

一、单项选择题

1~8.DDBCCAD

二、多项选择题

9.AD 10.BC

11.ABD 12.BD

三、填空题

13.4 14. $3\sqrt{3}$ 15. $-\frac{1}{4}$ 16. $\sqrt{2}$

四、解答题

17.证明:(1)因为 M 是棱柱的侧面 AA_1C_1C 对角线的交点,所以 M 是 AC_1 中点.因为 D 是 AB 中点,所以 $MD\parallel BC_1$,因为 $MD\not\subset$ 平面 A_1BC_1 , $BC_1\subset$ 平面 A_1BC_1 ,所以 $MD\parallel$ 平面 A_1BC_1 .

(2)因为 $AB=AC$, E 是 BC 中点,所以 $AE\perp BC$.因为 $AA_1\perp$ 平面 ABC , $AE\subset$ 平面 ABC ,所以 $AA_1\perp AE$.

因为在三棱柱中 $BB_1\parallel AA_1$,

所以 $BB_1\perp AE$.

因为 $BB_1\cap BC=B$,

$BB_1\subset$ 平面 BCC_1B_1 ,

$BC\subset$ 平面 BCC_1B_1 ,

所以 $AE\perp$ 平面 BCC_1B_1 .

因为 $AE\subset$ 平面 MAE ,

所以平面 $MAE\perp$ 平面 BCC_1B_1 .

18.证明:(1)因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$, $AB\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $AB\perp PA$.又 $AB\perp AD$, $PA\cap AD=A$,所以 $AB\perp$ 平面 PAD ,因为 $PD\subset$ 平面 PAD ,所以 $AB\perp PD$.

(2)因为 $CD=2AB$, E 为 CD 的中点,所以 $AB=DE$,又因为 $AB\parallel DE$,所以四边形 $ABED$ 为平行四边形,所以 $AD\parallel BE$.因为 E , F 分别是 CD 和 PC 的中点,所以 $EF\parallel PD$.因为 $EF\cap BE=E$, $PD\cap AD=D$,所以平面 $BEF\parallel$ 平面 PAD .

19.(1)证明:连接 AB_1 ,交 A_1B 于点 O ,连接 OM ,则 O 为 AB_1 的中点,因为 M 为 AC 的中点,所以 $OM\parallel B_1C$,又 $OM\subset$ 平面 A_1BM , $B_1C\not\subset$ 平面 A_1BM ,所以直线 $B_1C\parallel$ 平面 A_1BM .

(2)解:由(1)知 $OM\parallel B_1C$,所以 $\angle BOM$ 或其补角为异面直线 B_1C 与 A_1B 所成的角.

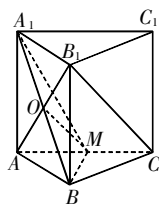
因为 $AA_1\perp$ 平面 ABC , AB , $BM\subset$ 平面 ABC ,所以 $AA_1\perp AB$, $AA_1\perp BM$,因为 $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$, $AB=AC=2$,所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形,又 M 为 AC 的中点,所以 $BM\perp AC$, $BM=\sqrt{3}$.

又 $AA_1\cap AC=A$, AA_1 , $AC\subset$ 平面 AA_1C_1C ,所以 $BM\perp$ 平面 AA_1C_1C ,又 $A_1M\subset$ 平面 AA_1C_1C ,所以 $BM\perp A_1M$.

由 $AA_1\perp AB$, $AA_1=AB=2$,得 $A_1B=2\sqrt{2}$,所以 $OM=OB=\frac{1}{2}A_1B=\sqrt{2}$.在 $\triangle OBM$ 中,

由余弦定理的推论,得 $\cos\angle BOM=\frac{OM^2+OB^2-BM^2}{2OM\cdot OB}=\frac{2+2-3}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{4}$.故异面

直线 B_1C 与 A_1B 所成角的余弦值为 $\frac{1}{4}$.



