第 12 期

第 2~3 版同步周测

一、选择题

1~6.CCCCBC

7~12.AAADCA

二、填空题

13.M>N

14.(2,12]

15.$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

16.−2

三、解答题

17.**证明**：当 $x\geqslant4$ 时，要证 $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-2}>\sqrt{x-4}+\sqrt{x-1}$，只需证 $(\sqrt{x-3}+\sqrt{x-2})^2>(\sqrt{x-4}+\sqrt{x-1})^2$，

需证 $x-3+2\sqrt{(x-3)(x-2)}+x-2>x-4+2\sqrt{(x-4)(x-1)}+x-1$，即证 $\sqrt{(x-3)(x-2)}>\sqrt{(x-4)(x-1)}$，只需证 $x^2-5x+6>x^2-5x+4$，即证 $6>4$，显然上式成立，所以原不等式成立，即 $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-2}>\sqrt{x-4}+\sqrt{x-1}$.

18.**解**：(1)因为函数 $f(x)=\log_a(3^x-1)$ $(a>0$，且 $a\neq1)$，所以 $f(2)=\log_a8=3$，

所以 $a=2$，$f(x)=\log_2(3^x-1)$.

当 $x\in[1,2]$ 时，$3^x-1\in[2,8]$，

$\log_2(3^x-1)\in[1,3]$，

故 $f(x)$ 的取值范围为 $[1,3]$.

(2)不等式 $f(x)\leqslant3$，即 $\log_2(3^x-1)\leqslant3$，且 $3^x-1>0$，所以 $0<3^x-1\leqslant8$，

解得 $0<x\leqslant2$，

所以不等式 $f(x)\leqslant3$ 的解集为 $(0,2]$.

19.**解**：(1)当 a=1 时，$f(x)=|x-1|+|x+3|=\begin{cases}-2x-2,x\leqslant-3,\\4,-3<x<1,\\2x+2,x\geqslant1,\end{cases}$ 由 $f(x)\geqslant6$ 得 $\begin{cases}x\leqslant-3,\\-2x-2\geqslant6\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-3<x<1,\\4\geqslant6\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant1,\\2x+2\geqslant6,\end{cases}$

解得 $x\leqslant-4$ 或 $x\geqslant2$，

所以不等式 $f(x)\geqslant6$ 的解集为 $(-\infty,4]\cup[2,+\infty)$.

(2)$f(x)=|x-a|+|x+3|\geqslant|x-a-x-3|=|a+3|$，因为 $f(x)>-a$，所以 $|a+3|>-a$，

两边平方，得 $a^2+6a+9>a^2$，

解得 $a>-\frac{3}{2}$，

所以 a 的取值范围为 $\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$.

20.**证明**：(1)由 $f(x)=g(x)$，

得 $ax^2+2bx+c=0$，

所以 $\Delta=4b^2-4ac=4(b^2-ac)$.

因为 $a>b>c$，$a+b+c=0$，

所以 $a>0$，$c<0$，所以 $\Delta>0$，

所以 $ax^2+2bx+c=0$ 有两个不等的实根，

所以 $f(x)$ 的图象与 $g(x)$ 的图象一定有两个交点.

(2)假设 $\frac{c}{a}\leqslant-2$ 或 $\frac{c}{a}\geqslant-\frac{1}{2}$ 成立.

由 $\frac{c}{a}\leqslant-2$，结合(1)$a>0$，得 $c\leqslant-2a$，

即 $a+c\leqslant-a$，所以 $-b\leqslant-a$，

所以 $a\leqslant b$，

这与条件中的 $a>b$ 矛盾.

由 $\frac{c}{a}\geqslant-\frac{1}{2}$，得 $2c\geqslant-a$，

即 $c\geqslant-(a+c)=b$，

所以 $b\leqslant c$，这与 $b>c$ 矛盾，

故假设不成立.故原不等式成立.

21.**解**：(1)由 $f(x)>0$，

得 $(ax-1)(x-1)>0$.

当 $a<0$ 时，不等式的解集为 $\left(\frac{1}{a},1\right)$；

当 $a=0$ 时，不等式的解集为 $(-\infty,1)$；

当 $0<a<1$ 时，不等式的解集为 $(-\infty,1)\cup\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$；

当 $a=1$ 时，不等式的解集为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$；

当 $a>1$ 时，不等式的解集为 $\left(-\infty,\frac{1}{a}\right)\cup(1,+\infty)$.

