅当$|PF_1|=|PF_2|=a$时,等号成立,故$\cos\angle F_1PF_2\geqslant\frac{2b^2}{a^2}-1$,当且仅当$|PF_1|=|PF_2|=a$时,等号成立,所以$\cos\angle F_1PF_2$的最小值为$\frac{2b^2}{a^2}-1=\frac13$,即$\frac{b^2}{a^2}=\frac23$,故$e=\frac ca=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt3}{3}$.

四、解答题

17.解:(1)抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的准线$x=-\frac p2$过$M(-1,0)$,故$-\frac p2=-1$,则$p=2$,所以抛物线C的方程为$y^2=4x$.

(2)设切线方程为$x=my-1$,与抛物线方程$y^2=4x$联立有$y^2-4my+4=0$,

由$\Delta=(4m)^2-16=0$,解得$m=\pm1$,

故直线l的方程为$x-y+1=0$或$x+y+1=0$.

18.解:(1)圆C标准方程是$(x-1)^2+(y-2)^2=4$,圆心为$C(1,2)$,半径为$r=2$,

过$A(0,5)$作圆C的切线斜率存在,设切线方程为$y=kx+5$,即$kx-y+5=0$,

所以$\frac{|k-2+5|}{\sqrt{k^2+1}}=2$,解得$k=1\pm\frac{2\sqrt6}{3}$.故直线l的斜率为$1\pm\frac{2\sqrt6}{3}$.

(2)设$P(x,y)$,则由$|PM|=|PA|$得$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2-2^2}=\sqrt{x^2+(y-5)^2}$,化简得$x-3y+12=0$,此即为点P的轨迹方程,轨迹是直线.

要使得$|PM|$最小,则只要$|PC|$最小即可,所以CP垂直于直线$x-3y+2=0$,

设$P(m,n)$,则$\begin{cases}m-3n+12=0,\\\frac{n-2}{m-1}=-3,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=\frac{3}{10},\\n=\frac{41}{10},\end{cases}$即$P\left(\frac{3}{10},\frac{41}{10}\right)$.

19.(1)证明:由圆柱的性质,得四边形ABCD为矩形.连接AC,因为P,Q分别为AE,CE的中点,所以$PQ/\!/AC$,

又$PQ\not\subset$平面ABCD,$AC\subset$平面ABCD,所以$PQ/\!/$平面ABCD.

(2)解:以D为坐标原点,DC所在直线为y轴,DA所在直线为z轴,建立空间直角坐标系Dxyz,

则$D(0,0,0)$,$A(0,0,3)$,$B(0,2,3)$,$C(0,2,0)$,$E(\sqrt3,1,0)$,

则$\overrightarrow{CA}=(0,-2,3)$,$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{AE}=(\sqrt3,1,-3)$.

设平面ABE的法向量为$n=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot n=2y=0,\\\overrightarrow{AE}\cdot n=\sqrt3x+y-3z=0,\end{cases}$令$z=1$,则$n=(\sqrt3,0,1)$.

设直线PQ与平面ABE所成角为θ,

则$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{CA},n\rangle|=\frac{|\overrightarrow{CA}\cdot n|}{|\overrightarrow{CA}||n|}=\frac{3}{\sqrt{13}\times2}=\frac{3\sqrt{13}}{26}$,

故直线PQ与平面ABE所成角的正弦值为$\frac{3\sqrt{13}}{26}$.

20.(1)解:因为椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的长轴长为4,短轴长为2,所以$a=2$,$b=1$,所以椭圆C的标准方程是$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)证明:设点$P(x_0,y_0)$,因为A,B分别为椭圆C的左、右顶点,所以$A(-2,0)$,$B(2,0)$,则$k_{PB}=\frac{y_0}{x_0-2}$,因为$OH\perp PB$,所以$k_{OH}=\frac{2-x_0}{y_0}$,则$l_{OH}:y=\frac{2-x_0}{y_0}x$,又$l_{AP}:y=\frac{y_0}{x_0+2}(x+2)$,

则$\begin{cases}y=\frac{2-x_0}{y_0}x,\\y=\frac{y_0}{x_0+2}(x+2),\end{cases}$解得$x=\frac{2y_0^2}{4-x_0^2-y_0^2}$,因为$\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$,所以$y_0^2=1-\frac{x_0^2}{4}$,所以$x=\frac{2y_0^2}{4-x_0^2-y_0^2}=\frac23$,所以直线OH与直线AP的交点M的横坐标为定值$\frac23$.

21.解:(1)由条件可知$BE=2\sqrt2$,$BF=\sqrt{13}$,$EF=\sqrt5$,所以$BF^2=BE^2+EF^2$,所以$EF\perp BE$.又$BE=B_1E=2\sqrt2$,$BB_1=4$,所以$B_1E^2+BE^2=BB_1^2$,所以$BE\perp B_1E$,

又因为$B_1E\cap EF=E$,所以$BE\perp$平面B_1EF.

(2)以AC的中点O为坐标原点,OA所在直线为x轴,OB所在直线为y轴,建立空间直角坐标系Oxyz,

则$A(1,0,0)$,$B(0,\sqrt3,0)$,$E(-1,0,2)$,$F(1,0,3)$,所以$\overrightarrow{BF}=(1,-\sqrt3,3)$,$\overrightarrow{BE}=(-1,-\sqrt3,2)$,$\overrightarrow{AB}=(-1,\sqrt3,0)$,

设平面BEF的法向量为$n=(x,y,z)$,

因为$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{BF}=0,\\n\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$所以$\begin{cases}x-\sqrt3y+3z=0,\\x+\sqrt3y-2z=0,\end{cases}$取$y=5\sqrt3$,得$n=(-3,5\sqrt3,6)$.

设平面ABF的法向量为$m=(a,b,c)$,则$\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\m\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-a+\sqrt3b=0,\\a-\sqrt3b+3c=0,\end{cases}$取$b=1$,则$m=(\sqrt3,1,0)$,$\cos|\langle m,n\rangle|=\frac{|m\cdot n|}{|m||n|}=\frac{-3\sqrt3+5\sqrt3}{2\sqrt{30}\times2}=\frac{\sqrt{10}}{20}$,所以平面BEF与平面ABF夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{20}$.