(第19题图)

20.(1)证明:因为 $SB=SC$, M 是 BC 的中点,所以 $SM\perp BC$.因为平面 $ABCD\perp$ 平面 SBC ,平面 $ABCD\cap$ 平面 $SBC=BC$,所以 $SM\perp$ 平面 $ABCD$.因为 $AM\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $SM\perp AM$.因为四边形 $ABCD$ 是矩形, M 是 BC 的中点, $AB=1$, $BC=2$,所以 $AM^2+MD^2=AD^2$,所以 $AM\perp MD$,又 $SM\cap MD=M$,所以 $AM\perp$ 平面 SMD ,又 $SD\subset$ 平面 SMD ,所以 $AM\perp SD$.

(2)解:由(1)知 $\triangle AMS$ 为直角三角形, $\angle AMS=90^\circ$, $AM=\sqrt{2}$,

因为 $SM=\frac{\sqrt{6}}{3}$,

所以 $SA=SD=\frac{2\sqrt{6}}{3}$,

因为 $AM=MD=\sqrt{2}$,

所以 $S_{\triangle AMF}=\frac{1}{2}AM\cdot MD=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2=1$,

所以 $V_{S-ADM}=\frac{1}{3}\cdot SM\cdot S_{\triangle AMF}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}\times 1=\frac{\sqrt{6}}{9}$.

在 $\triangle ADS$ 中, $SA=SD=\frac{2\sqrt{6}}{3}$, $AD=2$,

则 $h=\sqrt{SD^2-\left(\frac{AD}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{24}{9}-1}=\frac{\sqrt{15}}{3}$,所以 $S_{\triangle ADS}=\frac{1}{2}h\cdot AD=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{3}\times 2=\frac{\sqrt{15}}{3}$.

设点 M 到平面 ADS 的距离为 d ,由 $V_{S-ADM}=V_{M-ADS}$,得 $V_{M-ADS}=\frac{1}{3}d\cdot S_{\triangle ADS}=\frac{1}{3}d\cdot$

$\frac{\sqrt{15}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{9}$,所以 $d=\frac{\sqrt{10}}{5}$,故点 M 到平面 ADS 的距离为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

21.(1)证明:因为 $PD\perp$ 底面 $ABCD$, $AM\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $PD\perp AM$.

又因为 $PB\perp AM$, $PD\cap PB=P$, PB , $PD\subset$ 平面 PBD ,所以 $AM\perp$ 平面 PBD .

因为 $AM\subset$ 平面 PAM ,

所以平面 $PAM\perp$ 平面 PBD .

(2)解:因为 $PD\perp$ 底面 $ABCD$, $BD\subset$

平面 $ABCD$,所以 PD 为四棱锥 $P-ABCD$ 的高, $PD\perp DB$,即 $\triangle DPB$ 是直角三角形.

取 CD , CP 的中点分别为 E , F ,连接 MF , AF , EF , AE ,则 $EF\parallel PD$, $EF=\frac{1}{2}PD=$

$\frac{1}{2}$.因为 M 为 BC 的中点,所以 $MF\parallel PB$,

$MF=\frac{1}{2}BP$,又 $PB\perp AM$,所以 $AM\perp MF$,即 $\triangle AMF$ 是直角三角形.

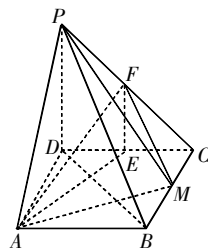
设 $AD=BC=2a$,因为底面 $ABCD$ 是矩形, $PD=DC=1$,所以 $AE=\sqrt{4a^2+\frac{1}{4}}$, $AM=$

$\sqrt{a^2+1}$, $BD=\sqrt{4a^2+1}$, $AF=\sqrt{4a^2+\frac{1}{2}}$.因为 $\triangle DPB$ 是直角三角形,所以 $BP=\sqrt{4a^2+2}$,则 $MF=\frac{1}{2}BP=\frac{\sqrt{4a^2+2}}{2}$.

因为 $\triangle AMF$ 是直角三角形,所以 $AM^2+MF^2=AF^2$,即 $a^2+1+\frac{1}{4}(4a^2+2)=4a^2+\frac{1}{2}$,解得

$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$.所以四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 $V=$

$\frac{1}{3}\cdot PD\cdot S_{ABCD}=\frac{1}{3}\times 1\times 1\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.



