第12期

第 2~3 版同步周测

一、单项选择题

1~8.BABACBBA

二、多项选择题

9.AC　　10.ABC

11.BD　　12.AC

三、填空题

13.40　　14.2

15.4 或 5 或 32　　16.$\left(-\infty,\dfrac{2}{3}\right)$

四、解答题

17.**解**:(1)设$\{a_n\}$的公差为 d,$d\neq0$.
因为 a_1,a_2,a_7 成等比数列,
所以 $a_2^2=a_1a_7$,
所以$(a_1+d)^2=a_1(a_1+6d)$,
整理,得 $d^2-4da_1=0$.
又 $d\neq0$,所以 $d=4a_1$,　①
又 $a_4=a_1+3d=26$,　②
联立①②,解得$\begin{cases}a_1=2,\\d=8.\end{cases}$
所以 $a_n=2+8(n-1)=8n-6(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)因为 $b_n=(-1)^{n+1}a_n=(-1)^{n+1}(8n-6)$,
所以 $T_{511}=b_1+b_2+\cdots+b_{511}=2-10+18-26+\cdots+4066-4074+4082=(2-10)+(18-26)+\cdots+(4066-4074)+4082=(-8)\times255+4082=2042$.

18.(1)**证明**:$2S_n=-a_n+n$,
当 $n\geqslant2$ 时,$2S_{n-1}=-a_{n-1}+n-1$,
两式相减,得 $2a_n=-a_n+a_{n-1}+1$,
即 $a_n=\dfrac{1}{3}a_{n-1}+\dfrac{1}{3}$.
所以 $a_n-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}\left(a_{n-1}-\dfrac{1}{2}\right)$,
所以数列$\left\{a_n-\dfrac{1}{2}\right\}$为等比数列.

(2)**解**:由 $2S_1=-a_1+1$,得 $a_1=\dfrac{1}{3}$.

由(1)知,数列$\left\{a_n-\dfrac{1}{2}\right\}$是以$-\dfrac{1}{6}$为首项,$\dfrac{1}{3}$为公比的等比数列.

所以 $a_n-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=-\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$,

所以 $a_n=-\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+\dfrac{1}{2}$,

所以 $a_n-1=-\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n-\dfrac{1}{2}$,

所以 $T_n=\dfrac{-\dfrac{1}{6}\left[1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\dfrac{1}{3}}-\dfrac{n}{2}=\dfrac{1}{4}\cdot\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^n-1\right]-\dfrac{n}{2}$.

19.(1)**解**:因为数列$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$是公差为$\dfrac{1}{2}$的等差数列,且$\dfrac{S_1}{1}=a_1=4$,所以$\dfrac{S_n}{n}=4+\dfrac{1}{2}(n-1)=\dfrac{1}{2}n+\dfrac{7}{2}$,则 $S_n=\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{7}{2}n$,
所以当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n+3$,
又当 $n=1$ 时,$a_1=4$,上式成立.
所以 $a_n=n+3(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)**证明**:$b_n=\dfrac{1}{(n+1)a_n^2}=\dfrac{1}{(n+1)(n+3)^2}<\dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}-\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}\right]$,

当 $n=1$ 时,$b_1=\dfrac{1}{32}<\dfrac{3}{41}$成立;

当 $n\geqslant2$ 时,$b_1+b_2+\cdots+b_n<\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{2}\cdot\left[\dfrac{1}{3\times4}-\dfrac{1}{4\times5}+\dfrac{1}{4\times5}-\dfrac{1}{5\times6}+\cdots+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}-\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}\right]=\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{2}\cdot\left[\dfrac{1}{3\times4}-\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}\right]<\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3\times4}=\dfrac{7}{96}<\dfrac{3}{41}$.

综上 $b_1+b_2+\cdots+b_n<\dfrac{3}{41}$,$n\in\mathbf{N}_+$.