22.解:(1)设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,因为$|BP|=3|AP|$,所以$\overrightarrow{PB}=3\overrightarrow{AP}$,即$(x_2,y_2-1)=3(-x_1,1-y_1)$,所以$\begin{cases}x_2=-3x_1,\\y_2=4-3y_1,\end{cases}$

所以$\begin{cases}x_1^2-\frac{y_1^2}{2}=1,\\(-3x_1)^2-\frac{(4-3y_1)^2}{2}=1,\end{cases}$所以$x_1=-1$,$y_1=0$,即$A(-1,0)$,所以$k=k_{AP}=\frac{1-0}{1}=1$.

(2)设直线l的方程为$y=kx+m(k\neq0)$.

由$\begin{cases}y=kx+m,\\x^2-\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$整理得$(2-k^2)x^2-2kmx-m^2-2=0$.

则$x_1+x_2=\frac{2km}{2-k^2}$,$x_1x_2=\frac{-m^2-2}{2-k^2}$,因为直线l与双曲线的左、右两支分别交于A,B两点,于是$2-k^2\neq0$,且$\Delta=(-2km)^2+4(2-k^2)(m^2+2)>0$.整理得$m^2+2-k^2>0$.设线段AB的中点坐标为$(x_0,y_0)$,则$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{km}{2-k^2}$,$y_0=kx_0+m=\frac{2m}{2-k^2}$.所以AB的垂直平分线方程为$y-\frac{2m}{2-k^2}=-\frac1k\left(x-\frac{km}{2-k^2}\right)$.

此直线与x,y轴的交点坐标分别为$\left(\frac{3km}{2-k^2},0\right)$,$\left(0,\frac{3m}{2-k^2}\right)$.由题可得$\frac12\left|\frac{3km}{2-k^2}\right|\cdot\left|\frac{3m}{2-k^2}\right|=\frac92$.整理得$m^2=\frac{(2-k^2)^2}{|k|}$,$k\neq0$.所以$\frac{(2-k^2)^2}{|k|}+2-k^2>0$,整理得$(k^2-2)(k^2-|k|-2)>0$,$k\neq0$,即$(k^2-2)(|k|-2)>0$,$k\neq0$,解得$0<|k|<\sqrt2$或$|k|>2$.所以k的取值范围是$(-\infty,-2)\cup(-\sqrt2,0)\cup(0,\sqrt2)\cup(2,+\infty)$.

第 14 期

第 2~3 版综合测试(二)参考答案

一、单项选择题

1.D **提示**:因为 $x+\sqrt{3}y+3=0$,所以直线的斜率 $k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.设倾斜角为 α,则 $\tan\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.因为 $\alpha\in[0,\pi)$,所以 $\alpha=\frac{5\pi}{6}$,故选 D.

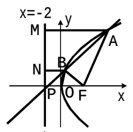
2.B **提示**:设 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$,则 $\begin{cases}x+2y=4,\\3x-y=5,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x=2,\\y=1,\end{cases}$ 所以 $m=2\times(-2)+1\times3=-1$,故选 B.

3.A **提示**:由题意知,$C_1(1,1)$,$C_2(-1,-2)$,且 C_1C_2 垂直平分 AB,所以线段 AB 的垂直平分线所在直线必过 C_1,C_2,故所求直线的方程为 $y-1=\frac{3}{2}(x-1)$,即 $3x-2y-1=0$,故选 A.

4.A **提示**:由题意,以点 C 为原点,CA,CB,CC_1 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系.设 $CB=1$,则 $B(0,1,0)$,$A(2,0,0)$,$B_1(0,1,2)$,$C_1(0,0,2)$,因此 $\overrightarrow{BC_1}=(0,-1,2)$,$\overrightarrow{AB_1}=(-2,1,2)$,所以 $\cos\langle\overrightarrow{BC_1},\overrightarrow{AB_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{AB_1}}{|\overrightarrow{BC_1}||\overrightarrow{AB_1}|}=\frac{-1+4}{\sqrt{5}\times3}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,故异面直线 BC_1 与 AB_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$,故选 A.

5.B **提示**:由椭圆的对称性,得 $|AF_2|=|BF_1|$.设 $|AF_2|=m$,则 $|AF_1|=3m$.由椭圆的定义,知 $|AF_1|+|AF_2|=2a$,即 $m+3m=2a$,解得 $m=\frac{a}{2}$,故 $|AF_1|=\frac{3a}{2}$,$|AF_2|=\frac{a}{2}$.在 $\triangle AF_1F_2$ 中,由余弦定理,得 $|F_1F_2|^2=|AF_1|^2+|AF_2|^2-2|AF_1||AF_2|\cdot\cos\angle F_1AF_2$,即 $4c^2=\frac{9a^2}{4}+\frac{a^2}{4}-2\times\frac{3a}{2}\times\frac{a}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{7a^2}{4}$,则 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{7}{16}$,故 $e=\frac{\sqrt{7}}{4}$,故选 B.

6.B **提示**:设抛物线 $C:y^2=8x$ 的准线为 $l':x=-2$,直线 $l:y=k(x+2)(k>0)$ 恒过定点 $P(-2,0)$,如图,过 A,B 分别作 $AM\perp l'$ 于 M,$BN\perp l'$ 于 N,因为 $|FA|=2|FB|$,所以 $|AM|=2|BN|$,所以点 B 为 AP 的中点,连接 OB,则 $|OB|=\frac{1}{2}|AF|$,所以 $|OB|=|BF|$,所以点 B 的横坐标 1,所以 $|AM|=2|BN|=6$,所以点 A 到 y 轴的距离为 4,故选 B.



(第 6 题图)

7.B **提示**:由题意得 $a^2+b(b-2)-3=0$,即 $a^2+(b-1)^2=4$,即点 $P(a,b)$ 在圆 $x^2+(y-1)^2=4$ 上.因为 $0^2+(0-1)^2<4$,所以原点在圆 $x^2+(y-1)^2=4$ 内.圆 $x^2+(y-1)^2=4$ 的圆心为 $C(0,1)$,半径为 $r=2$,由三角不等式得 $|PC|-|OC|\leqslant|OP|\leqslant|PC|+|OC|$,即 $1\leqslant|OP|\leqslant3$,所以 B 选项符合要求.故选B.