(2)由 $f(x)+x+a-b\geqslant0$，

得 $a(x^2-x+1)+1-b\geqslant0$，

由 $x\in(0,1)$，得 $\frac{3}{4}\leqslant x^2-x+1<1$，

故 $a\geqslant\frac{b-1}{x^2-x+1}$ 对 $x\in(0,1)$ 恒成立，

故存在实数 $b\in[2,3]$，

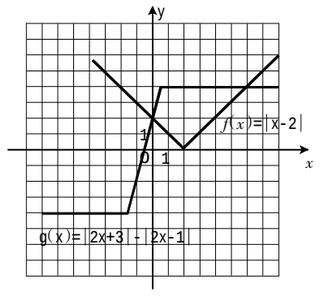
使得不等式 $a\geqslant\frac{4(b-1)}{3}$ 成立，

所以 $a\geqslant\frac{4\times(2-1)}{3}=\frac{4}{3}$，

所以 a 的最小值为 $\frac{4}{3}$.

22.**解**：(1)因为函数 $f(x)=|x-2|=\begin{cases}x-2,x\geqslant2,\\2-x,x<2,\end{cases}$ $g(x)=|2x+3|-|2x-1|=\begin{cases}4,x\geqslant\frac{1}{2},\\4x+2,-\frac{3}{2}<x<\frac{1}{2},\\-4,x\leqslant-\frac{3}{2},\end{cases}$

所以 y=f(x)和 y=g(x)的图象如图所示.



(第 22 题图)

(2)由(1)得 $f(6)=4$，$g\left(\frac{1}{2}\right)=4$，因为 $f(x+a)\geqslant g(x)$，所以把函数 $f(x)$ 的图象向左或向右平移 $|a|$ 个单位后，得到 $f(x+a)$ 的图象不在 $g(x)$ 的图象下方，

结合 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象，

得 $a\geqslant6-\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$.

所以 a 的取值范围为 $\left[\frac{11}{2},+\infty\right)$.

第 9 期

第2~3版同步周测

一、选择题

1~6.CACDDD

7~12.CBCAAD

二、填空题

13.$\frac{5\pi}{12}$　　14.$2\sqrt{2}$

15.$7\sqrt{6}$　　16.$-\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{3}$

三、解答题

17.**解**：(1)由正弦定理，得

$3\sin A\cos B+\sin C\cos B+\sin B\cos C=0$，

$3\sin A\cos B+\sin(B+C)=0$，

所以 $3\sin A\cos B+\sin A=0$，

即 $\sin A(3\cos B+1)=0$，

因为 $A\in(0,\pi)$，

所以 $\sin A>0$，所以 $\cos B=-\frac{1}{3}$，

所以 $\sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(2)由余弦定理，得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

即 $12=9+c^2-2\times3c\times\left(-\frac{1}{3}\right)$，

化简得 $c^2+2c-3=0$，

解得 $c=1$ 或 $c=-3$(舍去)，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times3\times1\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}$.

18.**解**：(1)因为 $a=3c$，$b=\sqrt{2}$，$\cos B=\frac{2}{3}$，所以由余弦定理的推论，得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{10c^2-2}{6c^2}=\frac{2}{3}$，解得 $c=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2)因为 $\frac{\sin A}{a}=\frac{\cos B}{2b}$，所以由正弦定理，得 $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\cos B}{2b}$，所以 $2\sin B=\cos B$，$\cos B>0$，因为 $\sin^2B+\cos^2B=1$，所以 $\sin B=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\sin\left(B+\frac{\pi}{2}\right)=\cos B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

19.**解**：(1)因为 $\triangle ABC$ 的外接圆直径为 $\frac{200\sqrt{57}}{3}$，所以由正弦定理，得 $\frac{BC}{\sin\angle CAB}=\frac{200\sqrt{57}}{3}$，即 $\frac{200}{\sin\angle CAB}=\frac{200\sqrt{57}}{3}$，

所以 $\sin\angle CAB=\frac{3}{\sqrt{57}}$，$\cos\angle CAB=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{57}}$.

