第 8 期

第 3~4 版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.B

提示： 原式 $=2^{\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$.故选B.

2.B

提示： 原式 $=\left(\sqrt{x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{-\frac{2}{3}}}\right)^{-\frac{8}{5}}$

$=\left(\sqrt{x^{-\frac{1}{3}}}\right)^{-\frac{8}{5}}=\left(x^{-\frac{1}{6}}\right)^{-\frac{8}{5}}=x^{\frac{4}{15}}$.故选B.

3.D

提示： 将点 $P\left(3,\frac{1}{27}\right)$ 代入 $f(x)=a^x$ 中，

得 $a^3=\frac{1}{27}$，解得 $a=\frac{1}{3}$.

所以 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.所以 $f(-2)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9$.故选D.

4.C

提示： 根据题意，得第四年该林场造林 $1000\times(1+20\%)^3=1728$（公顷）.故选C.

5.D

提示： 由已知，结合指数函数的图象，可得 $a^2-1>1$，解得 $|a|>\sqrt{2}$.故选D.

6.B

提示： 因为 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$，所以 $(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=x+2+x^{-1}=5\Rightarrow x+x^{-1}=3\Rightarrow(x+x^{-1})^2=x^2+2+x^{-2}=9\Rightarrow x^2+x^{-2}=7$.故选B.

7.B

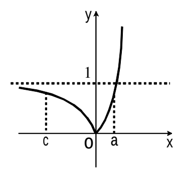
提示： 因为指数函数 $y=a^x$ 恒过定点 $(0,1)$，令 $x+5=0$，得 $x=-5$，$f(-5)=5$，所以 $f(x)$ 恒过定点 $(-5,5)$，即 $m=-5$，$n=5$.

所以 $g(x)=-5+5^x$，该函数恒过定点 $(0,-4)$，则其图象不经过第二象限，故选B.

8.D

提示： 因为 $c<b<a$，所以 $3^c<3^b<3^a$.作出 $f(x)=|3^x-1|=\begin{cases}1-3^x, x<0,\\ 3^x-1, x\geqslant 0\end{cases}$ 的大致图象如图所示.

由图可知，要使 $c<b<a$ 且 $f(c)>f(a)>f(b)$ 成立，则有 $c<0$ 且 $a>0$，故必有 $3^c<1$ 且 $3^a>1$，又 $f(c)-f(a)>0$，即 $1-3^c-(3^a-1)>0$，所以 $3^c+3^a<2$.故选D.



（第 8 题图）

二、多项选择题

9.AB

提示： 因为 $y=1.5^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，$2.5<3.2$，所以 $1.5^{2.5}<1.5^{3.2}$，故A错误；由指数函数的性质知 $1.7^{0.2}>1.7^0=1$，$0.9^{2.1}<0.9^0=1$，所以 $1.7^{0.2}>0.9^{2.1}$，故B错误；因为 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，$\frac{1}{5}<\frac{1}{2}$，所以 $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$，故C正确；因为 $y=0.9^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，所以 $0.9^{0.5}<0.9^{0.4}$，因为 $y=x^{0.5}=\sqrt{x}$ 是 $[0,+\infty)$ 上的增函数，所以 $0.8^{0.5}<0.9^{0.5}$，所以 $0.8^{0.5}<0.9^{0.4}$，故D正确.故选AB.

10.AC

提示： 若 $a>1$，则 $y=a^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，$y=x^2+ax+a-3$ 图象的对称轴为 $x=-\frac{a}{2}<0$，故A符合，B不符合；若 $0<a<1$，则 $y=a^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，$a-3<0$，$y=x^2+ax+a-3$ 的图象与 y 轴的负半轴相交，故C符合，D不符合.故选AC.

11.ACD

提示： 由图可知，$y=a^t$ 的图象经过点 $(1,3)$，所以 $a^1=3$，得 $a=3$，所以 $y=3^t$.

因为每个月面积的改变量为 $3^{t+1}-3^t=2\times3^t$，所以每个月的增长率为 $\frac{2\times3^t}{3^t}\times100\%=200\%$，但增加的面积不相等，故A正确，B错误；当 $t=4$ 时，$y=3^4=81>80$，故C正确；对于D，有 $3^{t_1}=2$，$3^{t_2}=4$，$3^{t_3}=8$，所以 $(3^{t_2})^2=3^{t_1}\cdot3^{t_3}$，则 $t_1+t_3=2t_2$，故D正确.故选ACD.

12.BCD

提示： 令 $t=2^x>0$，则 $y=f(x)=t^2-2t+2=(t-1)^2+1$.因为 $f(x)$ 的值域为 $[1,2]$，即 $y\in[1,2]$，所以 $t\in(0,2]$，即 $2^x\in(0,2]$，解得 $x\in(-\infty,1]$，所以 $M\subseteq(-\infty,1]$，从而可知A错误，B，C，D均正确.故选BCD.

三、填空题

13.$[0,2)\cup(2,+\infty)$

提示： 由题意可知 $\begin{cases}2^x-1\geqslant0,\\ x-2\neq0,\end{cases}$ 解得 $x\geqslant0$，且 $x\neq2$.

所以 $f(x)$ 的定义域为 $[0,2)\cup(2,+\infty)$.

14.$\left[\frac{1}{2},8\right]$

提示： 由 $2^{x^2+1}\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}=2^{4-2x}$，得 $x^2+1\leqslant4-2x$，

解得 $-3\leqslant x\leqslant1$.

又函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $[-3,1]$ 上为减函数，

而当 $x=1$ 时，$y=\frac{1}{2}$，当 $x=-3$ 时，$y=8$，

所以函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的值域是 $\left[\frac{1}{2},8\right]$.

15.$(1,3]$

提示： 根据题意，可得 $a>1$ 且 $a^0\geqslant3a-8$，解得 $1<a\leqslant3$.故实数 a 的取值范围是 $(1,3]$.

16.$\frac{17}{12}$

提示： $\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

$=1+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}$

$=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}}$，

舍去 $\sqrt{2}-1$ 得到逼近 $\sqrt{2}$ 的一个有理数为 $1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}=\frac{17}{12}$.

四、解答题

17.**解：**（1）原式 $=\left(2^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{2}}\right)^6-4\times\left[\left(\frac{4}{7}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{4}}\times8^{\frac{1}{4}}-1=2^2\times3^3-4\times\frac{7}{4}-16^{\frac{1}{4}}-1=108-7-2-1=98$.

（2）原式 $=\frac{\left[a^3b^2(ab^2)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}}{ab^2\cdot b^{\frac{1}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}}=\frac{\left(a^{\frac{10}{3}}b^{\frac{8}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{7}{3}}}$

$=\frac{a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{7}{3}}}=\frac{a}{b}$.

18.**解：**（1）设 $f(x)=a^x$.因为 $f(x)$ 的图象过点 $(3,8)$，所以 $8=a^3$，解得 $a=2$.所以 $f(x)=2^x$.

因为 $g(x)$ 的图象与 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，所以 $g(x)=2^{-x}$.

（2）由（1）可知 $g(x)=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，故 $g(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数，因为 $g(2x^2-3x+1)>g(x^2+2x-5)$，所以 $2x^2-3x+1<x^2+2x-5$，解得 $2<x<3$.

所以 x 的取值范围为 $(2,3)$.

