

第1期

第2~3版同步周测

一、选择题

1~6.BBCACB

7~12.DBBDBC

二、填空题

13.(-2,0] 14.假

15.(-3,0, 1/2) 16.①②④

三、解答题

17.解:(1)由题意,得 $\begin{cases} 2x+3 \geq 0, \\ 3-x > 0, \end{cases}$

解得 $-\frac{3}{2} \leq x < 3$,

所以 $A = [-\frac{3}{2}, 3)$.

因为 $g(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 1$,
所以 $B = [1, +\infty)$.

(2)由(1)可知 $\complement_{\mathbb{R}}B = (-\infty, 1)$,

所以 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}}B) = [-\frac{3}{2}, 1)$.

18.解:(1)集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 \leq 0\} = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$,
当 $a=1$ 时,集合 $B = \{x | x^2 - x - 2 = 0\} = \{-1, 2\}$.

所以 $A \cap B = \{-1, 2\}$, $\complement_{\mathbb{R}}A = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$.

(2)若 $A \cup B = A$, 则 $B \subseteq A$,

当 $B = \emptyset$ 时,方程 $x^2 - ax - 2 = 0$ 无实数根,
所以 $\Delta = a^2 - 4 \times (-2) < 0$, 不等式的解集为 \emptyset ;

当 $B \neq \emptyset$ 时,方程 $x^2 - ax - 2 = 0$ 的实数根在 $[-1, 3]$ 内,

所以 $\begin{cases} -1 < \frac{a}{2} < 3, \\ (-1)^2 - a \cdot (-1) - 2 \geq 0, \\ 3^2 - a \cdot 3 - 2 \geq 0, \end{cases}$

解得 $1 \leq a \leq \frac{7}{3}$.

所以实数 a 的取值范围是 $[1, \frac{7}{3}]$.

19.解:(1)因为 $f(x) = x^3 - 3x^2$,

所以 $f'(x) = 3x^2 - 6x$,

由 $f'(x) \leq 0$, 即 $3x^2 - 6x \leq 0$,

解得 $0 \leq x \leq 2$,

所以 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递减,

不妨设 $t_1 > t_2$, 则 $\begin{cases} t_2 = 0, \\ 0 < t_1 \leq 1, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} t_1 > 1, \\ 0 < t_2 \leq 1, \end{cases}$
令 $h(t) = t^2 + mt + 2m + 1$,

若 $t_1 > 1, 0 < t_2 < 1$, 则 $\begin{cases} h(0) > 0, \\ h(1) < 0, \end{cases}$ 即 $\Delta > 0$,

$\begin{cases} 2m+1 > 0, \\ 3m+2 < 0, \\ m^2-8m-4 > 0, \end{cases}$ 解集为 \emptyset ;

若 $t_1 > 1, t_2 = 1$, 则 $\begin{cases} h(0) > 0, \\ h(1) = 0, \end{cases}$ 即 $\Delta > 0$,

$\begin{cases} 2m+1 > 0, \\ 3m+2 = 0, \\ m^2-8m-4 > 0, \end{cases}$ 解集为 \emptyset ;

若 $t_2 = 0, 0 < t_1 \leq 1$, 则 $\begin{cases} h(0) = 0, \\ h(1) \geq 0, \end{cases}$ 即 $\Delta > 0$,

$\begin{cases} 2m+1 = 0, \\ 3m+2 \geq 0, \\ m^2-8m-4 > 0, \end{cases}$ 解得 $m = -\frac{1}{2}$.

所以实数 m 的取值范围是 $\{-\frac{1}{2}\}$.

22.解:(1) $|f(x) - g(x)| = |x + \frac{1}{4x} - 1|$,

$\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$, 设 $h(x) = x + \frac{1}{4x} - 1$, $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$,
则 $h'(x) = \frac{4x^2 - 1}{4x^2}$,

所以当 $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$

单调递减, 当 $x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$

单调递增, 所以 $h(x)$ 的最小值是 $h(\frac{1}{2}) = 0$, 又

$h(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$, $h(\frac{3}{4}) = \frac{1}{12}$,

所以 $|f(x) - g(x)| \leq \frac{1}{4} < 1$, 所以在区

间 $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ 上, $f(x)$ 可被 $g(x)$ 替代.