在 $\triangle ABC$ 中，$\sin B=\sin(\angle CAB+\angle ACB)=\sin\angle CAB\cos\angle ACB+\cos\angle CAB\sin\angle ACB=\frac{3}{\sqrt{57}}\times\frac{1}{2}+\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{57}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15}{2\sqrt{57}}$，

由正弦定理，得 $\frac{AC}{\sin B}=\frac{200\sqrt{57}}{3}$，

所以 $AC=\frac{200\sqrt{57}}{3}\times\frac{15}{2\sqrt{57}}=500$m.所以道路 AC 的长是 500m.

(2)由题意得 $AD=BC=200$m，

$\cos\angle AED=\cos60°=\frac{1}{2}$，

在 $\triangle ADE$ 中，由余弦定理，得 $AD^2=AE^2+ED^2-2AE\cdot ED\cdot\cos\angle AED=(AE+ED)^2-3AE\cdot ED$，

所以 $(AE+ED)^2-AD^2=3AE\cdot ED\leqslant3\cdot\left(\frac{AE+ED}{2}\right)^2$，

所以 $\frac{1}{4}(AE+ED)^2\leqslant AD^2=200^2$，当且仅当 AE=ED=200 时，等号成立.

所以 $AE+DE\leqslant400$，则 $AD+AE+DE\leqslant200+400=600$m.

所以栅栏总长的最大值为 600m.

20.**解**：(1)由 $ac\sin A=2\sin C(a^2+c^2-b^2)$，得 $a^2c=2c(a^2+c^2-b^2)$，则 $a^2=2b^2-2c^2$，①

又 $b-c=\frac{2\sin A}{\sin B+\sin C}$，所以由正弦定理，得 $(b-c)(b+c)=2a$，即 $b^2-c^2=2a$，②

联立①②，可得 $a^2=4a$，所以 $a=4$.

设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为R，

因为 $\pi R^2=8\pi$，所以 $R=2\sqrt{2}$，

由正弦定理，得 $\sin A=\frac{a}{2R}=\frac{4}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)因为 A=C，所以 BC=AB=4，$\sin A=\sin C$，代入 $ac\sin A=2\sin C(a^2+c^2-b^2)$，得 $a^2+c^2-b^2=\frac{1}{2}ac$，

所以 $\cos B=\frac{1}{4}$，$B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

在 $\triangle ABM$ 中，由正弦定理，得 $\frac{AB}{\sin\angle AMB}=\frac{AM}{\sin B}$，故 $\sin\angle AMB=\frac{AB\cdot\sin B}{AM}=\frac{4\times\frac{\sqrt{15}}{4}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 AM>AB，所以 $\angle AMB<\angle B$，

所以 $\angle AMB=\frac{\pi}{3}$.

21.**解**：(1)选①时，因为 $2a\cos A-b\cos C-c\cos B=0$，由正弦定理，得 $\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin A\cos A$，

所以 $\sin A=2\sin A\cos A$，即 $\sin A(2\cos A-1)=0$，又 $A\in(0,\pi)$，所以 $\sin A>0$，则 $\cos A=\frac{1}{2}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

选②时，由 $b\sin B+c\sin C=\frac{a\sin B\sin C}{\sin A}+a\sin A$，结合正弦定理，得 $b^2+c^2-a^2=bc$，

所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，则 $A=\frac{\pi}{3}$.

选③时，$2\tan A\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-A\right)=\sqrt{3}$，化简得 $\sin\left(2A-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为A为锐角，则 $2A-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，所以 $2A-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$，解得 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{5\sqrt{3}}{4}$，

所以 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{5\sqrt{3}}{4}$，由(1)知 $A=\frac{\pi}{3}$，则 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $bc=5$.

由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，又 $a=2\sqrt{3}$，$A=\frac{\pi}{3}$，所以 $12=(b+c)^2-3bc$，

所以 $b+c=3\sqrt{3}$.

故 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=5\sqrt{3}$.

22.(1)**证明**：设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为R. 由正弦定理，得 $\frac{b}{\sin\angle ABC}=\frac{c}{\sin C}=2R$，

所以 $b=2R\sin\angle ABC$，$c=2R\sin C$，

因为 $b^2=ac$，所以 $b\cdot2R\sin\angle ABC=a\cdot2R\sin C$，即 $b\sin\angle ABC=a\sin C$.