20.**解**:(1)由题意知,
当 $n=1$ 时,$S_1=2a_1-2$,得 $a_1=2$;
当 $n\geqslant2$ 时,由 $S_n=2a_n-2\Rightarrow S_{n-1}=2a_{n-1}-2$,
两式相减,得 $a_n=2a_{n-1}$,
所以数列$\{a_n\}$是首项、公比均为 2 的等比数列,所以 $a_n=2^n(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)由(1)知,$b_n=\dfrac{n}{a_n}=\dfrac{n}{2^n}$,

因为 $T_n=1\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{1}{2^2}+3\times\dfrac{1}{2^3}+\cdots+n\cdot\dfrac{1}{2^n}$,　①

所以 $\dfrac{1}{2}T_n=1\times\dfrac{1}{2^2}+2\times\dfrac{1}{2^3}+\cdots+n\cdot\dfrac{1}{2^{n+1}}$,　②

由①-②,得$\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}-n\cdot\dfrac{1}{2^{n+1}}=\dfrac{\dfrac{1}{2}\left[1-\dfrac{1}{2^n}\right]}{1-\dfrac{1}{2}}-n\cdot\dfrac{1}{2^{n+1}}=1-(n+2)\cdot\dfrac{1}{2^{n+1}}$,所以 $T_n=2-\dfrac{n+2}{2^n}$,显然有 $T_n<2$.

因为 $b_n=\dfrac{n}{2^n}>0$,所以 T_n 单调递增,且 $T_1=b_1=\dfrac{1}{2}$,所以$\dfrac{1}{2}\leqslant T_n<2$.

所以 T_n 的取值范围是$\left[\dfrac{1}{2},2\right)$.

21.**解**:(1)$A_n=n^2$,所以 $n\geqslant2$ 时,$a_n=A_n-A_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$.当 $n=1$ 时,$a_1=A_1=1$.所以 $n=1$ 时,适合上式. 所以 $a_n=2n-1$ ($n\in\mathbf{N}_+$).因为 $a_{n+1}-a_n=2(b_{n+1}-b_n)$,所以 $b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{2}\times2=1$,又 $b_1=2$,所以数列$\{b_n\}$是首项为 2,公差为 1 的等差数列.所以 $B_n=2n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times1=\dfrac{n^2+3n}{2}$.

(2)因为对任意 $n\in\mathbf{N}_+$,都有 $a_n=B_n$,
所以 $a_{n+1}-a_n=B_{n+1}-B_n=b_{n+1}$.
所以 $b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)=\dfrac{1}{2}b_{n+1}$.
所以 $b_{n+1}=2b_n$,$b_1>0$.所以数列$\{b_n\}$是等比数列,公比为 2.

所以 $B_n=\dfrac{1-2^n}{1-2}b_1=(2^n-1)b_1$.

又$\dfrac{b_{n+1}}{a_na_{n+1}}=\dfrac{B_{n+1}-B_n}{B_{n+1}B_n}=\dfrac{1}{B_n}-\dfrac{1}{B_{n+1}}$,$\dfrac{b_2}{a_1a_2}+\dfrac{b_3}{a_2a_3}+\dfrac{b_4}{a_3a_4}+\cdots+\dfrac{b_{n+1}}{a_na_{n+1}}<\dfrac{1}{3}$成立,

所以$\dfrac{1}{B_1}-\dfrac{1}{B_2}+\dfrac{1}{B_2}-\dfrac{1}{B_3}+\cdots+\dfrac{1}{B_n}-\dfrac{1}{B_{n+1}}=\dfrac{1}{B_1}-\dfrac{1}{B_{n+1}}=\dfrac{1}{b_1}\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}\right)<\dfrac{1}{3}$,

所以 $b_1>3\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}\right)$,因为对任意 $n\in\mathbf{N}_+$,上式都成立,且 $3\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}\right)<3$,所以 $b_1\geqslant3$.

所以正实数 b_1 的取值范围是$[3,+\infty)$.

