第 20 期

第 2~3 版同步周测

一、单项选择题

1~8.DACACACC

二、多项选择题

9.AC　　10.ACD

11.ACD　　12.BC

三、填空题

13.4　　14.$\frac{1}{4}$

15.6　　16.$\sqrt{2}$

四、解答题

17.**解**：由题意知，这两条直线不能是 x 轴和 y 轴，因为它们都只和抛物线有 1 个交点.

设一条直线方程为 $y=kx$，

则另一条直线方程为 $y=-\frac{x}{k}$，

分别联立方程组 $\begin{cases}y=kx,\\ y^2=6x,\end{cases}$ $\begin{cases}y=-\frac{x}{k},\\ y^2=6x,\end{cases}$

解得两个交点分别为 $\left(\frac{6}{k^2},\frac{6}{k}\right)$，$(6k^2,-6k)$，

它们的中点为 $\left(\frac{3}{k^2}+3k^2,\frac{3}{k}-3k\right)$，

由 $x=\frac{3}{k^2}+3k^2$，$y=\frac{3}{k}-3k$，消去 k，得 $y^2=3x-18$，所以线段 AB 中点的轨迹方程为 $y^2=3x-18$.

18.**解**：(1)抛物线 $y^2=4x$ 的焦点坐标为 $(1,0)$，直线的斜率为 -1，

则该直线方程为 $y=-(x-1)$，

即 $x+y-1=0$.

(2) 设点 A，B 的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，由 $\begin{cases}y^2=4x,\\ y=-x+1,\end{cases}$ 消去 y 可得 $x^2-6x+1=0$，

根据韦达定理，得 $x_1+x_2=6$，$x_1x_2=1$，所以 $|AB|=\sqrt{1+(-1)^2}\times\sqrt{6^2-4}=8$，

点 O 到直线 AB 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\times8\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$.

19.**解**：(1)双曲线 C 的焦点在坐标轴上，其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$，

则可设双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=\lambda$，

将点 $P\left(\frac{\sqrt{6}}{2},1\right)$ 代入双曲线 C 的方程，可得 $\lambda=1$，所以双曲线 C 的标准方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

(2)假设存在被点 $B(1,1)$ 平分的弦.

设 $B(1,1)$ 是弦 MN 的中点，且 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=2$.

因为点 M，N 在双曲线 C 上，所以 $\begin{cases}2x_1^2-y_1^2=2,\\ 2x_2^2-y_2^2=2,\end{cases}$ 所以 $2(x_1+x_2)(x_1-x_2)-(y_1-y_2)\cdot(y_1+y_2)=0$，

所以 $4(x_1-x_2)=2(y_1-y_2)$，

所以 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=2$，

所以直线 MN 的方程为 $y-1=2(x-1)$，

即 $2x-y-1=0$，由 $\begin{cases}2x^2-y^2=2,\\ 2x-y-1=0,\end{cases}$ 得 $2x^2-4x+3=0$，

因为 $\Delta=16-4\times3\times2=-8<0$，所以直线 MN 与双曲线 C 无交点，所以不存在被点 $B(1,1)$ 平分的弦.

20.**解**：(1)由题意，得 $p=2$，

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.

(2)由(1)知，抛物线 C：$y^2=4x$，$F(1,0)$，

设点 Q 的坐标为 (m,n)，

则 $\overrightarrow{QF}=(1-m,-n)$，

$\overrightarrow{PQ}=9\overrightarrow{QF}=(9-9m,-9n)$.

所以 P 点的坐标为 $(10m-9,10n)$，将点 P 代入 $y^2=4x$ 得 $100n^2=40m-36$，则 $m=\frac{100n^2+36}{40}=\frac{25n^2+9}{10}$，

所以直线 OQ 的斜率 $k=\frac{n}{m}=\frac{10n}{25n^2+9}=\frac{10}{25n+\frac{9}{n}}\leqslant\frac{1}{3}$，当且仅当 $n=\frac{3}{5}$ 时，等号成立，k 取得最大值.

所以直线 OQ 斜率的最大值为 $\frac{1}{3}$.

21.**解**：(1)因为 $(-2,0)$ 是双曲线的一个焦点，所以双曲线的焦点在 x 轴上.

设双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，焦距为 $2c$，

则 $\begin{cases}c=2,\\ \frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3},\\ c^2=a^2+b^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\sqrt{3},\\ b=1,\end{cases}$

所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$.