8.C **提示**:因为 F_2B 是 $\angle AF_2F_1$ 的角平分线,原点 O 为 F_1F_2 的中点,所以 $|BF_1|=|BF_2|$,$\angle BF_1F_2=\angle BF_2F_1=\angle BF_2A=\alpha$.又 $|AF_1|=2c$,所以 $\angle A=2\alpha$,$\angle A+\angle AF_1F_2+\angle AF_2F_1=5\alpha=180°$,所以 $\alpha=36°$,$\angle ABF_2=2\alpha=72°=\angle A$,所以 $|BF_2|=|AF_2|$.由双曲线的定义可得 $|AF_1|-|AF_2|=2a$,则 $|AF_2|=2c-2a$,$|AB|=2c-(2c-2a)=2a$.易知 $\triangle AF_2B\backsim\triangle AF_1F_2$,所以 $\frac{|AB|}{|AF_2|}=\frac{|AF_2|}{|AF_1|}$,即 $\frac{2a}{2c-2a}=\frac{2c-2a}{2c}$,所以 $ac=(c-a)^2$,即 $c^2-3ac+a^2=0$,所以 $e^2-3e+1=0$,又 $e>1$,解得 $e=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$,故选 C.

二、多项选择题

9.AB **提示**:由题意知 $m>0$,当 $5>m$ 时,$a=\sqrt{5}$,$b=\sqrt{m}$,$c=\sqrt{5-m}$,所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5-m}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$,解得 $m=3$;当 $5<m$ 时,$a=\sqrt{m}$,$b=\sqrt{5}$,$c=\sqrt{m-5}$,所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{m-5}}{\sqrt{m}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$,解得 $m=\frac{25}{3}$,故选 AB.

10.BD **提示**:对于 A,$\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,2,1)$,可知 $\overrightarrow{AB}\neq\lambda\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 不共线,A 错误;

对于 B,因为 $\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$,所以 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5}$,所以 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5},0\right)$,即与 $\overrightarrow{AB}$ 同向的单位向量是 $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5},0\right)$,B 正确;

对于 C,因为 $\overrightarrow{BC}=(-3,1,1)$,所以 $\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{-5}{\sqrt{5}\times\sqrt{11}}=-\frac{\sqrt{55}}{11}$,C 错误;

对于 D,设平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2x+y=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-3x+y+z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$,解得 $y=-2$,$z=5$,所以 $\boldsymbol{n}=(1,-2,5)$,即平面 ABC 的一个法向量为 $(1,-2,5)$,D 正确.故选 BD.

11.CD **提示**:对于 A,设 $z=y-x$,则 $y=x+z$,z 表示直线 $y=x+z$ 的纵截距,当直线与圆 $(x-2)^2+y^2=3$ 有公共点时,$\frac{|2+z|}{\sqrt{2}}\leqslant\sqrt{3}$,解得 $-\sqrt{6}-2\leqslant z\leqslant\sqrt{6}-2$,所以 $y-x$ 的最大值为 $\sqrt{6}-2$,故 A 正确;

对于 B,x^2+y^2 的几何意义是表示圆上的点到原点距离的平方,易知原点到圆心的距离为 2,则原点到圆上的最大距离为 $2+\sqrt{3}$,所以 x^2+y^2 的最大值为 $(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$,故 B 正确;

对于 C,设 $\frac{y}{x}=k$,把 $y=kx$ 代入圆方程得 $(1+k^2)x^2-4x+1=0$,则 $\Delta=16-4(1+k^2)\geqslant0$,解得 $-\sqrt{3}\leqslant k\leqslant\sqrt{3}$,所以 $\frac{y}{x}$ 的最大值为 $\sqrt{3}$,故 C 错误;

对于 D,设 $m=x+y$,则 $y=-x+m$,m 表示直线 $y=-x+m$ 的纵截距,当直线与圆 $(x-2)^2+y^2=3$ 有公共点时,$\frac{|-2+m|}{\sqrt{2}}\leqslant\sqrt{3}$,解得 $-\sqrt{6}+2\leqslant m\leqslant\sqrt{6}+2$,所以 $x+y$ 的最大值为 $\sqrt{6}+2$,故 D 错误.故选 CD.

12.ABD **提示**:对于 A,过点 A,B 分别作抛物线的准线 $x=-1$ 的垂线,垂足为 A',B'.过点 B 作 AA' 的垂线,垂足为 E,设 $|BF|=m$,则 $|AF|=3m$,由抛物线定义得,$|AB|=4m$,$|AE|=2m$,在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中,$\cos\angle BAE=\frac{2m}{4m}=\frac{1}{2}$,所以 $\angle BAE=\frac{\pi}{3}$,所以直线 l 的斜率为 $\sqrt{3}$,故 A 正确;

对于 B,直线 l 的方程为 $y=\sqrt{3}(x-1)$,联立 $\begin{cases}y=\sqrt{3}(x-1),\\y^2=4x,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=3,\\y_1=2\sqrt{3},\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=\frac{1}{3},\\y_2=-\frac{2\sqrt{3}}{3},\end{cases}$ 即 $A(3,2\sqrt{3})$,$B\left(\frac{1}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$,所以 $|AB|=\sqrt{\left(3-\frac{1}{3}\right)^2+\left(2\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{16}{3}$,故 B 正确;

对于 C,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1-4=-3\neq0$,故 C 错误;

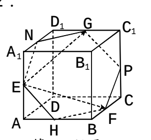
对于 D,由题意知,$F(1,0)$,则线段 AF 的中点坐标为 $(2,\sqrt{3})$,它到 y 轴的距离为 2,因为 $|AF|=4$,所以 $r=2$,所以以 AF 为直径的圆与 y 轴相切,D 正确.故选 ABD.

三、填空题

13.$2x+y-5=0$ **提示**:线段 AB 的中点为 $(3,-1)$,$k_{AB}=\frac{0+2}{5-1}=\frac{1}{2}$,所以线段 AB 的垂直平分线的斜率为 $k=-\frac{1}{k_{AB}}=-2$,因此所求直线方程为 $y+1=-2(x-3)$,即 $2x+y-5=0$.