19.**解：** 当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，则 $f(x)$ 的最大值 $M=f(2)=a^2$，最小值 $N=f(1)=a$；

当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递减，则 $f(x)$ 的最大值 $M=f(1)=a$，最小值 $N=f(2)=a^2$.

（1）因为 $M+N=6$，所以 $a^2+a=6$，

解得 $a=2$，或 $a=-3$（舍去）.所以 $a=2$.

（2）因为 $M=2N$，

当 $a>1$ 时，有 $a^2=2a$，解得 $a=2$，或 $a=0$（舍去）；

当 $0<a<1$ 时，有 $a=2a^2$，解得 $a=\frac{1}{2}$，或 $a=0$（舍去）.

综上所述，$a=2$，或 $a=\frac{1}{2}$.

20.**解：**（1）因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

所以 $f(-x)=-f(x)$，

即 $\frac{a-2^{-x}}{1+2^{-x}}=-\frac{a-2^x}{1+2^x}\Rightarrow\frac{a\cdot2^x-1}{1+2^x}=\frac{2^x-a}{1+2^x}\Rightarrow a\cdot2^x-1=2^x-a\Rightarrow a(2^x+1)=2^x+1$，所以 $a=1$.

（2）$f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数，证明如下：

由（1）知 $f(x)=\frac{1-2^x}{1+2^x}$.$\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{1-2^{x_1}}{1+2^{x_1}}-\frac{1-2^{x_2}}{1+2^{x_2}}=\frac{2(2^{x_2}-2^{x_1})}{(1+2^{x_1})(1+2^{x_2})}$.

由 $x_1<x_2$，得 $0<2^{x_1}<2^{x_2}$，所以 $2^{x_2}-2^{x_1}>0$，$1+2^{x_1}>0$，$1+2^{x_2}>0$.

所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$.

所以 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数.

（3）由（2）知，$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上是减函数，

所以 $f(2)\leqslant f(x)\leqslant f(0)$，即 $-\frac{3}{5}\leqslant f(x)\leqslant0$.

所以 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的值域为 $\left[-\frac{3}{5},0\right]$.

21.**解：**（1）当 $0\leqslant t<1$ 时，因为线段 OA 过原点 $O(0,0)$ 及点 $A(1,8)$，所以 $y=8t$；

当 $t\geqslant1$ 时，把点 $A(1,8)$，$B(7,1)$ 代入 $y=ka^t$，得 $\begin{cases}ka=8,\\ ka^7=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ k=8\sqrt{2},\end{cases}$ 所以 $y=8\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t$.

故 $y=\begin{cases}8t, 0\leqslant t<1,\\ 8\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t, t\geqslant1.\end{cases}$

（2）设第一次服药后过 t 小时服第二次药，则 $t\geqslant1$ 且 $8\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t\geqslant2\Rightarrow\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t\geqslant\frac{1}{4\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5$，

解得 $t\leqslant5$.所以第一次服药后最迟5h服第二次药，即最迟上午11:00第二次服药.

（3）第二次服药后再过3h，每毫升血液中含第一次服药后的剩余量为 $y_1=8\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

含第二次服药后的剩余量为 $y_2=8\sqrt{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=4$，此时两次服药后的剩余量为 $\frac{\sqrt{2}}{2}+4\approx4.7$，

故该病人每毫升血液中含药量约为4.7μg.

22.**解：**（1）由 $f(x)+g(x)=a^x$①，得 $f(-x)+g(-x)=a^{-x}$.

结合 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$g(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，

得 $-f(x)+g(x)=a^{-x}$.②

联立①②，解得 $f(x)=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})$，$g(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$.

由 $f(1)=\frac{1}{2}(a-a^{-1})=\frac{3}{4}$，解得 $a=-\frac{1}{2}$（舍去），或 $a=2$.

故 $f(x)=\frac{1}{2}(2^x-2^{-x})$，$g(x)=\frac{1}{2}(2^x+2^{-x})$.

（2）由（1）可知不等式 $g(2x)+2>mg(x)$，

即 $\frac{1}{2}(2^{2x}+2^{-2x})+2>m\cdot\frac{1}{2}(2^x+2^{-x})$.

令 $t=2^x+2^{-x}$，则 $t\geqslant2\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}=2$，当且仅当 $2^x=2^{-x}$，即 $x=0$ 时，等号成立，即 $t\in[2,+\infty)$.

所以 $g(2x)+2>mg(x)$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 成立，即 $\frac{1}{2}(t^2-2)+2>\frac{1}{2}mt$ 对 $\forall t\in[2,+\infty)$ 成立，

即 $m<t+\frac{2}{t}$ 对 $\forall t\in[2,+\infty)$ 成立.

因为 $t+\frac{2}{t}\geqslant2\sqrt{t\cdot\frac{2}{t}}=2\sqrt{2}$，当且仅当 $t=\sqrt{2}$ 时，等号成立，但 $\sqrt{2}\notin[2,+\infty)$，

而易知函数 $y=t+\frac{2}{t}$ 在 $[2,+\infty)$ 上为增函数，当 $t=2$ 时，$y=3$，所以 $y=t+\frac{2}{t}$ 在 $[2,+\infty)$ 上的最小值为3，所以 $m<3$.

故实数 m 的取值范围为 $(-\infty,3)$.

扫码免费下载习题讲解 ppt

第 5 期

第 2~3 版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.D

提示：“不超过”即“≤”，故原规定用数学关系式可表示为 $a+b+c\leqslant130$.故选D.

2.C

提示： 因为 $a^2=13+2\sqrt{22}$，$b^2=13+12=13+2\sqrt{36}$，$c^2=13+2\sqrt{42}$，又 $\sqrt{22}<\sqrt{36}<\sqrt{42}$，所以 $a^2<b^2<c^2$，所以 $c>b>a$.故选C.

3.B

提示： 因为 $x>0$，$y>0$，所以 $x+4y\geqslant2\sqrt{4xy}=8$，当且仅当 $x=4y$，即 $x=4$，$y=1$ 时，等号成立，所以 $x+4y$ 的最小值为8.故选B.

4.C

提示： 集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,x^2-2x-3\leqslant0\}=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,-1\leqslant x\leqslant3\}=\{-1,0,1,2,3\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\frac{x+1}{x}>0\right\}=\{x\,|\,x(x+1)>0\}=\{x\,|\,x<-1，或x>0\}$，所以 $C=\{x\,|\,x\in A，且x\notin B\}=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,-1\leqslant x\leqslant0\}=\{-1,0\}$.故选C.

5.C

提示： 由已知，可得方程 $x^2-ax+1=0$ 中，$\Delta=a^2-4<0$，解得 $-2<a<2$.故选C.

6.C

提示： 题设等价于当 $\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant2$ 时，不等式 $m<-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}$ 有解，则 $m<\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}\right)_{\max}$.

因为 $\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant2$，所以 $\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{x}\leqslant3$，所以 $-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}=-\left(\frac{1}{x}-2\right)^2+4$ 的最大值为4.所以 $m<4$.故选C.