(2)由题意, 得 $|f(x) - g(x)| = |\sin x - \ln(a + \cos^2 x)| \leq 1$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立,
即 $|\ln(a + 1 - \sin^2 x) - |\sin x|| \leq 1$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立,

令 $|\sin x| = t$, 则 $t \in [0, 1]$, 则 $|\ln(a + 1 - t^2) - t| \leq 1$ 对任意 $t \in [0, 1]$ 恒成立,
即 $|\ln(a + 1 - t^2) - \ln e^t| \leq 1$ 对任意 $t \in [0, 1]$ 恒成立, 即 $e^{-1} \leq \frac{a + 1 - t^2}{e^t} \leq e$ 对任意 $t \in [0, 1]$ 恒成立,

所以 $\begin{cases} a \geq e^{t-1} + t^2 - 1, \\ a \leq e^{t+1} + t^2 - 1, \end{cases}$ 对任意 $t \in [0, 1]$ 恒成立,

设 $s(t) = e^{t-1} + t^2 - 1$, 该函数在 $[0, 1]$ 上为增函数,
则 $s(t)_{\max} = s(1) = 1$, 所以 $a \geq 1$;

设 $\varphi(t) = e^{t+1} + t^2 - 1$, 该函数在 $[0, 1]$ 上也是增函数,
则 $\varphi(t)_{\min} = \varphi(0) = e - 1$, 所以 $a \leq e - 1$.

综上, 实数 a 的取值范围是 $[1, e - 1]$.

即 $\begin{cases} \frac{a^2}{4} + a \cdot (-\frac{a}{2}) - 4 < 0, \\ (\frac{3}{a})^2 - 1 > 0, \\ \frac{a}{2} > \frac{3}{a}, \\ \frac{a^2}{4} - a \cdot \frac{a}{2} + 2 < 0, \end{cases}$

解得 $-3 < a < -2\sqrt{2}$, 或 $2\sqrt{2} < a < 3$.
又 $a > 0$, 所以 $2\sqrt{2} < a < 3$, 所以实数 a 的取值范围是 $(2\sqrt{2}, 3)$.

20.解:(1)当 $m=2$ 时, $f(x) = 4 \cdot (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x - 6$,
令 $2^x = t$, 则 $t > 0$, $g(t) = 4t^2 - 4t - 6$, $t \in (0, +\infty)$.

当 $t = \frac{1}{2}$ 时, $g(t)_{\min} = -7$,
所以 $g(t)$ 的值域为 $[-7, +\infty)$,
即 $f(x)$ 的值域为 $[-7, +\infty)$.

(2)因为 $f(x) = 4^{x+1} - 2m \cdot 2^x - 3m = 4 \cdot (2^x)^2 - 2m \cdot 2^x - 3m$,
令 $t = 2^x$, 则 $f(x)$ 有且只有一个零点等价于方程 $4t^2 - 2mt - 3m = 0$ 有且只有一个正实根.
设该方程的两个根分别为 t_1, t_2 .

①若 $4t^2 - 2mt - 3m = 0$ 有一个根为 0 时, 则 $t_1 t_2 = -\frac{3}{4}m = 0$, 即 $m = 0$, 则 $t_1 + t_2 = \frac{m}{2} = 0$,
所以 $t_1 = t_2 = 0$, 不符合题意, 舍去;

②若 $4t^2 - 2mt - 3m = 0$ 有一个正实根和一负实根时, 则 $t_1 t_2 = -\frac{3}{4}m < 0$, 即 $m > 0$;

③若 $4t^2 - 2mt - 3m = 0$ 有两个相等的正实根时, 则 $\begin{cases} \Delta = 4m^2 + 48m = 0, \\ t_1 + t_2 = \frac{m}{2} > 0, \\ t_1 t_2 = -\frac{3}{4}m > 0, \end{cases} m \in \emptyset$.