(2)设 $P(x,y)$，则 $Q(-x,-y)$，

所以 $\overrightarrow{NP}=(x-1,y-1)$，$\overrightarrow{MQ}=(-x,-y-1)$，

所以 $\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{MQ}=-x^2+x+1-y^2=-x^2+x+1-\left(\frac{x^2}{3}-1\right)=-\frac{4}{3}x^2+x+2=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{35}{16}$，因为 $x\leqslant-\sqrt{3}$ 或 $x\geqslant\sqrt{3}$，所以当 $x=\sqrt{3}$ 时，$\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{MQ}$ 取得最大值 $\sqrt{3}-2$. 所以 $\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{MQ}$ 的取值范围是 $(-\infty,\sqrt{3}-2]$.

22.(1)**解**：由抛物线的定义，得 $|MF|=\frac{p}{2}-(-2)=\frac{5}{2}$，所以 $p=1$，所以抛物线的方程为 $y^2=-2x$.

(2)**证明**：由(1)可知，点 M 的坐标为 $(-2,2)$.

设直线 l 的方程为 $x=ky+b$.

因为点 M 不在直线 l 上，

所以 $b+2+2k\neq0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，将直线 l 与抛物线联立得 $\begin{cases}x=ky+b,\\ y^2=-2x,\end{cases}$ 化简得 $y^2+2ky+2b=0$，

所以 $y_1+y_2=-2k$，$y_1y_2=2b$，①

又 $k_1+k_2=\frac{y_1-2}{x_1+2}+\frac{y_2-2}{x_2+2}=-2$，

即 $(y_1-2)(ky_2+b+2)+(y_2-2)(ky_1+b+2)=-2(ky_1+b+2)(ky_2+b+2)$，化简得 $(2k+2k^2)\cdot y_1y_2+(b+2+2k+2kb)\cdot(y_1+y_2)+2b^2+4b=0$，

将①代入得，$kb-2k-2k^2+b^2+2b=0$，

即 $(b-k)(b+2+2k)=0$，得 $b=k$.

当 $b=k$ 时，直线 l 的方程为 $x=k(y+1)$，此时直线 l 恒过点 $(0,-1)$.

第 17 期

第 2~3 版同步周测

一、单项选择题

1~8.DACACBBA

二、多项选择题

9.BCD　　10.BC

11.ACD　　12.ABD

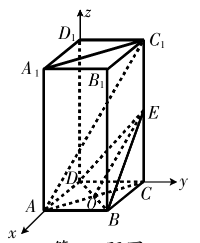
三、填空题

13.$-\frac{4}{7}$　14.5　15.$\frac{\sqrt{6}}{3}$，1　16.$\frac{8}{5}$

四、解答题

17.(1)**证明**：连接 AC，交 BD 于点 O，连接 OE，因为正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 O 是 AC 中点，因为 E 为 CC_1 的中点，所以 $OE\parallel AC_1$，因为 $AC_1\not\subset$ 平面 BDE，$OE\subset$ 平面 BDE，所以 $AC_1\parallel$ 平面 BDE.

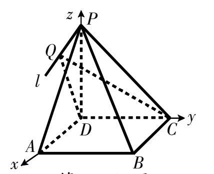
(2)**解**：以 D 为原点，DA 所在直线为 x 轴，DC 所在直线为 y 轴，DD_1 所在直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，因为 $AB=BC=1$，$AA_1=4$，所以 $A_1(1,0,4)$，$C_1(0,1,4)$，$D(0,0,0)$，$E(0,1,2)$，则 $\overrightarrow{A_1C_1}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{DE}=(0,1,2)$，设异面直线 A_1C_1 与 DE 所成角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{A_1C_1}\cdot\overrightarrow{DE}|}{|\overrightarrow{A_1C_1}|\cdot|\overrightarrow{DE}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$. 所以异面直线 A_1C_1 与 DE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$.



(第 17 题图)

18.(1)**证明**：过 P 在平面 PAD 内作直线 $l\parallel AD$，由 $AD\parallel BC$，可得 $l\parallel BC$，即 l 为平面 PAD 和平面 PBC 的交线，因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PD\perp BC$，又 $BC\perp CD$，$CD\cap PD=D$，所以 $BC\perp$ 平面 PDC，因为 $l\parallel BC$，所以 $l\perp$ 平面 PDC.