又 $BD\sin\angle ABC=a\sin C$，

所以 $BD=b$.

(2)**解**：由(1)知 $BD=b$，因为 $AD=2DC$，所以 $AD=\frac{2}{3}b$，$DC=\frac{1}{3}b$.

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理，得 $\cos\angle BDA=\frac{BD^2+AD^2-AB^2}{2BD\cdot AD}=\frac{b^2+\left(\frac{2}{3}b\right)^2-c^2}{2b\cdot\frac{2}{3}b}=\frac{13b^2-9c^2}{12b^2}$.

在 $\triangle CBD$ 中，由余弦定理，得 $\cos\angle BDC=\frac{BD^2+CD^2-BC^2}{2BD\cdot CD}=\frac{b^2+\left(\frac{1}{3}b\right)^2-a^2}{2b\cdot\frac{1}{3}b}=\frac{10b^2-9a^2}{6b^2}$.

因为 $\angle BDA+\angle BDC=\pi$，

所以 $\cos\angle BDA+\cos\angle BDC=0$，即 $\frac{13b^2-9c^2}{12b^2}+\frac{10b^2-9a^2}{6b^2}=0$，得 $11b^2=3c^2+6a^2$.

又 $b^2=ac$，所以 $3c^2-11ac+6a^2=0$，

即 $(3c-2a)(c-3a)=0$，

解得 $c=3a$ 或 $c=\frac{2}{3}a$.

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理的推论，得 $\cos\angle ABC=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-ac}{2ac}$，

当 $c=3a$ 时，$\cos\angle ABC=\frac{7}{6}>1$(舍去)；

当 $c=\frac{2}{3}a$ 时，$\cos\angle ABC=\frac{7}{12}$.

综上，$\cos\angle ABC=\frac{7}{12}$.

第 10 期

第 2~3 版同步周测

一、选择题

1~6.DBADCB

7~12.ACBAAB

二、填空题

13.1　14.$\frac{211}{81}$　15.6　16.$\frac{10}{11}$

三、解答题

17.**解**:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,因为 $a_1+a_2=-20$,$S_2+S_3=-47$,

所以$\begin{cases}2a_1+d=-20,\\2a_1+d+3a_1+3d=-47,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=-11,\\d=2.\end{cases}$

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2n-13$.

(2)由(1)得,$S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}=n^2-12n=(n-6)^2-36$,

所以当 n=6 时,S_n 取得最小值,最小值为-36.

18.(1)**证明**:因为 $a_{n+1}^2=a_n(a_{n+1}+2a_n)$,

所以$(a_{n+1}-2a_n)(a_{n+1}+a_n)=0$,

又 $a_n>0$,

所以 $a_{n+1}-2a_n=0$,即 $a_{n+1}=2a_n$,

所以数列$\{a_n\}$是首项为 1,公比为 2 的等比数列,所以 $a_n=2^{n-1}$.

(2)**解**:由(1)可得 $S_{2n}=\frac{1-2^{2n}}{1-2}=2^{2n}-1$,

又 $S_{2n}>\frac{160}{9}a_n$,

所以 $2^{2n}-1>\frac{160}{9}\times2^{n-1}$,

即 $9\cdot(2^n)^2-80\cdot2^n-9>0$,

解得 $2^n>9$,或 $2^n<-\frac{1}{9}$(舍去),

则 n≥4,

所以 n 的最小值为 4.

19.**解**:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,等比数列$\{b_n\}$的公比为 q(q>0),

由题意,得$\begin{cases}b_1(q+q^2)=6,\\a_3+d+2(a_3+3d)=b_1q^4,\end{cases}$

即$\begin{cases}q+q^2=6,\\3+d+2(3+3d)=q^4,\end{cases}$

解得$\begin{cases}q=2,\\d=1,\end{cases}$

所以 $b_n=2^{n-1}$,$a_n=a_3+(n-3)d=3+n-3=n$.

(2)由(1)可得 $c_n=(2a_n-1)\cdot b_{n+1}=(2n-1)\cdot2^n$,

所以 $S_n=1\times2^1+3\times2^2+5\times2^3+\cdots+(2n-1)\cdot2^n$,

又 $2S_n=1\times2^2+3\times2^3+\cdots+(2n-3)\cdot2^n+(2n-1)\cdot2^{n+1}$,

两式相减,得 $-S_n=2+2(2^2+2^3+\cdots+2^n)-(2n-1)\cdot2^{n+1}=2+2\times\frac{2^2(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n-1)\cdot2^{n+1}$,

所以 $S_n=(2n-3)\cdot2^{n+1}+6$.