(第21题图)

22.(1)证明:连接 BD ,由题意得 $AC\cap BD=H$, $BH=DH$,又 $BG=PG$,所以 $GH\parallel PD$,因为 $GH\not\subset$ 平面 PAD , $PD\subset$ 平面 PAD ,所以 $GH\parallel$ 平面 PAD .

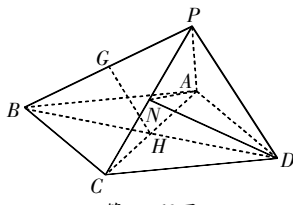
(2)证明:取棱 PC 中点 N ,连接 DN ,则 $DN\perp PC$,又因为平面 $PAC\perp$ 平面 PCD ,平面 $PAC\cap$ 平面 $PCD=PC$,所以 $DN\perp$ 平面 PAC ,又 $PA\subset$ 平面 PAC ,所以 $DN\perp PA$,又 $PA\perp CD$, $CD\cap DN=D$,所以 $PA\perp$ 平面 PCD .

(3)解:连接 AN ,由(2)中 $DN\perp$ 平面 PAC ,知 $\angle DAN$ 是直线 AD 与平面 PAC 所成角.

因为 $\triangle PCD$ 是等边三角形, $CD=2$,且 N 为 PC 中点,所以 $DN=\sqrt{3}$.又 $DN\perp AN$,

在 $\text{Rt}\triangle AND$ 中, $\sin\angle DAN=\frac{DN}{DA}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以直线 AD 与平面 PAC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



(第22题图)

第13期

第2~3版同步周测

一、单项选择题

1~8.CBDADADC

二、多项选择题

9.ABD 10.ABC

11.BC 12.ABC

三、填空题

13. $M>N$ 14. $\left\{x\left|\frac{3}{2}\leq x<5\right.\right\}$ 15. $\left(0,\frac{1}{10}\right)$

16.-2

四、解答题

17.证明:当 $x\geq 4$ 时,要证 $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-2}>\sqrt{x-4}+\sqrt{x-1}$,只需证 $(\sqrt{x-3}+\sqrt{x-2})^2>(\sqrt{x-4}+\sqrt{x-1})^2$,

需证 $x-3+2\sqrt{(x-3)(x-2)}+x-2>x-4+2\sqrt{(x-4)(x-1)}+x-1$,即证 $\sqrt{(x-3)(x-2)}>\sqrt{(x-4)(x-1)}$,只需证 $x^2-5x+6>x^2-5x+4$,即证 $6>4$,显然上式成立,所以原不等式成立,即 $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-2}>\sqrt{x-4}+\sqrt{x-1}$.

18.解:(1)因为 $f(x)=a^x-1$ ($a>0$,且 $a\neq 1$),

所以 $f(1)-f(2)=(a-1)-(a^2-1)=a-a^2$.

由 $a-a^2=\frac{1}{4}$,解得 $a=\frac{1}{2}$.

(2)不等式 $f(x)>0$,即 $\left(\frac{1}{2}\right)^x-1>0$,

所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^x>1$,解得 $x<0$,

所以不等式 $f(x)>0$ 的解集为 $(-\infty,0)$.

19.解:(1)当 $a=2$ 时, $f(x)\leq 0$ 可化为 $2x^2-5x+2\leq 0$,可得 $(2x-1)(x-2)\leq 0$,解得 $\frac{1}{2}\leq x\leq 2$,所以 $f(x)\leq 0$ 的解集为

$\left[\frac{1}{2},2\right]$.

(2)当 $a>0$ 时,不等式 $f(x)\leq 0$ 可化为 $ax^2-(2a+1)x+2\leq 0$,

进一步化为 $a\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-2)\leq 0$.

①当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时,有 $\frac{1}{a}>2$,解不等

式得 $2\leq x\leq \frac{1}{a}$;

②当 $a=\frac{1}{2}$ 时,有 $\frac{1}{a}=2$,

解不等式得 $x=2$;

③当 $a>\frac{1}{2}$ 时,有 $\frac{1}{a}<2$,

解不等式得 $\frac{1}{a}\leq x\leq 2$.

综上,当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时,不等式的解集

为 $\left\{x\left|2\leq x\leq \frac{1}{a}\right.\right\}$;当 $a=\frac{1}{2}$ 时,不等式的

解集为 $\{x|x=2\}$;当 $a>\frac{1}{2}$ 时,不等式的

解集为 $\left\{x\left|\frac{1}{a}\leq x\leq 2\right.\right\}$.