(2)**解**：如图，以 D 为坐标原点，直线 DA，DC，DP 所在的直线分别为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系 $D-xyz$，则 $D(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$P(0,0,1)$，$B(1,1,0)$，设 $Q(a,0,1)$，则 $\overrightarrow{DQ}=(a,0,1)$，$\overrightarrow{PB}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{DC}=(0,1,0)$，设平面 QCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DQ}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}y=0,\\ ax+z=0,\end{cases}$ 令 $x=-1$，可得 $\boldsymbol{n}=(-1,0,a)$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{PB}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{PB}|}=\frac{-1-a}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1+a^2}}$. 设 PB 与平面 QCD 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{|a+1|}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{1+\frac{2a}{a^2+1}}\leqslant\frac{\sqrt{6}}{3}$，当且仅当 $a=1$ 时，等号成立. 所以 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.



(第 18 题图)

19.(1)**证明**：连接 AE，与 BD 交于点 N，连接 MN. 因为侧面 $ABED$ 是平行四边形，所以点 N 是 AE 的中点. 因为点 M 是棱 EF 的中点，所以 $MN\parallel AF$. 因为 $AF\not\subset$ 平面 BDM，$MN\subset$ 平面 BDM，所以 $AF\parallel$ 平面 BDM.

(2)**解**：因为三棱锥 $B-DEF$ 的体积为 4，所以三棱柱 $ABC-DEF$ 的体积为 12，所以四棱锥 $B-ADFC$ 的体积为 $12-4=8$. 因为侧面 $ADFC$ 是边长为 2 的正方形，所以侧面 $ADFC$ 的面积为 $2\times2=4$.

设点 B 到平面 $ADFC$ 的距离为 h，则 $\frac{1}{3}\times4h=8$，解得 $h=6$. 故点 B 到平面 $ADFC$ 的距离为 6.

20.(1)**证明**：因为 $DC\perp DB$，$DC\perp DA$，$DB\cap DA=D$，所以 $DC\perp$ 平面 ABD，因为 $CD\subset$ 平面 BCD，所以平面 $BCD\perp$ 平面 ABD.

(2)**解**：因为 $3AB=2AN$，令 $AB=2$，则 $AN=3$，在 $\triangle ABD$ 中，$AD=BD=3$，$AB=2$，所以 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times AB\times\sqrt{AD^2-\left(\frac{1}{2}AB\right)^2}=2\sqrt{2}$.

在 $\triangle ABC$ 中，AB 边上的高为 $AN=3$，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times2\times3=3$. 设点 D 到平面 ABC 的距离为 d.

由 $V_{C-ABD}=V_{D-ABC}$，得 $\frac{1}{3}\cdot CD\cdot2\sqrt{2}=\frac{1}{3}\cdot d\cdot3$，所以 $d=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 则 AD 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{d}{AD}=\frac{2\sqrt{2}}{9}$.

21.(1)**证明**：由 $AC_1=2\sqrt{2}$，$AC=A_1C_1=AA_1=2$，得 $AC_1^2=AA_1^2+A_1C_1^2$，所以 $AA_1\perp A_1C_1$. 又 $CC_1\parallel A_1A$，所以 $CC_1\perp A_1C_1$. 因为 $\triangle BCC_1$ 是正三角形，所以 $\triangle BB_1C_1$ 是正三角形.

因为 P 是 BB_1 的中点，所以 $C_1P\perp B_1B$，因为 $C_1C\parallel B_1B$，所以 $C_1P\perp C_1C$.

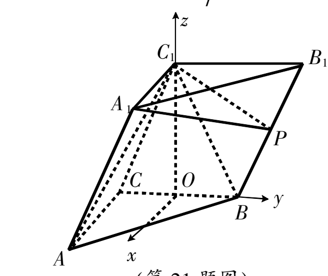
因为 $C_1P\cap A_1C_1=C_1$，C_1P，$A_1C_1\subset$ 平面 A_1C_1P，所以 $CC_1\perp$ 平面 A_1C_1P.

(2)**解**：由(1)知 $C_1C\perp A_1C_1$，又 $AC\parallel A_1C_1$，所以 $AC\perp C_1C$，又 $AC\perp BC$，$BC\cap C_1C=C$，BC，$C_1C\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $AC\perp$ 平面 BCC_1B_1，又 $AC\subset$ 平面 ABC，所以平面 $ABC\perp$ 平面 BCC_1B_1. 取 BC 的中点 O，由 $\triangle BCC_1$ 为正三角形，得 $C_1O\perp BC$，因为平面 $BCC_1B_1\cap$ 平面 $ABC=BC$，$C_1O\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $C_1O\perp$ 平面 ABC，以 O 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(2,-1,0)$，$B(0,1,0)$，$C_1(0,0,\sqrt{3})$，$C(0,-1,0)$，$\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{BC_1}=(0,-1,\sqrt{3})$. 设平面 ABC_1 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x+2y=0,\\ -y-\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 取 $z=1$，得平面 ABC_1 的一个法向向量为 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},\sqrt{3},1)$.