22.**解**:(1)因为数列$\{b_n\}$是等差数列,所以 $b_1+b_8=b_4+b_5$,$b_4+b_5+b_6=3b_5$,由$\dfrac{b_5^2}{b_1+b_6+b_8}=1$,得$\dfrac{b_5^2}{3b_5}=1$,
所以 $b_5=3$,
又 $b_3=2$,设等差数列$\{b_n\}$的公差为 d,

所以 $d=\dfrac{b_5-b_3}{5-3}=\dfrac{3-2}{2}=\dfrac{1}{2}$,所以 $b_n=b_3+(n-3)d=2+\dfrac{1}{2}(n-3)=\dfrac{n+1}{2}$.

所以 $b_1=1$,则 $S_n=b_1\cdot2^{n+2}-4=2^{n+2}-4$,
当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=4$;
当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n+2}-4-2^{n+1}+4=2^{n+1}$,
当 $n=1$ 时,$a_1=4$,上式成立.
所以 $a_n=2^{n+1}(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)由(1)得 $a_nb_n=2^{n+1}\cdot\dfrac{n+1}{2}=(n+1)\cdot2^n$,

因为 $T_n=2\times2^1+3\times2^2+4\times2^3+\cdots+(n+1)\cdot2^n$,　①

所以 $2T_n=2\times2^2+3\times2^3+4\times2^4+\cdots+(n+1)\cdot2^{n+1}$,　②

①-②,得$-T_n=4+2^2+2^3+\cdots+2^n-(n+1)\cdot2^{n+1}=4+\dfrac{4(1-2^{n-1})}{1-2}-(n+1)\cdot2^{n+1}=-n\cdot2^{n+1}$,
所以 $T_n=n\cdot2^{n+1}$.

因为$\dfrac{kT_n}{a_n}>\dfrac{6n^2}{n^2-9n+36}$对一切 $n\in\mathbf{N}_+$恒成立,

所以 $k>\dfrac{6n}{n^2-9n+36}$对一切 $n\in\mathbf{N}_+$恒成立,即 $k>\dfrac{6}{n+\dfrac{36}{n}-9}$对一切 $n\in\mathbf{N}_+$恒成立.

令 $g(n)=\dfrac{6}{n+\dfrac{36}{n}-9}(n\in\mathbf{N}_+)$,则 $g(n)=\dfrac{6}{n+\dfrac{36}{n}-9}\leqslant\dfrac{6}{2\sqrt{36}-9}=2$,当且仅当 $n=6$ 时,等号成立.

所以 $k>2$,
所以实数 k 的取值范围是$(2,+\infty)$.

第 9 期

第2~3版同步周测

一、单项选择题

1~8.CAAACBCD

二、多项选择题

9.ABC　　10.ABD

11.BC　　12.AC

三、填空题

13.$\dfrac{5\pi}{12}$　　14.$2\sqrt{2}$

15.$7\sqrt{6}$　　16.$\sqrt{3}$

四、解答题

17.**解**:选①.因为 Rt△ABC 中,$A=\dfrac{\pi}{2}$,

所以 $3\cos2B-\cos C=3(1-2\sin^2B)-\sin B=1$,

即 $6\sin^2B+\sin B-2=0$,得 $\sin B=\dfrac{1}{2}$,

因为 $0<B<\dfrac{\pi}{2}$,所以 $B=\dfrac{\pi}{6}$,

因为 $BC=4$,所以 $AC=2$ 且$\angle ACD=\dfrac{2\pi}{3}$,

因为 $CD=1$,
所以 $AD=\sqrt{AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cos\angle ACD}=\sqrt{7}$.

选②.因为 Rt△ABC 中,$A=\dfrac{\pi}{2}$,

所以 $\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sin\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}}=\dfrac{2\sin^2\dfrac{C}{2}}{2\sin\dfrac{C}{2}\cdot\cos\dfrac{C}{2}}=\dfrac{1-\cos C}{\sin C}=\tan B=\dfrac{\sin B}{\cos B}=\dfrac{\cos C}{\sin C}$,

得 $\cos C=\dfrac{1}{2}$,

因为 $0<C<\dfrac{\pi}{2}$,所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$,
因为 $BC=4$,
所以 $AC=2$ 且$\angle ACD=\dfrac{2\pi}{3}$,
因为 $CD=1$,
所以 $AD=\sqrt{AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cos\angle ACD}=\sqrt{7}$.