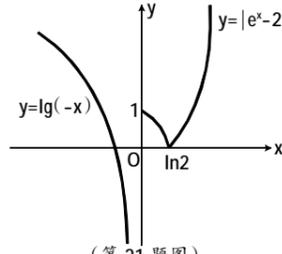
综上, 实数 m 的取值范围为 $(0, +\infty)$.

21.解:(1)若 $a < 0$, 则 $f(a) = \lg(-a) = 1$,
解得 $a = -10$;
若 $a \geq 0$, 则 $f(a) = |e^a - 2| = 1$,
解得 $a = 0$ 或 $\ln 3$.
故 a 的值为 0 或 -10 或 $\ln 3$.

(2)由题可知 $f(x) = \begin{cases} \lg(-x), & x < 0, \\ -e^x + 2, & 0 \leq x < \ln 2, \\ e^x - 2, & x \geq \ln 2, \end{cases}$

当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 单调递减, 且 $f(x) \in \mathbb{R}$;
当 $0 \leq x < \ln 2$ 时, $f(x)$ 单调递减, 且 $f(x) \in (0, 1]$;
当 $x \geq \ln 2$ 时, $f(x)$ 单调递增, 且 $f(x) \in [0, +\infty)$.
 $f(x)$ 的图象如下图.

令 $t = f(x)$, 则关于 x 的方程 $[f(x)]^2 + mf(x) + 2m + 1 = 0$ 恰有 5 个实数根等价于关于 t 的方程 $t^2 + mt + 2m + 1 = 0$ 有 2 个不相等的实数根, 设两个实根分别为 t_1, t_2 .



(第21题图)

第4期

第2~3版同步周测

一、选择题

1~6.BBCCBC

7~12.BAACDA

二、填空题

13.-1 或 16 14.(1.5, 2)

15.25 16.(1/4, 1/2)

三、解答题

17.解:(1)由题意得, $f(3) = \log_3(3-1) + 2 = 3$, 则 $\log_3 2 = 1$,
所以 $a = 2$.

(2)令 $f(x) = 0$, 则 $\log_2(x-1) = \log_2 \frac{1}{4}$,
又 $y = \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $x-1 = \frac{1}{4}$, 解得 $x = \frac{5}{4}$.

所以函数 $f(x)$ 的零点为 $\frac{5}{4}$.

18.解:(1)由题意可得 $P(5) = P_0 e^{-5k} = 90\% P_0$,

解得 $k = -\frac{1}{5} \ln 0.9$.

(2)由(1)可得 $P(t) = P_0 e^{(-\frac{1}{5} \ln 0.9)t}$, 当 $P(t) = 40\% P_0$ 时, 即 $0.4 P_0 = P_0 e^{(-\frac{1}{5} \ln 0.9)t}$,

解得 $t = \frac{\ln 0.4}{\frac{1}{5} \ln 0.9} \approx 42$, 故污染物减少到 40% 至少需要 42 小时.

19.解:(1)当 $a=2$ 时, $f(x) = x^2 - |2x-3| - 1 = \begin{cases} x^2 + 2x - 4, & x < \frac{3}{2}, \\ x^2 - 2x + 2, & x \geq \frac{3}{2}. \end{cases}$

当 $x < \frac{3}{2}$ 时, $f(x) = x^2 + 2x - 4 = (x+1)^2 - 5$,
所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $[-1, \frac{3}{2})$ 上单调递增.

当 $x \geq \frac{3}{2}$ 时, $f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$,

所以 $f(x)$ 在 $[\frac{3}{2}, +\infty)$ 上单调递增.

因为函数 $f(x)$ 的图象在 \mathbb{R} 上不间断, 所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty, -1)$, 单调递增区间是 $[-1, +\infty)$.