由(1)知 $CC_1\perp$ 平面 A_1C_1P，所以平面 A_1C_1P 的一个法向向量为 $\overrightarrow{CC_1}=(0,1,\sqrt{3})$，

所以 $\cos\langle\overrightarrow{CC_1},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{CC_1}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{CC_1}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{3}}{2\times\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

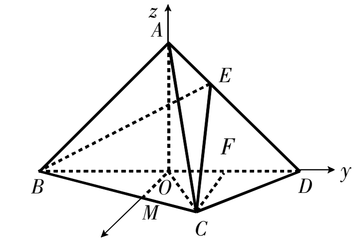
所以平面 ABC_1 与平面 A_1C_1P 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$.



(第 21 题图)

22.(1) **证明**：因为 $AB=AD$，O 为 BD 的中点，所以 $AO\perp BD$，又平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，平面 $ABD\cap$ 平面 $BCD=BD$，$AO\subset$ 平面 ABD，所以 $AO\perp$ 平面 BCD，又 $CD\subset$ 平面 BCD，所以 $AO\perp CD$.

(2)**解**：取 OD 的中点 F，因为 $\triangle OCD$ 为正三角形，所以 $CF\perp OD$，过 O 作 $OM\parallel CF$ 与 BC 交于点 M，则 $OM\perp OD$，所以 OM，OD，OA 两两垂直，以点 O 为坐标原点，分别以 OM，OD，OA 为 x 轴，y 轴，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $B(0,-1,0)$，$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$，$D(0,1,0)$，设 $A(0,0,t)$，则 $E\left(0,\frac{1}{3},\frac{2t}{3}\right)$，因为 $OA\perp$ 平面 BCD，所以平面 BCD 的一个法向向量为 $\overrightarrow{OA}=(0,0,t)$，设平面 BCE 的法向向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，又 $\overrightarrow{BC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$，$\overrightarrow{BE}=\left(0,\frac{4}{3},\frac{2t}{3}\right)$，所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y=0,\\ \frac{4}{3}y+\frac{2t}{3}z=0,\end{cases}$ 令 $x=\sqrt{3}$，则 $y=-1$，$z=\frac{2}{t}$，故 $\boldsymbol{n}=\left(\sqrt{3},-1,\frac{2}{t}\right)$，因为二面角 $E-BC-D$ 的大小为 45°，所以 $\left|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{OA}\rangle\right|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OA}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{OA}|}=\frac{2}{t\sqrt{4+\frac{4}{t^2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $t=1$，所以 $OA=1$，又 $S_{\triangle OCD}=\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，所以 $S_{\triangle BCD}=2S_{\triangle OCD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 $V_{A-BCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle BCD}\cdot OA=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times1=\frac{\sqrt{3}}{6}$.



(第 22 题图)

⑤

第 18 期

第 2~3 版同步周测

一、单项选择题

1~8.ADDBCAAD

二、多项选择题

9.ABC　　10.BC

11.BC　　12.AC

三、填空题

13.$\frac{\sqrt{2}}{2}$

14.$x+y+8=0$ 或 $3x-5y=0$

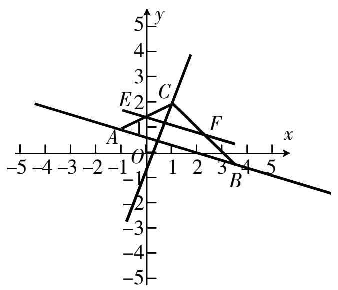
15.6

16.$y^2=12x$

四、解答题

17.**解**:(1)因为 $k_{AB}=-\frac{1}{3}$,所以 AB 边上的高所在直线的斜率为 3,又 AB 边上的高过点 $C(1,2)$,所以 AB 边上的高所在的直线方程为 $y-2=3(x-1)$,即 $3x-y-1=0$.

(2)易得 $A(-1,1)$,$E\left(0,\frac{3}{2}\right)$,根据中位线定理可得 $k_{EF}=-\frac{1}{3}$,由点斜式,可得直线 EF 的方程为 $y-\frac{3}{2}=-\frac{1}{3}(x-0)$,即直线 EF 的方程为 $2x+6y-9=0$.



(第 17 题图)

18.**解**:(1)直线 l:$(k-1)x-2y+5-3k=0$ $(k\in\mathbf{R})$可化为$(x-3)k-x-2y+5=0$,

令$\begin{cases}x-3=0,\\-x-2y+5=0,\end{cases}$得定点 P 的坐标为$(3,1)$.