选③.因为 Rt△ABC 中,$A=\dfrac{\pi}{2}$,

所以 $\sin B+\sqrt{3}\sin C=\sqrt{3}\sin C+\cos C=2$,

所以$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin C+\dfrac{1}{2}\cos C=\sin\left(C+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$,

因为 $0<C<\dfrac{\pi}{2}$,所以$\dfrac{\pi}{6}<C+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{2\pi}{3}$,

所以 $C+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$,所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$,
因为 $BC=4$,
所以 $AC=2$ 且$\angle ACD=\dfrac{2\pi}{3}$,
因为 $CD=1$,
所以 $AD=\sqrt{AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cos\angle ACD}=\sqrt{7}$.

18.**解**:(1)因为$a=3c$,$b=\sqrt{2}$,$\cos B=\dfrac{2}{3}$,所以由余弦定理的推论,得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{10c^2-2}{6c^2}=\dfrac{2}{3}$,解得$c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(2)因为$\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\cos B}{2b}$,所以由正弦定理,得$\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\cos B}{2b}$,所以$2\sin B=\cos B$,$\cos B>0$,因为$\sin^2B+\cos^2B=1$,所以 $\sin B=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,$\cos B=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,

所以$\sin\left(B+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos B=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

19.**解**:(1)因为△ABC 的外接圆直径为$\dfrac{200\sqrt{57}}{3}$,所以由正弦定理,得$\dfrac{BC}{\sin\angle CAB}=\dfrac{200\sqrt{57}}{3}$,即$\dfrac{200}{\sin\angle CAB}=\dfrac{200\sqrt{57}}{3}$,所以 $\sin\angle CAB=\dfrac{3}{\sqrt{57}}$,$\cos\angle CAB=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{57}}$.

在△ABC中,$\sin B=\sin(\angle CAB+\angle ACB)=\sin\angle CAB\cos\angle ACB+\cos\angle CAB\sin\angle ACB=\dfrac{3}{\sqrt{57}}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{57}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{15}{2\sqrt{57}}$,

由正弦定理,得$\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{200\sqrt{57}}{3}$,

所以 $AC=\dfrac{200\sqrt{57}}{3}\times\dfrac{15}{2\sqrt{57}}=500$m.所以道路$AC$ 的长是 500m.

(2)由题意得 $AD=BC=200$m,
$\cos\angle AED=\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$,

在△ADE 中,由余弦定理,得 $AD^2=AE^2+ED^2-2AE\cdot ED\cdot\cos\angle AED=(AE+ED)^2-3AE\cdot ED$,所以$(AE+ED)^2-AD^2=3AE\cdot ED\leqslant3\left(\dfrac{AE+ED}{2}\right)^2$,所以$\dfrac{1}{4}(AE+ED)^2\leqslant AD^2=200^2$,当且仅当 $AE=ED=200$ 时,等号成立.
所以 $AE+DE\leqslant400$,则 $AD+AE+DE\leqslant200+400=600$m.所以栅栏总长的最大值为 600m.

20.**解**:(1)由 $a\sin A=2\sin C(a^2+c^2-b^2)$,得 $a^2c=2c(a^2+c^2-b^2)$,则 $a^2=2b^2-2c^2$,①

又 $b-c=\dfrac{2\sin A}{\sin B+\sin C}$,所以由正弦定理,得$(b-c)(b+c)=2a$,即 $b^2-c^2=2a$,②
联立①②,可得 $a^2=4a$,所以 $a=4$.
设△ABC的外接圆半径为R,因为$\pi R^2=8\pi$,所以 $R=2\sqrt{2}$,由正弦定理,得 $\sin A=\dfrac{a}{2R}=\dfrac{4}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)因为 $A=C$,所以 $BC=AB=4$,$\sin A=\sin C$,代入 $a\sin A=2\sin C(a^2+c^2-b^2)$,得 $a^2+c^2-b^2=\dfrac{1}{2}ac$,所以 $\cos B=\dfrac{1}{4}$,$B\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,

所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

在△ABM 中,由正弦定理,得$\dfrac{AB}{\sin\angle AMB}=\dfrac{AM}{\sin B}$,故 $\sin\angle AMB=\dfrac{AB\cdot\sin B}{AM}=\dfrac{4\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,因为 $AM>AB$,所以$\angle AMB<\angle B$,所以$\angle AMB=\dfrac{\pi}{3}$.