14.$\frac{x^2}{8}-y^2=1$ **提示**:由双曲线 C 的右焦点为 $F(3,0)$,得 $c=3$,不妨取一条渐近线为 $bx-ay=0$,所以 $\frac{|3b|}{\sqrt{b^2+a^2}}=b=1$,从而 $a^2=c^2-b^2=8$,所以双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{8}-y^2=1$.

15.$3\sqrt{2}$ **提示**:因为 $\overrightarrow{EM}=x\overrightarrow{EF}+y\overrightarrow{EG}(x,y\in\mathbf{R})$,所以 M 在平面 EFG 上,取 A_1D_1,AB,CC_1 的中点 N,H,P,则点 M 的轨迹是正六边形 $EHFPGN$,轨迹长度是正六边形的周长,$l=6EN=3\sqrt{2}$.



(第 15 题图)

16.$x^2+(y+3)^2=18$ **提示**:设圆 C_2 的圆心为 $(0,a)$,半径为 r,则圆 C_2 的方程为 $x^2+(y-a)^2=r^2$,即 $x^2+y^2-2ay+a^2-r^2=0$,因为圆 $C_1:x^2+y^2-6x-6y+3=0$,所以 C_1 与 C_2 的公共弦所在直线的方程为 $6x+(6-2a)y+a^2-r^2-3=0$,即 $x+\frac{(3-a)}{3}y+\frac{a^2-r^2-3}{6}=0$.因为 C_1 与 C_2 的公共弦所在直线的方程为 $x+2y-2=0$,所以 $\begin{cases}\frac{(3-a)}{3}=2,\\\frac{a^2-r^2-3}{6}=-2,\end{cases}$ 解得 $a=-3$,$r^2=18$,故圆 C_2 的方程为 $x^2+(y+3)^2=18$.

四、解答题

17.**解**:(1)因为直线 l 与直线 $3x-y+2=0$ 平行,所以直线 l 的斜率 $k=3$,则 $-\frac{a}{2}=3$,解得 $a=-6$,

故直线 l 的方程为 $-6x+2y-7=0$,即 $6x-2y+7=0$.

(2)由题意可知圆 C 的圆心坐标为 $(1,2)$,半径为 3,因为 $|AB|=4\sqrt{2}$,所以圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{|a-3|}{\sqrt{a^2+4}}=\sqrt{9-8}=1$,解得 $a=\frac{5}{6}$,故直线 l 的方程为 $\frac{5}{6}x+2y-7=0$,即 $5x+12y-42=0$.

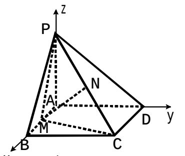
18.**解**:(1)F_1,F_2 是该双曲线的两个焦点,则 $a=3$,$b=4$,$c=5$,设点 M 到另一个焦点的距离为 m,由双曲线定义可知 $|m-16|=2a=6$,解得 $m=10$ 或 $m=22$,即点 M 到另一个焦点的距离为 10 或 22.

(2)P 是双曲线左支上的点,$|PF_2|-|PF_1|=2a=6$,则 $|PF_1|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|+|PF_2|^2=36$,代入 $|PF_1|\cdot|PF_2|=32$,可得 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=36+2\times32=100$,即 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2=100$,所以 $\triangle F_1PF_2$ 为直角三角形,所以 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{1}{2}\times32=16$.

19.(1)**证明**:以 A 为原点建立如图所示空间直角坐标系,则 $M(1,0,0)$,$P(0,0,2)$,$C(2,2,0)$,$N(1,1,1)$,$D(0,2,0)$,

$\overrightarrow{MN}=(0,1,1)$,$\overrightarrow{PC}=(2,2,-2)$,$\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$,

因为 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PC}=2-2=0$,$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PD}=2-2=0$,所以 $MN\perp PC$,$MN\perp PD$.因为 $PC\cap PD=P$,所以 $MN\perp$ 平面 PCD.



(第 19 题图)

(2)**解**:$\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$,$\overrightarrow{MP}=(-1,0,2)$,$\overrightarrow{MC}=(1,2,0)$,设平面 PMC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MP}=-x+2z=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MC}=x+2y=0.\end{cases}$ 令 $z=1$,则 $x=2$,$y=-1$,所以 $\boldsymbol{n}=(2,-1,1)$.

设直线 PD 与平面 PMC 所成角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{PD}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{PD}|}=\frac{4}{\sqrt{6}\times2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.所以 PD 与平面 PMC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

20.**解**:(1)由抛物线的方程知焦点为 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$,由抛物线的定义和已知条件得 $x_0+2p=\frac{5}{2}\left(x_0+\frac{p}{2}\right)$,则 $x_0=\frac{p}{2}$,所以 $P\left(\frac{p}{2},2\right)$.因为点 P 在抛物线上,所以 $4=2p\cdot\frac{p}{2}$.

因为 $p>0$,所以 $p=2$,所以抛物线的方程为 $y^2=4x$.

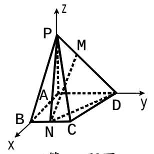
(2)因为直线 l 过 $M(2,0)$ 且斜率为 1,所以直线 l 的方程为 $y=x-2$,联立 $\begin{cases}y=x-2,\\y^2=4x,\end{cases}$ 得 $x^2-8x+4=0$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由韦达定理得 $x_1+x_2=8$,$x_1x_2=4$,$|AB|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=4\sqrt{6}$,$D$ 为 AB 中点,所以点 $D(4,2)$.

由(1)知抛物线的准线方程为 $x=-1$,又因为 $DE\perp AB$,所以直线 DE 的方程为 $y-2=-(x-4)$,即 $y=-x+6$,当 $x=-1$ 时,$y=7$,则 $E(-1,7)$,所以 $|DE|=\sqrt{(4+1)^2+(2-7)^2}=5\sqrt{2}$,

所以 $\frac{|AB|}{|DE|}=\frac{4\sqrt{6}}{5\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{5}$.

21.**解**:如图,以 A 为原点,分别以 $\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AP}$ 的方向为 x,y,z 轴正方向,建立空间直角坐标系.



(第 21 题图)

由题意,可得 $A(0,0,0)$,$B(2,0,0)$,$C(2,2,0)$,$D(0,3,0)$,$P(0,0,3)$,$M(0,1,2)$,$N(2,1,0)$.