7.B

提示： 由 $2x+y=axy$，得 $\frac{2}{y}+\frac{1}{x}=a$.又 x,y,a 均为正实数，所以 $x+2y=\frac{1}{a}(x+2y)\left(\frac{2}{y}+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{a}\left(5+\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}\right)\geqslant\frac{1}{a}\left(5+2\sqrt{\frac{2x}{y}\cdot\frac{2y}{x}}\right)=\frac{9}{a}$，当且仅当 $\frac{2x}{y}=\frac{2y}{x}$ 且 $\frac{2}{y}+\frac{1}{x}=a$，即 $x=y=\frac{3}{a}$ 时，等号成立.结合题设，可得 $\frac{9}{a}=3$，解得 $a=3$.故选B.

8.C

提示： 由已知，得 $AB=AD+BD=a+b$，$OC=\frac{AB}{2}=\frac{a+b}{2}$，$OD=OB-DB=\frac{a+b}{2}-b=\frac{a-b}{2}$.故在 Rt△$OCD$ 中，$CD^2=OC^2+OD^2=\frac{a^2+b^2}{2}$.因为 $OC\leqslant CD$，所以 $\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.故选C.

二、多项选择题

9.BC

提示： 设房间数量为 x，由题意可得 $5(x-1)+1\leqslant3x+6<5x$，解得 $3<x\leqslant5$.又 $x\in\mathbf{N}_+$，所以 $x=4$ 或5.故选BC.

10.AD

提示： 对于A，$x^2+\frac{4}{x^2}\geqslant2\sqrt{x^2\cdot\frac{4}{x^2}}=4$，当且仅当 $x^2=\frac{4}{x^2}$，即 $x^2=2$ 时，等号成立，故A正确；对于B，当 $x<0$ 时，$x+\frac{9}{x}-2=-\left[(-x)+\frac{9}{-x}\right]-2\leqslant-2\sqrt{(-x)\cdot\frac{9}{-x}}-2=-8$，当且仅当 $-x=\frac{9}{-x}$，即 $x=-3$ 时，等号成立，故B错误；对于C，$\frac{x^2+10}{\sqrt{x^2+6}}=\sqrt{x^2+6}+\frac{4}{\sqrt{x^2+6}}\geqslant2\sqrt{\sqrt{x^2+6}\cdot\frac{4}{\sqrt{x^2+6}}}=4$，当且仅当 $\sqrt{x^2+6}=\frac{4}{\sqrt{x^2+6}}$ 时，等号成立，此时实数 x 不存在，故C错误；对于D，当 $x>1$ 时，$x-1>0$，则 $\frac{1}{x-1}+x+1=\frac{1}{x-1}+(x-1)+2\geqslant2\sqrt{\frac{1}{x-1}\cdot(x-1)}+2=4$，当且仅当 $\frac{1}{x-1}=x-1$，即 $x=2$ 时，等号成立，故D正确.故选AD.

11.ABD

提示： 当 $x>0$，$y>0$ 时，$\frac{2xy}{x+y}\leqslant\frac{2xy}{2\sqrt{xy}}=\sqrt{xy}$，当且仅当 $x=y$ 时，等号成立，故A正确；

$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=2+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant2+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=4$，当且仅当 $\frac{y}{x}=\frac{x}{y}$，即 $x=y$ 时，等号成立，所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant\frac{4}{x+y}$，故B正确；

$\sqrt{xy}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\sqrt{xy}\cdot\frac{x+y}{xy}=\frac{x+y}{\sqrt{xy}}\geqslant\frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}=2$，当且仅当 $x=y$ 时，等号成立，所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant\frac{2}{\sqrt{xy}}$，故C错误；

由 $x^3+y^3\geqslant2\sqrt{x^3y^3}$，$x+y\geqslant2\sqrt{xy}$，当且仅当 $x=y$ 时，等号成立，得 $(x^3+y^3)(x+y)\geqslant4x^2y^2$，所以 $x^3+y^3\geqslant\frac{4x^2y^2}{x+y}$，故D正确.故选ABD.

12.BC

提示： 解不等式 $x^2-2x-3\leqslant0$，得 $-1\leqslant x\leqslant3$.因为不等式 $x^2-2x-3\leqslant0$ 对 $\forall x\in\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant a+2\}$ 恒成立，所以 $\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant a+2\}\subseteq\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant3\}$，则 $a\geqslant-1$ 且 $a+2\leqslant3$，解得 $-1\leqslant a\leqslant1$.结合选项可知选BC.

三、填空题

13.$\{a-b\,|\,-2<a-b<0\}$

提示： 因为 $-1<b<1$，所以 $-1<-b<1$.又 $-1<a<1$，所以 $-2<a-b<2$.又 $a<b$，所以 $-2<a-b<0$.

14.$\{x\,|\,-1<x<2\}$

提示： 由表中后三组对应值，得 $\begin{cases}a-b+c=0,\\ c=2,\\ a+b+c=2,\end{cases}$

解得 $a=-1$，$b=1$，$c=2$，所以 $y=-x^2+x+2$.

故不等式 $ax^2+bx+c>0$ 即 $-x^2+x+2>0$，即 $x^2-x-2<0$，解得 $-1<x<2$.

15.$2-\sqrt{2}$，$2-2\sqrt{2}$

提示： 因为 $a+b=2$，$a>0$，$b>0$，所以 $a-\frac{2}{b}=2-\left(b+\frac{2}{b}\right)\leqslant2-2\sqrt{b\cdot\frac{2}{b}}=2-2\sqrt{2}$，当且仅当 $b=\frac{2}{b}$，即 $b=\sqrt{2}$ 时，等号成立，此时 $a=2-\sqrt{2}$.

16.乙

提示： 由方案甲，可得提价为 $y_1=(1+a\%)(1+b\%)-1$；由方案乙，可得提价为 $y_2=\left(1+\frac{a+b}{2}\%\right)^2-1$.

因为 $y_1-y_2=[(1+a\%)(1+b\%)-1]-\left[\left(1+\frac{a+b}{2}\%\right)^2-1\right]$

$=a\%\cdot b\%-\left(\frac{a+b}{2}\%\right)^2=-\left(\frac{a-b}{2}\%\right)^2<0$，

所以 $y_1<y_2$.所以提价较多的是方案乙.

四、解答题

17.**证明：** 因为 $c<d<0$，所以 $-c>-d>0$.

又 $a>b>0$，所以 $a-c>b-d>0$.

所以 $(a-c)^2>(b-d)^2>0$.所以 $\frac{1}{(a-c)^2}<\frac{1}{(b-d)^2}$.

因为 $e<0$，所以 $\frac{e}{(a-c)^2}>\frac{e}{(b-d)^2}$.

18.**解：**（1）当 $a=2$ 时，$N=(x+1)(x+4)$.

因为 $M-N=(x+2)(x+3)-(x+1)(x+4)=(x^2+5x+6)-(x^2+5x+4)=2>0$，所以 $M>N$.

（2）当 $a\in\mathbf{R}$ 时，$M-N=(x+2)(x+3)-(x+1)(x+4)+a-2=a$.

所以当 $a<0$ 时，$M<N$；当 $a=0$ 时，$M=N$；当 $a>0$ 时，$M>N$.

19.**解：**（1）当 $a=1$ 时，不等式转化为 $\frac{x-3}{x+1}\leqslant0$，即 $(x+1)(x-3)\leqslant0$ 且 $x+1\neq0$，解得 $-1<x\leqslant3$.所以 $P=\{x\,|\,-1<x\leqslant3\}$.