(2) $f(x) = x^2 - |ax-3| - 1 = \begin{cases} x^2 + ax - 4, & x < \frac{3}{a}, \\ x^2 - ax + 2, & x \geq \frac{3}{a}. \end{cases}$

其中 $a > 0$.
当 $x < \frac{3}{a}$ 时, $f(x) = x^2 + ax - 4$ 至多有 2 个不同的零点;
当 $x \geq \frac{3}{a}$ 时, $f(x) = x^2 - ax + 2$ 至多有 2 个不同的零点, 又 $f(x)$ 有 4 个不同的零点,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{3}{a})$ 和 $[\frac{3}{a}, +\infty)$ 上都各有 2 个不同的零点,

所以 $\begin{cases} f(-\frac{a}{2}) < 0, \\ f(\frac{3}{a}) > 0, \end{cases}$ 且 $\begin{cases} \frac{a}{2} > \frac{3}{a}, \\ f(\frac{a}{2}) < 0, \\ f(\frac{3}{a}) \geq 0, \end{cases}$

一、选择题

1-6.ADCDBC

7-12.CBCABC

二、填空题

13. $\{x|x \geq 2, \text{且} x \neq 3\}$

14. $f(x)=2x^2-4x+5(x \geq 1)$

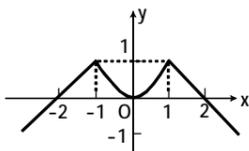
15. 1

16. $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}) \cup (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$

三、解答题

17. 解: (1) $f(\frac{5}{2}) = f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

(2) 函数 $f(x)$ 的图象如下图. 由图象可知, 函数 $f(x)$ 的值域是 $(-\infty, 1]$, 单调递增区间为 $(-\infty, -1]$ 和 $[0, 1]$, 单调递减区间为 $[-1, 0]$ 和 $[1, +\infty)$.



(第17题图)

18. 证明: (1) 因为 $\sqrt{1+x^2} > |x| \geq -x$,

所以 $\sqrt{1+x^2} + x > 0$ 恒成立,

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ,

又 $f(-x) + f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x) +$

$\ln(\sqrt{1+x^2} + x) = \ln 1 = 0$,

所以 $f(-x) = -f(x)$,

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(2) $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增. 证明如下:

由(1)知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 不妨设 $x_1 > x_2 > 0$,

则 $\sqrt{1+x_1^2} > \sqrt{1+x_2^2} > 0$,

所以 $x_1 + \sqrt{1+x_1^2} > \sqrt{1+x_2^2} + x_2 > 0$,

所以 $\ln(\sqrt{1+x_1^2} + x_1) > \ln(\sqrt{1+x_2^2} + x_2)$,

即 $f(x_1) > f(x_2)$,

所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

又 $f(x)$ 为奇函数,

所以 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增.

19. 解: (1) 因为 $f(x) = \frac{1}{2^x+1} + m$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(x)$ 是奇函数,

所以 $f(0) = \frac{1}{2} + m = 0$, 解得 $m = -\frac{1}{2}$.

经验证 $m = -\frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 是奇函数, 符合题意.

所以 $m = -\frac{1}{2}$.

(2) 因为 $y=2^x$ 为增函数, 所以 $y=2^x+1$ 为增函数, 且 $2^x+1 > 1$,

所以 $y = \frac{1}{2^x+1}$ 为减函数,

所以 $f(x) = \frac{1}{2^x+1} - \frac{1}{2}$ 在 \mathbf{R} 上单调递减.

(3) 由 $f(x^2-x) + f(-2) < 0$,

可得 $f(x^2-x) < -f(-2)$,

又 $f(-2) = -f(2)$, 所以 $f(x^2-x) < f(2)$,

因为 $f(x) = \frac{1}{2^x+1} - \frac{1}{2}$ 在 \mathbf{R} 上单调递

减, 所以 $x^2-x > 2$, 即 $x^2-x-2 > 0$,

解得 $x < -1$, 或 $x > 2$,

所以不等式的解集为 $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

20. 解: (1) $g(x) = f(x^2-6x+8) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2-6x+8)$, 由 $x^2-6x+8 > 0$,

解得 $x < 2$, 或 $x > 4$.