21.**解**:(1)因为$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $bc\sin A=\sqrt{3}$.因为 $bc\cos A+1=\dfrac{\sqrt{3}\cos A}{\sin A}+1=0$,解得$\tan A=-\sqrt{3}$.因为$0<A<\pi$,所以$A=\dfrac{2\pi}{3}$.

(2)由(1)知,
$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}bc\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,
所以$bc=2$.

在△ABC中,因为M为BC的中点,所以$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.因为$AM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,所以$3=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=b^2+c^2+2bc\cdot\cos\dfrac{2\pi}{3}=b^2+c^2-2$,所以$b^2+c^2=5$.又$bc=2$,解得$\begin{cases}c=2,\\b=1,\end{cases}$或$\begin{cases}c=1,\\b=2.\end{cases}$由余弦定理,得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=7$,所以$a=\sqrt{7}$,所以$BM=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.因为$AN$为$\angle BAC$的角平分线,$S_{\triangle ABN}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AN\sin\dfrac{\pi}{3}$,$S_{\triangle CAN}=\dfrac{1}{2}AC\cdot AN\sin\dfrac{\pi}{3}$,所以$\dfrac{S_{\triangle ABN}}{S_{\triangle CAN}}=\dfrac{c}{b}=\dfrac{BN}{CN}=\dfrac{1}{2}$,或$\dfrac{BN}{CN}=2$,所以$BN=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$或$\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$,所以$MN=|BM-BN|=\dfrac{\sqrt{7}}{6}$.

22.**解**:(1)连接AC,在△ABC中,$AB=2$,$BC=4$,$B=120^\circ$,所以由余弦定理,得
$AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B}=2\sqrt{7}$.
在△ACD 中,$AC=2\sqrt{7}$,$CD=5$,$\cos D=\dfrac{1}{5}$,所以由余弦定理,得
$\sqrt{AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos D}=AC$,
即$\sqrt{AD^2+5^2-2AD}=2\sqrt{7}$,
解得$AD=3$.

(2)在△ABC中,由余弦定理,得$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B=20-16\cos B$.
在△ACD中,由余弦定理,得$AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cdot\cos D=34-30\cos D$.
所以$20-16\cos B=34-30\cos D$,
即$15\cos D-8\cos B=7$,

而面积$S=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B+\dfrac{1}{2}AD\cdot CD\cdot\sin D=\dfrac{1}{2}(15\sin D+8\sin B)$,

所以$4S^2+49=225+64-240\cos(B+D)$,
即$S^2=60-60\cos(B+D)$,
所以$S^2=60-60\cos(B+D)\leqslant120$,

所以当$B+D=\pi$时,即$\cos D=\dfrac{7}{23}$,$\cos B=-\dfrac{7}{23}$时,四边形$ABCD$面积S的最大值为$2\sqrt{30}$.

第 10 期

第 2~3 版同步周测

一、单项选择题

1~8.DBCABCCC

二、多项选择题

9.AC　　10.ACD

11.BCD　　12.ABD

三、填空题

13.1　14.8　15.6　16.2

四、解答题

17.**解**:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,由$a_4-a_3=2$,得$d=2$,

又由$a_1+a_2=10$,得$a_1+a_2=2a_1+d=10$,

解得$a_1=4$,

所以$a_n=4+(n-1)\cdot 2=2n+2(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)设等比数列$\{b_n\}$的公比为q,

因为$b_2=a_3,b_3=a_7$,

所以$b_2=a_3=8,b_3=a_7=16$,

所以$q=\frac{b_3}{b_2}=2$,则$b_4=b_3\cdot q=32$,

由$2n+2=32$,解得$n=15$,

所以b_4与数列$\{a_n\}$的第 15 项相等.