20.证明:(1)由 $f(x)=g(x)$,

得 $ax^2+2bx+c=0$,

所以 $\Delta=4b^2-4ac=4(b^2-ac)$.

因为 $a>b>c$, $a+b+c=0$,

所以 $a>0$, $c<0$,所以 $\Delta>0$,

所以 $ax^2+2bx+c=0$ 有两个不等的实根,

所以 $f(x)$ 的图象与 $g(x)$ 的图象一定有两个交点.

(2)假设 $\frac{c}{a}\leq -2$ 或 $\frac{c}{a}\geq -\frac{1}{2}$ 成立.

由 $\frac{c}{a}\leq -2$,结合(1) $a>0$,得 $c\leq -2a$,

即 $a+c\leq -a$,所以 $-b\leq -a$,

所以 $a\leq b$,

这与条件中的 $a>b$ 矛盾.

由 $\frac{c}{a}\geq -\frac{1}{2}$,得 $2c\geq -a$,

即 $c\geq -(a+c)=b$,

所以 $b\leq c$,这与 $b>c$ 矛盾,

故假设不成立.故原不等式成立.

21.解:(1)由 $f(x)>0$,

得 $(ax-1)(x-1)>0$.

当 $a<0$ 时,不等式的解集为 $\left(\frac{1}{a},1\right)$;

当 $a=0$ 时,不等式的解集为 $(-\infty,1)$;

当 $0<a<1$ 时,不等式的解集为

$(-\infty,1)\cup\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$;

当 $a=1$ 时,不等式的解集为

$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$;

当 $a>1$ 时,不等式的解集为

$\left(-\infty,\frac{1}{a}\right)\cup(1,+\infty)$.

(2)由 $f(x)+x+a-b\geq 0$,

得 $a(x^2-x+1)+1-b\geq 0$,

由 $x\in(0,1)$,得 $\frac{3}{4}\leq x^2-x+1<1$,

故 $a\geq \frac{b-1}{x^2-x+1}$ 对 $x\in(0,1)$ 恒成立,

故存在实数 $b\in[2,3]$,

使得不等式 $a\geq \frac{4(b-1)}{3}$ 成立,

所以 $a\geq \frac{4\times(2-1)}{3}=\frac{4}{3}$,

所以 a 的最小值为 $\frac{4}{3}$.

22.解:(1)因为 $k>0$, $f(x)>m$,

即 $\frac{kx}{x^2+3k}>m$,

所以 $mx^2-kx+3km<0$.

因为不等式 $mx^2-kx+3km<0$ 的解集为 $\{x|x<-3$,或 $x>-2\}$,

所以 $-3,-2$ 是方程 $mx^2-kx+3km=0$ 的根,且 $m<0$,

所以 $\begin{cases} \frac{k}{m}=-5, \\ 3k=6, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=2, \\ m=-\frac{2}{5}. \end{cases}$

所以 $5mx^2+\frac{k}{2}x+3>0\Leftrightarrow 2x^2-x-3<0$,

解得 $-1< x<\frac{3}{2}$,

所以不等式 $5mx^2+\frac{k}{2}x+3>0$ 的解

集为 $\left\{x\left|-1< x<\frac{3}{2}\right.\right\}$.

(2)因为 $f(x)>1$,所以 $\frac{kx}{x^2+3k}>1$,

所以 $x^2-kx+3k<0$,令 $g(x)=x^2-kx+3k$,

$x\in(3,+\infty)$,存在 $x_0>3$,使得 $f(x_0)>1$ 成立,即使得 $g(x_0)<0$ 成立,即 $[g(x)]_{\min}<0$

成立.当 $0<k\leq 6$ 时, $g(x)$ 在 $(3,+\infty)$ 上单调递增,所以 $g(x)>g(3)=9$,显然不存在 $g(x)<0$;

当 $k>6$ 时, $g(x)$ 在 $\left(3,\frac{k}{2}\right)$ 上

单调递减,在 $\left(\frac{k}{2},+\infty\right)$ 上单调递增,所

以 $[g(x)]_{\min}=g\left(\frac{k}{2}\right)=-\frac{k^2}{4}+3k$,由 $-\frac{k^2}{4}+$

$3k<0$,又 $k>0$,可得 $k>12$.