20.(1)**解**:因为 $a_1,3a_2,9a_3$ 成等差数列,所以 $6a_2=a_1+9a_3$,

因为$\{a_n\}$是首项为 1 的等比数列,设其公比为 q,则 $6q=1+9q^2$,解得 $q=\frac{1}{3}$,

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$,

所以 $b_n=\frac{na_n}{3}=n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

(2)**证明**:由(1)知 $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$,$b_n=n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$,

所以 $S_n=\frac{1\times\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

$T_n=1\times\frac{1}{3}+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$,①

所以 $\frac{1}{3}T_n=1\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+(n-1)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$,②

①-②,得 $\frac{2}{3}T_n=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n-n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=\frac{\frac{1}{3}\times\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}-n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]-n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$,

所以 $T_n=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

所以 $T_n-\frac{S_n}{2}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left[\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]=-\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n<0$,

所以 $T_n<\frac{S_n}{2}$.

21.**解**:(1)设数列$\{a_n\}$的公差为 d(d≠0),因为 $a_1=2$,且 a_1,a_3,a_9 成等比数列,所以$(2+2d)^2=2(2+8d)$,即 $d^2-2d=0$,又 d≠0,解得 d=2.

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2+2(n-1)=2n$.

(2)由(1)知 $a_n=2n$,因为当 $n\geqslant2$ 时,$\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n-1}}=a_n$,所以 $\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n-1}}=2n$,$\frac{1}{b_{n-1}}-\frac{1}{b_{n-2}}=2(n-1)$,$\frac{1}{b_{n-2}}-\frac{1}{b_{n-3}}=2(n-2)$,…,$\frac{1}{b_3}-\frac{1}{b_2}=2\times3$,$\frac{1}{b_2}-\frac{1}{b_1}=2\times2$,

累加得 $\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_1}=2[n+(n-1)+\cdots+3+2]=2\times\frac{(n+2)(n-1)}{2}=n^2+n-2$,又 $b_1=\frac{1}{2}$,所以当 n≥2 时,$\frac{1}{b_n}=n^2+n=n(n+1)$,$b_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,当 n=1 时,$b_1=\frac{1}{2}$,上式成立.所以 $b_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}(n\in N_+)$.

所以数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$.

22.**解**:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,则 $a_n=a_1+(n-1)d$,又 $a_{n+1}+a_n=2n+3$,

所以$\begin{cases}a_1+a_2=2a_1+d=5,\\a_3+a_2=2a_1+3d=7,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=2,\\d=1,\end{cases}$

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=n+1$.

(2)因为 $a_{n+1}+a_n=2n+3$,①

当 n≥2 时,$a_n+a_{n-1}=2(n-1)+3$,②

①-②,得 $a_{n+1}-a_{n-1}=2$,

所以数列$\{a_{2i}\}$是以 a_2 为首项,2 为公差的等差数列,数列$\{a_{2i-1}\}$是以 a_1 为首项,2 为公差的等差数列.

又 $a_1+a_2=5$,所以 $a_2=5-a_1$,

当 n 为偶数时,$a_n=a_2+\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot2=n+3-a_1$;

当 n 为奇数时,$a_n=a_1+\left(\frac{n+1}{2}-1\right)\cdot2=n-1+a_1$.

所以 $a_n=\begin{cases}n-1+a_1(n\text{ 为奇数}),\\n+3-a_1(n\text{ 为偶数}).\end{cases}$

因为对任意的 $n\in N_+$,都有 $a_n+n^2\geqslant0$ 成立,

当 n 为奇数时,$a_n+n^2=n-1+a_1+n^2\geqslant0$ 恒成立,

所以 $-a_1\leqslant n^2+n-1$ 在 n 为奇数时恒成立,所以 $-a_1\leqslant1$,所以 $a_1\geqslant-1$;

同理,当 n 为偶数时,$a_n+n^2=n+3-a_1+n^2\geqslant0$ 恒成立,

所以 $a_1\leqslant n^2+n+3$ 在 n 为偶数时恒成立,所以 $a_1\leqslant9$.