令 $t = x^2-6x+8$, 该函数在 $(4, +\infty)$ 上单调递增, 而外层函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ 是定义域内的减函数,

所以 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(4, +\infty)$.

(2) $h(x) = f(3^x+m-1) = \log_{\frac{1}{2}}(3^x+m-1)$, 因为 $h(x)$ 的值域为 \mathbf{R} , 所以 3^x+m-1 能够取到大于 0 的所有实数,

所以 $m-1 \leq 0$, 即 $m \leq 1$,

所以实数 m 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

21. 解: (1) $f(x) = \frac{1}{4^x} - \frac{\lambda}{2^{x+1}} + 1 = (\frac{1}{2})^{2x} -$

$\frac{\lambda}{2} \cdot (\frac{1}{2})^x + 1 (-2 \leq x \leq 1)$,

设 $t = (\frac{1}{2})^x$, 则 $t \in [\frac{1}{2}, 4]$,

令 $g(t) = t^2 - \frac{\lambda}{2} \cdot t + 1, t \in [\frac{1}{2}, 4]$,

当 $\lambda = 3$ 时, $g(t) = t^2 - \frac{3}{2}t + 1 = (t - \frac{3}{4})^2 +$

$\frac{7}{16}, t \in [\frac{1}{2}, 4]$,

所以 $g(t)_{\min} = g(\frac{3}{4}) = \frac{7}{16}$,

$g(t)_{\max} = g(4) = 11$,

所以 $f(x)$ 的值域为 $[\frac{7}{16}, 11]$.

(2) 由(1)得 $g(t) = t^2 - \frac{\lambda}{2} \cdot t + 1 = (t - \frac{\lambda}{4})^2 +$

$1 - \frac{\lambda^2}{16}, t \in [\frac{1}{2}, 4]$,

① 当 $\frac{\lambda}{4} \leq \frac{1}{2}$, 即 $\lambda \leq 2$ 时,

所以 $g(t)_{\min} = g(\frac{1}{2}) = \frac{5-\lambda}{4} = 1$,

所以 $\lambda = 1$;

② 当 $\frac{1}{2} < \frac{\lambda}{4} < 4$, 即 $2 < \lambda < 16$ 时,

所以 $g(t)_{\min} = g(\frac{\lambda}{4}) = 1 - \frac{\lambda^2}{16} = 1$,

所以 $\lambda = 0$ (舍去).

③ 当 $\frac{\lambda}{4} \geq 4$, 即 $\lambda \geq 16$ 时,

所以 $g(t)_{\min} = g(4) = 17 - 2\lambda = 1$,

所以 $\lambda = 8$ (舍去);

综上所述, 实数 λ 的值为 1.

22. 解: (1) 当 $x < 0$ 时, $-x > 0, f(-x) =$

$(\frac{1}{3})^{-x} - 1 = 3^x - 1$,

又 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(-x) = -f(x)$,

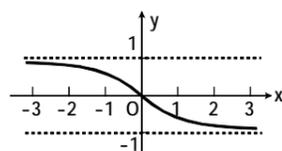
所以 $f(x) = -3^x + 1$;

当 $x = 0$ 时, $f(0) = 0$, 满足 $x > 0$ 时, $f(x) =$

$(\frac{1}{3})^x - 1$.

所以 $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{3})^x - 1, & x \geq 0, \\ -3^x + 1, & x < 0. \end{cases}$

所以函数 $f(x)$ 的图象如下图.