(2)易知圆心在 AP 的垂直平分线上,设 AP 垂直平分线上的点为 (x,y),则 $\sqrt{(x-5)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$,化简得 $x-y-4=0$,

又因为圆心在直线 $x-2y+2=0$ 上,

所以由$\begin{cases}x-2y+2=0,\\x-y-4=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=10,\\y=6,\end{cases}$

所以圆 C 的圆心坐标为$(10,6)$,

半径 $r=\sqrt{(10-3)^2+(6-1)^2}=\sqrt{74}$,

所以圆 C 的方程为$(x-10)^2+(y-6)^2=74$.

19.**解**:(1)由题意,圆$(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 的圆心为$(3,4)$,半径 $r=2$,

分 2 种情况讨论:

①当直线的斜率不存在时,直线方程为 $x=1$,与圆相切,符合题意;

②当直线的斜率存在时,设切线的方程为 $y=k(x-1)$,

则有$\frac{|3k-4-k|}{\sqrt{1+k^2}}=2$,解得 $k=\frac{3}{4}$,此时切线的方程为 $y=\frac{3}{4}(x-1)$,即 $3x-4y-3=0$.

综上,所求的切线方程为 $x=1$ 或 $3x-4y-3=0$.

(2)根据题意,设 $P(m,n)$,

则$|AP|^2+|BP|^2=(m+1)^2+n^2+(m-1)^2+n^2=2(m^2+n^2)+2$,

又由 $OP=\sqrt{m^2+n^2}$(O 为坐标原点),则当 OP 最小时,$|AP|^2+|BP|^2$ 取得最小值,

又由 P 在圆$(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 上,

则$|OP|_{\min}=5-2=3$,

即 m^2+n^2 的最小值为 9,此时$|AP|^2+|BP|^2$ 取得最小值,且其最小值为 $2\times9+2=20$,

此时 $m=3\times\frac{3}{5}=\frac{9}{5}$,$n=3\times\frac{4}{5}=\frac{12}{5}$,

即点 P 的坐标为$\left(\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right)$.

20.**解**:(1)根据题意,圆 C:$x^2+y^2-6x-10y-6t=0$ 变形可得 $(x-3)^2+(y-5)^2=34+6t$,

故圆心为 $C(3,5)$,半径 $r=\sqrt{34+6t}$,

则圆心 C 到直线 l 的距离为

$d=\frac{|3+15+12|}{\sqrt{10}}=3\sqrt{10}$,

又弦长为 $2\sqrt{10}$,

则 $r^2=(3\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2=100$,

即 $34+6t=100$,解得 $t=11$.

(2)当 $t=1$ 时,圆 C 的方程为 $x^2+y^2-6x-10y-6=0$,①

变形可得$(x-3)^2+(y-5)^2=40$,

则圆心为 $C(3,5)$,半径 $r=2\sqrt{10}<3\sqrt{10}$,圆 C 与直线 l 相离.

假设在直线 AB 上存在一个定点满足条件,设动点 $P(m,n)$.

由已知得 $PA\perp AC$,$PB\perp BC$,

则 A,B 在以 CP 为直径的圆$(x-3)\cdot(x-m)+(y-5)(y-n)=0$ 上,

该圆的方程可化为 $x^2+y^2-(3+m)x-(5+n)y+3m+5n=0$.②

由①-②得,直线 AB 的方程为$(m-3)\cdot x+(n-5)y-3m-5n-6=0$.③

又点 $P(m,n)$在直线 l 上,则 $m+3n+12=0$,即 $m=-3n-12$,代入③式得

$(-3n-15)x+(n-5)y+4n+30=0$,

即直线 AB 的方程为 $15x+5y-30+n\cdot(3x-y-4)=0$.

因为上式对任意 n 都成立,

故$\begin{cases}3x-y-4=0,\\15x+5y-30=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{5}{3},\\y=1,\end{cases}$

故直线 AB 恒过一个定点,定点坐标为$\left(\frac{5}{3},1\right)$.

21.**解**:(1)因为圆 E 的半径为 $BE=OB-OE=50-t$,所以 $CD=50-t=30$,得 $t=20$.

令 $y=-ax^2+50=50-t$,得 $OD=\sqrt{\frac{t}{a}}$.