(1)**证明**:显然,$\overrightarrow{AD}=(0,3,0)$ 是平面 PAB 的一个法向量,$\overrightarrow{MN}=(2,0,-2)$,故 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AD}=0$,即 $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{AD}$.又因为平面 $MN\not\subset$ 平面 PAB,所以 $MN\mathbin{/\mkern-5mu/}$ 平面 PAB.

(2)**解**:设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,由 $\overrightarrow{DC}=(2,-1,0)$,$\overrightarrow{DP}=(0,-3,3)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x-y=0,\\-3y+3z=0,\end{cases}$ 令 $z=2$,可得 $\boldsymbol{n}=(1,2,2)$.

由已知可得 $\overrightarrow{ND}=(-2,2,0)$,$\overrightarrow{DP}=(0,-3,3)$.同理可求平面 PDN 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,1,1)$,

所以 $|\cos\langle m,n\rangle|=\frac{|m\cdot n|}{|m||n|}=\frac{|1+2+2|}{3\times\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$,因此 $\sin\langle m,n\rangle=\sqrt{1-\cos^2\langle m,n\rangle}=\sqrt{1-\left(\frac{5\sqrt{3}}{9}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{9}$,所以平面 PCD 与平面 PDN 夹角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{9}$.

22.**解**:(1)由题意得 $a=2$,在 $\mathrm{Rt}\triangle OBF_2$ 中,$|OB|=b$,$|OF_2|=c$,所以 $|BF_2|=a$.

又 $\angle F_1BF_2=60°$,所以 $\angle OBF_2=30°$,所以 $b=a\cos30°=\sqrt{3}$,所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\x=my+t,\end{cases}$ 整理得 $(3m^2+4)y^2+6mty+3t^2-12=0$,

则 $\Delta=36m^2t^2-4(3m^2+4)(3t^2-12)=144m^2-48t^2+192>0$,

所以 $3m^2-t^2+4>0$,所以 $y_1+y_2=-\frac{6mt}{3m^2+4}$,因为 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{NP}$,所以 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$,所以 $y_P=y_1+y_2=-\frac{6mt}{3m^2+4}$,

$x_P=x_1+x_2=my_1+t+my_2+t=m(y_1+y_2)+2t=\frac{8t}{3m^2+4}$.

因为点 P 在椭圆 C 上,所以 $\frac{16t^2}{(3m^2+4)^2}+\frac{12m^2t^2}{(3m^2+4)^2}=1$,整理得 $\frac{4t^2}{3m^2+4}=1$,所以 $4t^2=3m^2+4$.

在直线 $l:x-my-t=0$ 中,由于直线 l 与坐标轴围成三角形,则 $t\neq0$,$m\neq0$.

令 $x=0$,得 $y=-\frac{t}{m}$;令 $y=0$,得 $x=t$,所以直线 l 与坐标轴围成三角形面积为 $S=\frac{1}{2}|t|\left|\frac{t}{m}\right|=\frac{1}{8}\cdot\left(3|m|+\frac{4}{|m|}\right)\geqslant\frac{1}{8}\times2\sqrt{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

当且仅当 $3m^2=4$ 时取等号,此时 $t^2=2$,$\Delta=288>0$,所以直线 l 与坐标轴围成的三角形面积的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

第 15 期

第 2~3 版综合测试(三)参考答案

一、单项选择题

1.C **提示**:在空间直角坐标系 Oxyz 中,点 $A(3,-1,0)$,所以 $\overrightarrow{OA}=(3,-1,0)$,又向量 $\overrightarrow{AB}=(4,10,-6)$,且 $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$,所以 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=(7,9,-6)$,即点 $B(7,9,-6)$,

所以线段 AB 的中点坐标为 $(5,4,-3)$.故选 C.

2.D **提示**:因为直线 $l_1:x+(1+m)y=2-m$,$l_2:2mx+4y=-16$,且 $l_1\mathbin{/\mkern-5mu/}l_2$,

所以 $\frac{1}{2m}=\frac{1+m}{4}\neq\frac{2-m}{-16}$,解得 $m=1$.故选 D.

3.C **提示**:抛物线的焦点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$,线段 AF 的中点 $B\left(\frac{p}{4},4\sqrt{2}\right)$,将点 B 代入抛物线方程得 $32=2p\cdot\frac{p}{4}$,解得 $p=8$,准线 l 的方程为 $x=-4$,所以点 $B(2,4\sqrt{2})$ 到直线 l 的距离为 $2+4=6$.故选 C.

4.C **提示**:$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}\Rightarrow\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD}\Rightarrow\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EB}\Rightarrow\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OC}=2\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OE})\Rightarrow3\overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\Rightarrow\overrightarrow{OE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$,所以 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$,又 $\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$,在三棱锥 O-ABC 中,$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}$ 不共面,由向量基本定理得 $x=-\frac{1}{2}$,$y=\frac{1}{6}$,$z=\frac{1}{3}$.故选 C.

5.A **提示**:P 是圆 $x^2+y^2-10x-6y+25=0$,即 $(x-5)^2+(y-3)^2=9$ 上的动点,由于圆心 $C(5,3)$,半径为 $R=3$,Q 是直线 $x=-4$ 上的动点,所以当 CQ 垂直于直线 $x=-4$ 时,$|PQ|$ 取得最小值,最小值为 $|QC|-R=9-3=6$,故选A.

6.B **提示**:由题意知,$F_2(1,0)$,设过 F_2 的直线的方程为 $x=ty+1$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.由 $\begin{cases}x=ty+1,\\x^2+2y^2=2,\end{cases}$ 得 $(2+t^2)y^2+2ty-1=0$,则 $y_1+y_2=\frac{-2t}{2+t^2}$,$y_1y_2=\frac{-1}{t^2+2}$,因为 $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$,所以四边形 AOBE 为平行四边形,则四边形 AOBE 的面积 $S=2\times\frac{1}{2}\times|y_1-y_2|\times1=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{t^2+1}}{t^2+2}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{t^2+1}+\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}}\leqslant\sqrt{2}$,当且仅当 $t=0$ 时,等号成立,所以四边形 AOBE 面积的最大值为 $\sqrt{2}$.故选 B.