(第22题图)

(2) 由(1)可知 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递

减, 又 $f(2-5x) < f(2x^2-mx+20)$, 所以 $2-5x > 2x^2-mx+20$ 对 $x \in [2, 4]$ 恒成立, 即

$m > 2(x + \frac{9}{x}) + 5$ 对 $x \in [2, 4]$ 恒成立,

只需 $m > [2(x + \frac{9}{x}) + 5]_{\max}$,

令 $g(x) = 2(x + \frac{9}{x}) + 5, x \in [2, 4]$, 由

对勾函数的单调性可知, $g(x)$ 在 $[2, 3]$ 上单调递减, 在 $[3, 4]$ 上单调递增,

又 $g(2) = 18, g(4) = \frac{35}{2}$,

所以 $g(x)_{\max} = 18$,

则 $m > 18$,

所以实数 m 的取值范围是 $(18, +\infty)$.

第3期

第2~3版同步周测

一、选择题

1-6.BBBDAC

7-12.CADBAA

二、填空题

13. 18

14. $(-1, 0) \cup (0, 2]$

15. $\frac{3}{4}$

16. ②④⑤

三、解答题

17. 解: (1) 原式 $= 1 + \frac{1}{8} \times (\frac{3}{2})^{2 \times (-\frac{3}{2})} -$

$(\frac{1}{9})^{2 \times \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{8} \times \frac{8}{27} - \frac{1}{9} = \frac{25}{27}$.

(2) 原式 $= \ln \frac{2e^2}{2} + \log_3 81 - \log_2 4 = 2 + 4 -$

$2 = 4$.

18. 解: (1) 由函数 $f(x) = (2m^2+m-2) \cdot x^{2m+1}$ 是幂函数, 所以 $2m^2+m-2=1$, 解得 $m=1$ 或 $m=-\frac{3}{2}$;

当 $m=1$ 时, $f(x) = x^3$, 在定义域 \mathbf{R} 上是增函数, 满足题意;

当 $m=-\frac{3}{2}$ 时, $f(x) = x^{-2}$, 在定义域 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上不是增函数, 不满足题意.

综上, 函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = x^3$.

(2) 因为 $f(x) = x^3$ 在定义域 \mathbf{R} 上是增函数, 所以不等式 $f(2-a) < f(a^2-4)$ 等价于 $2-a < a^2-4$, 即 $a^2+a-6 > 0$,

解得 $a < -3$ 或 $a > 2$, 所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$.

19. 解: (1) 由题意, 得 $\begin{cases} (\frac{1}{2})^{1-a} - b = 0, \\ (\frac{1}{2})^{-a} - b = 1, \end{cases}$

解得 $a=1, b=1$.

(2) 由(1)知 $f(x) = 2^{1-x} - 1$,

因为 $g(x) = 4^x - 4$, 且 $f(x) = g(x)$,

所以 $2^{1-x} - 1 = 4^x - 4$, 即 $4^x - 2^{1-x} - 3 = 0$.

设 $2^x = t$, 则 $t > 0$,

所以 $t^2 - 2t - 3 = 0$, 解得 $t = 3$ (舍负),

所以 $2^x = 3$,

解得 $x = -\log_2 3$,

所以满足条件的 x 的值为 $-\log_2 3$.

20. 解: (1) 由题意可知, $a^2 - 2a - 2 = 1$, 解得 $a=3$, 或 $a=-1$, 又 $a > 0$, 所以 $a=3$.

所以 $f(x) = \log_3 x, g(x) = \log_3(x+1) + \log_3(3-x)$,

所以 $\begin{cases} x+1 > 0, \\ 3-x > 0, \end{cases}$ 解得 $-1 < x < 3$,

即 $g(x)$ 的定义域为 $(-1, 3)$,

因为 $g(x) = \log_3(x+1) + \log_3(3-x) =$

$\log_3(-x^2+2x+3), x \in (-1, 3)$.

令 $u = -x^2+2x+3 (-1 < x < 3)$, 则该函数的对称轴为直线 $x=1$, 所以 u 在 $(-1, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, 3)$ 上单调递减.

又 $y = \log_3 u$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $g(x)$ 的单调递增区间为 $(-1, 1)$, 单调递减区间为 $(1, 3)$.