18.选择①③为条件,②为结论.

证明:设数列$\{a_n\}$的公差为d,

则$a_2=a_1+d=3a_1$,所以$d=2a_1$,

所以数列$\{a_n\}$的前n项和为

$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=na_1+\frac{n(n-1)}{2}\times 2a_1=n^2a_1,n\in\mathbf{N}_+$,

故当$n\geqslant 2$时,$\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=n\sqrt{a_1}-(n-1)\sqrt{a_1}=\sqrt{a_1}$,

所以数列$\{\sqrt{S_n}\}$是等差数列.

选择①②为条件,③为结论.

证明:设数列$\{a_n\}$的公差为d,则

$\sqrt{S_1}=\sqrt{a_1}$,

$\sqrt{S_2}=\sqrt{a_1+(a_1+d)}=\sqrt{2a_1+d}$,

$\sqrt{S_3}=\sqrt{a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)}=\sqrt{3(a_1+d)}$,

因为数列$\{\sqrt{S_n}\}$为等差数列,

所以$\sqrt{S_1}+\sqrt{S_3}=2\sqrt{S_2}$,

即$[\sqrt{a_1}+\sqrt{3(a_1+d)}]^2=(2\sqrt{2a_1+d})^2$,

整理得$d=2a_1$,所以$a_2=a_1+d=3a_1$.

选择②③为条件,①为结论.

证明:由题意可得,$S_2=a_1+a_2=4a_1$,

所以$\sqrt{S_2}=2\sqrt{a_1}$,

则数列$\{\sqrt{S_n}\}$的公差$d=\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}=\sqrt{a_1}$,

所以$\sqrt{S_n}=\sqrt{S_1}+(n-1)d=n\sqrt{a_1}$,$n\in\mathbf{N}_+$,

据此可得,

当$n\geqslant 2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2a_1-(n-1)^2a_1=(2n-1)a_1$,

当$n=1$时上式也成立,故数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=(2n-1)a_1,n\in\mathbf{N}_+$,

由$a_{n+1}-a_n=[2(n+1)-1]a_1-(2n-1)a_1=2a_1$,

可知数列$\{a_n\}$是等差数列.

19.**解**:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,因为$a_1+a_2=-20,S_2+S_3=-47$,

所以$\begin{cases}2a_1+d=-20,\\2a_1+d+3a_1+3d=-47,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=-11,\\d=2.\end{cases}$

所以$a_n=a_1+(n-1)d=2n-13$.

(2)由(1)得,

$S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}=n^2-12n=(n-6)^2-36$,

所以当$n=6$时,S_n取得最小值,最小值为-36.

20.**解**:(1)由题意,得

$a_n=4+(n-1)d(d\neq 0)$,

又$S_3=12+3d,S_4=16+6d,S_5=20+10d$,

因为$\left(\frac{1}{5}S_5\right)^2=\frac{1}{3}S_3\cdot\frac{1}{4}S_4$,

所以$(4+2d)^2=(4+d)\left(4+\frac{3}{2}d\right)$.

解得$d=-\frac{12}{5}$,或$d=0$(舍去).

所以$a_n=-\frac{12}{5}n+\frac{32}{5}$.

(2)$S_n=4n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\left(-\frac{12}{5}\right)=-\frac{6}{5}n^2+\frac{26}{5}n$,因为$S_n>0$,所以$-\frac{6}{5}n^2+\frac{26}{5}n>0$,即$0<n<\frac{13}{3}$,又因为$n\in\mathbf{N}_+$,所以$n$的最大值为 4.

21.(1)**解**:设等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1,

所以$a_n=dn+a_1-d$.

又$a_na_{n+1}=4n^2-1$,

解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=2,\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=-1,\\d=-2.\end{cases}$

又$d>0$,所以$a_1=1,d=2$,

所以$a_n=2n-1$.