综上, k 的取值范围是 $(12,+\infty)$.

一、单项选择题

1~8.DBDCBCCB

二、多项选择题

9.BC 10.ABD

11.CD 12.ABC

三、填空题

13.1

14. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

15. $\frac{169\sqrt{3}}{20} \text{ dm}^2$

16. $\frac{4+2\sqrt{3}}{3}$

四、解答题

17.证明:由 $a>b>0$,

要证 $\frac{a-b}{a+b} + \frac{2b^2}{a^2+b^2} < 1$,

只要证 $\frac{a-b}{a+b} < 1 - \frac{2b^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$,

即证 $(a-b)(a^2+b^2) < (a+b)(a^2-b^2)$,

即证 $a^3+ab^2-ba^2-b^3 < a^3-ab^2+ba^2-b^3$,

即证 $2ab^2 < 2ba^2$,

即 $b < a$.上式显然成立,

所以原不等式成立.

18.解:(1)因为 $(a+b)\sqrt{ab}=1$,

所以 $a+b=\frac{1}{\sqrt{ab}}$,

因为 $a>0, b>0$,

所以 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$,

当且仅当 $a=b$ 时取等号,

所以 $\frac{1}{\sqrt{ab}} \geq 2\sqrt{ab}$,

所以 $ab \leq \frac{1}{2}$.

所以 $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{b^3}} =$

$\frac{2}{ab\sqrt{ab}} \geq 4\sqrt{2}$,

当且仅当 $a=b$ 时取等号,

所以 $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$.

(2)因为 $a>0, b>0$,

所以 $\frac{1}{2a} + \frac{1}{3b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{3b}} =$

$\frac{2}{\sqrt{6ab}} \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

当且仅当 $a=b$ 时取等号.

因为 $\frac{\sqrt{6}}{3} < \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

所以不存在 a, b ,

使得 $\frac{1}{2a} + \frac{1}{3b}$ 的值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

19.解:(1)因为不等式 $2ax-b>0$ 的解集为 $(\frac{1}{2}, +\infty)$, 所以 $a>0$, 且 $a=b$,

所以 $f(x)<0 \Leftrightarrow \frac{a(2x-1)}{x-1} < 0 \Leftrightarrow a(2x-$

$1) \cdot (x-1) < 0$, 所以 $f(x)<0$ 的解集为 $(\frac{1}{2}, 1)$.

(2) $a=\frac{1}{2}$ 时, 不等式 $f(x)>0 \Leftrightarrow f(x)=$

$\frac{x-b}{x-1} > 0 \Leftrightarrow (x-b)(x-1) > 0$.

①当 $b>1$ 时,

不等式的解集为 $(-\infty, 1) \cup (b, +\infty)$;

②当 $b=1$ 时,

不等式的解集为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$;

③当 $b<1$ 时,

不等式的解集为 $(-\infty, b) \cup (1, +\infty)$.

20.解:(1)因为关于 x 的方程 $x^2+2(m-2)x+m^2+4=0$ 有实数根, 两根的平方和比两根之积大 21, 设两实数根分别为 x_1, x_2 ,

故有 $\begin{cases} \Delta=4(m-2)^2-4(m^2+4) \geq 0, \\ x_1^2+x_2^2=x_1 \cdot x_2+21, \end{cases}$

即 $\begin{cases} -16m \geq 0, \\ [2(2-m)]^2=3 \times (m^2+4)+21, \end{cases}$

解得 $m=-1$.

(2)若方程 $x^2+2(m-2)x+m^2+4=0$ 的两根均大于 1, 令 $f(x)=x^2+2(m-2)x+m^2+4$,

则 $\begin{cases} \Delta=4(m-2)^2-4(m^2+4) \geq 0, \\ \frac{2(2-m)}{2} > 1, \end{cases}$

$\begin{cases} f(1)=1+2(m-2)+m^2+4 > 0, \\ f(1)=1+2(m-2)+m^2+4 > 0, \end{cases}$

解得 $m \leq 0$ 且 $m \neq -1$.