（2）因为 $1\notin P$，所以 $\frac{a-3}{1+a}>0$，或 $1+a=0$，解得 $a>3$，或 $a\leqslant-1$.

故实数 a 的取值范围为 $\{a\,|\,a\leqslant-1，或a>3\}$.

20.**解：**（1）当 $2x-3\geqslant0$，即 $x\geqslant\frac{3}{2}$ 时，不等式 $|2x-3|<x$ 可化为 $2x-3<x$，解得 $x<3$，所以 $\frac{3}{2}\leqslant x<3$；

当 $2x-3<0$，即 $x<\frac{3}{2}$ 时，不等式 $|2x-3|<x$ 化为 $3-2x<x$，解得 $x>1$，所以 $1<x<\frac{3}{2}$.

综上，不等式 $|2x-3|<x$ 的解集为 $\{x\,|\,1<x<3\}$.所以不等式 $x^2-mx+n<0$ 的解集为 $\{x\,|\,1<x<3\}$.

所以方程 $x^2-mx+n=0$ 的两实数根为1和3.

由根与系数的关系，得 $m=1+3=4$，$n=1\times3=3$.

所以 $m-n=4-3=1$.

（2）因为 $a,b,c\in(0,1)$，且 $ab+bc+ac=m-n=1$，

所以 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\geqslant\frac{1}{2}(2ab+2bc+2ac)+2(ab+bc+ac)=3(ab+bc+ca)=3$，

当且仅当 $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，等号成立.

所以 $a+b+c$ 的最小值是 $\sqrt{3}$.

21.**解：**（1）由已知得，当 $x=1$ 时，$y=3$；当 $x=2$ 时，$y=12$，即 $\begin{cases}a+c=3,\\ 4a+c=12,\end{cases}$ 解得 $a=3$，$c=0$.所以 $y=3x^2$.

又投资243万元，x 年收入共 $90x$ 万元，所以 x 年获得纯利润为 $y_1=90x-3x^2-243\ (x\in\mathbf{N}_+)$.

令 $y_1>0$，即 $90x-3x^2-243>0$，解得 $3<x<27\ (x\in\mathbf{N}_+)$.

所以从第4年开始获取纯利润.

（2）对于方案①，年平均利润 $y_2=\frac{90x-3x^2-243}{x}=90-3\left(x+\frac{81}{x}\right)\leqslant90-3\times2\sqrt{x\cdot\frac{81}{x}}=36$，

当且仅当 $\frac{81}{x}=x$，即 $x=9$ 时，y_2 取得最大值36，所以方案①共获利润 $36\times9+138=462$（万元）.

对于方案②，纯利润总和 $y_1=90x-3x^2-243=-3(x-15)^2+432\ (x\in\mathbf{N}_+)$，

当 $x=15$ 时，纯利润总和最大，为432万元，所以方案②共获利润 $432+30=462$（万元）.

两种方案盈利相同，但方案①时间比较短，所以选择方案①.

22.**解：**（1）当 $m+1=0$，即 $m=-1$ 时，$y<0$ 即 $x-2<0$，解得 $x<2$，不合题意；

当 $m+1\neq0$，即 $m\neq-1$ 时，

由题意，得 $\begin{cases}m+1>0,\\ \Delta=m^2-4(m+1)(m-1)\leqslant0,\end{cases}$

解得 $m\geqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

综上，m 的取值范围为 $\left\{m\,\middle|\,m\geqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$.

（2）由 $y\geqslant m$，得 $(m+1)x^2-mx-1\geqslant0$，

即 $[(m+1)x+1](x-1)\geqslant0$.

当 $m+1=0$，即 $m=-1$ 时，不等式为 $x-1\geqslant0$，解得 $x\geqslant1$；

当 $m+1>0$，即 $m>-1$ 时，不等式为 $\left(x+\frac{1}{m+1}\right)(x-1)\geqslant0$，

由 $-\frac{1}{m+1}<0<1$，解不等式得 $x\leqslant-\frac{1}{m+1}$，或 $x\geqslant1$；

当 $m+1<0$，即 $-2<m<-1$ 时，不等式为 $\left(x+\frac{1}{m+1}\right)(x-1)\leqslant0$，

由 $m>-2$，得 $-\frac{1}{m+1}>1$，

所以解不等式得 $1\leqslant x\leqslant-\frac{1}{m+1}$.

综上所述，当 $m=-1$ 时，不等式的解集为 $\{x\,|\,x\geqslant1\}$；当 $m>-1$ 时，不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,x\leqslant-\frac{1}{m+1}，或x\geqslant1\right\}$；当 $-2<m<-1$ 时，不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,1\leqslant x\leqslant-\frac{1}{m+1}\right\}$.

（3）由不等式 $y\geqslant0$ 的解集为 D，且 $\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant1\}\subseteq D$，

可知当 $-1\leqslant x\leqslant1$ 时，不等式 $(m+1)x^2-mx+m-1\geqslant0$ 恒成立，即 $m(x^2-x+1)\geqslant-x^2+1$ 恒成立，

因为 $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ 恒成立，

所以 $m\geqslant\frac{-x^2+1}{x^2-x+1}=-1+\frac{2-x}{x^2-x+1}$ 恒成立.

当 $-1\leqslant x\leqslant1$ 时，$2-x>0$，

所以 $\frac{2-x}{x^2-x+1}=\frac{2-x}{(2-x)^2-3(2-x)+3}=\frac{1}{2-x+\frac{3}{2-x}-3}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{(2-x)\cdot\frac{3}{2-x}}-3}=\frac{1}{2\sqrt{3}-3}=\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$，

当且仅当 $2-x=\frac{3}{2-x}$，即 $x=2-\sqrt{3}$ 时，等号成立.

从而可得 $m\geqslant-1+\frac{2\sqrt{3}+3}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

所以 m 的取值范围为 $\left\{m\,\middle|\,m\geqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$.

②

第6期

第3~4版同步周测参考答案

一、单项选择题

1.C

提示:对于A,当$x=-1$时,$y=-2\notin N$,不满足要求;对于B,当$x=4$时,$y=x+2=6\notin N$,不满足要求;对于C,集合M中的每一个元素都能在N中找到唯一对应元素,故满足要求;对于D,当$x=-1$时,$y=\frac{1}{2}\notin N$,不满足要求.故选C.

2.B

提示:由题意,得$x-2>0$,解得$x>2$.故选B.

3.B

提示:由题意知$f(4)=3$,$f(f(4))=f(3)=2$,故A错误;y的值构成集合$\{1,2,3,4\}$,则$f(x)$的值域为$\{1,2,3,4\}$,故B正确,C错误;若$4\leqslant x_1<x_2<6$,则$f(x_1)=f(x_2)=3$,故$f(x)$在区间$[4,8]$上不单调,故D错误.故选B.

4.D

提示:根据函数的定义知,任意一个数x都有唯一确定的数y和它对应,只有选项D的图象满足,故选D.

5.A

提示:因为$x>0$,所以$f(x)=\frac{x}{2x^2+1}=\frac{1}{2x+\frac{1}{x}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$,当且仅当$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$时,等号成立.故选A.

6.C

提示:当$x<0$时,$-x>0$,代入$f(x)$在$(0,+\infty)$上的解析式,得$f(-x)=-x(1-x)$.因为$f(x)$是奇函数,所以$f(x)=-f(-x)=x(1-x)$.故选C.