综上,a_1 的取值范围是[-1,9].

第11期

第 2~3 版同步周测

一、选择题

1~6.BABDBC

7~12.BCCBDA

二、填空题

13.45　14.$\frac{7}{4}$

15.4　16.$\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$

三、解答题

17.**解**:(1)设$\{a_n\}$的公差为 d,$d\neq0$.

因为 a_1,a_2,a_7 成等比数列,

所以 $a_2^2=a_1a_7$,

所以$(a_1+d)^2=a_1(a_1+6d)$,

整理,得 $d^2-4da_1=0$.

又 $d\neq0$,所以 $d=4a_1$,①

又 $a_4=a_1+3d=26$,②

联立①②,解得$\begin{cases}a_1=2,\\d=8.\end{cases}$

所以 $a_n=2+8(n-1)=8n-6(n\in N_+)$.

(2)因为 $b_n=(-1)^{n+1}a_n=(-1)^{n+1}(8n-6)$,

所以 $T_{511}=b_1+b_2+\cdots+b_{511}=2-10+18-26+\cdots+4066-4074+4082=(2-10)+(18-26)+\cdots+(4066-4074)+4082=(-8)\times255+4082=2042$.

18.(1)**证明**:$2S_n=-a_n+n$,

当 $n\geqslant2$ 时,$2S_{n-1}=-a_{n-1}+n-1$,

两式相减,得 $2a_n=-a_n+a_{n-1}+1$,

即 $a_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+\frac{1}{3}$.

所以 $a_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(a_{n-1}-\frac{1}{2}\right)$,

所以数列$\left\{a_n-\frac{1}{2}\right\}$为等比数列.

(2)**解**:由 $2S_1=-a_1+1$,得 $a_1=\frac{1}{3}$.

由(1)知,数列$\left\{a_n-\frac{1}{2}\right\}$是以$-\frac{1}{6}$为首项,$\frac{1}{3}$为公比的等比数列.

所以 $a_n-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$,

所以 $a_n=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{2}$,

所以 $a_n-1=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{2}$,

所以 $T_n=\frac{-\frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{2}=\frac{1}{4}\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n-1\right]-\frac{n}{2}$.

19.(1)**解**:因为数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是公差为$\frac{1}{2}$的等差数列,且$\frac{S_1}{1}=a_1=4$,所以$\frac{S_n}{n}=4+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1}{2}n+\frac{7}{2}$,则 $S_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{7}{2}n$,

所以当 n≥2 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n+3$,

又当 n=1 时,$a_1=4$,上式成立.

所以 $a_n=n+3(n\in N_+)$.

(2)**证明**:$b_n=\frac{1}{(n+1)a_n^2}=\frac{1}{(n+1)(n+3)^2}<\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right]$,

当 n=1 时,$b_1=\frac{1}{32}<\frac{3}{41}$成立;

当 $n\geqslant2$ 时,$b_1+b_2+\cdots+b_n<\frac{1}{32}+\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{3\times4}-\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{4\times5}-\frac{1}{5\times6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right]=\frac{1}{32}+\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{3\times4}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right]<\frac{1}{32}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3\times4}=\frac{7}{96}<\frac{3}{41}$.

综上,$b_1+b_2+\cdots+b_n<\frac{3}{41}$,$n\in N_+$.

20.(1)**证明**:因为 $a_{n+1}-3a_n+2a_{n-1}=1$,所以 $a_{n+1}-a_n-2a_n+2a_{n-1}=1$,即 $a_{n+1}-a_n=2(a_n-a_{n-1})+1$,所以 $a_{n+1}-a_n+1=2(a_n-a_{n-1}+1)$.

由 $a_1=1$,$a_2=4$,得 $a_2-a_1+1=4$.

所以数列$\{a_{n+1}-a_n+1\}$是首项为 4,公比为 2 的等比数列.

故数列$\{a_{n+1}-a_n+1\}$是等比数列.

(2)**解**:由(1)得 $a_{n+1}-a_n+1=4\cdot2^{n-1}$,则 $a_{n+1}-a_n=4\cdot2^{n-1}-1=2^{n+1}-1$.