(2) 因为不等式 $g(x) - m + 3 \leq 0$ 的解集非空, 所以 $m - 3 \geq [g(x)]_{\min}, x \in [\frac{1}{3}, 2]$.

由(1)知, 当 $x \in [\frac{1}{3}, 2]$ 时, 函数 $g(x)$ 的

单调递增区间为 $[\frac{1}{3}, 1]$, 单调递减区

间为 $[1, 2]$, 又 $g(\frac{1}{3}) = \log_3 \frac{32}{9}, g(2) = 1$,

所以 $[g(x)]_{\min} = 1$, 所以 $m - 3 \geq 1$,

解得 $m \geq 4$,

所以实数 m 的取值范围为 $[4, +\infty)$.

21. 解: (1) 由题意, 得 $f(0) = 1 - \frac{4}{2+a} = 0$,

解得 $a = 2$.

(2) 由(1)知 $f(x) = 1 - \frac{4}{2 \cdot 2^x + 2} = 1 -$

$\frac{2}{2^x+1}$, 所以 $g(x) = (2^x+1) \cdot f(x) + k = 2^x+1 -$

$2+k = 2^x-1+k$, 因为函数 $g(x)$ 有零点,

所以函数 $y = 2^x$ 的图象和直线 $y = 1 - k$ 有交点,

所以 $1 - k > 0$, 解得 $k < 1$,

所以实数 k 的取值范围为 $(-\infty, 1)$.

(3) 因为当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) > m \cdot$

$2^x - 2$ 恒成立, 即 $m < \frac{3}{2^x} - \frac{2}{2^x(2^x+1)}$ 恒成立.

令 $t = 2^x$, 则 $t \in (1, 2)$,

所以 $m < \frac{3}{t} - \frac{2}{t(t+1)} = \frac{1}{t} + \frac{2}{t+1}$.

令 $g(t) = \frac{1}{t} + \frac{2}{t+1}$, 所以 $g(t)$ 在

$(1, 2)$ 上单调递减,

所以 $g(t) > g(2) = \frac{7}{6}$,

所以 $m \leq \frac{7}{6}$,

所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty, \frac{7}{6}]$.

22. 解: (1) $y = f(x) \cdot g(x) = 2 \log_3 8x^2 \cdot$

$\log_3 x = \log_3 x(3+2 \log_3 x), x \in [\frac{1}{2}, 2]$,

令 $t = \log_3 x$, 则 $t \in [-1, 1], y = (3+2t)t =$

$2t^2+3t = 2(t+\frac{3}{4})^2 - \frac{9}{8}$ 在 $[-1, -\frac{3}{4}]$ 上单调

递减, 在 $[-\frac{3}{4}, 1]$ 上单调递增, 当 $t = -\frac{3}{4}$

时, $y_{\min} = -\frac{9}{8}$; 当 $t = 1$ 时, $y_{\max} = 5$.

所以所求函数的值域为 $[-\frac{9}{8}, 5]$.

(2) 由 $f(x^2) \cdot f(\sqrt{x}) \leq k [g(x)]^2$ 可得 $(3+4 \log_3 x)(3+\log_3 x) \leq k (\log_3 x)^2$,

因为 $f(x), g(x)$ 的定义域均为

$[-\frac{1}{2}, 2]$, 所以

$\frac{1}{2} \leq x \leq 2$,

$\frac{1}{2} \leq \sqrt{x} \leq 2$, 解得 $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \sqrt{2}$,

$\frac{1}{2} \leq x^2 \leq 2$,

令 $t = \log_3 x$, 则 $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, 所以 $(3+$

$4t)(3+t) \leq kt^2$ 在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 上有解,

当 $t=0$ 时, 原不等式转化为 $9 \leq 0$, 不成立;

当 $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, 且 $t \neq 0$ 时, 原不等

式转化为 $k \geq \frac{9}{t^2} + \frac{15}{t} + 4$, 令 $h(t) = \frac{9}{t^2} +$

$\frac{15}{t} + 4, t \in [-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}]$.

所以 $k \geq$