7.B **提示**:因为平面 $ABCD\mathbin{/\mkern-5mu/}$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,平面 $ACM\cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1=l$,平面 $ACM\cap$ 平面 $ABCD=AC$,所以 $l\mathbin{/\mkern-5mu/}AC$,所以直线 l 与平面 B_1D_1E 所成角即为直线 AC 与平面 B_1D_1E 所成角,以 D 为原点,DA 为 x 轴,DC 为 y 轴,DD_1 为 z 轴,建立空间直角坐标系,则 $A(2,0,0)$,$C(0,2,0)$,$D_1(0,0,4)$,$B_1(2,2,4)$,$E(0,2,2)$,$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$,$\overrightarrow{D_1B_1}=(2,2,0)$,$\overrightarrow{D_1E}=(0,2,-2)$,设平面 B_1D_1E 的法向量为 $n=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{D_1B_1}=2x+2y=0,\\n\cdot\overrightarrow{D_1E}=2y-2z=0,\end{cases}$ 取 $x=1$,得 $n=(1,-1,-1)$,设直线 AC 与平面 B_1D_1E 所成角为 θ,则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AC},n\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot n|}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|n|}=\frac{4}{\sqrt{8}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,所以 $\cos\theta=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以直线 l 与平面 B_1D_1E 所成角的正切值为 $\tan\theta=\sqrt{2}$.故选 B.

8.B **提示**:双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,渐近线的方程为 $y_1=\frac{b}{a}x$,$y_2=-\frac{b}{a}x$,不妨设双曲线 E 的渐近线的平行线方程为 $y'_1=\frac{b}{a}x+m(m\neq0)$,$y'_2=-\frac{b}{a}x+n(n\neq0)$,与 x 轴的交点为 $A\left(\frac{-ma}{b},0\right)$,$B\left(\frac{na}{b},0\right)$,与 y 轴交点为 $C(0,m)$,$D(0,n)$,所以 $(|OA|+|OB|)\cdot(|OC|+|OD|)=\left(\left|\frac{ma}{b}\right|+\left|\frac{na}{b}\right|\right)\cdot(|m|+|n|)=(|m|+|n|)\cdot\frac{a}{b}\cdot(|m|+|n|)=(m^2+2|m||n|+n^2)\cdot\frac{a}{b}\geqslant4|m||n|\cdot\frac{a}{b}$,当且仅当 $|m|=|n|$ 时取等号,$12|OC||OD|=12|m|\cdot|n|$,因为 $(|OA|+|OB|)\cdot(|OC|+|OD|)\geqslant12|OC|\cdot|OD|$ 恒成立,所以 $4|m||n|\cdot\frac{a}{b}\geqslant12|m||n|$,所以 $\frac{b}{a}\leqslant\frac{1}{3}$,所以 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\leqslant\sqrt{1+\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{10}}{3}$,又 $e>1$,所以 $1<e\leqslant\frac{\sqrt{10}}{3}$,故选 B.

二、多项选择题

9.CD **提示**:根据题意,圆 $C:x^2-2ax+y^2+a^2-1=0$,即 $(x-a)^2+y^2=1$,其圆心为 $(a,0)$,半径 $R=1$,圆 $D:x^2+y^2=4$,其圆心 $D(0,0)$,半径 $r=2$,若两个圆有且仅有两条公共切线,则两圆相交,所以 $2-1<|a|<2+1$,即 $1<|a|<3$,解得 $-3<a<-1$ 或 $1<a<3$,分析选项可得 C,D 符合,故选 CD.

10.ABD **提示**:对于 A,若表示焦点在 x 轴上的椭圆,则 $\begin{cases}4-k^2>0,\\4-k^2>2+k^2,\end{cases}$ 解得 $-1<k<1$,所以当 $k\in(-1,1)$ 时,曲线是焦点在 x 轴上的椭圆,故 A 正确;

对于 B,若表示焦点在 y 轴上的椭圆,则 $\begin{cases}4-k^2>0,\\2+k^2>4-k^2,\end{cases}$ 解得 $-2<k<-1$,或 $1<k<2$,所以当 $k\in(-2,-1)\cup(1,2)$ 时,曲线是焦点在 y 轴上的椭圆,故 B 正确;

对于 C,若表示焦点在 x 轴上的双曲线,则 $\begin{cases}4-k^2>0,\\2+k^2<0,\end{cases}$ 无解,故 C 错误;

对于 D,若表示焦点在 y 轴上的双曲线,则 $\begin{cases}2+k^2>0,\\4-k^2<0,\end{cases}$ 解得 $k<-2$ 或 $k>2$,

所以当 $k\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ 时,曲线是焦点在 y 轴上的双曲线,故 D 正确.故选 ABD.

11.ABC **提示**:联立两椭圆方程得 $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$D\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,所以四边形 ABCD 为正方形,A 正确;所以四边形 ABCD 的外接圆方程为 $x^2+y^2=\frac{3}{4}$,D 错误;正方形 ABCD 的面积为 3,所以阴影部分的面积大于 3,B 正确;由直线 $x=\pm1$,$y=\pm1$ 围成的正方形的面积为 4,所以阴影部分的面积小于 4,C 正确.故选 ABC.

12.BCD **提示**:对于 A,直线 EC_1 与直线 AD 都在平面 B_1ADC_1 中,故 A 错误;对于 B,连接 A_1C_1,BC_1,取 A_1C_1 的中点 F,则 $EF\mathbin{/\mkern-5mu/}BC_1$,因为 $BC_1\perp$ 平面 A_1CD,所以 $EF\perp$ 平面 A_1CD,故 B 正确;对于 C,取 B_1C 的中点 M,可证 $BM\perp$ 平面 A_1CD,所以 $\angle BA_1M$ 即为直线 BA_1 与平面 A_1CD 所成角,因为 $BM=\frac{1}{2}BA_1$,$\angle BMA_1=\frac{\pi}{2}$,所以 $\angle BA_1M=\frac{\pi}{6}$,故 C 正确;

对于 D,因为 $BM\perp$ 平面 A_1CD,所以点 B 到平面 A_1CD 的距离 $d=|BM|=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故 D 正确.故选 BCD.