7.C

提示:因为$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且$x_1\neq x_2$,都有$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$,所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.所以$f(1)<f(2)<f(3)$.因为$f(-x)=f(x)$,所以$f(-3)=f(3)$,$f(-2)=f(2)$,$f(-1)=f(1)$.所以$f(1)<f(-2)<f(-3)$,$f(-1)<f(-2)<f(3)$.故选C.

8.A

提示:令$-x^2-2x+4\geqslant -x+2$,解得$-2\leqslant x\leqslant 1$;

令$-x^2-2x+4<-x+2$,解得$x<-2$,或$x>1$.

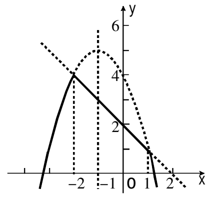
结合新定义,得

$g(x)=(-x^2-2x+4)*(-x+2)$

$=\begin{cases}-x+2,-2\leqslant x\leqslant 1,\\ -x^2-2x+4,x<-2,\text{或}x>1,\end{cases}$

画出$g(x)$的图象如下图中实线所示,可知$g(x)$的最大值为$g(-2)=4$,没有最小值,

所以$g(x)$的值域为$(-\infty,4]$,故选A.

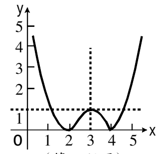


(第8题图)

二、多项选择题

9.AC

提示:画出$f(x)$的图象如图所示,可知选AC.



(第9题图)

10.AB

提示:对于A,其定义域为$\mathbf{R}$,设$F(x)=f(-x)$,则有$F(-x)=f(-(-x))=f(x)=-f(-x)=-F(x)$,故$y=f(-x)$为奇函数;对于B,其定义域为$\mathbf{R}$,设$F(x)=f(x)+x^3$,则有$F(-x)=f(-x)+(-x)^3=-f(x)-x^3=-[f(x)+x^3]=-F(x)$,故$y=f(x)+x^3$为奇函数;对于C,其定义域为$\{x|x\neq 0\}$,设$F(x)=\frac{f(x)}{x}$,则有$F(-x)=\frac{f(-x)}{-x}=\frac{f(x)}{x}=F(x)$,故$y=\frac{f(x)}{x}$是偶函数;对于D,其定义域为$[0,+\infty)$,不关于原点对称,不是奇函数.故选AB.

11.BC

提示:当$x_0>0$时,令$f(x_0)=-x_0$,得$x_0^2=-x_0$,解得$x_0=0$,或$x_0=-1$,显然都不满足$x_0>0$,故A不正确;当$x_0<0$时,令$f(x_0)=x_0^2$,得$-x_0=x_0^2$,解得$x_0=0$,或$x_0=-1$,显然$x_0=-1$满足$x_0<0$,故B正确;当$x<0$时,$f(x)=-x$单调递减,当$x>0$时,$f(x)=x^2$单调递增,又$f(-x)=\begin{cases}x,-x<0,\\ x^2,-x>0,\end{cases}$即$f(-x)=\begin{cases}x,x>0,\\ x^2,x<0,\end{cases}$当$x<0$时,$f(-x)=x^2$单调递减,当$x>0$时,$f(-x)=x$单调递增,因此$f(-x)$与$f(x)$的单调区间和单调性相同,故C正确;不妨令$x_1<x_2$,$f(x_1)=f(x_2)=\frac{1}{4}$,则$x_1=-\frac{1}{4}$,$x_2=\frac{1}{2}$,此时$x_1+x_2=\frac{1}{4}>0$,故D不正确.故选BC.

12.AD

提示:由$2-x^2\geqslant 0$,得$x^2\leqslant 2$.令$t=x^2+1$,则$x^2=t-1\in[0,2]$,所以$x=\pm\sqrt{t-1}$ $(1\leqslant t\leqslant 3)$,所以$f(t)=\sqrt{2-(t-1)}+\sqrt{t-1}=\sqrt{3-t}+\sqrt{t-1}$,即$f(x)=\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1}$,其中$1\leqslant x\leqslant 3$,故C错误,D正确;又$[f(x)]^2=(\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1})^2=2+2\sqrt{-x^2+4x-3}=2+2\sqrt{-(x-2)^2+1}\in[2,4]$,所以$f(x)\in[\sqrt{2},2]$,从而可知A正确,B错误.故选AD.

三、填空题

13.$[0,+\infty)$

提示:若函数$y=x$与$y=\sqrt{x^2}$表示同一个函数,则$y=\sqrt{x^2}=|x|=x$,当$x\geqslant 0$时,满足条件,故需要注明定义域为$[0,+\infty)$.

14.$(-\infty,-1]$

提示:因为$y=f(x)$为$\mathbf{R}$上的增函数,所以偶函数$y=f(|x|)$在$[0,+\infty)$上单调递增,在$(-\infty,0]$上单调递减,而$y=f(|x+1|)$的图象是将$y=f(|x|)$的图象向左平移1个单位长度后得到的,所以$y=f(|x+1|)$的单调递减区间是$(-\infty,-1]$.

15.3

提示:方案1的月话费为$30+(320-48)\times 0.6=193.2$(元);方案2的月话费为$98+(320-170)\times 0.6=188$(元);方案3的月话费为168元,其他方案的月话费至少为268元.经比较,选择方案3较合算.

16.4或-6

提示:由函数$f(x)$的图象,可知$f(x)$在区间$[-1,2]$上的最大值只能在$x=-1,1,2$处取得.

①若$f(x)$在$x=-1$处取得最大值7,则$|3+a|=7$,解得$a=4$,或$a=-10$,经检验,$a=-10$不合题意,故$a=4$;②若$f(x)$在$x=1$处取得最大值7,则$|a-1|=7$,解得$a=8$,或$a=-6$,经检验,$a=8$不合题意,故$a=-6$;③若$f(x)$在$x=2$处取得最大值7,则$|a|=7$,解得$a=\pm 7$,经检验,$a=\pm 7$均不合题意,舍去.

综上,$a=4$或-6.

四、解答题

17.**解**:(1)$f(2a-x)+f(x)=\frac{(2a-x)+1-a}{a-(2a-x)}+\frac{x+1-a}{a-x}=\frac{a-x+1}{x-a}+\frac{x+1-a}{a-x}=\frac{2(a-x)}{x-a}=-2$.

(2)由$f(x)=\frac{x+1-a}{a-x}=-1+\frac{1}{a-x}$,可知$f(x)$在$[a,+\infty)$是增函数,又$f\left(a+\frac{1}{2}\right)=-3$,$f(a+1)=-2$,故$f(x)$的值域为$[-3,-2]$.

18.**解**:(1)当$a=-1$时,$f(x)=\sqrt{-x^2-4x+5}$,则$-x^2-4x+5\geqslant 0$,解得$-5\leqslant x\leqslant 1$.所以$f(x)$的定义域为$[-5,1]$.

(2)若$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,则$ax^2+4ax+5\geqslant 0$在$\mathbf{R}$上恒成立.

当$a=0$时,不等式为$5\geqslant 0$,显然成立;

当$a\neq 0$时,则$\begin{cases}a>0,\\ \Delta=16a^2-4\times 5\times a\leqslant 0,\end{cases}$解得$0<a\leqslant\frac{5}{4}$.