圆 E:$x^2+(y-20)^2=30^2$,令 $y=0$,

得 $x=\pm10\sqrt{5}$,则 $AO=10\sqrt{5}$,又 $AD=24\sqrt{5}$,所以 $OD=AD-OA=24\sqrt{5}-10\sqrt{5}=14\sqrt{5}$,所以$\sqrt{\frac{t}{a}}=14\sqrt{5}$,

又 $t=20$,得 $a=\frac{1}{49}$.

(2)由(1)知 $DF=OF+OD=50-t+\sqrt{\frac{t}{a}}$,

由题意得 $50-t+\sqrt{\frac{t}{a}}\leqslant75$ 在 $t\in(0,25]$上恒成立,所以$\sqrt{\frac{1}{a}}\leqslant\sqrt{t}+\frac{25}{\sqrt{t}}$在 $t\in(0,25]$上恒成立.

因为$\sqrt{t}+\frac{25}{\sqrt{t}}\geqslant2\sqrt{25}=10$,当且仅当$\sqrt{t}=\frac{25}{\sqrt{t}}$,即 $t=25$ 时,$\left(\sqrt{t}+\frac{25}{\sqrt{t}}\right)_{\min}=10$,

所以$\sqrt{\frac{1}{a}}\leqslant10$,解得 $a\geqslant\frac{1}{100}$,

故 a 的取值范围为$\left[\frac{1}{100},+\infty\right)$.

22.**解**:(1)设点 $A\left(\frac{y_0^2}{4},y_0\right)$,

则 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\cdot2y_0\cdot\frac{y_0^2}{4}=2$,

解得 $y_0=2$,所以 $A(1,2)$,

故 $r^2=1^2+2^2=5$.

所以圆 O 的方程是 $x^2+y^2=5$.

(2)由$\begin{cases}y=k(x-1),\\x^2+y^2=5,\end{cases}$

得$(1+k^2)x^2-2k^2x+k^2-5=0$,且 $k<0$.

设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

则 $x_1+x_2=\frac{2k^2}{1+k^2}$,$x_1x_2=\frac{k^2-5}{1+k^2}$,

所以$\frac{k_1k_2}{k}=\frac{y_1y_2}{k(x_1-3)(x_2-3)}$

$=\frac{k^2(x_1-1)(x_2-1)}{k(x_1-3)(x_2-3)}$

$=k\cdot\frac{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}{x_1x_2-3(x_1+x_2)+9}$

$=k\cdot\frac{\frac{k^2-5}{1+k^2}-\frac{2k^2}{1+k^2}+1}{\frac{k^2-5}{1+k^2}-3\left(\frac{2k^2}{1+k^2}\right)+9}$

$=k\cdot\frac{k^2-5-2k^2+1+k^2}{k^2-5-6k^2+9(1+k^2)}=\frac{-k}{1+k^2}$,

又 $k<0$,

所以$\frac{-k}{1+k^2}=\frac{1}{-\frac{1}{k}-k}\leqslant\frac{1}{2}$,

当且仅当 $k=-1$ 时,等号成立,

所以$\frac{k_1k_2}{k}$的最大值为$\frac{1}{2}$,

此时直线 l 的方程为 $y=-x+1$.

第 19 期

第 2~3 版同步周测

一、单项选择题

1~8.DDCBAAAA

二、多项选择题

9.ABD　　10.ACD

11.BD　　12.BCD

三、填空题

13.$(\pm2,0)$　　14.$\frac{2}{3}$

15.8　　16.$\frac{3}{4}$

四、解答题

17.**解**:因为椭圆中心在原点,焦点在坐标轴上,且经过两点 $P\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$,$Q\left(0,-\frac{1}{2}\right)$,所以设椭圆方程为 $mx^2+ny^2=1(m>0,n>0)$,则$\begin{cases}\frac{1}{9}m+\frac{1}{9}n=1,\\\frac{1}{4}n=1,\end{cases}$解得 $m=5$,$n=4$,所以椭圆方程为 $5x^2+4y^2=1$,所以椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{\frac{1}{5}}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$.

18.**解**:(1)根据题意,椭圆$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$ 中,$a=2\sqrt{5}$,$b=4$,则 $c=\sqrt{20-16}=2$,则 $A(0,4)$,$F(2,0)$.易知直线 BC 斜率存在,设为 k,再设 $B(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$,BC 的中点 $D(x_0,y_0)$,则有$\begin{cases}\frac{x_1^2}{20}+\frac{y_1^2}{16}=1,\\\frac{x_2^2}{20}+\frac{y_2^2}{16}=1,\end{cases}$两式相减,得$\frac{x_0}{5}+\frac{y_0k}{4}=0$,①

又由 $F(2,0)$为$\triangle ABC$ 的重心,得$\frac{x_1+x_2+0}{3}=\frac{2x_0}{3}=2$,$\frac{y_1+y_2+4}{3}=\frac{2y_0+4}{3}=0$,

解得 $x_0=3$,$y_0=-2$,代入①得 $k=\frac{6}{5}$,则直线 BC 的方程为 $6x-5y-28=0$.