所以实数 m 的取值范围是 $(-\infty, -1) \cup (-1, 0]$.

21.解:(1)设矩形栏目的高为 a cm, 宽为 b cm ($a>0, b>0$), 则 $ab=20000$, 所以 $b=\frac{20000}{a}$.由题意, 得海报的高为 $(a+20)$ cm,

宽为 $(3b+30)$ cm,

所以海报的面积 $S=(a+20)(3b+30)=$

$30(a+2b)+60600=30\left(a+\frac{40000}{a}\right)+60600 \geq$

$30 \times 2 \sqrt{a \cdot \frac{40000}{a}} + 60600 = 72600$, 当且仅

当 $a=\frac{40000}{a}$, 即 $a=200$ 时, 等号成立, 此

时 $b=100$.

故当矩形栏目的高为 200 cm, 宽为 100 cm 时, 整个矩形海报的面积最小, 最小值为 72600 cm².

(2)由题意, 得 $b \geq 2a$,

又 $b=\frac{20000}{a}, a>0$,

解得 $0 < a \leq 100$,

由(1)得海报的面积 $S=30\left(a+\frac{40000}{a}\right)+$

60600, 因为函数 S 在 $(0, 100]$ 上单调递减, 所以当 $a=100$ 时, S 取得最小值, 最小值为 75600.

故当矩形栏目的高为 100 cm, 宽为 200 cm 时, 整个矩形海报的面积最小, 最小值为 75600 cm².

22.解:(1)要使不等式 $mx^2-2x-m+1 < 0$ 恒成立, 只需 $\begin{cases} m < 0, \\ \Delta=(-2)^2-4m(-m+1) < 0, \end{cases}$ 该不等式组无解. 所以不存在实数 m , 使对所有的实数 x , 不等式 $mx^2-2x-m+1 < 0$ 恒成立.

(2)由 $|m| \leq 2$, 得 $-2 \leq m \leq 2$.

由 $mx^2-2x-m+1 < 0$,

得 $(x^2-1)m-2x+1 < 0$.

令 $f(m)=(x^2-1)m-2x+1 (-2 \leq m \leq 2)$,

则 $f(m) < 0$.

当 $x=1$ 时, $f(m)=-1 < 0$, 满足题意;

当 $x=-1$ 时, $f(m)=3 > 0$, 不满足题意;

当 $x \neq \pm 1$ 时, 要使 $f(m) < 0$,

只需 $\begin{cases} f(-2) < 0, \\ f(2) < 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} (x^2-1)(-2)-2x+1 < 0, \\ (x^2-1) \times 2-2x+1 < 0, \end{cases}$

解得 $\frac{-1+\sqrt{7}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

综上, x 的取值范围是

$\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

数学

第 15 期

第 2~3 版同步周测

一、单项选择题

1~8.DACAAACB

二、多项选择题

9.BCD

10.BC

11.BCD

12.ABD

三、填空题

13. 39π

14. $\sqrt[3]{3}$

15. $\frac{\pi}{4}$

16. $\frac{27}{8}$

四、解答题

17.解:由已知条件, 得 $CD=2, BC=2$. 阴影部分绕 AB 所在直线旋转一周得到的旋转体是圆台挖去半球所得组合体, 其中圆台的上、下底面半径分别为 1, 2, 高为 $\sqrt{3}$, 母线长为 2, 球的半径为 1.

所以旋转体的体积 $V=V_{\text{圆台}}-V_{\text{半球}}=$
 $\frac{1}{3}\pi \times \sqrt{3} \times (2^2+2 \times 1+1^2) - \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \times 1^3 =$
 $\frac{7\sqrt{3}-2}{3}\pi$,

表面积 $S=S_{\text{半球}}+S_{\text{圆台侧}}+S_{\text{圆台下底}}=\frac{1}{2} \times$
 $4\pi \times 1^2 + \pi \times (1+2) \times 2 + \pi \times 2^2 = 12\pi$.