三、填空题

13.$\sqrt{17}$ **提示**:因为 $P(-1,1,-1)$,$A(4,1,-2)$,所以 $\overrightarrow{PA}=(5,0,-1)$,又 $m=(1,\sqrt{2},-1)$,所以 $\cos\langle m,\overrightarrow{PA}\rangle=\frac{m\cdot\overrightarrow{PA}}{|m|\cdot|\overrightarrow{PA}|}=\frac{5+1}{2\times\sqrt{26}}=\frac{3}{\sqrt{26}}$,所以 $\sin\langle m,\overrightarrow{PA}\rangle=\sqrt{\frac{17}{26}}$,又因为 $|\overrightarrow{PA}|=\sqrt{26}$,所以点 $P(-1,1,-1)$ 到直线 l 的距离为 $|\overrightarrow{PA}|\sin\langle m,\overrightarrow{PA}\rangle=\sqrt{26}\times\sqrt{\frac{17}{26}}=\sqrt{17}$.

14.$(1,5)$ **提示**:由题意知,$\angle ACB<\frac{\pi}{2}$,且 P,A,C,B 四点共圆,所以 $\angle APB>\frac{\pi}{2}$,即 $|AC|>|PA|$.又圆 $C:x^2+y^2-6x-4\sqrt{7}y+21=0$,可化为 $(x-3)^2+(y-2\sqrt{7})^2=16$,圆心为 $C(3,2\sqrt{7})$,半径为 $|AC|=4$,因为 $|PC|=\sqrt{(m-3)^2+(2\sqrt{7})^2}$,$|PA|=\sqrt{|PC|^2-|AC|^2}$,所以 $|PC|^2<2|AC|^2=32$,即 $(m-3)^2+28<32$,解得 $1<m<5$,所以实数 m 的取值范围是 $(1,5)$.

15.$\frac{\sqrt{5}}{3}$ **提示**:设椭圆 C 的左焦点为 F_1,因为圆 C':$\left(x-\frac{c}{2}\right)^2+y^2=\frac{b^2}{16}$ 与 AF 相切于点 B,所以 $|C'B|=\frac{b}{4}$,$C'\left(\frac{c}{2},0\right)$,所以 $\frac{|C'F|}{|F_1F|}=\frac{1}{4}$.因为 $\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{BF}$,所以 $\frac{|\overrightarrow{BF}|}{|\overrightarrow{AF}|}=\frac{1}{4}$,所以 $C'B\mathbin{/\mkern-5mu/}AF_1$,$|AF_1|=4|C'B|=b$,$\angle F_1AF=\angle C'BF=\frac{\pi}{2}$,由椭圆定义得 $|AF|=2a-b$,在 $\mathrm{Rt}\triangle AF_1F$ 中,$|AF|^2+|AF_1|^2=|F_1F|^2$,所以 $(2a-b)^2+b^2=(2c)^2$,整理得 $3b=2a$,所以椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

16.$\frac{3\sqrt{10}}{10}$ **提示**:在 $\triangle ABC$ 中,因为 $AB=AC=1$,$BC=\sqrt{3}$,所以 $\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$,由正弦定理知,$\frac{BC}{\sin\angle BAC}=2r$,其中 r 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径,所以 $\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}}=2r$,解得 $r=1$.

设球心为 O,$\triangle ABC$ 外接圆的圆心为 D,因为 $\triangle ABC$ 的面积为定值,所以当 $OS\perp$ 平面 ABC 时,三棱锥 S-ABC 的体积最大,此时 S,O,D 三点共线,且 $\overrightarrow{OS}$,$\overrightarrow{OD}$ 反向,所以 $\angle SAD$ 即为 SA 与平面 ABC 所成角.在 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 中,$OD=\sqrt{OA^2-AD^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2-1^2}=\frac{4}{3}$,所以 $SD=OS+OD=\frac{5}{3}+\frac{4}{3}=3$,在 $\mathrm{Rt}\triangle ASD$ 中,$SA=\sqrt{SD^2+AD^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$,所以 $\sin\angle SAD=\frac{SD}{SA}=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$,所以 SA 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

四、解答题

17.**解**:(1)因为圆 C 的圆心在直线 $l:2x-y-3=0$ 上,所以设圆心 $C(a,2a-3)$,半径为 r,则圆 C 的方程为 $(x-a)^2+(y-2a+3)^2=r^2$,把点 $A(5,2)$ 和点 $B(3,-2)$ 代入圆 C 的方程,得 $\begin{cases}(5-a)^2+(2-2a+3)^2=r^2,\\(3-a)^2+(-2-2a+3)^2=r^2,\end{cases}$ 解得 $a=2$,$r^2=10$,故圆 C 的标准方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=10$.

(2)圆 C 的方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=10$.点 $D(-1,2)$ 满足 $(-1-2)^2+(2-1)^2=10$,则 D 在圆 C 上,$k_{DC}=\frac{2-1}{-1-2}=-\frac{1}{3}$,则切线的斜率 $k=-\frac{1}{k_{DC}}=3$,故所求的切线的方程为 $y-2=3(x+1)$,即 $3x-y+5=0$.

18.**解**:由题意,$F(1,0)$,直线 l 的方程为 $y=x-1$,设 $T_1(x_1,y_1)$,$T_2(x_2,y_2)$,$T_3(x_3,y_3)$,$T_4(x_4,y_4)$,则 $|T_1T_2|=\sqrt{2}(x_2-x_1)$,$|T_3T_4|=\sqrt{2}(x_4-x_3)$,

所以 $|T_1T_2|+|T_3T_4|=\sqrt{2}(x_2+x_4-x_1-x_3)=\sqrt{2}[(x_2+x_4)-(x_1+x_3)]$,联立直线与椭圆的方程 $\begin{cases}y=x-1,\\\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 得 $5x^2-6x-3=0$,所以 $x_1+x_3=\frac{6}{5}$.联立直线与抛物线的方程 $\begin{cases}y=x-1,\\y^2=4x,\end{cases}$ 得 $x^2-6x+1=0$,所以 $x_2+x_4=6$,所以 $|T_1T_2|+|T_3T_4|=\sqrt{2}\times\left(6-\frac{6}{5}\right)=\frac{24\sqrt{2}}{5}$.