(2)**证明**:因为$\frac{2}{a_na_{n+1}}=\frac{2}{4n^2-1}$

$=\frac{2}{(2n+1)(2n-1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$,

所以$\frac{2}{a_1a_2}+\frac{2}{a_2a_3}+\frac{2}{a_3a_4}+\cdots+\frac{2}{a_na_{n+1}}$

$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=1-\frac{1}{2n+1}<1$.

22.**解**:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,则$a_n=a_1+(n-1)d$,又$a_{n+1}+a_n=2n+3$,

所以$\begin{cases}a_1+a_2=2a_1+d=5,\\a_3+a_2=2a_1+3d=7,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=2,\\d=1,\end{cases}$

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n+1$.

(2)因为$a_{n+1}+a_n=2n+3$,①

当$n\geqslant 2$时,$a_n+a_{n-1}=2(n-1)+3$,②

①-②,得$a_{n+1}-a_{n-1}=2$;

所以数列$\{a_{2n}\}$是以a_2为首项,2 为公差的等差数列,数列$\{a_{2n-1}\}$是以a_1为首项,2 为公差的等差数列.

又$a_1+a_2=5$,所以$a_2=5-a_1$,

当n为偶数时,$a_n=a_2+\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot 2=n+3-a_1$;

当n为奇数时,$a_n=a_1+\left(\frac{n+1}{2}-1\right)\cdot 2=n-1+a_1$.

所以$a_n=\begin{cases}n-1+a_1(n\text{ 为奇数}),\\n+3-a_1(n\text{ 为偶数}).\end{cases}$

因为对任意的$n\in\mathbf{N}_+$,都有$a_n+n^2\geqslant 0$成立,

当n为奇数时,$a_n+n^2=n-1+a_1+n^2\geqslant 0$恒成立,

所以$-a_1\leqslant n^2+n-1$在n为奇数时恒成立,所以$-a_1\leqslant 1$,所以$a_1\geqslant -1$;

同理,当n为偶数时,$a_n+n^2=n+3-a_1+n^2\geqslant 0$恒成立,

所以$a_1\leqslant n^2+n+3$在n为偶数时恒成立,所以$a_1\leqslant 9$.

综上,a_1的取值范围是$[-1,9]$.

第11期

第 2~3 版同步周测

一、单项选择题

1~8.CACCCDBA

二、多项选择题

9.BD　　10.AB

11.ABC　　12.AD

三、填空题

13.2　14.$\frac{211}{81}$　15.8　16.$\frac{10}{11}$

四、解答题

17.**解**:(1)因为$na_{n+1}=2(n+1)a_n$,

所以$a_{n+1}=\frac{2(n+1)}{n}a_n$.①

将$n=1$代入①得,$a_2=4a_1$,

而$a_1=1$,所以$a_2=4$.

将$n=2$代入①得,$a_3=3a_2$,

所以$a_3=12$.

从而$b_1=1,b_2=2,b_3=4$.

(2)$\{b_n\}$是首项为 1,公比为 2 的等比数列.

理由如下:

因为$na_{n+1}=2(n+1)a_n$,

所以$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{2a_n}{n}$,又$b_n=\frac{a_n}{n}$,

所以$b_{n+1}=2b_n$,又$b_1=1$,所以$\{b_n\}$是首项为 1,公比为 2 的等比数列.

(3)由(2)可得$\frac{a_n}{n}=2^{n-1}$,

所以$a_n=n\cdot 2^{n-1}$.

18.**解**:(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,且$q>0$,

由$a_1=2,a_3=2a_2+16$,得$2q^2=4q+16$,

即$q^2-2q-8=0$,

解得$q=-2$(舍去),或$q=4$.

所以$a_n=a_1q^{n-1}=2\times 4^{n-1}=2^{2n-1}$.

(2)$b_n=\log_2a_n=\log_2 2^{2n-1}=2n-1$,

因为$b_1=1,b_{n+1}-b_n=2(n+1)-1-2n+1=2$,

所以数列$\{b_n\}$是以 1 为首项,以 2 为公差的等差数列,则数列$\{b_n\}$的前n项和

$T_n=n\cdot 1+\frac{2n(n-1)}{2}=n^2$.