18.解:(1)设圆锥底面半径为 r cm, 母线的长为 l cm, 则 $l=10$ cm, 且 $2\pi r=\pi l$, 解得 $r=5$ cm, 所以该圆锥的表面积 $S=\pi rl=$
 50π (cm²), 高 $h=\sqrt{l^2-r^2}=5\sqrt{3}$ (cm), 所以该圆锥的体积为 $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{125\sqrt{3}}{3}\pi$ (cm³).

(2)由(1)知, 圆锥的轴截面为等边三角形, 且边长为 10 cm, 所以最高点到桌面的距离为等边三角形的高, $h'=5\sqrt{3}$ cm. 故该圆锥被吹倒后, 其最高点到桌面的距离 $d=5\sqrt{3}$ cm.

19.(1)解:在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $BB_1 \perp A_1B_1$, 又 $BF \perp A_1B_1$, $BB_1 \cap BF=B$, $BB_1, BF \subset$ 平面 BCC_1B_1 , 所以 $A_1B_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1 .

因为 $AB \parallel A_1B_1$, 所以 $AB \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 又 $BC \subset$ 平面 BCC_1B_1 , 所以 $AB \perp BC$, 又 $AB=AC=2$, 所以 $AC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

又 E 为 AC 的中点, 所以 $CE=BE=\sqrt{2}$, $BE \perp AC$, 又侧面 AA_1B_1B 为正方形, F 为 CC_1 的中点, 所以 $AA_1=AB=2, CF=\frac{1}{2}CC_1=\frac{1}{2}AA_1=1$,

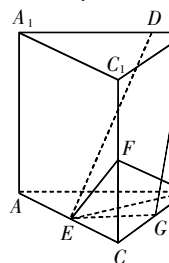
所以 $V_{F-EBC}=\frac{1}{3} \cdot S_{\triangle EBC} \cdot CF=\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 1=\frac{1}{3}$, 即三棱锥 $F-EBC$ 的体积为 $\frac{1}{3}$.

(2)证明:如图, 取 BC 的中点 G , 连

新高考答案页第 4 期

接 EG, B_1G , 设 $B_1G \cap BF=H$, 因为点 E 是 AC 的中点, 点 G 是 BC 的中点, 所以 $EG \parallel AB$, 又 $AB \parallel B_1D$, 所以 $EG \parallel B_1D$, 所以 E, G, B_1, D 四点共面, 由(1)可得 $AB \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 所以 $EG \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 所以 $BF \perp EG$. 因为 $\tan \angle CBF=\frac{CF}{BC}=\frac{1}{2}$,

$\tan \angle BB_1G=\frac{BG}{BB_1}=\frac{1}{2}$, 且 $\angle CBF$ 和 $\angle BB_1G$ 都是锐角, 所以 $\angle CBF=\angle BB_1G$, 所以 $\angle BHB_1=\angle BGB_1+\angle CBF=\angle BCB_1+\angle BB_1G=90^\circ$, 所以 $BF \perp B_1G$. 又 $EG \cap B_1G=G, EG, B_1G \subset$ 平面 EGB_1D , 所以 $BF \perp$ 平面 EGB_1D , 又 $DE \subset$ 平面 EGB_1D , 所以 $BF \perp DE$.



(第 19 题图)

20.(1)证明:因为等腰梯形 $ABCD$, $AB=2, CD=6, AD=2\sqrt{2}$, E, F 分别是 CD 的两个三等分点, 所以四边形 $ABEF$ 是正方形, 所以 $BE \perp EF$. 因为 $BE \perp PE$, 且 $PE \cap EF=E$, 所以 $BE \perp$ 平面 PEF . 又 $BE \subset$ 平面 $ABEF$, 所以平面 $PEF \perp$ 平面 $ABEF$.

(2)解:在等腰梯形中, 由(1)知, $AF=FE=DF=CE=2$, 所以 $S_{\text{梯形}}=\frac{(2+6) \times 2}{2}=8$,

即折起后 $S_{\triangle PAF}+S_{\triangle PBE}+S_{\triangle BEF}=S_{\text{梯形}}=8$. 在 $\triangle PAB$ 中, $PA=PB=2\sqrt{2}, AB=2$, 所以 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{8-1}=\sqrt{7}$.

在 $\triangle PEF$ 中, $PE=PF=EF=2$, 所以 $S_{\triangle PEF}=\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4=\sqrt{3}$.