所以 $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=2^n-1+2^{n-1}-1+\cdots+2^2-1+1=2^n+2^{n-1}+\cdots+2^2-(n-1)+1=\frac{4(1-2^{n-1})}{1-2}-n+2=2^{n+1}-n-2$.

所以 $S_n=(2^{n+1}+2^n+2^{n-1}+\cdots+2^2)-(1+2+3+\cdots+n)-2n=\frac{4(1-2^n)}{1-2}-\frac{n(n+1)}{2}-2n=2^{n+2}-\frac{n^2+5n}{2}-4$.

21.(1)**证明**:当 $n=1$ 时,$b_1=S_1$,因为 $\frac{2}{S_1}+\frac{1}{b_1}=2$,所以 $\frac{2}{b_1}+\frac{1}{b_1}=2$,解得 $b_1=\frac{3}{2}$.因为 b_n 为数列$\{S_n\}$的前 n 项积,所以当 $n\geqslant2$ 时,$\frac{b_n}{b_{n-1}}=S_n$,代入 $\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$,得 $\frac{2b_{n-1}}{b_n}+\frac{1}{b_n}=2$,所以 $b_n-b_{n-1}=\frac{1}{2}$,所以数列$\{b_n\}$是以$\frac{3}{2}$为首项,$\frac{1}{2}$为公差的等差数列.

(2)**解**:由题意,得 $a_1=S_1=b_1=\frac{3}{2}$,由(1)得 $b_n=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n+2}{2}$,代入 $\frac{2}{S_n}+\frac{1}{b_n}=2$,可得 $S_n=\frac{n+2}{n+1}$.当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n+2}{n+1}-\frac{n+1}{n}=-\frac{1}{n(n+1)}$,当 n=1 时,$a_1=\frac{3}{2}$,上式不成立.

所以 $a_n=\begin{cases}\frac{3}{2},n=1,\\-\frac{1}{n(n+1)},n\geqslant2.\end{cases}$

22.**解**:(1)因为数列$\{b_n\}$是等差数列,所以 $b_1+b_8=b_4+b_5$,$b_4+b_5+b_6=3b_5$,由 $\frac{b_5^2}{b_1+b_6+b_8}=1$,得 $\frac{b_5^2}{3b_5}=1$,

所以 $b_5=3$,

又 $b_3=2$,设等差数列$\{b_n\}$的公差为 d,所以 $d=\frac{b_5-b_3}{5-3}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$,所以 $b_n=b_3+(n-3)d=2+\frac{1}{2}(n-3)=\frac{n+1}{2}$.

所以 $b_1=1$,则 $S_n=b_1\cdot2^{n+2}-4=2^{n+2}-4$,

当 n=1 时,$a_1=S_1=4$;

当 n≥2 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n+2}-4-2^{n+1}+4=2^{n+1}$,

当 n=1 时,$a_1=4$,上式成立.

所以 $a_n=2^{n+1}(n\in N_+)$.

(2)由(1)得 $a_nb_n=2^{n+1}\cdot\frac{n+1}{2}=(n+1)\cdot2^n$,

因为 $T_n=2\times2^1+3\times2^2+4\times2^3+\cdots+(n+1)\cdot2^n$,①

所以 $2T_n=2\times2^2+3\times2^3+4\times2^4+\cdots+(n+1)\cdot2^{n+1}$,②

①-②,得 $-T_n=4+2^2+2^3+\cdots+2^n-(n+1)\cdot2^{n+1}=4+\frac{4(1-2^{n-1})}{1-2}-(n+1)\cdot2^{n+1}=-n\cdot2^{n+1}$,

所以 $T_n=n\cdot2^{n+1}$.

因为 $\frac{kT_n}{a_n}>\frac{6n^2}{n^2-9n+36}$对一切 $n\in N_+$恒成立,

所以 $k>\frac{6n}{n^2-9n+36}$对一切 $n\in N_+$恒成立,即 $k>\frac{6}{n+\frac{36}{n}-9}$对一切 $n\in N_+$恒成立.

令 $g(n)=\frac{6}{n+\frac{36}{n}-9}(n\in N_+)$,则 $g(n)=\frac{6}{n+\frac{36}{n}-9}\leqslant\frac{6}{2\sqrt{36}-9}=2$,当且仅当 $n=6$ 时,等号成立.

所以 k>2,

所以实数 k 的取值范围是(2,+∞).