综上,实数a的取值范围为$\left[0,\frac{5}{4}\right]$.

19.**解**:(1)因为$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$,

所以$f(x)=x^3-3x$ $(x\leqslant -2,\text{或}x\geqslant 2)$.

(2)设$f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$,则$3f(x+1)-2f(x-1)=3[a(x+1)+b]-2[a(x-1)+b]=ax+5a+b=2x+17$,

所以$a=2$,$5a+b=17\Rightarrow b=7$.所以$f(x)=2x+7$.

(3)由$2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$, ①

把x换成$\frac{1}{x}$,得$2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\frac{3}{x}$, ②

①×2−②,得$3f(x)=6x-\frac{3}{x}$,所以$f(x)=2x-\frac{1}{x}$.

20.**解**:(1)由函数$f(x)=\frac{ax-b}{4-x^2}$是定义在$(-2,2)$上的奇函数,知$f(0)=\frac{-b}{4}=0$,所以$b=0$.

经检验,$b=0$时,$f(x)=\frac{ax}{4-x^2}$是$(-2,2)$上的奇函数,满足题意.

又$f(1)=\frac{a}{4-1^2}=\frac{1}{3}$,解得$a=1$,

故$f(x)=\frac{x}{4-x^2}$,$x\in(-2,2)$.

(2)$f(x)$是$(-2,2)$上的增函数.证明如下:

$\forall x_1,x_2\in(-2,2)$,且$x_1<x_2$,

则$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{4-x_1^2}-\frac{x_2}{4-x_2^2}=\frac{(x_1-x_2)(4+x_1x_2)}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)}$.

由$x_1<x_2$,得$x_1-x_2<0$;

由$x_1,x_2\in(-2,2)$,得$4+x_1x_2>0$,$4-x_1^2>0$,$4-x_2^2>0$.

所以$f(x_1)-f(x_2)<0$,即$f(x_1)<f(x_2)$.

所以$f(x)$是$(-2,2)$上的增函数.

(3)因为$f(x)$是奇函数,

所以由$f(t-1)+f(t)<0$,得$f(t-1)<-f(t)=f(-t)$.

又$f(x)$是$(-2,2)$上的增函数,

所以$\begin{cases}t-1<-t,\\ -2<t-1<2,\\ -2<t<2,\end{cases}$解得$-1<t<\frac{1}{2}$.

所以原不等式的解集为$\left\{t\,\middle|\,-1<t<\frac{1}{2}\right\}$.

21.**解**:(1)当$a>0$时,$f(x)$在$(-\infty,-1)$上不可能单调递增;

当$a<0$时,$f(x)$图象的对称轴为$x=-\frac{a-1}{2a}$,由条件得$-\frac{a-1}{2a}\geqslant -1$,解得$a\leqslant -1$.

故实数a的取值范围为$(-\infty,-1]$.

(2)$\frac{f(x)}{x}=a\left(x+\frac{1}{x}\right)+a-1$,

当$x\in[1,2]$时,$x+\frac{1}{x}\in\left[2,\frac{5}{2}\right]$.

因为不等式$\frac{f(x)}{x}\geqslant 2$在$x\in[1,2]$上恒成立,所以$\frac{f(x)}{x}$在$x\in[1,2]$上的最小值大于或等于2,

所以$\begin{cases}a>0,\\ 2a+a-1\geqslant 2,\end{cases}$或$\begin{cases}a<0,\\ \frac{5}{2}a+a-1\geqslant 2,\end{cases}$解得$a\geqslant 1$.

故实数a的取值范围为$[1,+\infty)$.

(3)由已知,得$g(x)=ax^2+\frac{1}{x}+a$在$(2,3)$上是增函数.

设$2<x_1<x_2<3$,则$g(x_1)<g(x_2)$,即$ax_1^2+\frac{1}{x_1}+a<ax_2^2+\frac{1}{x_2}+a$,得$a(x_1+x_2)(x_1-x_2)<\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}$.

因为$2<x_1<x_2<3$,所以$x_1+x_2>0$,$x_1-x_2<0$,

所以$a>\frac{1}{x_1x_2(x_1+x_2)}$在$(2,3)$上恒成立,

而$\frac{1}{x_1x_2(x_1+x_2)}\in\left(\frac{1}{54},\frac{1}{16}\right)$,所以$a\geqslant\frac{1}{16}$.

故实数a的取值范围为$\left[\frac{1}{16},+\infty\right)$.

22.**解**:(1)当$m=4$时,$y=4f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{4}+8,0<x\leqslant 4,\\ \frac{2x+28}{x-1},x>4,\end{cases}$

当$0<x\leqslant 4$时,$\frac{x^2}{4}+8\geqslant 4$恒成立,符合题意;

当$x>4$时,令$\frac{2x+28}{x-1}\geqslant 4$,解得$4<x\leqslant 16$.

综上,$0<x\leqslant 16$.所以自来水达到有效净化一共可持续16天.

(2)$y=mf(x)=\begin{cases}\frac{mx^2}{16}+2m,0<x\leqslant 4,\\ \frac{m(x+14)}{2x-2},x>4.\end{cases}$

当$0<x\leqslant 4$时,$y=\frac{mx^2}{16}+2m$,又$m>0$,可知y单调递增,则$2m<y\leqslant 3m$;

当$4<x\leqslant 7$时,$y=\frac{m(x+14)}{2x-2}=\frac{m(x-1)+15m}{2(x-1)}=\frac{m}{2}+\frac{15m}{2(x-1)}$,又$m>0$,可知$y$单调递减,则$\frac{7m}{4}\leqslant y<3m$.

综上,$\frac{7m}{4}\leqslant y\leqslant 3m$.

为使$4\leqslant y\leqslant 10$恒成立,只要$\frac{7m}{4}\geqslant 4$且$3m\leqslant 10$即可,解得$\frac{16}{7}\leqslant m\leqslant\frac{10}{3}$.

所以应该投放的药剂质量m的最小值为$\frac{16}{7}$.

第7期

第3~4版章节测试参考答案

一、单项选择题

1.D

提示:对于A,要使$\sqrt{x-4}$与$\sqrt{3-x}$有意义,则$\begin{cases}x-4\geqslant 0,\\ 3-x\geqslant 0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x\geqslant 4,\\ x\leqslant 3,\end{cases}$则定义域为$\varnothing$,故A不是函数;对于B,当$x>0$时,有两个$y$与$x$对应,故B不是函数;对于C,当$x=1$时,$y=\pm 1$,即有两个$y$与$x=1$对应,故C不是函数;对于D,满足任取定义域内的$x$,都有唯一的$y$与$x$对应,是函数.故选D.

2.D

提示:A为奇函数,B为偶函数,C为奇函数,对于D,函数的定义域为$[0,+\infty)$,不关于原点对称,故该函数既不是奇函数也不是偶函数.故选D.

3.D

提示:$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,且$f(-x)=|(-x)^3+1|+|(-x)^3-1|=|-x^3+1|+|-x^3-1|=|x^3-1|+|x^3+1|=f(x)$,故$f(x)$为偶函数,其图象关于$y$轴对称.故选D.

4.B

提示:由$f(x)$的定义域为$[-3,3]$,得$-3\leqslant x-1\leqslant 3$,解得$-2\leqslant x\leqslant 4$.故函数$f(x-1)$的定义域为$[-2,4]$.故选B.