所以四棱锥 $P-ABEF$ 的表面积 $S=8+\sqrt{3}+\sqrt{7}$.

21.(1)证明:连接 AC 交 BD 于点 O , 连接 OE . 因为四边形 $ABCD$ 是直角梯形, 且 $AD \perp DC, AD \parallel BC, AD=4, BC=2$, 所以 $\triangle ADO \sim \triangle CBO$, 且 $\frac{AO}{OC}=\frac{AD}{CB}=2$. 又点 E 为线段 PA 的靠近点 P 的三等分点, 所以 $\frac{AE}{EP}=2$, 所以 $\frac{AO}{OC}=\frac{AE}{EP}$, 所以 $OE \parallel CP$.

又 $OE \subset$ 平面 $BDE, PC \not\subset$ 平面 BDE , 所以 $PC \parallel$ 平面 BDE .

(2)解:因为异面直线 PA 与 BC 所成的角为 $45^\circ, AD \parallel BC$, 所以 $\angle PAD=45^\circ$, 又 $PD \perp$ 平面 $ABCD, AD \subset$ 平面 $ABCD$,

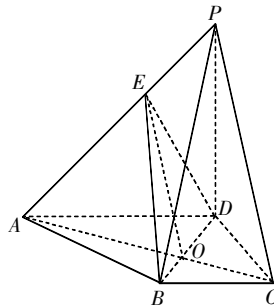
所以 $PD \perp AD$, 又 $AD=4$, 所以 $PD=AD=4$.

2021-2022 学年

学习周报

所以 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3} \cdot S_{\text{梯形 } ABCD} \cdot PD=\frac{1}{3} \times$

$\frac{1}{2} \times (2+4) \times 2 \times 4=8$, 所以 $V_{E-ABD}=\frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABD} \cdot \frac{2}{3} \cdot PD=\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times \frac{2}{3} \times 4=\frac{32}{9}$. 所以多面体 $BCDEP$ 的体积 $V_{BCDEP}=V_{P-ABCD}-V_{E-ABD}=8-\frac{32}{9}=\frac{40}{9}$.



(第 21 题图)

22.(1)证明:因为 P 在 $\odot O$ 上, AB 是 $\odot O$ 的直径, 所以 $AP \perp BP$. 因为 $AA_1 \perp$ 平面 PAB , 所以 $AA_1 \perp BP$. 又 $AP \cap AA_1=A$, 所以 $BP \perp$ 平面 PAA_1 , 又 $A_1P \subset$ 平面 PAA_1 , 故 $BP \perp A_1P$.

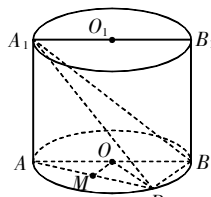
(2)解:①由题意知, $V_{\text{圆柱}}=\pi \cdot OA^2 \cdot AA_1=4\pi \cdot AA_1=12\pi$, 解得 $AA_1=3$. 由 $OA=2, \angle AOP=120^\circ$, 得 $\angle BAP=30^\circ, BP=2, AP=2\sqrt{3}$, 所以 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$, 所以三棱锥 A_1-APB 的体积

$V_{A_1-APB}=\frac{1}{3} \cdot S_{\triangle PAB} \cdot AA_1=\frac{1}{3} \times 2\sqrt{3} \times 3=2\sqrt{3}$.

②在 AP 上存在一点 M , 当 M 为 AP 的中点时, 使异面直线 OM 与 A_1B 所成角的余弦值为 $\frac{2}{5}$.

证明:因为 O, M 分别为 AB, AP 的中点, 则 $OM \parallel BP$, 所以 $\angle A_1BP$ 是异面直线 OM 与 A_1B 所成的角. 因为 $AA_1=3, AB=4$, 所以 $A_1B=5$. 又 $BP \perp A_1P$, 在 $\text{Rt} \triangle A_1PB$ 中, $\cos \angle A_1PB=\frac{BP}{A_1B}=\frac{2}{5}$.

所以在 AP 上存在一点 M , 当 M 为 AP 的中点时, 使异面直线 OM 与 A_1B 所成角的余弦值为 $\frac{2}{5}$.



(第 22 题图)