19.**解**:(1)由已知,得$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2m}=\frac{3}{2}(a_2+a_4+\cdots+a_{2m})$,所以$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2m-1}=\frac{1}{2}(a_2+a_4+\cdots+a_{2m})$,所以$q=2$.

由$a_5+2a_4=a_2a_4$,得$a_3q^2+2a_3q=a_3^2$,

即$q^2+2q=a_3$,

所以$a_3=8$,

所以$a_n=a_3q^{n-3}=2^n$.

(2)因为$\{b_n\}$是递增数列,

所以$b_{n+1}>b_n$对$n\in\mathbf{N}_+$恒成立,

即$n\in\mathbf{N}_+$时,$(n+1-\lambda)2^{n+1}>(n-\lambda)2^n$,

得$\lambda<n+2$对$n\in\mathbf{N}_+$恒成立,即$\lambda<3$.

所以实数λ的取值范围是$(-\infty,3)$.

20.(1)**证明**:因为$a_{n+1}^2=a_n(a_{n+1}+2a_n)$,

所以$(a_{n+1}-2a_n)(a_{n+1}+a_n)=0$,

又$a_n>0$,

所以$a_{n+1}-2a_n=0$,即$a_{n+1}=2a_n$,

所以数列$\{a_n\}$是首项为 1,公比为 2 的等比数列,所以$a_n=2^{n-1}$.

(2)**解**:由(1)可得$S_{2n}=\frac{1-2^{2n}}{1-2}=2^{2n}-1$,

又$S_{2n}>\frac{160}{9}a_n$,

所以$2^{2n}-1>\frac{160}{9}\times 2^{n-1}$,

即$9\cdot(2^n)^2-80\cdot 2^n-9>0$,

解得$2^n>9$,或$2^n<-\frac{1}{9}$(舍去),

则$n\geqslant 4$,

所以n的最小值为 4.

21.**解**:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,等比数列$\{b_n\}$的公比为$q(q>0)$,

由题意,得$\begin{cases}b_1(q+q^2)=6,\\a_3+d+2(a_3+3d)=b_1q^4,\end{cases}$

即$\begin{cases}q+q^2=6,\\3+d+2(3+3d)=q^4,\end{cases}$

解得$\begin{cases}q=2,\\d=1,\end{cases}$

所以$b_n=2^{n-1},a_n=a_3+(n-3)d=3+n-3=n$.

(2)由(1)可得$c_n=(2a_n-1)\cdot b_{n+1}=(2n-1)\cdot 2^n$,

所以$S_n=1\times 2^1+3\times 2^2+5\times 2^3+\cdots+(2n-1)\cdot 2^n$,

又$2S_n=1\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(2n-3)\cdot 2^n+(2n-1)\cdot 2^{n+1}$,

两式相减,得$-S_n=2+2(2^2+2^3+\cdots+2^n)-(2n-1)\cdot 2^{n+1}=2+2\times\frac{2^2(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n-1)\cdot 2^{n+1}$,

所以$S_n=(2n-3)\cdot 2^{n+1}+6$.

22.(1)**解**:由$S_n^2-(n^2+n-1)S_n-(n^2+n)=0$,得$[S_n-(n^2+n)](S_n+1)=0$.

因为$\{a_n\}$是正项数列,

所以$S_n>0$,所以$S_n-(n^2+n)=0$,

即$S_n=n^2+n$.

所以$a_1=S_1=2$,

当$n\geqslant 2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-(n-1)^2-(n-1)=2n$.

当$n=1$时,上式也成立,所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n(n\in\mathbf{N}_+)$.

(2)**证明**:由于$a_n=2n,b_n=\frac{n+1}{(n+2)^2a_n^2}$,

则$b_n=\frac{n+1}{4n^2(n+2)^2}=\frac{1}{16}\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]$.

$T_n=\frac{1}{16}\times\left[1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]=\frac{1}{16}\times\left[1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]<\frac{1}{16}\times\left(1+\frac{1}{2^2}\right)=\frac{5}{64}$.