5.B

提示:因为$f(x)=\frac{1}{x^2-2x}$,所以$x^2-2x\neq 0$,解得$x\neq 0$,且$x\neq 2$.故$f(x)$的定义域为$\{x|x\neq 0,\text{且}x\neq 2\}$.由$x^2-2x=(x-1)^2-1$,可知函数$y=x^2-2x$在$(-\infty,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,而函数$y=\frac{1}{x}$在$(-\infty,0)$,$(0,+\infty)$上单调递减,由复合函数的单调性,可知$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,0)$,$(0,1)$.故选B.

6.C

提示:甲在接棒前要进行助跑,达到接棒速度接到后要进行快跑加速,达到最大速度保持匀速,到第三棒前又要减速一段达到下一人可接棒的速度,可知C图象符合条件,故选C.

7.B

提示:由$y=\sqrt[3]{x}$单调递增,当$a<0$时,$\sqrt[3]{x}\leqslant\sqrt[3]{a}<0$,而$x^2\geqslant 0$,此时$f(x)$的值域不是$\mathbf{R}$,不符合题意;当$a\geqslant 0$时,由$\sqrt[3]{x}\leqslant\sqrt[3]{a}$,而$x^2>a^2$,若$f(x)$的值域为$\mathbf{R}$,必有$a^2\leqslant\sqrt[3]{a}$,可得$0\leqslant a\leqslant 1$.故选B.

8.D

提示:$\forall x\in(0,+\infty)$,均有$f(x)\cdot f\left(f(x)+\frac{3}{2x}\right)=\frac{1}{4}$,

令$t=f(x)+\frac{3}{2x}$,则$f(x)\cdot f(t)=\frac{1}{4}$, ①

且$f\left(f(t)+\frac{3}{2t}\right)=\frac{1}{4f(t)}=\frac{1}{4f\left(f(x)+\frac{3}{2x}\right)}=f(x)$,

结合$f(x)$在$(0,+\infty)$上是减函数,得$f(t)+\frac{3}{2t}=x$,

故$f(t)=x-\frac{3}{2t}=x-\frac{3}{2\left[f(x)+\frac{3}{2x}\right]}$,

代入①式,化简并整理,得

$[2xf(x)+1][4xf(x)-3]=0$,所以$f(x)=-\frac{1}{2x}$(不满足单调递减,舍去),或$f(x)=\frac{3}{4x}$.

所以$g(x)=f(x)+3x=\frac{3}{4x}+3x\geqslant 2\sqrt{\frac{3}{4x}\cdot 3x}=3$,当且仅当$\frac{3}{4x}=3x$,即$x=\frac{1}{2}$时,等号成立.故选D.

二、多项选择题

9.AB

提示:对于A,其定义域为$\mathbf{R}$,$f(-x)=-(-x-x^3)=-f(x)$,故$f(x)$为奇函数,又由$y=-x$和$y=-x^3$在$\mathbf{R}$上都是减函数,知$f(x)=-x-x^3$在$\mathbf{R}$上也是减函数,符合题意;对于B,其定义域为$\mathbf{R}$,对于任意x,都有$f(-x)=-f(x)$,是奇函数,$f(x)$在$\mathbf{R}$上也为减函数,符合题意;对于C,$f(x)$不是奇函数,不符合题意;对于D,$f(x)$在其定义域上不是减函数,不符合题意.故选AB.

10.BD

提示:$\alpha=-1$时,$y=x^{-1}=\frac{1}{x}$,定义域为$\{x|x\neq 0\}$,故A不符合题意;$\alpha=1$时,$y=x$,定义域为$\mathbf{R}$且为奇函数,故B符合题意;$\alpha=\frac{1}{2}$时,$y=\sqrt{x}$,定义域为$[0,+\infty)$,故C不符合题意;$\alpha=3$时,$y=x^3$,定义域为$\mathbf{R}$且为奇函数,故D符合题意.故选BD.

11.AC

提示:函数$y=x^0$的定义域为$\{x|x\neq 0\}$,所以图象不是一条直线,故A错误;由幂函数的图象可知B正确;当$x>2$时,$y=\frac{1}{x}\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$,故C错误;由幂函数的图象过点$(4,2)$,可求得函数解析式为$y=\sqrt{x}$,其定义域为$[0,+\infty)$,且在定义域上为增函数,故D正确.故选AC.

12.BC

提示:产品的月利润$p(x)=-\frac{1}{5}x^2+6x-20=-\frac{1}{5}(x-15)^2+25$ $(0\leqslant x\leqslant 16)$,则当$x=15$时,月利润有最大值为25万元,即在已经投入研发经费9万元时需再投入6万元,才能使月利润最大,故B正确,D错误;利润率$y=\frac{p(x)}{x}\times 100\%=\frac{-\frac{1}{5}x^2+6x-20}{x}=-\left(\frac{1}{5}x+\frac{20}{x}\right)+6\leqslant -2\sqrt{\frac{1}{5}x\cdot\frac{20}{x}}+6=2$,当且仅当$\frac{1}{5}x=\frac{20}{x}$,即$x=10$万元时,利润率有最大值为200%,即在已经投入研发经费9万元时再投入1万元,才能使利润率最大,故A错误,C正确.故选BC.

三、填空题

13.-0.5

提示:因为$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数,所以$f(-x)=f(x)$.又$f(x+4)=f(x)$,所以$f(6.5)=f(2.5)=f(-1.5)=f(1.5)=-0.5$.

14.$(1,2)$

提示:由于函数$y=x^n$恒过定点$(1,1)$,故函数$f(x)=x^n+1$恒过定点$(1,2)$.

15.一、二

提示:易知幂函数$y=x^{n(n+1)}$(n为正整数)为偶函数,故它的图象关于y轴对称,又此幂函数的图象经过原点和点$(1,1)$,在$(0,+\infty)$上单调递增,故它的图象一定经过第一、第二象限.

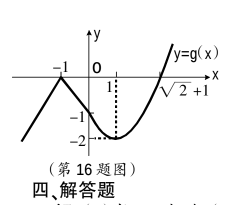
16.(1)1;(2)$[1,2]$

提示:(1)$f(-1)=1-|-1+1|=1$.

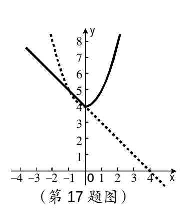
(2)令$g(x)=f(x)-f(-1)=f(x)-1=\begin{cases}x+1,x\leqslant -1,\\ -x-1,-1<x<0,\\ x^2-2x-1,x\geqslant 0,\end{cases}$其图象如下图所示.

①当$m=-2$时,在$[-2,0]$上$g(x)=\begin{cases}x+1,x\in[-2,-1],\\ -x-1,x\in(-1,0],\end{cases}$此时$|g(x)|_{\max}=1$;②当$m\in(-2,-1)$时,$|g(x)|_{\max}=-g(m+2)=-m^2-2m+1\in(1,2)$;③当$m\in[-1,0]$时,$|g(x)|_{\max}=2$.

综上,$|f(x)-f(-1)|$在区间$[m,m+2]$上的最大值的取值范围是$[1,2]$.