(2)根据题意,由(1)的结论,$\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1-4)$,$\overrightarrow{AC}=(x_2,y_2-4)$,因为$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$,

所以 $x_1x_2+y_1y_2-4(y_1+y_2)+16=0$,②

易知直线 BC 斜率存在,设 BC 的方程为 $y=kx+b$,代入 $4x^2+5y^2=80$,可得$(4+5k^2)x^2+10bkx+5b^2-80=0$.

所以 $x_1+x_2=\frac{-10bk}{4+5k^2}$,$x_1\cdot x_2=\frac{5b^2-80}{4+5k^2}$,

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2b=\frac{8b}{4+5k^2}$,

$y_1\cdot y_2=k^2x_1x_2+bk(x_1+x_2)+b^2=\frac{4b^2-80k^2}{4+5k^2}$,

代入②得 $b=-\frac{4}{9}$,或 $b=4$(舍去).

所以直线 BC 过定点 $E\left(0,-\frac{4}{9}\right)$,

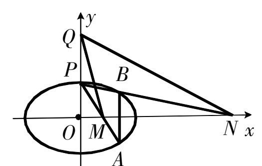
设 $D(x,y)$,则$\frac{y+\frac{4}{9}}{x}\cdot\frac{y-4}{x}=-1$,即 $9x^2+9y^2-32y-16=0$,所以所求点 D 的轨迹方程是 $x^2+\left(y-\frac{16}{9}\right)^2=\left(\frac{20}{9}\right)^2(y\neq4)$.

19.**解**:(1)根据题意,直线 l 与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$恰有一个公共点 P,即相切,由$\begin{cases}y=kx+m,\\\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$得$(a^2k^2+b^2)\cdot x^2+2a^2kmx+a^2(m^2-b^2)=0$,则$\Delta=(2a^2km)^2-4a^2(a^2k^2+b^2)(m^2-b^2)=0$,化简,得 $m^2=a^2k^2+b^2$.

(2)因点 Q 与点 P 关于坐标原点 O 对称,故$\triangle QAB$ 的面积是$\triangle OAB$ 的面积的两倍.所以当 $k=-\frac{1}{2}$时,$\triangle OAB$ 的面积取到最大值$\frac{a^2}{2}$,此时 $OA\perp OB$,从而原点 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{a}{\sqrt{2}}$,又 $d=\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}$,故$\frac{m^2}{k^2+1}=\frac{a^2}{2}$.再由(1),得$\frac{a^2k^2+b^2}{k^2+1}=\frac{a^2}{2}$,则 $k^2=1-\frac{2b^2}{a^2}$.又 $k=-\frac{1}{2}$,故 $k^2=1-\frac{2b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$,即$\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{8}$,从而 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{5}{8}$,即 $e=\frac{\sqrt{10}}{4}$.所以椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{10}}{4}$.

20.**解**:(1)设椭圆的焦距为 $2c$,由题意可得,$b=1$,$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$a^2=b^2+c^2$,解得 $a=2$.所以椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)设 $B(m,n)$,$M(x_M,0)$,$N(x_N,0)$,直线 BP 的方程为 $y-1=\frac{n-1}{m}x$,令 $y=0$,可得 $x_N=\frac{m}{1-n}$,所以 $N\left(\frac{m}{1-n},0\right)$.由点 A,B 关于 x 轴对称,所以 $A(m,-n)$.同理,$M\left(\frac{m}{1+n},0\right)$.假设在 y 轴的正半轴上存在点 $Q(0,t)$ $(t>0)$,使得$\angle OQM=\angle ONQ$.由 $\tan\angle OQM=\tan\angle ONQ$,可得$\frac{|x_M|}{|t|}=\frac{|t|}{|x_N|}$,即 $t^2=|x_Mx_N|$,所以 $t^2=\frac{m^2}{1-n^2}$,又点 B 在椭圆 C 上,所以$\frac{m^2}{4}+n^2=1$,所以 $t^2=4$,又 $t>0$,解得 $t=2$.经过验证:$t=2$ 时,$\angle OQM=\angle ONQ$.所以在 y 轴的正半轴上存在点 $Q(0,2)$,使得$\angle OQM=\angle ONQ$.