19.(1)**证明**:在 $\triangle ABD$ 中,因为 E,F 分别是 AB,AD 的中点,所以 $EF\mathbin{/\mkern-5mu/}DB$,$EF=\frac{1}{2}BD$,又因为 $EF\not\subset$ 平面 PBD,$BD\subset$ 平面 PBD,所以 $EF\mathbin{/\mkern-5mu/}$ 平面 PBD,因为 $EF\subset$ 平面 α,$\alpha\cap$ 平面 $PBD=MN$,所以 $EF\mathbin{/\mkern-5mu/}MN$,所以 $MN\mathbin{/\mkern-5mu/}BD$.

(2)**解**:由 $EF=2MN$,可得 $\frac{MN}{BD}=\frac{1}{4}$,$\overrightarrow{PM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{PB}$.连接AC 交 BD 于 O,以 O 为坐标原点,$\overrightarrow{OE}$ 为 x 轴方向,$\overrightarrow{OP}$ 为 z 轴方向,建立空间直角坐标系,因为 $PA=\sqrt{6}$,$AB=2$,所以 $PO=2$,则 $A(1,-1,0)$,$E(1,0,0)$,$F(0,-1,0)$,$B(1,1,0)$,$P(0,0,2)$,$\overrightarrow{AP}=(-1,1,2)$,$\overrightarrow{EF}=(-1,-1,0)$,$\overrightarrow{PB}=(1,1,-2)$,$\overrightarrow{EB}=(0,1,0)$,$\overrightarrow{MB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{PB}=\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4},-\frac{3}{2}\right)$,$\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{MB}=\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{2}\right)$.设平面 α 的法向量为 $n=(x,y,z)$,由 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{EF}=-x-y=0,\\n\cdot\overrightarrow{EM}=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y+\frac{3}{2}z=0,\end{cases}$ 令 $x=3$,则 $n=(3,-3,2)$,设直线 PA 与平面 α 所成角为 θ,则 $\sin\theta=|\cos\langle n,\overrightarrow{AP}\rangle|=\frac{2}{\sqrt{6}\times\sqrt{22}}=\frac{\sqrt{33}}{33}$,故直线 PA 与平面 α 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{33}}{33}$.

20.**解**:(1)设椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,因为椭圆 C 过点 $M(4,1)$,$N(2,2)$,所以 $\begin{cases}\frac{16}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1,\\\frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=20,\\b^2=5,\end{cases}$ 所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$.

(2)设直线 l 的方程为 $y=x+m$,联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1,\\y=x+m,\end{cases}$ 消去 y 得 $5x^2+8mx+4m^2-20=0$,

由 $\Delta=64m^2-20(4m^2-20)>0$,得 $-5<m<5$,因为点 $M(4,1)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|m+3|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$,解得 $m=-1$ 或 $m=-5$(舍去),所以直线 l 的方程为 $x-y-1=0$.

21.(1)**证明**:因为 $BC=BD=1$,$AB=\sqrt{2}$,所以 $\angle DBC=90°$,所以 $\angle ADB=90°$,以 D 为原点,DA,DB,DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴,建立空间直角坐标系,设 $DD_1=a$,则 $D(0,0,0)$,$A_1(1,0,a)$,$B(0,1,0)$,$C(-1,1,0)$,$C_1(-1,1,a)$,$\overrightarrow{DA_1}=(1,0,a)$,$\overrightarrow{DB}=(0,1,0)$,$\overrightarrow{CC_1}=(0,0,a)$,设平面 A_1BD 的法向量为 $n_1=(x_1,y_1,z_1)$,则 $\begin{cases}n_1\cdot\overrightarrow{DA_1}=0,\\n_1\cdot\overrightarrow{DB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1+az_1=0,\\y_1=0,\end{cases}$ 所以可取 $n_1=(a,0,-1)$,设直线 CC_1 与平面 A_1BD 所成角为 θ,所以 $\sin\theta=|\cos\langle n_1,\overrightarrow{CC_1}\rangle|=\left|\frac{-a}{a\cdot\sqrt{a^2+1}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{3}$,解得 $a=\sqrt{2}$,所以 $n_1=(\sqrt{2},0,-1)$,$\overrightarrow{DC_1}=(-1,1,\sqrt{2})$,所以点 C_1 到平面 A_1BD 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{DC_1}\cdot n_1|}{|n_1|}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

(2)**解**:设平面 C_1BD 的法向量为 $n_2=(x_2,y_2,z_2)$,则 $\begin{cases}n_2\cdot\overrightarrow{DC_1}=0,\\n_2\cdot\overrightarrow{DB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x_2+y_2+\sqrt{2}z_2=0,\\y_2=0,\end{cases}$ 可取 $n_2=(\sqrt{2},0,1)$,所以 $|\cos\langle n_1,n_2\rangle|=\frac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$,所以平面 A_1BD 与平面 C_1BD 夹角的余弦值为 $\frac{1}{3}$.

22.**解**:(1)由题意及抛物线的性质得 $|AF|=3=\frac{p}{4}+\frac{p}{2}$,解得 $p=4$,所以抛物线 C 的方程为 $y^2=8x$.由点 $A(1,b)$ 在抛物线 C 上,得 $b^2=8$,$b>0$,解得 $b=2\sqrt{2}$,所以 $A(1,2\sqrt{2})$,又焦点 $F(2,0)$,所以 AF 的中点坐标为 $\left(\frac{3}{2},\sqrt{2}\right)$,所以以线段 AF 为直径的圆的方程为 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-\sqrt{2})^2=\frac{9}{4}$.

(2)因为 P 是 MN 的中点,且 $|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{MP}|$,可得 $OM\perp ON$,由题意设直线 MN 的方程为 $x=y+m$,则 $m\neq0$,设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,联立 $\begin{cases}x=y+m,\\y^2=8x,\end{cases}$ 整理得 $y^2-8y-8m=0$,则 $\Delta=64+32m>0$,可得 $m>-2$,且 $y_1+y_2=8$,$y_1y_2=-8m$,则 $x_1x_2=\frac{(y_1y_2)^2}{64}=m^2$,由 $OM\perp ON$,得 $x_1x_2+y_1y_2=0$,即 $m^2-8m=0$,可得 $m=8$ 或 $m=0$(舍去),所以直线 MN 的方程为 $x=y+8$,即 $x-y-8=0$.