(第16题图)



(第17题图)

四、解答题

17.**解**:(1)当$a<0$时,由$f(a)=4-a=5$,得$a=-1$;

当$a\geqslant 0$时,由$f(a)=a^2+4=5$,得$a=1$.所以$a=\pm 1$.

(2)$f(x)$的图象如图中实线所示.

由$f(0)=4$,$f(2)=2^2+4=8$,$f(-2)=4-(-2)=6$,结合图象可知$f(x)$在区间$[-2,2]$上的值域为$[4,8]$.

18.**解**:(1)因为$h(x)=(m^2-5m+1)x^{m+1}$为幂函数,所以$m^2-5m+1=1$,解得$m=0$,或$m=5$.

当$m=0$时,$h(x)=x$是奇函数,符合题意;

当$m=5$时,$h(x)=x^6$是偶函数,不符合题意.

所以$m=0$.

(2)由(1)可得$g(x)=x+\sqrt{1-2x}$.令$t=\sqrt{1-2x}$,则$x=\frac{1-t^2}{2}$.所以$f(t)=g(x)=\frac{1-t^2}{2}+t=-\frac{1}{2}t^2+t+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(t-1)^2+1$.

当$x\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$时,$1-2x\in[0,3]$,

所以$t\in[0,\sqrt{3}]$.所以$[f(t)]_{\max}=f(1)=1$,$[f(t)]_{\min}=f(0)=\frac{1}{2}$.所以$g(x)$在$x\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$上的值域为$\left[\frac{1}{2},1\right]$.

19.(1)**证明**:$\forall x_1,x_2\in[1,+\infty)$,且$x_1<x_2$,

则$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1+x_1^2}-\frac{x_2}{1+x_2^2}=\frac{(x_1-x_2)\cdot(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)\cdot(1+x_2^2)}$.

由$x_1<x_2$,得$x_1-x_2<0$;由$x_1,x_2\in[1,+\infty)$,得$1-x_1x_2<0$.

又$1+x_1^2>0$,$1+x_2^2>0$,所以$f(x_1)-f(x_2)>0$,即$f(x_1)>f(x_2)$.

故$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递减.

(2)**解**:因为函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,

$f(-x)=\frac{-x}{1+(-x)^2}=-\frac{x}{1+x^2}=-f(x)$,

所以$f(x)$为奇函数.

所以$f(1+2x^2)+f(-x^2+2x-4)>0\Rightarrow f(1+2x^2)>-f(-x^2+2x-4)=f(x^2-2x+4)$.

因为$1+2x^2\geqslant 1$,$x^2-2x+4=(x-1)^2+3>1$,由(1)知$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递减,

所以原不等式$\Rightarrow 1+2x^2<x^2-2x+4$,解得$-3<x<1$.故原不等式的解集为$\{x|-3<x<1\}$.

(3)**解**:当$x=0$时,$f(x)=0$;当$x>0$时,$f(x)=\frac{1}{\frac{1}{x}+x}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot x}}=\frac{1}{2}$,即$f(x)\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$.

根据$f(x)$为奇函数,可得当$x<0$时,$f(x)\in\left[-\frac{1}{2},0\right)$.

综上,$f(x)$的值域为$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

20.**解**:(1)由函数$f(x)$的解析式,得$1-x^2\geqslant 0$,解得$-1\leqslant x\leqslant 1$,故$f(x)$的定义域为$[-1,1]$.

由$a=\sqrt{2}$,得$f(x)=0$即$|x+\sqrt{2}|-\sqrt{1-x^2}=0$,化简,得$2x^2+2\sqrt{2}x+1=0$,解得$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\in[-1,1]$.

所以$f(x)=0$的实数解为$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)由$f(x)$的定义域为$[-1,1]$,

若$f(x)$为奇函数,则必有$f(-1)+f(1)=0$,

代入可得$|a+1|+|a-1|=0$,于是$a=-1$且$a=1$,这样的a值不存在,所以$f(x)$不可能是奇函数.

若$f(x)$为偶函数,则必有$f(-1)=f(1)$,代入可得$|-1+a|=|1+a|$,解得$a=0$.

当$a=0$时,$f(x)=|x|-\sqrt{1-x^2}$,则$f(-x)=|-x|-\sqrt{1-(-x)^2}=|x|-\sqrt{1-x^2}=f(x)$,故$f(x)$为偶函数.

综上,当$a=0$时,$f(x)$为偶函数;当$a\neq 0$时,$f(x)$既不是奇函数也不是偶函数.

21.**解**:(1)根据题意,可得$p(x)=f(x)g(x)=\left(8+\frac{8}{x}\right)\cdot(143-|x-22|)=\begin{cases}8x+\frac{968}{x}+976,1\leqslant x\leqslant 22,x\in\mathbf{N}_+,\\ -8x+\frac{1320}{x}+1312,22<x\leqslant 30,x\in\mathbf{N}_+.\end{cases}$

(2)当$1\leqslant x\leqslant 22$,$x\in\mathbf{N}_+$时,$p(x)=8x+\frac{968}{x}+976\geqslant 2\sqrt{8x\cdot\frac{968}{x}}+976=1152$,当且仅当$8x=\frac{968}{x}$,即$x=11$时,等号成立,所以$p(x)$的最小值为1152;

当$22<x\leqslant 30$,$x\in\mathbf{N}_+$时,$p(x)=-8x+\frac{1320}{x}+1312$单调递减,所以$p(x)$的最小值为$p(30)=1116$,

又$1152>1116$,所以$m=1116$.因为$0.3m=334.8$千元$=33.48$万元>30万元,所以该园区能收回投资成本.

22.**解**:(1)当$a=1$时,$f(x)=\sqrt{|x+1|-1}-x$,所以$|x+1|-1\geqslant 0$,解得$x\leqslant -2$,或$x\geqslant 0$.

所以$f(x)$的定义域为$(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$.

(2)$f(ax)=\sqrt{|ax+a|-a}-ax$,

则$f(ax)=a$即$\sqrt{|ax+a|-a}=ax+a$.

设$ax+a=t\geqslant 0$,则$f(ax)=a$有2个不同的实数根等价于$\sqrt{t-a}=t$有2个不同的非负实根,

整理,得$t^2-t+a=0$有2个不同的非负实根,则$\Delta=1-4a>0\Rightarrow a<\frac{1}{4}$,而由根与系数的关系可得$a\geqslant 0$,又$a\neq 0$,

所以a的取值范围为$\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

(3)当$x\geqslant -a$时,

$f(x)=\sqrt{|x+a|-a}-x=\sqrt{x}-x=-\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$,

所以$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{4}\right)$上单调递增,在$\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$上单调递减,要使$f(x)$在$[-a,+\infty)$上具有单调性,则需$-a\geqslant\frac{1}{4}$,即当$a\leqslant -\frac{1}{4}$时,$f(x)$在$[-a,+\infty)$上单调递减;

当$x<-a$时,$f(x)=\sqrt{|x+a|-a}-x=\sqrt{-x-2a}-x$,

可知$f(x)$在$(-\infty,-2a]$上单调递减,

因为$a\leqslant -\frac{1}{4}<0$,所以$-2a>-a>0$,所以当$a\leqslant -\frac{1}{4}$时,$f(x)$在$(-\infty,-a]$上单调递减.

综上,存在实数$a\in\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right]$,使得$f(x)$在定义域$\mathbf{R}$内单调递减.