(第 20 题图)

21.(1)**解**:椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$,

则 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,得 $a=\sqrt{2}c$,$b=c$,所以椭圆 C 的方程为 $x^2+2y^2=2c^2$,由$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}y+1,\\x^2+2y^2=2c^2,\end{cases}$得 $5y^2+2\sqrt{2}y+2-4c^2=0$,设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=-\frac{2\sqrt{2}}{5}$,$y_1y_2=\frac{2-4c^2}{5}$.由 $OM\perp ON$,得 $x_1x_2+y_1y_2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y_1+1\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y_2+1\right)+y_1y_2=\frac{3}{2}y_1y_2+\frac{\sqrt{2}}{2}(y_1+y_2)+1=\frac{3}{2}\cdot\frac{2-4c^2}{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{5}+1=0$,

解得 $c=1$,则 $a=\sqrt{2}$,$b=1$,所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)**证明**:$N(x_2,y_2)$,关于 x 轴的对称点为 $Q(x_2,-y_2)$,

由$\begin{cases}x=my+1,\\x^2+2y^2=2,\end{cases}$得 $(2+m^2)y^2+2my-1=0$,又 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=-\frac{2m}{2+m^2}$,$y_1y_2=-\frac{1}{2+m^2}$,则 $k_{PM}=\frac{y_1}{x_1-2}$,$k_{QM}=\frac{y_2+y_1}{x_1-x_2}$,

$k_{PM}-k_{MQ}$

$=\frac{x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2-x_1y_1+2y_2+2y_1}{(x_1-2)(x_1-x_2)}$

$=\frac{-y_1(my_2+1)-(my_1+1)y_2+2y_1+2y_2}{(x_1-2)(x_1-x_2)}$

$=\frac{y_1+y_2-2my_1y_2}{(x_1-2)(x_1-x_2)}$

$=\frac{-\frac{2m}{2+m^2}+\frac{2m}{2+m^2}}{(x_1-2)(x_1-x_2)}=0$,

即 $k_{PM}=k_{MQ}$,则 P,M,Q 三点共线.

22.(1)**解**:由题意,得$\begin{cases}2c=4\sqrt{2},\\\frac{6}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1,\\a^2=b^2+c^2,\end{cases}$

解得 $a=2\sqrt{3}$,$b=2$,$c=2\sqrt{2}$.

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)①当过点 P 且与圆 O:$x^2+y^2=3$ 相切的切线斜率不存在时,由对称性,不妨设切线方程为 $x=\sqrt{3}$,则 $P(\sqrt{3},0)$,将 $x=\sqrt{3}$ 代入$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$,得 $y=\pm\sqrt{3}$,可取 $E(\sqrt{3},\sqrt{3})$,$F(\sqrt{3},-\sqrt{3})$,

所以$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=-3$.

②当过点 P 且与圆 O:$x^2+y^2=3$ 相切的切线斜率存在时,设切线方程为 $y=kx+m$,设点 $E(x_1,y_1)$,$F(x_2,y_2)$,$P(x_0,y_0)$,

联立$\begin{cases}y=kx+m,\\x^2+y^2=3,\end{cases}$得 $(1+k^2)x^2+2kmx+m^2-3=0$,因为直线与圆相切,所以$\Delta=4k^2m^2-4(1+k^2)(m^2-3)=0$,即 $m^2=3(1+k^2)$,则 $x_0=-\frac{km}{k^2+1}$.联立$\begin{cases}y=kx+m,\\\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$得$(1+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-12=0$,则$\Delta=36k^2m^2-4(1+3k^2)\cdot(3m^2-12)=9k^2+1>0$,$x_1+x_2=-\frac{6km}{1+3k^2}$,$x_1x_2=\frac{3m^2-12}{1+3k^2}$,

所以$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=(x_1-x_0,y_1-y_0)\cdot(x_2-x_0,y_2-y_0)=(x_1-x_0)(x_2-x_0)+(y_1-y_0)(y_2-y_0)=(k^2+1)(x_1-x_0)(x_2-x_0)=(1+k^2)[x_1x_2-x_0\cdot(x_1+x_2)+x_0^2]=(k^2+1)\left[\frac{3m^2-12}{1+3k^2}-\frac{6km}{1+3k^2}\cdot\frac{km}{k^2+1}+\left(\frac{km}{k^2+1}\right)^2\right]=\frac{-9k^2-3}{1+3k^2}=-3$.

综上,$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$为定值$-3$.